経済論叢（京都大学）第183巻第1号，2009年1月

3部門「マルクス派最適成長論モデル」と強蓄積期間

茹仙古麗吾甫尓（Roxangul Wufure）
金　江　　亮

Ⅰ　はじめに

本稿は山下・大西［2002］で定式化され，その後，山下・大西［2003］，大西・山下［2003］，大西・藤山［2003］，大西［2005］，山下［2005］，大西・金江［2008］で発展された「マルクス派最適成長論モデル」を2種類の資本財を持つ3部門モデルに拡張することによって，資本財1と資本財2の蓄積途上で生じる様々な現象を分析する。具体的には資本財1のみで成長をしてきた経済に，資本財2という新たな資本財が登場した際にどのような事態が生じるか，特に資本財1の蓄積が相当進んだ国（「先進国」）とまだその蓄積が十分でない国（「途上国」）において同時に資本財2という新資本財が登場した際の相違の問題などである。

また，本稿が先行研究とする「マルクス派最適成長論モデル」は，産業革命以後の無限期間の最適成長過程としてマルクスの資本主義観をモデル化した，労働を唯一の本源的な生産要素とするモデルであって，マルクスと同様生産財生産部門と消費財生産部門という二つの生産部門からなるモデルである。また，ここでは，①資本主義の生成，発展，死滅が説明され，②労働を唯一の本源的生産要素とすること，③生産財生産と消費財生産の2部門モデルとなっていることをもって，「マルクス派最適成長論モデル」とされている。

「マルクス派最適成長論モデル」は産業革命後の社会としての資本主義社会では，人力のみの生産活動ではなく，機械＝資本との共同作業による生産活動が選択されている（産業革命後の社会では，自然に投入可能な本源的な労働のみで消費財生産を行うのではなく，いったん機械を作るために労働を投入し，その後にその機械と労働との共同で生産活動を行うことが合理的である）。そのような生産活動の方が人力のみによる生産活動より効率的であるとみなし，このような効率性を達成するために，最終の目的が消費財生産である社会的生産を消費財生産部門と消費財を生産するために必要な生産財を生産する生産財生産部門という二つの生産部門に分けて人類は生産活動を行っているとみなすのである。

従来の資本財を「資本財1」，新たな種類の資本財を「資本財2」とし，労働を含めれば三種の生産要素を持つ生産関数を導入する。これによって,「産業革命」に二段階の発展があると想定した場合に，資本蓄積経路や定常状態にどのようなことが生じるかを調べるのが，本論文の課題である。ただし，歴史的事実としてこのようなことがあったか，あるいはこれから生じ得るかは本稿では考えず，数理モデルとして定式化した結果どのような興味深い帰結がもたらされるかを扱う。

Ⅱ　産業革命のモデル化

産業革命をモデルで表現してみよう。産業革命後の社会としての資本主義社会では，人力のみの生産活動ではなく，機械＝資本という生産要素が生産において重要な役割を果たすように

なり，このことを先の「産業革命モデル」は消費財生産部門（Y）について，投入資本財（K）が生産の資本弾力性 $\alpha(>0)$ で生産に「貢献」するようになったものをモデル化している。産業革命をどうモデル化するかには様々な方法があろうと思われるが，この方法を十分理解することも非常に重要である。なぜなら，ここでは封建制期の「資本」と解釈できなくもない「道具」にはその蓄積の生産力効果がない（$\alpha=0$）と想定しているからである。例えば，封建的な熟練的生産システムでは職人一人が使用する道具（例えば，ハンマー）が一本を超えて２本，３本へと増やしても何の効果もない（すなわち，モデル的には $\alpha=0$）からである。しかし，「機械」の場合，労働者一人の使用する「機械」の増大は資本労働比率の増大となって，一人当たり生産の増大をもたらす[1)]。これが，「機械」というものと「道具」というものの持つ技術的な相違の一つである。一人が動かす機械の増加は Y で表現されるこの部門の一人当たり生産額を増大させるが，同様に，「道具」を増やしても Y は増大しない。これを「機械の登場」として理解された産業革命として，ここでは捉えているのである。したがって，ここでの産業革命のモデル化は投入資本（K）の生産に対する弾力性 α が産業革命前の $\alpha=0$ から産業革命後に $\alpha>0$（ただし，α は１以下）にジャンプしたものとして行われている。

ただ，社会にはこうした消費財生産部門（Y）だけではなく，ここで使用する資本財を生産する部門も必要となるので，それを $\dot{K}$ 部門とし，それがただ労働の投入によって生産を行っているとすると[2)]，社会に存在する部門は以下のように二つの生産関数体系として表現できることになる。すなわち

$$Y(t)=A\{[1-k(t)]L\}^{1-\alpha}K(t)^{\alpha}$$
$$\dot{K}(t)=Bk(t)L$$

ここでは，t はその値が時間 t における値であることを示し，労働力人口 L は不変であるとし，A，B は両部門の全要素生産性である。また，$\dot{K}$ は各期における K の増分（ここでのように減価償却を無視すると投資量に等しい）を意味する。このとき，社会はこの二つの部門に全社会の労働力をそれぞれ $1-k:k(0<k<1)$ の比率で配分していることになる。それで，代表的個人の効用最適化問題を次の目的関数の最大化として解く。すなわち

$$\max U=\sum_{t=0}^{\infty}\rho^{t}AK_{t}^{\alpha}[(1-k(t))L]^{1-\alpha}$$

すると，長期均衡解は以下のようになる。

$$K^{*}=\frac{\alpha BL}{(1-\alpha)\rho}\qquad k^{*}=0$$

したがって，これを最適資本労働比率として書き直すと，以下のようになる。すなわち，この社会の資本蓄積は国民一人当たり資本が

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{*}=\frac{\alpha B}{(1-\alpha)\rho}$$

になるまで続く。方程式系の解としては，これは厳密には無限期間の後のこととなるが，例えば今，この値の 99％レベルまでへの到達をもって「到達」と定義するなら，ここまでの社会は，「資本蓄積が第一の社会」としての「資本主義社会」，またその後の社会は「資本蓄積が不要な

1）この想定は資本と労働の間の代替関係を想定しているものと言いかえることもできる。マルクスも『資本論』において，低賃金国では資本蓄積が進まないことを主張しているから，これは資本財価格と賃金の比率が資本労働比率を決めること＝資本労働比率は可変的であることを主張していることになる。

2）資本の生産においても資本財が通常使用されるからこれは実は非現実的な想定である。しかし，こうして資本財生産のために使用される資本財，その生産のために使用される資本財，その生産のために使用される資本財……と遡っていくと，これら全てに使われている総労働量（資本財生産に携わっている労働の総量）があることになる。この労働量が二本目の方程式に示されている k(t)N であると解釈することができる。

社会」としての「共産主義社会」となる。

Ⅲ　「第二次産業革命」のモデル化

1　「第二次産業革命」モデルの設定

しかし，我々が本稿で検討するのは，そうした「産業革命」に続く，もう一つの別種の「産業革命」である。これをここでは簡単に「第二次産業革命」と呼んでいるが，モデルとして重要なのは，資本財に２種類があり，その第一の「資本財１」の革命の後，新たに「資本財２」の革命が起こるということである。「資本財１」のみが蓄積されてきた社会に「資本財２」が有効に機能する状況がやってきたときに，この過程は上記の「産業革命モデル」の拡張としてどのように表現できるのであろうか。

ここでは，この問題を次のように定式化する。すなわち，当初の「産業革命モデル」=「マルクス派最適成長論モデル」が「資本（K）」として持っていたものを「資本財１（K^1）」とし，それにさらに「資本財２（K^2）」が加わり，その二つの生産要素を使って消費財が以下のようなコブ・ダグラス型の生産関数で生産されるものとする。

⑴　$$Y_t = AK_t^{1\alpha}K_t^{2\beta}[(1-s_{1_t}-s_{2_t})L]^{1-\alpha-\beta}$$

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1$$

しかし，この「資本財１」と「資本財２」はともに労働による生産物であるから，それぞれの蓄積方程式がなければならず，ここでは減価償却がないものと仮定して以下のような「資本財１」と「資本財２」の生産関数を考えることとする。

⑵　$$K_{t+1}^1 - K_t^1 = Bs_{1_t}L$$

$$K_{t+1}^2 - K_t^2 = Ds_{2_t}L$$

ここで K^1 は「資本財１」のストック量，K^2 は「資本財２」のストック量であり，労働 L とともに投入要素として設定されている。s_1，s_2，$1-s_1-s_2$ はそれぞれ総労働のうち「資本財１」，「資本財２」の生産と消費財生産に用いられる労働の割合である。B，D は生産性パラメータである。

次に，この経済は同質的な消費者から構成されると仮定し，代表的個人の効用最適化問題を次の目的関数の最大化として解く。すなわち

⑶　$$\max U = \sum_{t=0}^{\infty}\rho^t AK_t^{1\alpha}K_t^{2\beta}[(1-s_{1_t}-s_{2_t})L]^{1-\alpha-\beta}$$

この最大化問題のラグランジュ関数は以下のようになる。

⑷　$$\begin{aligned}\Lambda = \sum_{t=0}^{\infty}\rho^t\{&AK_t^{1\alpha}K_t^{2\beta}[(1-s_{1_t}-s_{2_t})L]^{1-\alpha-\beta}\\ &+\lambda_t(K_{t+1}^1-K_t^1-Bs_{1_t}L)\\ &+\mu_t(K_{t+1}^2-K_t^2-Ds_{2_t})L\}\end{aligned}$$

ここで λ_t と μ_t はラグランジュ乗数であり，ρ は時間選好率を表す。そして，最適化の一階条件は

⑸　$$\frac{\partial\Lambda}{\partial s_{1_t}}=0 \quad \Rightarrow$$

$$(1-\alpha-\beta)AK_t^{1\alpha}K_t^{2\beta}[(1-s_{1_t}-s_{2_t})L]^{-\alpha-\beta}(-L)-\lambda_t BL=0$$

⑹　$$\frac{\partial\Lambda}{\partial K_t^1}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha AK_t^{1\alpha-1}K_t^{2\beta}[(1-s_{1_t}-s_{2_t})L]^{1-\alpha-\beta}-\lambda_t+\rho^{-1}\lambda_{t-1}=0$$

⑺　$$\frac{\partial\Lambda}{\partial s_{2_t}}=0 \quad \Rightarrow$$

$$(1-\alpha-\beta)AK_t^{1\alpha}K_t^{2\beta}[(1-s_{1_t}-s_{2_t})L]^{-\alpha-\beta}(-L)-\mu_t DL=0$$

⑻　$$\frac{\partial\Lambda}{\partial Q_t}0 \quad \Rightarrow$$

$$\beta AK_t^{1\alpha}K_t^{2\beta-1}[(1-s_{1_t}-s_{2_t})L]^{1-\alpha-\beta}-\mu_t+\rho^{-1}\mu_{t-1}=0$$

となる。

⑸と⑹式から

(9)
$$\alpha A K_t^{1\ \alpha-1} K_t^{2\ \beta}[(1-s_{1_t}-s_{2_t})L]^{1-\alpha-\beta} + \frac{(1-\alpha-\beta)AK_t^{1\ \alpha}K_t^{2\ \beta}[(1-s_{1_t}-s_{2_t})L]^{-\alpha-\beta}}{B} - \frac{(1-\alpha-\beta)AK_{t-1}^{1\ \alpha}K_{t-1}^{2\ \beta}[(1-s_{1_{t-1}}-s_{2_{t-1}})L]^{-\alpha-\beta}}{\rho B} = 0$$

が得られる。

定常状態においては

$$K_{t+1}^1 = K_t^1 = K^{1*} \qquad s_{1_t} = 0$$

$$K_{t+1}^2 = K_t^2 = K^{2*} \qquad s_{2_t} = 0$$

であるから，(9) 式から

(10)
$$\alpha A K^{1*^{\alpha-1}} K^{2*^{\beta}} L^{1-\alpha-\beta} + \frac{(1-\alpha-\beta)AK^{1*^{\alpha}}K^{2*^{\beta}}L^{-\alpha-\beta}}{B} - \frac{(1-\alpha-\beta)AK^{1*^{\alpha}}K^{2*^{\beta}}L^{-\alpha-\beta}}{\rho B} = 0$$

(11)
$$\frac{\alpha}{K^{1*}} = \frac{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}{BL\rho}$$

となり，「資本財１」の最適資本労働比率は

(12)
$$\left(\frac{K^1}{L}\right)^* = \frac{\alpha B \rho}{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}$$

となる。

同じように，(7) と (8) 式から，「資本財２」の最適資本労働比率は

(13)
$$\left(\frac{K^2}{L}\right)^* = \frac{\beta D \rho}{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}$$

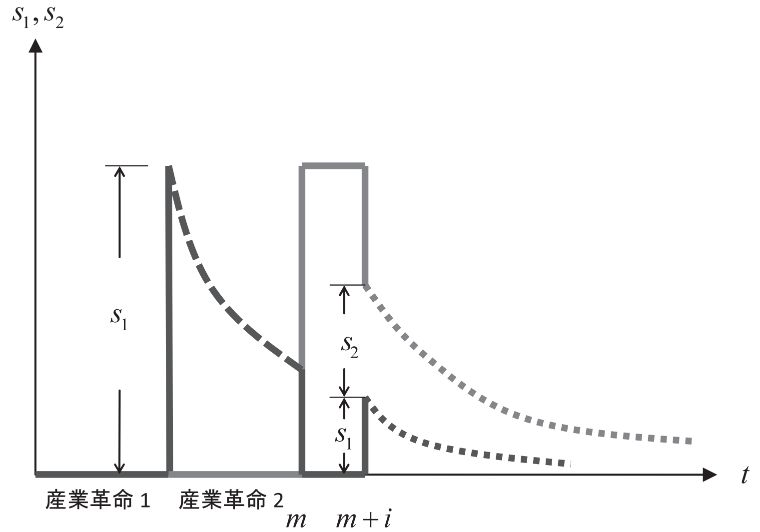
となる。このレベルに至るまで，「資本財１」と「資本財２」の長期の蓄積が行われることとなるのである。

しかし，「資本財１」の蓄積途上（あるいは初期）で「資本財２」の技術革命を迎えた途上国では，「資本財１」の蓄積の課題のための s_1 と「資本財２」の蓄積のための s_2 双方が同時に大きな値で必要となるから，消費財生産に直接配分される労働の比率 $1-s_1-s_2$ は非常に小さなものとなる可能性がある。したがって，この問題を定式化しなければならないが，このためには，最後の長期均衡の分析に留まらず，s_1 や s_2 や $1-s_1-s_2$ が時間経路上でどのような値を各期各期にとるかを定式化する必要がある。

２　最適経路分析

したがって，今度はこの二つの最適比率に至るまでの経路を見る。その最適経路は以下の図１のように描くことができる。

「資本財１」の「産業革命」以前の社会では，先に調べた理由で資本蓄積は意味を持たず，よってそれ以前の K^1 はゼロとなる。しかし，第一次産業革命によって，機械が登場すると α はゼロからある正の値にジャンプし，それ以降は資本の蓄積がある最適値に向かって徐々に低



下していく。このとき，s_1もまた図のようにジャンプし，それ以降，徐々に低下するような経路をたどる。

しかし，問題はこの後，さらに「資本財2」の登場による新たな「技術革命」が生じることによって今度はβがゼロからある正の値にジャンプした際のことである。当然，「資本財2」の蓄積のために必要な労働がこの期にゼロからある値にジャンプする。特に，「資本財1」の蓄積の課題が終了する以前でのこの第2のジャンプはs_1+s_2の高さの総「蓄積」の労働を必要とするようになる。

この経路の高さを調べるために，t期における消費財生産部門における二つの資本労働比率を山下（2005）に従って

$$Z_t=\frac{K_t^1}{(1-s_{1_t}-s_{2_t})L} \qquad X_t=\frac{K_t^2}{(1-s_{1_t}-s_{2_t})L}$$

と定義し，これらの高さを調べる。ここでまず二つの資本蓄積が最終的に最適値に到達するような最適経路を求める。

この両比率を(9)式と(7)，(8)式からなる式に代入すると

$$B\alpha Z_t^{\alpha-1}X_t^{\beta}+(1-\alpha-\beta)Z_t^{\alpha}X_t^{\beta}-\rho^{-1}(1-\alpha-\beta)Z_{t-1}^{\alpha}X_{t-1}^{\beta}=0$$

$$D\beta Z_t^{\alpha}X_t^{\beta-1}+(1-\alpha-\beta)Z_t^{\alpha}X_t^{\beta}-\rho^{-1}(1-\alpha-\beta)Z_{t-1}^{\alpha}X_{t-1}^{\beta}=0$$

が得られる。

ここで効用関数が線形であることから，Z_tとX_tは常に一定値

$$(14)\qquad Z_t=\frac{\alpha B\rho}{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)} \qquad X_t=\frac{\beta D\rho}{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}$$

をとる[3)]。これをこの定義式に代入すると

$$(15)\qquad \frac{B\alpha\rho}{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}=\frac{K_t^1}{(1-s_{1_t}-s_{2_t})L}$$

$$(16)\qquad \frac{D\beta\rho}{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}=\frac{K_t^2}{(1-s_{1_t}-s_{2_t})L}$$

となる。

3）この理由は山下［2005］より以下のように説明できる。

ZとXは全く同様に説明できるので，ここではZについて説明する。

ステップ1）Zは，消費財生産現場における「資本財1」の資本労働比率である（経済全体における資本労働比率ではないことに注意）。Zは状態変数を選択変数で割ったものであるから，ある時点において，状態変数の値に関わらずどんな値でもとることができる。従って，Zの初期値を経済主体は任意に選択することができる。

ステップ2）効用関数が線形であるので，この場合，効用最大化問題は（時間割引はあるが）総消費量（消費財生産量）を通時的に最大化するということである。言い方をかえれば，異時点間で消費を平準化しようとする力は働かない。「資本財1」は，労働量を所与として，最も生産効率の良いところまで蓄積される。これが定常状態における「資本財1」の資本ストックである。生産効率が良いという意味は，資本の限界生産性と労働の限界生産性が均等化しているという意味である（ただし，資本蓄積は1期遅れるので割引因子が関係してくる）。この点は，大西・藤山［2003］における計算からも理解できる。大西・藤山［2003］ではまさに資本の限界生産性と労働の限界生産性の均等化条件から考察している。ところで，この消費財生産関数が一次同次であるので，定常状態における資本量・労働量の両者を共に何分の1（例えば1/2）にしても，限界生産性の均等化は成立していることになる。これは，スケールを丁度1/2にした生産である。言い方をかえれば，この生産はスケールは小さいが上記の均等化が成り立っているという意味で効率的である。ということは，資本蓄積過程のあらゆる時点でこの「資本労働比率」Zを選択することが最も生産効率が良い。逆に言えば，この均等化が常に成り立つように，状態変数である資本ストックに対して，労働量の一部分が消費財生産に投入される。そして，残った労働は「資本財1」の蓄積（と「資本財2」の蓄積）に投入される。大西・藤山［2003］では，定常状態のみを考えているので，資本蓄積がもはや不必要な状態であり，消費財生産に投入される労働量が経済全体の労働量と同一となっている。

ステップ3）Zは任意に選択でき，Zを定常状態値と同じにすることが最も効率が良いのであるから，Zは常に定常状態値をとる。

ここで(15)/(16)を求めると $\frac{\alpha B}{\beta D}=\frac{K_t^1}{K_t^2}$ が得られる。

これは各期における「資本財１」と「資本財２」の比率を表している。しかし,「資本財２」の技術革命が起こった初期時点では蓄積されている「資本財２」はゼロであるから，この両資本財の比率はこの式のようにはならない。したがって，この比率に達するまでは消費財と「資本財１」の生産は一切行われず,（家計の最低消費財の確保を別とすれば）全労働を「資本財２」の蓄積に投入し「資本財２」の「強蓄積」を行うための調整期間が必要となる。この調整期間は図１において m 期から $m+i$ 期までの期間 i で表されている。この i の長さを式で書くと $i=\frac{\beta}{\alpha BL}K_m$ となる。なぜなら，この期間ではすべての労働が「資本財２」の蓄積に向けられるから,「資本財２」の技術革命の開始時点 m における「資本財１」の量 K_m に対応すべき「資本財２」の量 $Q=\frac{\beta D}{\alpha B}K_m$ を「資本財２」の生産部門にすべての労働を投入した際の年間生産量 DL で割った期間 $\frac{\left(\frac{\beta D}{\alpha B}\right)K_m}{DL}=\frac{\beta}{\alpha BL}K_m$ となるからである[4]。この結果，同じ生産関数を持つ２国を比べる限り，この期間は「資本財１」の蓄積水準 K_m の大小により長短が決まることとなる。つまり,「資本財１」の蓄積がすでにより進んでいる先進国ではこの調整期間はより長くなり，それがまだあまり進んでいない途上国ではより短くなる[5]。

このように,「資本財２」の技術革命段階での「資本財１」の蓄積水準の異なる「先進国」と「途上国」とが極端に消費を切りつめなければならない期間（強蓄積期間）の長さを異にする（先進国の方が長い）という興味ある結論を導いたことが本論文の一つの貢献と言える。しかし，また,「先進国」はこの厳しい移行期間を経なければならないとしても，その期間の後には「資本財２」の蓄積においても「途上国」よりも高い到達点に達することができるということも非常に興味深い。

３ 「調整期間」後の資本蓄積経路について

さらに，ここでは，このような調整期間が終わった後に二つの資本の蓄積に配分される総労働配分率はどうなっているかを調べることにする。

なお，ここでは $\frac{\alpha B}{\beta D}=\frac{K_{t+1}^1}{K_{t+1}^2}$ と定義し

(17) $$K_t^2=\frac{\beta D}{\alpha B}K_t^1$$

(18) $$K_{t+1}^2=\frac{\beta D}{\alpha B}K_{t+1}^1$$

と表す。

「資本財１」と「資本財２」の蓄積方程式が

(19) $$K_{t+1}^1-K_t^2=Bs_{1_t}L$$

(20) $$K_{t+1}^2-K_t^2=Ds_{2_t}L$$

であることから，まず(20)を

$$\frac{\alpha B}{\beta D}(K_{t+1}^2-K_t^2)=\frac{\alpha B}{\beta D}\cdot Ds_{2_t}L$$

と変形して，これに(17),(18)を代入すると,

$$\frac{\alpha B}{\beta D}\left(\frac{\beta D}{\alpha B}K_{t+1}^1-\frac{\beta D}{\alpha B}K_t^1\right)=\frac{\alpha B}{\beta D}\cdot Ds_{2_t}L$$

となるから,

4）この移行期間も人々は生きねばならないので，最低限の消費財生産は必要になる。この場合，今最低限の国民消費に国民総労働の 100γ パーセントの労働が必要であるとすると，移行期間 i は $\frac{\beta}{\alpha B(1-\gamma)L}K_m$ と変わるが資本蓄積の進んだ国での移行期間の方が長いという結論に変化はない。

5）逓減型の効用関数の場合，消費量が減少するにつれ，限界効用が高くなるため，消費財生産はゼロにならない。その結果として「資本財２」の生産に割り当てられる労働が減少するために調整期間は長くなる。この仮定の方がリアリティーがあるが，本稿では簡単化のため線形の効用関数を仮定した。

$$K_{t+1}^1-K_t^2=\frac{\alpha B}{\beta}s_{2_t}L$$

が得られる。また，これに (19) を代入すると

(21) $$s_{2_t}=\frac{\beta}{\alpha}s_{1_t}$$

また，これを (15) に代入すると

(22) $$s_{1_t}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1-\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)K_t^1}{\alpha B\rho L}\right)$$

を得ることができる。

同じように，(21) を

$$s_{1_t}=\frac{\alpha}{\beta}s_{2_t}$$

と変形し，(16) に代入すると

(23) $$s_{2_t}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1-\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)K_t^2}{\beta D\rho L}\right)$$

が得られる。

つまり，(22) と (23) 式は二つの資本財の最適蓄積経路であり，両資本財の生産に配分される労働の比率を表す。

ここで，「資本財１」の最初の産業革命が起こった初期時点を n,「資本財２」の二番目の「産業革命」が起こった初期時点を m としよう。この二つの「産業革命」の期間の「資本財１」の最適蓄積経路は (22) 式から以下のように求められる。

(24) $$s_{1_t}=1-\frac{(1-\alpha)(1-\rho)K_t^1}{\alpha B\rho L}$$

そうすると,「資本財１」の産業革命の初期時点に実現される「資本財１」の蓄積への労働配分率は以下のように書き換えられる。

(25) $$s_{1_n}=1-\frac{(1-\alpha)(1-\rho)K_n^1}{\alpha B\rho L}$$

上述のようにこの第一次産業革命以前には「資本財１」の蓄積はゼロであって，産業革命時から資本蓄積が始められるが，その資本蓄積は次の時期から実現されるという意味で，初期時点において $K_n=0$ と仮定できる。これを (25) 式に代入すると

(26) $$s_{1_n}=1$$

を得ることができる。

これは第一次産業革命期のジャンプの高さであり，すべての労働が「資本財１」の蓄積に回され，消費財生産はゼロとなるということを意味する。通常の効用関数を使った場合にはこのような結果とはならないが，線形の効用関数を用いたので，このような結果となったものである。そうすると，この期に消費財生産はゼロになるという不自然なことになるが，もし注４と同じような「必要最低消費」の制約条件が与えられるのであれば, この不自然さは解消される。その意味で，この不自然さの解消はモデルの修正によって可能である。ただ，以下の議論にとって特に重要ではないので，ここでは特にこうしたモデルの修正は行わない。

次に,「資本財２」の技術革命が起こり，その後二つの資本財の最適比率が $\frac{K_t^1}{K_t^2}=\frac{\alpha B}{\beta D}$ に到達するまでの調整期間が終了した時点 $m+i$ のジャンプの高さを検討しよう。ただし，ここで i は調整期間である。

そうすると $m+i$ 時点における最適経路は以下のように表すことができる。

(27) $$s_{2_{m+i}}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1-\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)K_{m+i}^2}{D\beta\rho L}\right)$$

これは「資本財２」の技術革命初期に,「資本財２」の生産に回される労働の配分率である。また，この期における「資本財１」の蓄積への労働の配分率は

(28) $$s_{1_{m+i}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1-\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)K_{m+i}^1}{B\alpha\rho L}\right)$$

となり，この二つの労働配分率の合計 $s_{1_{m+i}}+s_{2_{m+i}}$ が $m+i$ 期のジャンプの高さになる。すなわち

(29) $$s_{1_{m+i}}+s_{2_{m+i}}=1-\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}{(\alpha+\beta)\rho L}\left[\frac{K_{m+i}^2}{D}+\frac{K_{m+i}^1}{B}\right]$$

これは技術革命初期に,「資本財１」と「資本財２」の生産に回される労働の総配分率である。

この式から分かるように，この総配分率は

$m+i$ 期における両資本の蓄積量に依存しており，蓄積量が大きいほど小さくなり，小さいほど大きくなる。

この時点では両資本財蓄積の到達点がより低い途上国では $s_{k_{m+i}}$ が小さいものの，より高い $s_{k_{m+i}}+s_{q_{m+i}}$ が要求されることになり，先進国より厳しい消費制限を経験しなければならないということを意味する。

４ 「資本財２」の技術革命時のジャンプについて

最後に,「資本財２」の技術革命が起こった初期時点 m のジャンプの高さを検討してみる。

m 期から $m+i$ 期までの調整期間中は「資本財２」の強蓄積のために全労働が投入されるというのがここでの結論であるから，図１における m 期から $m+i$ 期までの高さは「資本財１」の本来の「産業革命」期（n）と同じ高さになる。

またもう一つ，この結果で途上国にとって重要なのは,「資本財１」の蓄積の到達点 K の大小に関わらず,「資本財２」の技術革命直後に「資本財２」の蓄積に必要になる労働配分の比率は途上国も先進国も同じであるということである。途上国でも先進国でも「資本財２」蓄積に同レベルの努力が必要になるのである。

最後にさらに一つ,「資本財２」の技術革命期における s_1 の下方へのジャンプについて説明を付加しておかなければならない。それは，この時点で，α の変化がない場合にはジャンプがなく，以前と同様(22)式に従って s_1 は推移するのであるが，例えば,「資本財２」の技術革命前後を通じて消費財生産部門の規模に関する収穫一定が維持されるならば,「資本財２」の技術革命時における β の正のジャンプは α のマイナスのジャンプを伴わねばならず，そのうち α のマイナスのジャンプが生じた場合には(22)式に従って，$m+i$ 期の資本蓄積より m 期の資本蓄積量が不連続に減少することになるからである。

次に，(22)式を(2)式での資本蓄積方程式に代入すると

(30) $$K^1_{t+1}-\frac{\alpha+\beta+\rho-1}{(\alpha+\beta)\rho}K^1_t=\frac{\alpha BL}{\alpha+\beta}$$

が得られ，この差分方程式を解くと

(31)
$$K^1_t=E\left(\frac{\alpha+\beta+\rho-1}{(\alpha+\beta)\rho}\right)^t+\frac{\alpha\rho BL}{(1-\rho)(1-\alpha-\beta)}$$

（E は定数）

を得ることができる。これより

(32) $$K^1_0=E+\frac{\alpha\rho BL}{(1-\rho)(1-\alpha-\beta)}$$

が得られ，これを(31)に代入すると

(33) $$K^1_t=\left(K^1_0-\frac{\alpha\rho BL}{(1-\rho)(1-\alpha-\beta)}\right)\left(\frac{\alpha+\beta+\rho-1}{(\alpha+\beta)\rho}\right)^t+\frac{\alpha\rho BL}{(1-\rho)(1-\alpha-\beta)}$$

が得られる。

これを(22)に代入すると

(34) $$s_{1_t}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1-K^1_0\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}{\alpha B\rho L}\right)\left(\frac{\alpha+\beta+\rho-1}{(\alpha+\beta)\rho}\right)^t$$

が得られる。

これが「資本財２」の技術革命以降に「資本財１」の蓄積がたどる経路となる。

ここでは

(35) $$\lim_{t\to\infty}s_{1_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1-K^1_0\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}{\alpha B\rho L}\right)\left(\frac{\alpha+\beta+\rho-1}{(\alpha+\beta)\rho}\right)^t=0$$

となるが，これは t が無限大に近づくにしたがって s_{1_t} がゼロに収束し，最終的に「資本財１」の蓄積はゼロになるということを意味する。これは，本来の計算（マルクス派最適成長論モデルの計算）と合致する。

同様に，(23)式を(2)式の蓄積方程式に代入して，同じような計算を行うと

(36)　s_{2_t}

$$=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1-K_0^2\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\rho)}{\beta D\rho L}\right)\left(\frac{\alpha+\beta+\rho-1}{(\alpha+\beta)\rho}\right)^t$$

が得られる。また,「資本財２」の技術革命以前に「資本財２」の蓄積はなかった（$K_0^2=0$）から

(37)　$$s_{2_t}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha+\beta+\rho-1}{(\alpha+\beta)\rho}\right)^t$$

となる。

ここでも

(38)　$$\lim_{t\to\infty} s_{2_t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha+\beta+\rho-1}{(\alpha+\beta)\rho}\right)^t=0$$

となり，t が無限大に近づいていくと，s_{2_t} はゼロに収束し，最終的には追加的な「資本財２」の蓄積もゼロになることが分かる。

Ⅳ　おわりに

本稿では「マルクス派最適成長論モデル」を「資本財１」と「資本財２」という２種類の「資本」を持つモデルに拡張し，後者の「資本財２」の技術革命が,「資本財１」の本来の「産業革命」より遅れて生じた場合に，それ以前や以降の資本の蓄積経路がどうなるかを分析し，この２種類の資本の蓄積経路を求めた。そして，この二つの経路を比較することによって以下のような結果を得た。すなわち,

① 「資本財１」の蓄積の到達度の高い状態で「資本財２」を用いる技術革命を迎えた「先進国」ほど,「資本財２」の蓄積のためのより長い調整期間を通過しなければならないこと。ただし, この調整期間の後には,「先進国」の方が「資本財２」においてもより高い蓄積水準を得ること。

② 資本蓄積の到達度の低い状態で「資本財２」を用いる技術革命を迎えた「途上国」では，より厳しい両資本への蓄積が消費を制限し，それが先進国よりも厳しいということ。

以上である。

参考文献

Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin［2004］*Economic Growth*, The MIT Press.（大住圭介訳『内生的経済成長論Ⅰ，Ⅱ（第二版）』九州大学出版会，2006年）。

大西広［2005］「市場と資本主義の関係についての史的唯物論的理解について」『季刊経済理論』第 42 巻第１号。

大西広・藤山英樹［2003］「マルクス派最適成長論における労働による資本の『搾取』」京都大学経済学研究科 Working Paper No. J-33。

大西広・金江亮［2008］「『マルクス派最適成長論』の到達点と課題」『立命館経済学』第 56 巻第 5･6 号，立命館大学経済学会。

大西広・山下裕歩［2003］「新古典派成長論型マルクス・モデルにおける資産格差と時間選好率格差―ローマー的“搾取”への影響―」『政経研究』第 81 号。

Romer, D.［1996］*Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill Companies, Inc.（堀雅博・若成博夫・南條隆訳『上級マクロ経済学』日本評論社，1998年）。

山下裕歩［2005］「新古典派的『マルクス・モデル』における Roemer 的『搾取』の検討」『季刊経済理論』第 42 巻第３号。

山下裕歩・大西広［2002］「マルクス理論の最適成長論的解釈―最適迂回生産システムとしての資本主義の数学モデル―」『政経研究』第 78 号。

山下裕歩・大西広［2003］「『マルクス・モデル』の諸性質と生産要素としての労働の本源性」『経済論叢』第 172 巻第３号。

（2009 年７月６日受付，2009 年 12 月 10 日受理，シニアエディタ：草野真樹）