56, 267 (1938) (92) ——, & J. B. Gahan : J. Agr. Res. 55, 1 (1937) (93) ——, E. McGovran. S. Munson & E. Mayer : Ann. Ent. Soc. Amer. 35, 23 (1942) (94) —— & S. Munson : J. Agr. Res. 64, 397 (1942) (95) —— & ——: Science, 102, 305 (1945) (96) 横山忠雄：蚕糸試報告 8, 46 (1932) (97) Zawarzin, A.: Ztschr. Wiss. Zool. 97, 481 (1911) (98) Zilwa, L. A. : J. Physiol. 27, 200 (1901)

Bliss's Method for the Calculation of the Dosage-mortality Curve

Tatsuro KONO, *Botyu-Kagaku* 16: 62, 1951.

10. Bliss のプロビット法による薬量死亡率曲線の計算

河 野 達 郎

は じ め に

殺虫剤の効力をできるだけ客観的正確にしるにはどうすればよいか。これはまさしく生物試験 (Biological assay) それ自体に課せられた問題にほかならないが，そこには大きくわけて3つの課題がふくまれている。それは試験方法の技術にかんする問題，有効度表示の問題，および実験結果の分析と計算にかんする問題であつて，もとよりこれらをともにあわせ考えてこそその目的が達成される可能性がある。いかにすぐれた試験技術をとりいれてもそこからえられた結果がよく分析され正しい理論的基礎にうらづけられた方法によつてその有効度が表現されるのでなければその真価も充分にみとめることはできない。ここに解説をこころみようとする方法はまさに後者の問題を目的としたものであつてなかでも殺虫剤の効力をいかに表示するかという問題とは，まつたく無関係でないまでも一応きりはなされていることをはじめにおことわりしておく。

殺虫試験の方法には薬剤や昆虫の種類によつていろいろの方法があるがそれらの試験結果としてえられた資料をみると結局薬量と死亡率の関係としてとり上げられる場合がきわめて多い。もつともここで薬量というのは必ずしも実際の薬の容量とか重量，濃度などをのみさして言つているのではない。たとえば濃度を一定にしてそれを作用させる時間をかえて試験した場合などに，この時間をもつて薬量の函数として取扱つたときもこれにふくめたからである。ところでわれわれがもとめようとする薬剤の効力はほとんどこうしてえられた薬量と死亡率の関係をもととして評価されておるのであつて，たとえば殺虫剤の効力の平均値的な意味をもつた中央致死薬量median lethal dose——略して LD-50, MLD などと呼ばれ死亡率 50 %をもたらす薬量をもつて示される——とか実用的意義をもつと考えられている LD-95 あるいは LD-90などのような代表値，あるいは大沢，長沢[1]の提案したいろいろの有効度の指標はいずれもこの薬量—死亡率曲線に基礎をおいてはじめてみちびきだされるものである。ところでこのようなかんけいの数量的とりあつかいをいかにするかという問題については当然のことながら薬理学の領域において早くよりとりあげられ，その分析や計算の方法などについておおくの研究がなされてきた。したがつてそれらの方法の多くはそのまま殺虫剤試験の場合にもみちびきいれられる必然性をもつていた。なかでも薬量—死亡率曲線の分析をめぐつての研究は短時日のあいだにいちじるしい進展をみ，ここにとりあげようとする Bliss [2][3][4] のプロビット変換による分析の方法などはその理論的基礎においてもまた数学的厳密さの點においてもきわめてすぐれたものでありその業績はたかく評価されている。最近わがくににおいてもこの方法が殺虫試験結果の分析，計算にひろく応用されつつあるので，こうした方面の研究にたずさわる方々の要請もあり，あえてここにその方法の概要を紹介してみることとした。いうならばこの解説の意図するところはこの方法の理論的説明というよりはむしろ分析，計算の手續の技術的な面を具体的な形をもつて示すことにあるのであつて，だれもがすぐに適用できることを目的とした。したがつて説明のたらないところも少くないがとくに理論的な説明をのぞむ方は大沢及び長沢[1]，乃至は大沢[5]の論文など参照されることをおすすめしたい。

理論のあらまし

この方法を解説するにあたつてまずこれがどのようにしてうまれてきたか，それがよつてたつ理論的基礎をある程度あきらかにしておくことはこの方法をより深く理解するために役だつと思うのでかんたんにのべてみよう。

いまある殺虫剤について，その薬量をいろいろにかえてある種の昆虫がそれぞれどんな割合で死亡するかをしらべてみる。そうしてその結果を，薬量を横軸にとつて図示してみると一般にそれは第1図にみられるような関係になるだろう。すなわちある薬量で，はじめて死亡が起りその死亡率の増加の程度は最初は徐々であるがしだいにその増加割合を増しやがてまたその増加率はゆるやかとなりついには 100 %の死亡率に達するといつた S 字形の曲線——いわゆる Sigmoid curve でしめされるかんけいがみられる場合が多い。こ

れが薬量死亡率曲線 dosage-mortality curve といわれるものである。ところでこの曲線はいつたいどんなものなのだろうか。ずつと以前にはこれを一種の作用曲線 action curve のように考えていたようであつて，このことはこの曲線を分析するにあたつてこれを単純化するために，他の作用曲線を記載するのとおなじように，いきなりこれを単一の直線や既知の曲線系にあてはめようとこころみられて來たことからも明かであつて，Shepard[6] はこれに Langmur の吸着方程式を適用しこれが一般によく一致するとしてこの曲線の分析，計算に用いたがこれなどはよい例である。しかしこの関係の正当な解釈はむしろいわゆる個体変異の概念をみちびきいれることによつてはじめてなされたというべきであつて，歴史的には Kisskalt[7] の業績にはじまるものである。すなわち彼はダイコクネズミの caffeine による中毒現象についてこの S 字形曲線を研究し，それがこのネズミの caffeine にたいする個体の感受性の分布からえられる累積度数分布曲線としてよく説明されると論じた。この考え方はその後のこの種曲線の研究者たちによつてうけつがれ，その統計的分析の方法は Trevan[8]，Gaddum[9]，Hemmingsen[10]，O'kane[11]．をへて Bliss[2-4] にいたる一連の研究によつて示されるような進歩をみたのである。そうしてそれらは結局この考えのうえにたつてこのような曲線の統計的考察を容易にするための方法，すなわちこの S 字形の曲線はそのままでは数値計算ができず取りあつかいがはなはだやつかいだからまずこれを単一な直線におきかえる方法を確立しようという方向に進められた。そうしてそれが Bliss[4] によつてほとんど完全ともいうべき精密な分析方法として統計理論の基礎のうえにうちたてられたのである。ここで Bliss のプロビット法をうらづけている理論について少しく説明してみる。

まずこの方法なるものは次の 2 つの根本的な假定のうえにたつものであることを知つておかねばならない。すなわち

(1) 供試昆虫の属する母集団を考えるとき，ある特定の有毒物質にたいする個体の感受性――または抵抗性――はその毒物の量のある函数にたいして正規分布をしている。

(2) この分布曲線の横軸をきめる函数は対数である。これを言いかえるならば毒物の刺戟効果は薬量の増加にしたがつて対数的増加をしめすということである。

(1) の假定についてみると，いま供試昆虫の母集団のある薬剤にたいする感受性の函数として個体の最小致死量 (x)――実験的にはもとめられないものであるが――を考えた場合，その個体数頻度 (y) が次の正規確率函数によつてあらわされるというのである。

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

m は薬量の中央値，σ は標準偏差である。

このことは従来より生物にみられる形質とくに形態にかんするそれの変異が多くの場合この正規分布をするという先験的事実から，感受性といつたような生理的性質もおなじような分布をしめすものと考えて差支えないだろうという経驗的類推によつたものである。つぎに (2) の假定であるが，これもこれまでしらべられた薬物の作用がおおくの場合に対数関係を示すという事実によつたものにほかならない。この假定がいずれも正しいものであるかどうかという点は大いに問題となるが，たがいにあい関聯した 2 つの假定を同時に成立させたためにこれを直接証明することはかなりむずかしい。このことについてはあとで述べることとしてここではこの假定をもととして述べてゆくことにする。

ところで主題の薬量―死亡率曲線なるものについてみるとき，これは結局この感受性分布の累積曲線と考えることができるから

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{X}e^{-\frac{(X-M)^2}{2\sigma^2}}dX \cdots\cdots (2)$$

$$X=\log x,\quad M=\log m.$$

なる積分曲線でしめされるものである。これが薬量―死亡率曲線にあたえられた解釈にほかならない。さてわれわれが実験的にもとめうる薬量―死亡率曲線はこの (2) に相当するわけであるがこれはこれ以上積分できないためにこのままでは曲線の数値計算ができずとりあつかいが甚だやつかいである。* そこでいま

$$Y=\frac{1}{\sigma}(X-M) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

のような X と 1 次の関係をもつ函数 Y を考えてみるとそれは

$$dY=\frac{dX}{\sigma}$$

であるから (2) 式は

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Y}e^{-\frac{Y^2}{2}}dY \cdots\cdots (4)$$

と変形できる。この $P(x)$ にたいする Y はいうまでもなく正規確率積分の上限であつて Gaddum, Hemmingsen が正規相当偏差 normal equivalent deviation = N.E.D. となずけたものであるが，これはたいていの統計学の成書に正規確率積分の表とし

* 時間―死亡率曲線 time-mortality curve の場合は (1) の形で結果を知ることができる。

て種々なる Y にたいする $P(x)$ の値がすでに計算されているから $P(x)$ を知つて逆にこれをひけば容易にもとめられる。そうして $P(x)$ ―― 実験的には死亡率としてえられる――を Y におきかえたならばこの Y と薬量 X とは (3) 式で示すような直線関係になるはずである。これが薬量―死亡率曲線を直線に変換するための原理なのである。しかし Y (=N.E.D.) なる値は M を中心として正と負の場合がおこる。すなわちこの値は $P(x)$ が 0.5 のとき O に等しく0.5より小さいときは負，大きいときは正となる。このようにこの値が正になつたり負になつたりすることは計算するとき不便であるというので，Bliss はこの Y に5を加えると実際にあらわれる数値計算ではこれがほとんど負にならないということに着目して

$$Y' = Y+5$$

としてこの Y' を **Probit**（確率単位）となづけこれをもちいることを提唱した。彼は種々なる死亡率に対応する Y' の値を精密に計算して表にしている。（附**表 I**）

このようにして変換してえられる直線が**薬量―死亡率回帰直線**といわれるものである。

ところでもし実験の結果がはじめにのべた２つの假説どおりにあらわれるとするならばすべての観測値はそれから計算してえた回帰直線とまつたく一致するはずである。しかしこのことは (1) の假説を考えてもわかるとおり，対称とする昆虫の母集団が無限母集団であるということと，また，薬量のことなるごとにとりだすサンプルがどれもつねに等しいということを前提としてなりたつのであつて，普通供試する個体数があまり多くない場合はもちろん，たとえきわめて多くの個体数をもちいるとしてもこの薬量―死亡率曲線の性質からいつて多かれ少なかれ偶然的な抽出誤差がはいつてくるから，したがつてこのような一致はまずのぞめないものである。一般に実験における死亡率の分布は不規則であつて，いちじるしいときには薬量と死亡率の関係が部分的に逆転することさえ少くない。そこで問題となることはこうした不完全な観測値からこの回帰直線を正しく推定するにはどうすればよいかということであるが，Bliss はこれを解結するためたくみに統計理論を導入して回帰線を推定する精密な計算方法を考えだしたのである。つぎにその計算法を手続きの順を追つて説明してみよう。

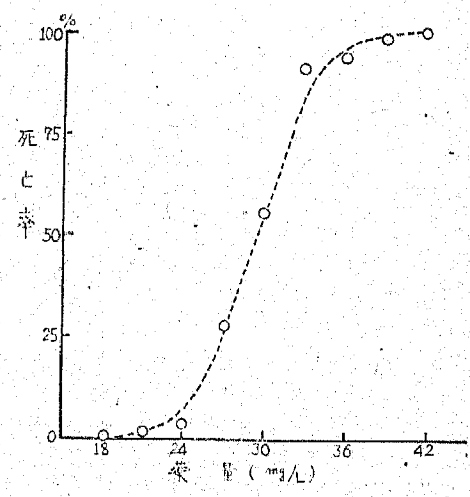
実験成績の整理

著者が二硫化炭素をもちいてコクゾウ成虫についてその薬量 ― この場合は作用させる時間を一定にし器中の濃度（mg/L）をもつて薬量とした――と死亡率の関係を実験的にもとめた結果は第１表に示すとおりであつた。

第１表 いろいろな濃度の二硫化炭素に８時間接触させたときのコクゾウ成虫の死亡率。（実験温度 30°C，濃度は１リットル中の mg数を示す）

濃度mg/L	18	21	24	27	30	33	36	39	42
供試虫数	200	150	150	150	150	150	150	159	150
死亡率(%)	0.5	1.3	3.3	27.3	55.2	91.3	93.9	98.6	100.0

この結果を図で示したのが第１図であつて，破線でしめしたようにほぼ S字形の曲線をしている。ここではこの結果を計算例としてもちいて説明してゆくことにする。



第１図 二硫化炭素に８時間接触したときのコクゾウ成虫の死亡率と薬量（濃度）との関係

まず薬量の對数をもとめる――５桁の常用対数表をつかつてもとめれば充分であろう。もしも実験薬量が１より小さい 0.02 といつたような少数でしめされている場合にはその対数値は負となつて計算がめんどうになるからこんなときはあらかじめすべての薬量が１以上になるようすべてのものを 100 倍あるいは 1000 倍し少数点をひとしくくりさげてこれで計算をおこない計算が終つてからはじめにくりさげただけの桁数をもとにもどすようにすると計算がらくになる。さきの実験例についてもとめた薬量の対数は第２表４欄に示した。

つぎに死亡率をプロビットに変換する ― それぞれの薬量についてえられた死亡率はこれをプロビットに変換する前に死亡率そのものを補正する必要がある。それは無処理の対照区と比較して眞に薬剤によつてのみ死亡した割合をもとめることであるが，これには実験の方法や昆虫の種類などに応じていろいろの方法が考えられており，最近でも Finney,(12), Sun & Shepard(13) などによつてあたらしい補正の方法が提

唱されている。Abott[14] の考えた方法は古くから一般にもちいられている方法であるが，この補正法を簡単にのべると，対照区の生存虫%を q_0，処理区の生存虫%を q としたときその補正死亡率は

$$\frac{q_0-q}{q_0}\times 100$$

として計算される。もつとも対照区の死亡率が0%であればこの補正は考慮する必要がないことは当然であつて第1表の場合はこのために補正を要しなかつた。

こうして吟味をおわつた死亡率は附表Iによつてかんたんにプロビツトに変換できる。実験によつてえた死亡率についてもとめたこのプロビツトのことをとくに Empirical probit (**観測値のプロビツト**) となづけている。第1表の計算例についてもとめたこの値は第2表5欄のとおりである。この場合，死亡率0%および100%にたいするプロビツトはこの表からはもとめることができないが，これは(4)式の性質を考えれば理解できることでこのことについてはまた後ほどのべる。とにかくここでは0%と100%をのぞいた死亡率についてのみプロビツト変換を行えば充分である。

予備回帰線 (Provisional regression line)

適当な方眼紙を用意してそのうえに薬量(対数値)を横軸に，プロビツトを縦軸にとつてさきに変換してもとめた死亡率プロビツトを点でかきいれてみる。そうしてこれをながめてみるとそれが大体1つの直線をなすかどうかがわかる。このさい両軸の目盛はなるだけこの直線が両軸と 45 度の角度をもつてあらわれるように考えてきめることがのぞましい。第2図は第1図の実験結果に変換をほどこしてもとめたものであるがそれぞれの観測値のプロビツトはほぼ直線的な関係をしめしていると考えられる。そこで定規をもちいてこれらにもつともよくあうと思われる直線を引く。第2図の破線がそれであるがこの假に引いた直線のことを予備回帰線または假の回帰直線というのである。ところで定規で線をひくさいに大部分の点がきれいに一線にならんでおれば問題はないが，まえにものべたようにそんなことはむしろ珍らしく不規則にちらばつていることが少くない。とくにこの直線の両端に近いところにおいてかなりとびはなれた点ができやすいが，このことはこの直線の特性をかんがえてみればうなずけることである。このような場合にはこれらの不規則にとびはなれた点にはあまりかまわずに中央附近の点を重くみて直線を引くようにしなければいけない。

つぎにこの予備回帰線から期待されるプロビツト (Y)——これを Expected probit **期待プロビツト**となづける——をそれぞれの薬量 (X) についてもとめる。それにはこの回帰線の方程式を

$$Y=a'+b'X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\ \ )$$

として，図上においてこの直線のできるだけ両端にそれぞれ任意の2点をきめてその座標 x_1，y_1，および x_2，y_2 を読みとり選点法で直線を計算するのとおなじように

$$b'=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\ ,\ a'=y_1-bx_1$$

を計算して恒数 a'，b' を定めこの式を決定する。そうして X にそれぞれの薬量をいれて Y をもとめればよい。もつとも，さらに簡単にもとめようというなら図上からそれぞれの X にたいする Y の値をよみとつてもよい。さきの例について計算してみよう。すなわち，$x_1=1.7$ にたいして $y_1=9.2$，$x_2=1.2$ にたいして $y_2=0.5$，したがつて

$$b'=\frac{9.2-0.5}{1.7-1.2}=17.4,\ a'=9.2-17.4\times 1.7=-20.38$$

$$\therefore\quad Y=-20.38\times 17.4\ X$$

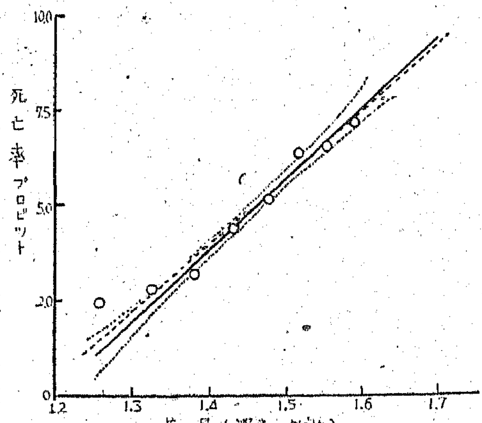
この式に第2表4欄の薬量 X をつぎつぎとあてはめてもとめた Y の値は同表6欄のとおりであつた。この Y の値はせいぜい少数点下1桁か2桁までもとめれば充分である。

ところで予備直線をひいてこれからプロビツトの期待値をもとめるということは実は Bliss の方法の最も大きな特徴といわれる点であつて，この値によつて実際にえられた死亡率プロビツトを修正し，あるいはこれにあたえるべき重みを決定しようというのである。一般にこのようにしてもとめた予備回帰線は実験の結果があまりでたらめでないかぎり，あとでのべる方法で計算してもとめた回帰直線とそれほどくいちがわないものである。

プロビツトの補正と0%および100%死亡率にたいするプロビツトの算定。

さきに，実験によつて0%または100%の死亡率がえられてもこれにたいするプロビツトは附表Iからはもとめられないといつた。これは(4)式に原因があるのであつてこの式から100%や0%に対応するプロビツトをもとめようとしてもそれは正か負の無限大になつてしまうからである。したがつて薬量をいかにかえてみても理論的には0%や100%死亡率は期待されないはずであるが，実際にはいとも簡単に0%，100%がえられる。これはこの(4)式が供試虫を無限にも多くとることをその成立条件としているためであつて供試虫数がそれほど多くない実際の場合には，もはやこの式はなりたたないのである。このことは0%や100%死亡率の場合にかぎらなくとも，程度の差こそあれ死亡率や生存率の小さくなる部分ではおなじようなことが言える。そこでこのような場合には何かさらに適当な処理をしなければならない。

一般にある薬量において母集団での(理論的な)死



第2図 第1図の結果からプロビット変換をして得た薬量-死亡率回帰直線。（破線は予備回帰線 $Y=-20.38\times 17.4X$，実線は計算により推定された回帰直線 $(y=5.07369+18.761(X-1.46828)$，点線は(20)式でもとめた誤差限界をしめす）。

亡率が P，したがつて生存率が Q（$=1-P$）なるとき，N 匹の昆虫を試験して S 匹が生きのこる確率は

$$\frac{N!}{S!\,(N-S)!}\,P^{N-S}Q^{S} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

であると考えることができる。そうして各薬量についてこの様な確率が考えられるわけであるが，われわれが得た実験の結果からできるだけ確からしい回帰直線を推定するにはこれらの確率の積が最大になるようにすればよいわけである。それにはこれらの確率の対数の和をプロビットについて微分してそれを0とおけばよい。すなわち

$$\Sigma\left\{(QN-S)\frac{Z}{PQ}\right\}=O \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ところで S，$N-S$ が大であつて S の分布が正規分布であるとみなしうるときには，実験より得られたプロビットを Y' これに対応する回帰直線からえられるプロビットを y とすると

$$(QN-S)=N(Y'-y)\,\frac{dP}{dY'}$$

$\frac{dP}{dY'}$ は $Z\ (=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e)$ であるからこれは

$$(QN-S) = N\,(Y'-y)\,Z \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

(8) を (7) 式に代入すると

$$\Sigma\left\{(Y'-y)\right\}\frac{Z^2}{PQ}=O \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

これは実験からえられたプロビット Y' に $\frac{NZ^2}{PQ}$ なる重みをあたえて最小自乗法を用いて回帰線を計算するということであつて，從來，Hemmingsen [10] などが提唱した方法と同一である。しかし Q がきわめて小さい値であつて，実験的にえられる S が0とか1または2などのような小さい値になると (9) 式は (7) 式の満足すべき近似式でなくなる。そこでこのとき

$$N(y'-y)Z=(QN-S) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

なる式を満足するような y' をもとめこの値を (9)式における Y' に用いて計算すればよいことになる。(10) 式はこれを変形して

$$y'-y=\frac{Q}{Z}-\frac{S}{NZ},\ \therefore y'=y+\frac{Q}{Z}-\frac{q}{Z} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

しかし y' をもとめるとき，y はこれから求めようとする回帰直線上の値であるからまだわからない。そこで Bliss [3] はさきにもとめた予備回帰線上の値すなわち Y（Expected probit）をもちいて計算することを考えたのである。すなわち

$$y'=(Y+\frac{Q}{Z})-q\ (\frac{1}{Z}) \quad \cdots\cdots\cdots (12a)$$

$$\text{または}\ y'=(Y-\frac{P}{Z})+p\ (\frac{1}{Z}) \quad \cdots\cdots\cdots (12b)$$

として y' をもとめる。ここに q は実験でえた生存率，p はおなじく死亡率をしめし，この2つの式は同じものにほかならない。この y' のことを Corrected probit **補正プロビット**となづけているが，この補正の原理は R. A. Fisher [3] が導きだし，Bliss [4] が採用したのであつて，実験によつてえられた死亡率から直接もとめた Y' (Empirical probit) を用いるよりもこうして求めた y' をもつて回帰線を計算する方がよりよいとしたことはすぐれた点といえよう。そうしてこの y' はそれぞれの1つの薬量における実験の結果のみによつて定められたものでなくすべての薬量における実験の結果からえられる予備回帰線での値を考慮にいれている点注目されてよいと思う。さてこの(12)式から補正プロビット y' をもとめるのであるが，Bliss [4] は種々なる Y の値にたいする $(Y+\frac{Q}{Z})$，$(Y-\frac{P}{Z})$ 及び $(\frac{1}{Z})$ を計算し，**附表 II** のような表としているのでこれをもちいれば簡單に計算できる。($(Y+\frac{Q}{Z})$ および $(Y-\frac{P}{Z})$ のことを Bliss はそれぞれ最大補正プロビット（Maximum corrected probit），最小補正プロビット（Minimum corrected probit）となづけている。）死亡率0％及び100％にたいするプロビットもこの y' の値として算定できる。附表 II をつかう場合に，この表は便宜上 Y が5以上のときは(12a)式を，5以下のときは(12b)式をつかつて計算するようにしてある。そうして Y が小数点1桁の場合まで求めてあるが更にこまかい計算

を必要とする場合は比例配分によつて補正すればよい。さきの計算例について(12)式によつて計算してもとめた補正プロビットの値は第2表7欄のとおりである。これをみればわかるように，死亡率または生存率がある程度大きいとこの補正プロビットは実験値から直接もとめたプロビット Y' (5欄) と大してかわらないもので，プロビット5附近ではきわめてよく一致している。

各プロビットにあたえる重み (Weight) の算定

さきに(9)式において回帰直線をもとめるのに $\frac{NZ^2}{PQ}$ なる重みをつけて計算するといつた。これについて少し説明してみよう。いま死亡率を P, 生存率を $Q=1-P$, P に対応するプロビットとを Y'，供試虫数を Nとし，P, Y' の標準偏差をそれぞれ σ_P, $\sigma_{Y'}$ とすると(4)式から

$$\sigma_{Y'}{}^2=\sigma_P\left(\frac{dY'}{dP}\right)^2$$

しかるに $\sigma_P{}^2=\frac{PQ}{N}$, $\frac{dY'}{dP}=\frac{1}{Z}$

であるから $\sigma_{Y'}{}^2=\frac{PQ}{NZ^2}$

この $\sigma_{Y'}{}^2$ の逆数は Y' の信頼の度をしめすものであるからこれを「重み」(weight) となずけ w であらわすと

$$w=N\left(\frac{Z^2}{PQ}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

$\left(\frac{Z^2}{PQ}\right)$ をとくに「重みの係数」(Weighting coefficient) となづけ，Bliss はこれを種々な Y の値にたいして計算している。(附表 II の中央欄がそれであるが Y が5以上，5以下の場合にも共通によみとることができるようにしてある。) そこで回帰直線の計算にあたつてそれぞれの補正プロビット y' にあたえる「重み」はこの表から「重みの係数」をよみとつてこれにそれぞれの死亡率を求めるにもちいた昆虫の数 N をかければよいことになる。例題についてもとめた「重み」は第2表8欄のようである。このさいもし供試虫数 N がすべての薬量において等しいときには N をかけずに $\left(\frac{Z^2}{PQ}\right)$ をそのまま w として計算しても回帰直線をもとめるだけの目的ならばなんらさしつかえない。

ところでこの「重み」をきめるにあたつて，実験値からのプロビットをもととして求めないで，予備回帰線から期待されるプロビット (Y) をもちいてきめることは回帰直線の計算に補正プロビット y' をもちいることと共に Bliss の方法の独特なしかもすぐれたところであつて，この点 Empirical probit (Y')から直接「重み」を決定し，これをもちいて回帰線を計

第2表 回帰直線の計算例 (第1表，一第1図一第2図より)

薬量 x	供試虫数 N	死亡率 p	薬量の対数 $X=\log x$	観測プロビット Y'	期待プロビット Y	補正プロビット y'	重み w	wX	wy'
18mg/L	200	0.5%	1.25527	2.4242	1.5	1.233	0.660	0.828	0.814
21	150	1.3	1.32222	2.7738	2.6	2.815	9.255	12.237	26.053
24	150	3.3	1.38021	3.1616	3.6	3.281	45.300	62.524	148.629
27	150	27.3	1.43136	4.3962	4.5	4.399	87.150	124.743	383.373
30	150	55.2	1.47712	5.1307	5.3	5.127	92.415	136.508	473.812
33	150	91.3	1.51851	6.3595	6.0	6.296	65.790	99.903	414.214
36	150	93.9	1.55630	6.5464	6.7	6.525	31.155	48.487	203.286
39	150	98.6	1.59106	7.1973	7.3	7.185	11.340	18.043	81.478
42	150	100.0	1.62325	—	7.9	8.213	2.850	4.626	23.407
—	$\sum N$ 1400	—	—	—	—	—	$\sum(w)$ 345.915	$\sum(wX)$ 507.899	$\sum(wy')$ 1755.066

$\sum(wX^2)=747.087$ $\qquad \sum(wXy')=2602.230$ $\qquad \sum(wy'^2)=9389.680$

$\bar{X}=\frac{\sum(wX)}{\sum(w)}=1.46828$ $\qquad a=\bar{y}=\frac{\sum(wy')}{\sum(w)}=5.07369$

$A=\sum(wX^2)-\bar{X}\sum(wX)=1.349$, $B=\sum(wXy')-\bar{y}\sum(wX)=25.303$, $C=\sum(wy'^2)-\bar{y}\sum(wy')=485.019$

$b=\frac{B}{A}=18.761$ $\qquad S=\frac{1}{b}=0.053$ $\qquad \chi^2=C-bB=10.216$

$\mathbf{y=5.07369+18.761\ (X-1.46828)}$ $\qquad X=1.46828+0.053\ (y-5.07369)$

算していた Gaddum, Hemmingsen などの方法といちじるしいちがいがみとめられる。

回帰直線の計算

以上で計算の準備はまつたくできたので，あとは機械的に計算機をたよりに計算すればよい。ところで求める回帰線を Bliss は次の形であたえている。

$$y=a+b\ (X-\overline{X})\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (14)$$

y は死亡率プロビット．X は薬量（対数），a, b, $\overline{X}$ は常数であつて，$a=\overline{y}$ はプロビットの加重平均，$\overline{X}$ は薬量の加重平均，b はこの回帰直線の方向係数をあらわし (3) 式でわかるとおり標準偏差 S の逆数にほかならない。この回帰直線のことを予備回帰線にたいして Corrected regression line **修正回歸線**とも呼ぶ。そこでこの回帰直線は3つの恒数 a, b, 及び $\overline{X}$ をもとめればよいのであるから，最小自乘法により

$$\overline{X}=\frac{\Sigma(wX)}{\Sigma(w)}$$

$$a=\overline{y}=\frac{\Sigma(wy')}{\Sigma(w)}$$

$$b=\frac{B}{A}$$

ただし $A=\Sigma(wX^2)-\overline{X}\Sigma(wX)$

$B=\Sigma(wXy')-\overline{y}\Sigma(wX)$

$C=\Sigma(wy'^2)-\overline{y}\Sigma(wy')$

として計算することができる。この計算はかなりはん雑なので第2表のように整理して順序をおうて計算してゆくほうが途中でまちがいを起すことがすくない。例題について計算してみよう。

$$\overline{X}=\frac{\Sigma(wX)}{\Sigma(w)}=\frac{507.899}{345.915}=1.46828$$

$$a=\overline{y}=\frac{\Sigma(wy')}{\Sigma(w)}=\frac{1755.066}{345.915}=5.07369$$

$A=\Sigma(wX^2)-\overline{X}\Sigma(wX)=747.087-(1.4688\times507.899)=1.349$

$B=\Sigma(wXy')-\overline{y}\Sigma(wX)=2602.230-(5.07369\times507.899)=25.303$

$C=\Sigma(wy'^2)-\overline{y}\ \Sigma(wy')=9353.289-(5.07369\times1755.066)=485.019$

$$b=\frac{B}{A}=\frac{25.308}{1.349}=18.761$$

よつてもとめる回帰直線の式は (14) 式にこれらの値を代入して

$$y=5.07369+18.761(X-5.07369)$$

となる。ここで C なる数値を計算したがこれはあとで回帰直線の適合度検定をするとき χ^2 をもとめるのに必要となつてくるのでここで一緒に計算しておくと便利である。また A, B, Cをもとめるときに必要な $\Sigma(wX^2)$, $\Sigma(wXy')$ や $\Sigma(wy'^2)$ は第2表の計算表にさらにそれぞれ欄をもうけて計算してもよいが，計算機の威力を活用してたとえば $\Sigma(wX^2)$ ならば (wX) に (X) をかけながら加算して一気にもとめるようにすればより簡単にもとめられる。また計算にあたつて注意しなければならないことは，計算中の数値はせいぜい小数点下2桁か3桁までもとめてゆけばよいが，$\overline{X}$ と $\overline{y}$ だけはとくに，できうれば5桁ぐらいまでもとめておくということである。これを2桁ぐらいですましておくとあとでもとめる χ^2 の値が負になつて検定が不可能になることがしばしばおこるからである。

いま計算によつてもとめた回帰直線を第2図にかきいれてみると実線のようであつて，点線で示した予備回帰線とかなりよく一致していることがわかる。しかしどんな場合でもこんな結果がえられるとはかぎらないのであつて，この両回帰線のあいだにかなりのくいちがいがみられることがある。こんなときにはさらにもう一度予備回帰線をきめなおして第2回目（ときには第3回目）の計算 (second or third approximation) をする必要がある。もつともこのさい，第1回目に得られた補正回帰線を次回の予備回帰線として第2回目の計算をおこなうことによつて大抵よい結果がえられるものである。とにかくはじめグラフのうえで予備直線を描くさいに充分注意して線をひけばまず唯一回の計算ですませることができる。

回帰直線の適合性の検定

以上のようにして実験の結果から最も確からしい回帰直線が推定されたのであるが，つぎにこの回帰直線がどれほど正しいものであるかということ，すなわち実験でもとめた観測値は一定の假定のもとにもとめたこの回帰直線の上にいつものるとはかぎらずそのあいだには多くの場合差がみられるが，この差がはたして偶然の誤差によつてのみ起つたものとしてよいかどうかを吟味してみる必要がある。これには χ^2 **試驗** * が適している。これは結局，回帰直線と観測値のあいだには差がない——くわしく言えば，観測値は回帰直線でしめされる正規母集団からの任意抽出標本からえられたものである——という帰無假説をおいて χ^2 分布を利用してこれを一定の有意水準のもとに検定することである。そこで検定に必要な χ^2 の値をもとめねばならないが，ふつうならば実験によつてえられた死亡率とこれに対応する回帰直線からもとめられる値とから計算すればよいのであるが，計算がめんどうになる

* この方法の原理についてはたいていの統計学の書物に解説してある。とくに近藤忠雄：「計数の統計学」には平易に説明してあるから参照されたい。

ので次の式によつて χ^2 をもとめる方が便利である。

$$\chi^2=C-bB \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

ただし $B=\Sigma(wXy')-\bar{y}(wX)$

$C=\Sigma(wy'^2)-\bar{y}(wy')$

こうしてもとめた χ^2 は回帰直線より期待される値と観測値とのへだたりの程度をあらわす数値であるから，つぎに χ^2 のこの程度の値がえられる確率 (P_r) をもとめる。そうしてこの P_r があらかじめ定めた有意水準より大きい値であればさきにもうけた假説すなわち両者のあいだには差がないとする假説をすてることができない。具体的には誤差の範囲内で一致したものとみとめる。もし有意水準以下であればさきの假説はすてられ，この回帰線は観測値を満足するものではないという結論をうるのである。χ^2 の確率はたいていの統計学の成書に附表としてでているからこれをみればよいが，この場合の自由度(degree of freedom)は回帰線からすでに恒数 a, b を決定しているから観測点数から2を引いたものを用いればよいはずである。

ところでこの χ^2 試験をおこなう場合，観測値のなかに死虫数または生存虫数が5より小さいものがあるときはそのままでは正しく適用できない。すなわちもしこのまま計算すると適合度(χ^2の確率)が見かけ上大きくなりすぎるのである。そこでこれらの点を除いて χ^2 試験をおこなえば正確になるのであるが，そうすると計算が更にめんどうになるので，便法としてとにかく (15) 式で χ^2 を計算し，自由度をきめるときに死または生存虫数が1頭以上になるようにしたときの観測点数 (n') から2をひいたものを自由度 (n) としてつかうのである。すなわち

$$n=n'-2$$

有意水準としては $P_r=0.05$ をふつう用いている。さきの計算例について χ^2 試験をしてみよう。

$$\chi^2=485.019-(18.761\times25.305)=10.216$$

$n'=8$ であるから自由度は

$$n=8-2=6$$

表から $\chi^2=10.216$ にたいする P_r をもとめると

$$0.2>P_r>0.1$$

であつてこれは有意水準 0.05 以上であるからさきにもとめた回帰直線は誤差の範囲内で観測値を満足するものと判定することができる。附表 III は χ^2 試験をおこなう場合，さらに便利なように有意水準 0.05 のときの種々なる自由度に対する χ^2 の値を抜萃して表にしたものである。計算してえた χ^2 の値がこの表のおなじ自由度に対応する χ^2 の値より小さいときはもとめた χ^2 の確率は当然 0.05 以上であつて，大きいときは 0.05 以下であるからこの表だけから適合性が判定できる。

回帰線の誤差限界

さきにわれわれは計算によつて最も確からしい回帰線を推定してそれが観測値とよく適合するかどうかをしらべたが，χ^2 試験の結果たとえこの直線が全体として観測値と誤差の範囲内で一致すると言つても個々の観測値についてみればかならずしもそうばかりとは言えない。そこで求めた回帰線から一定の許された誤差の限界——逆に言えば信頼限界 (fiducial limit) をきめておくことは個々の観測値を管理するうえに都合がよい。この限界をきめるにはまずこの回帰線の位置と方向にかんする Parameter である a および b の Variance (分散) —— $V_{(a)}$ と $V_{(b)}$ をもとめねばならない。これは次の計算によつてえられる。

i) 回帰線の適合性検定における χ^2 の確率 (P_r) が 0.05 以上なるときは

$$V_{(a)}=S^2_{(a)}=\frac{1}{\Sigma(w)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

$$V_{(b)}=S^2_{(b)}=\frac{1}{A} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

ii) χ^2 の確率 (P_r) が 0.05 以下のときは

$$V_{(a)}=S^2_{(a)}=\frac{\chi^2}{n\Sigma(w)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

$$V_{(b)}=S^2_{(b)}=\frac{\chi^2}{nA} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

(n は自由度，S は標準偏差をあらわす)

例について計算すると，$P_r>0.05$ であつたから

$$V_{(a)}=\frac{1}{345.915}=0.003$$

$$V_{(b)}=\frac{1}{1.349}=0.741$$

そこで回帰直線の誤差限界は Working & Hotelling が示した次の式によつてもとめることができる。すなわち

$$Y_R=a+b(X-\bar{X})\pm t\sqrt{V_{(a)}+(X-\bar{X})^2V_{(b)}} \quad \cdot(20)$$

Y_R は薬量 ($X=\log x$) に対応するプロビットの限界値である。またこの限界をもとめるのに逆にそれぞれのプロビット (y) にたいする薬量の値としてもとめてもよい。その限界値を X_R とすると

$$X_R=\bar{X}+\frac{b(y-a)}{b^2t^2V_{(b)}}\pm\frac{t\sqrt{V_{(b)}(y-a)^2-V_{(a)}(b^2-t^2V_{(b)})}}{b^2-t^2V_{(b)}} \quad \cdot\cdot(21)$$

うえの2式における t は "Student" の t といわれるもので，この場合信頼限界をきめる水準として $P_r=0.05$ をとるとすると回帰線の自由度 n に対応する値を t 分布表* からよみとることができるからこの値をつかつて計算すれば $P_r=0.05$ としたときの限界

* 統計数値表1(第42表) を参照されたい

値 Y_R または X_R がもとめられる。附表 IV は t 分布表から $P_r=0.05$ としたときの種々な自由度 n に対する t の値だけを抽きとつて表としたものである。

さきの計算例について $P_r=0.05$ とおいたときのプロビットの限界値 (Y_R) をもとめてみると第3表2欄のようである。

第 3 表 回帰線の誤差限界の計算例（第 2 表より）

$X=\log x$	* $Y_R=y\pm t\sqrt{V_{(a)}+(X-\overline{X})^2V_{(b)}}$	$Y_{\varepsilon}=y\pm1.96\sqrt{V_{(y)}}$
1.25527	1.07741±0.46826	1.07741±0.37507
1.32222	2.33346±0.33561	2.33346±0.26881
1.38021	3.42141±0.22889	3.42141±0.18334
1.43136	4.38103±0.15404	4.38103±0.12411
1.47712	5.23954±0.13537	5.23954±0.10843
1.51851	6.01601±0.17078	6.01601±0.13679
1.55630	6.72503±0.22877	6.72503±0.18324
1.59106	7.37717±0.29129	7.37717±0.23332
1.62325	7.98108±0.35291	7.98108±0.28267

〔註〕* $P_r=0.05$, $n=6$, $t=2.447$

上表で $y=a+b(X-\overline{X})$ であつて回帰線から期待されるプロビット。

ところで回帰線から期待されるプロビット (y) の variance $V_{(y)}$ は

$$V_{(y)}=V_{(a)}+(X-\overline{X})^2V_{(b)} \quad \cdots\cdots\cdots(22)$$

としてもとめられる。すると (20) 式は

$$Y_R=y\pm t\sqrt{V_{(y)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

ということであつて結局信頼限界はプロビット (y)の variance の平方根に $P_r=0.05$, 自由度 n にたいする t の値をかければもとめられることになる。ここで Bliss は χ^2 試験の結果回帰直線が観測値を満足するときには，自由度のいかんにかかわらず，$P_r=0.05$ としたときの信頼限界は

$$Y_{\varepsilon}=y\pm1.96\sqrt{V_{(y)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

としてもとめることができるとしている。さきの計算例についてこの式により Y_{ε} を計算してみると第3表3欄のようになり，Y_R とはややちがつた限界値をしめしている。これは (24) 式の常数 1.96 が実は自由度 n の無限大なるときの t の値にほかならないためである。第2図の点線でしめしたのは Y_R によつて定めた誤差限界である。

因に任意のプロビット (y) に対応する薬量 (X)の variance はつぎの式から計算することができる。

$$V_{(x)}=\frac{1}{b^4}\left\{V_{(b)}(y-a)^2+V_{(a)}b^2\right\} \cdots\cdots(25)$$

有効度の算定

さてわれわれはこのようにして推定した回帰直線から，用いた殺虫剤の効力を正確にもとめることができる。まず一般によく用いられる効力指数に Trevan[8] がはじめて提唱した中央致死薬量 median lethal dose (LD-50, あるいは MLD) なるものがあるが，これは死亡率 50 %をもたらす薬量であつて，これは(14)式の y に死亡率50 %に対応するプロビット＝5 を代入して X をとけばよいのであるがこれをかきなおすと

$$X=\overline{X}+S(y-\overline{y}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

この式に $y=5$を代入して計算したXの値はlog(LD50)であるから (LD-50) はその逆対数である。

計算例についてもとめてみると,

$$\log(\text{LD-50})=1.46328+0.053\,(5-5.07369)=1.46437 \qquad (\text{LD-50})=29.13\ \text{mg/L.}$$

こうしてもとめた log (LD-50) は (3) 式の M (平均値) にあたるもので，この回帰線の位置を代表する最もよい値であることはいうまでもない。そこでさきに (14) 式の形で示した回帰直線は (LD 50) をもとめたのちにこれを代入して次のような形として示した方が式の内容がよくわかつて便利のように思う。

log (LD 50) を M とすると

$$y=5+b(X-M) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

さきにもとめた回帰方程式も

$$y=5+18.761(X-1.46437)$$

とすればよい。ここに (log LD 50) の variance は次の式から計算することができる。

$$V_{(\log.\ \text{LD}\ 50)}=S^2\left(S\frac{(5-\overline{y})^2}{B}+\frac{1}{\Sigma(w)}\right)\cdots(28)$$

さきの例について計算してみると

$$V_{(\log.\ \text{LD}\ 50)}=0.053^2\left(0.053\frac{(5-5.07369)^2}{25.308}+\frac{1}{345.915}\right)=0.000008$$

となりきわめて小さい値となる。この平方根は (log LD-50) の信頼度をしめすもので計算してみるまでもなくこの LD-50 がほとんど誤差をもたないまでに正確なことを示している。

ところで (LD-50) なる指数は実用的には価値がうすいと言う人がある。そうしてむしろ 95 %あるいは 99 %の死亡率をもたらす薬量すなわち LD-95, LD-99のような有効度指数がもちいられている。これをもとめるのは LD-50 と全く同様にそれぞれの死亡率に対応する次のプロビットを (26) 式の y として代入すればよい。

log (LD-95) のとき　$Y=6.4449$

log (LD-99) のとき　$Y=7.3263$

しかしこれらの指数が LD-50 よりも信頼度の点においておとるものであることはこの回帰直線の性質からいつて当然のことである。

つぎに回帰直線を計算したとき，この直線の方向係数 b は供試昆虫群の抵抗性の標準偏差 S の逆数であると言つたが，これを薬剤の効力という面から考えるとこれはその剤の殺虫能率をあらわすものとも言える。したがつてこれは LD-50 とともに殺虫剤の特性をしめす重要な指数であつて，異質の薬剤などでは往々この値がちがつてあらわてくる。この b はむしろ殺虫効果の質に大きい關係をもつものと考えられるのであつて，殺虫剤の効力は LD-50 だけではその効果をしめすことがむずかしくこの両者をあわせ考えなければ完全とはいえない。大沢及び長沢(1) はこの 2 つをいろいろに組みあわせることによつて種々の有効度指数を考案している。Bliss は殺虫能率をあらわす b をもちいて，**死亡率 1 プロビットを増すに要する藥量の%** を計算して毒力の 1 つの指標としている。すなわち

$$\frac{100\log_e 10}{b}=\frac{230.26}{b}\% \quad \cdots\cdots\cdots(29)$$

例についてもとめてみると

$$\frac{230.26}{18.761}=12.273\%$$

となる。

以上回帰線からもとめられる代表的な効力指数についてのべたが，有効度をいかに表示するかということはそれ自体が 1 つの大きな問題であつてむしろそれは今後の研究にまつべきものが多いというほかない。

お わ り に

以上で大体藥量死亡率曲線の分析と計算の方法について，おもに Bliss の提唱したプロビット法の概要を説明したわけであるが，できるだけ平易に解說しようとしたため，かえつてたどたどしいものとなり，充分いきとどいた說明ができなかつたうらみがないでもない。またこの方法から出発して同様な關係にある時間―死亡率曲線の分析，回帰線の比較に関する問題，あるいはこの方法の応用的場面として展開された 2 種の殺虫剤の協力作用の分析など Bliss(15, 16, 17) によつて発展させられた 1 連の研究についてもひととおり解說すべきであつたかもしれないが，紙面の都合で割愛したことをおことわりしておく。またこの方法はどこかでのべたように一応，すぐれた理論的基盤と精密な統計理論の上にたつてはいるが計算が繁雑であるきらいがあり，また実際にはいつも必ずしもよく適合するものではなくそこには批判すべき多くの問題を含んでいる。とくにはじめにのべた 2 つの根本假定については再吟味してみなければならないと思われる。このことについては別に河野および内田 (18) の論文を参照していただけは幸いである。ともかくどんなすぐれた方法といえども無批判につかうことはもつとも危険なことといわねばならない。またここでは殺虫剤の有効度判定という場面のみにかぎつて解說したが，この方法の意味さえよく理解されたら，まだこのほかにもこれを応用する場面はいくらもあることに注意していただきたい。とくに将来，この方法が集団の生理を対称とする統計生理学の理論の展開のうえに大きな役割をえんずるだろうことを思うとき，みずからその期待の大きいのにおどろくものである。

おわりに本稿をかくにあたつて種々御教示くださつた内田教授，いろいろと便宜をあたえられた長沢純夫氏，さらには必要な計算いつさいを引きうけてくださつた高城美代子嬢に厚く御禮を申上げます。

文 献

(1) 大沢，長沢：防虫科学，**7. 8** & **9**, **1** (1947)
(2) Bliss, C. I.: Science, **79**, 38 & 409 (1934)
(3) —— : Ann. Appl. Biol., **22**, 134 (1935)
(4) —— : Quart. J. Pharm. Pharmac., **11**, 192 (19 8)
(5) 大沢：生物の集団と環境（岩波科学文献抄 **23**), 24 (1950)
(6) Shepard, H. H.: Nature, **134**, 323 (1934)
(7) Kisskalt, K.: Z. Hyg. Inf., **81**, 56 (1916)
(8) Trevan, J. W.: Proc. Roy. Soc. Lond., **101**, 483 (1927)
(9) Gaddum, J. H.: Med. Res. Coun. Spec. Rept., No. **183** (1933)
(10) Hemmingsen, A. M.: Quart. J. Pharm. Pharmac., **6**, 39 & 187 (1933)
(11) O'Kane, W. C., W. A. Westgate & L. C. Glover: N. H. Agr. Exp. Sta. Tech. Bull., **58**, 1 (1934)
(12) Finney, D. J.: Ann. Appl. Biol., **31**, 68 (1944)
(13) Sun, Y. P. & H. H. Shepard: J. Econ. Ent., **40**, 710 (1947)
(14) Abott, W. S.: J. Econ. Ent., **18**, 265 (1925)
(15) Bliss, C. I.: Ann. Appl. Biol., **22**, 307 (1935)
(16) —— : Ann. Appl. Biol., **24**, 815 (1937)
(17) —— : Ann. Appl. Biol., **26**, 585 (1939)
(18) 河野，内田：防虫科学 **15**, 123 (1950)

附表 I. プロビット変換表　(Bliss, 1935[*]より)

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	—	1.9098	2.1218	2.2522	2.3479	2.4242	2.4879	2.5427	2.5911	2.6344
1	2.6737	2.7096	2.7429	2.7738	2.8027	2.8299	2.8556	2.8799	2.9031	2.9251
2	2.9463	2.9665	2.9859	3.0046	3.0226	3.0400	3.0569	3.0732	3.0890	3.1043
3	3.1192	3.1337	3.1478	3.1616	3.1750	3.1881	3.2009	3.2134	3.2256	3.2376
4	3.2493	3.2608	3.2721	3.2831	3.2940	3.3046	3.3151	3.3253	3.3354	3.3454
5	3.3551	3.3648	3.3742	3.3836	3.3928	3.4018	3.4107	3.4195	2.4282	3.4368
6	3.4452	3.4536	3.4618	3.4699	3.4780	3.4859	3.4937	3.5015	3.5091	3.5167
7	3.5242	3.5316	3.5389	3.5462	3.5534	3.5605	3.5675	3.5745	3.5813	3.5882
8	3.5949	3.6016	3.6083	3.6148	3.6213	3.6278	3.6342	3.6405	3.6468	3.6531
9	3.6592	3.6654	3.6715	3.6775	3.6835	3.6894	3.6953	3.7012	3.7070	3.7127
10	3.7184	3.7241	3.7298	3.7354	3.7409	3.7464	3.7519	3.7574	3.7628	3.7681
11	3.7735	3.7788	3.7840	3.7893	3.7945	3.7996	3.8048	3.8099	3.8150	3.8200
12	3.8250	3.8300	3.8350	3.8399	3.8448	3.8497	3.8545	3.8593	3.8641	3.8689
13	3.8736	3.8783	3.8830	3.8877	3.8923	3.8969	3.9015	3.9061	3.9107	3.9152
14	3.9197	3.9242	3.9286	3.9331	3.9375	3.9419	3.9463	3.9506	3.9550	3.9593
15	3.9636	3.9678	3.9721	3.9763	3.9806	3.9848	3.9890	3.9931	3.9973	4.0014
16	4.0055	4.0096	4.0137	4.0178	4.0218	4.0259	4.0299	4.0339	4.0379	4.0419
17	4.0458	4.0498	4.0537	4.0576	4.0615	4.0654	4.0693	4.0731	4.0770	4.0808
18	4.0846	4.0884	4.0922	4.0960	4.0998	4.1035	4.1073	4.1110	4.1147	4.1184
19	4.1221	4.1258	4.1295	4.1331	4.1367	4.1404	4.1440	4.1476	4.1512	4.1548
20	4.1584	4.1619	4.1655	4.1690	4.1726	4.1761	4.1796	4.1831	4.1866	4.1901
21	4.1936	4.1970	4.2005	4.2039	4.2074	4.2108	4.2142	4.2176	4.2210	4.2244
22	4.2278	4.2312	4.2345	4.2379	4.2412	4.2446	4.2479	4.2512	4.2546	4.2579
23	4.2612	4.2644	4.2677	4.2710	4.2743	4.2775	4.2808	4.2840	4.2872	4.2905
24	4.2937	4.2969	4.3001	4.3033	4.3065	4.3097	4.3129	4.3160	4.3192	4.3224
25	4.3255	4.3287	4.3318	4.3349	4.3380	4.3412	4.3443	4.3474	4.3505	4.3536
26	4.3567	4.3597	4.3628	4.3659	4.3689	4.3720	4.3750	4.3781	4.3811	4.3842
27	4.3872	4.3902	4.3932	4.3962	4.3992	4.4022	4.4052	4.4082	4.4112	4.4142
28	4.4172	4.4201	4.4231	4.4260	4.4290	4.4319	4.4349	4.4378	4.4408	4.4437
29	4.4466	4.4495	4.4524	4.4554	4.4583	4.4612	4.4641	4.4670	4.4698	4.4727
30	4.4756	4.4785	4.4813	4.4842	4.4871	4.4899	4.4928	4.4956	4.4985	4.5013
31	4.5041	4.5070	4.5098	4.5126	4.5155	4.5183	4.5211	4.5239	4.5267	4.5295
32	4.5323	4.5351	4.5379	4.5407	4.5435	4.5462	4.5490	4.5518	4.5546	4.5573
33	4.5601	4.5628	4.5656	4.5684	4.5711	4.5739	4.5766	4.5793	4.5821	4.5848
34	4.5875	4.5903	4.5930	4.5957	4.5984	4.6011	4.6039	4.6066	4.6093	4.6120
35	4.6147	4.6174	4.6201	4.6228	4.6255	4.6281	4.6308	4.6335	4.6362	4.6389
36	4.6415	4.6442	4.6469	4.6495	4.6522	4.6549	4.6575	4.6602	4.6628	4.6655
37	4.6681	4.6708	4.6734	4.6761	4.6787	4.6814	4.6840	4.6866	4.6893	4.6919
38	4.6945	4.6971	4.6998	4.7024	4.7050	4.7076	4.7102	4.7129	4.7155	4.7181
39	4.7207	4.7233	4.7259	4.7285	4.7311	4.7337	4.7363	4.7389	4.7415	4.7441
40	4.7467	4.7492	4.7518	4.7544	4.7570	4.7596	4.7622	4.7647	4.7673	4.7699
41	4.7725	4.7750	4.7776	4.7802	4.7827	4.7853	4.7879	4.7904	4.7930	4.7955
42	4.7981	4.8007	4.8032	4.8058	4.8083	4.8109	4.8134	4.8160	4.8185	4.8211
43	4.8236	4.8262	4.8287	4.8313	4.8338	4.8363	4.8389	4.8414	4.8440	4.8465
44	4.8490	4.8516	4.8541	4.8566	4.8592	4.8617	4.8642	4.8668	4.8693	4.8718
45	4.8743	4.8769	4.8794	4.8819	4.8844	4.8870	4.8895	4.8920	4.8945	4.8970
46	4.8996	4.9021	4.9046	4.9071	4.9096	4.9122	4.9147	4.9172	4.9197	4.9222
47	4.9247	4.9272	4.9298	4.9323	4.9348	4.9373	4.9398	4.9423	4.9448	4.9473
48	4.9498	4.9524	4.9549	4.9574	4.9599	4.9624	4.9649	4.9674	4.9399	4.9724
49	4.9749	4.9774	4.9799	4.9825	4.9850	4.9875	4.9900	4.9925	4.9950	4.9975
50	5.0000	5.0025	5.0050	5.0075	5.0100	5.0125	5.0150	5.0175	5.0201	5.0226
51	5.0251	5.0276	5.0301	5.0326	5.0351	5.0376	5.0401	5.0426	5.0451	5.0476
52	5.0502	5.0527	5.0552	5.0577	5.0602	5.0627	5.0652	5.0677	5.0702	5.0728
53	5.0753	5.0778	5.0803	5.0828	5.0853	5.0878	5.0904	5.0929	5.0954	5.0979
54	5.1004	5.1030	5.1055	5.1080	5.1105	5.1130	5.1156	5.1181	5.1206	5.1231

附表 I. つづき

	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
55	5.1257	5.1282	5.1307	5.1332	5.1358	5.1383	5.1403	5.1434	5.1459	5.1484
56	5.1510	5.1535	5.1560	5.1586	5.1611	5.1637	5.1662	5.1687	5.1713	5.1738
57	5.1764	5.1789	5.1815	5.1840	5.1866	5.1891	5.1917	5.1942	5.1968	5.1993
58	5.2019	5.2045	5.2070	5.2096	5.2121	5.2147	5.2173	5.2198	5.2224	5.2250
59	5.2275	5.2301	5.2327	5.2353	5.2378	5.2404	5.2430	5.2456	5.2482	5.2508
60	5.2533	5.2559	5.2585	5.2611	5.2637	5.2663	5.2689	5.2715	5.2741	5.2767
61	5.2793	5.2819	5.2845	5.2871	5.2898	5.2924	5.2950	5.2976	5.3002	5.3029
62	5.3055	5.3081	5.3107	5.3134	5.3160	5.3186	5.3213	5.3239	5.3266	5.3292
63	5.3319	5.3345	5.3372	5.3398	5.3425	5.3451	5.3478	5.3505	5.3531	5.3558
64	5.3585	5.3611	5.3638	5.3665	5.3692	5.3719	5.3745	5.3772	5.3799	5.3826
65	5.3853	5.3880	5.3907	5.3934	5.3961	5.3989	5.4016	5.4043	5.4070	5.4097
66	5.4125	5.4152	5.4179	5.4207	5.4234	5.4261	5.4289	5.4316	5.4344	5.4372
67	5.4399	5.4427	5.4454	5.4482	5.4510	5.4538	5.4565	5.4593	5.4621	5.4649
68	5.4677	5.4705	5.4733	5.4761	5.4789	5.4817	5.4845	5.4874	5.4902	5.4930
69	5.4959	5.4987	5.5015	5.5044	5.5072	5.5101	5.5129	5.5158	5.5187	5.5215
70	5.5244	5.5273	5.5302	5.5330	5.5359	5.5388	5.5417	5.5446	5.5476	5.5505
71	5.5534	5.5563	5.5592	5.5622	5.5651	5.5681	5.5710	5.5740	5.5769	5.5799
72	5.5828	5.5858	5.5888	5.5918	5.5948	5.5978	5.6008	5.6038	5.6068	5.6093
73	5.6128	5.6158	5.6189	5.6219	5.6250	5.6280	5.6311	5.6341	5.6372	5.6403
74	5.6433	5.6464	5.6495	5.6526	5.6557	5.6588	5.6620	5.6651	5.6682	5.6713
75	5.6745	5.6776	5.6808	5.6840	5.6871	5.6903	5.6935	5.6967	5.6999	5.7031
76	5.7063	5.7095	5.7128	5.7160	5.7192	5.7225	5.7257	5.7290	5.7323	5.7356
77	5.7388	5.7421	5.7454	5.7488	5.7521	5.7554	5.7588	5.7621	5.7655	5.7688
78	5.7722	5.7756	5.7790	5.7824	5.7858	5.7892	5.7926	5.7961	5.7995	5.8030
79	5.8064	5.8099	5.8134	5.8169	5.8204	5.8239	5.8274	5.8310	5.8345	5.8381
80	5.8416	5.8452	5.8488	5.8524	5.8560	5.8596	5.8633	5.8669	5.8705	5.8742
81	5.8779	5.8816	5.8853	5.8890	5.8927	5.8965	5.9002	5.9040	5.9078	5.9116
82	5.9154	5.9192	5.9230	5.9269	5.9307	5.9346	5.9385	5.9424	5.9463	5.9502
83	5.9542	5.9581	5.9621	5.9661	5.9701	5.9741	5.9782	5.9822	5.9863	5.9904
84	5.9945	5.9986	6.0027	6.0069	6.0110	6.0152	6.0194	6.0237	6.0279	6.0322
85	6.0364	6.0407	6.0450	6.0494	6.0537	6.0581	6.0625	6.0669	6.0714	6.0758
86	6.0803	6.0848	6.0893	6.0939	6.0985	6.1031	6.1077	6.1123	6.1170	6.1217
87	6.1264	6.1311	6.1359	6.1407	6.1455	6.1503	6.1552	6.1601	6.1650	6.1700
88	6.1750	6.1800	6.1850	6.1901	6.1952	6.2004	6.2055	6.2107	6.2160	6.2212
89	6.2265	6.2319	6.2372	6.2426	6.2481	6.2536	6.2591	6.2646	6.2702	6.2759
90	6.2816	6.2873	6.2930	6.2988	6.3047	6.3106	6.3165	6.3225	6.3285	6.3346
91	6.3408	6.3469	6.3532	6.3595	6.3658	6.3722	6.3787	6.3852	6.3917	6.3984
92	6.4051	6.4118	6.4187	6.4255	6.4325	6.4395	6.4466	6.4538	6.4611	6.4684
93	6.4758	6.4833	6.4909	6.4985	6.5063	6.5141	6.5220	6.5301	6.5382	6.5464
94	6.5548	6.5632	6.5718	6.5805	6.5893	6.5982	6.6072	6.6164	6.6258	6.6352
95	6.6449	6.6546	6.6646	6.6747	6.6849	6.6954	6.7060	6.7169	6.7279	6.7392
96	6.7507	6.7624	6.7744	6.7866	6.7991	6.8119	6.8250	6.8384	6.8522	6.8663
97	6.8808	6.8957	6.9110	6.9268	6.9431	6.9600	6.9774	6.9954	7.0141	7.0335
	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
98.0	7.0537	7.0558	7.0579	7.0600	7.0621	7.0642	7.0663	7.0684	7.0706	7.0727
98.1	7.0749	7.0770	7.0792	7.0814	7.0836	7.0858	7.0880	7.0902	7.0924	7.0947
98.2	7.0969	7.0992	7.1015	7.1038	7.1060	7.1084	7.1107	7.1130	7.1154	7.1177
98.3	7.1201	7.1224	7.1248	7.1272	7.1297	7.1321	7.1345	7.1370	7.1394	7.1419
98.4	7.1444	7.1469	7.1494	7.1520	7.1545	7.1571	7.1596	7.1622	7.1648	7.1675
98.5	7.1701	7.1727	7.1754	7.1781	7.1808	7.1835	7.1862	7.1890	7.1917	7.1945
98.6	7.1973	7.2001	7.2029	7.2058	7.2086	7.2115	7.2144	7.2173	7.2203	7.2232
98.7	7.2262	7.2292	7.2322	7.2353	7.2383	7.2414	7.2445	7.2476	7.2508	7.2539
98.8	7.2571	7.2603	7.2636	7.2668	7.2701	7.2734	7.2768	7.2801	7.2835	7.2869
98.9	7.2904	7.2938	7.2973	7.3009	7.3044	7.3030	7.3116	7.3152	7.3189	7.3226
99.0	7.3263	7.3301	7.3339	7.3378	7.3416	7.3455	7.3495	7.3535	7.3575	7.3615
99.1	7.3656	7.3698	7.3739	7.3781	7.3824	7.3867	7.3911	7.3954	7.3999	7.4044
99.2	7.4089	7.4135	7.4181	7.4228	7.4276	7.4324	7.4372	7.4422	7.4471	7.4522
99.3	7.4573	7.4624	7.4677	7.4730	7.4783	7.4838	7.4893	7.4949	7.5005	7.5063
99.4	7.5121	7.5181	7.5241	7.5302	7.5364	7.5427	7.5491	7.5556	7.5622	7.5690
99.5	7.5758	7.5828	7.5899	7.5972	7.6045	7.6121	7.6197	7.6276	7.6356	7.6437
99.6	7.6521	7.6606	7.6693	7.6783	7.6874	7.6968	7.7065	7.7164	7.7265	7.7370
99.7	7.7478	7.7589	7.7703	7.7821	7.7944	7.8070	7.8202	7.8338	7.8480	7.8627
99.8	7.8782	7.8943	7.9112	7.9291	7.9478	7.9677	7.9889	8.0114	8.1357	8.0618
99.9	8.0902	8.1214	8.1559	8.1947	8.2389	8.2905	8.3528	8.4316	8.5401	8.7190

附表 II. 「補正プロビット」及び「重み」の算定に必要な恒数表 (Bliss, 1938 より)

Y	Y+Q/Z	1/Z	Y−P/Z	Z²/PQ	Y+Q/Z	1/Z	Y−P/Z	Y
5.0	6.253	2.507	3.747	.6366	6.253	2.507	3.747	5.0
5.1	6.259	2.519	3.740	.6343	6.260	2.519	3.741	4.9
5.2	6.276	2.557	3.719	.6274	6.281	2.557	3.724	4.8
5.3	6.302	2.622	3.680	.6161	6.320	2.622	3.698	4.7
5.4	6.336	2.715	3.620	.6005	6.380	2.715	3.664	4.6
5.5	6.376	2.840	3.536	.5810	6.464	2.840	3.624	4.5
5.6	6.423	3.001	3.422	.5579	6.578	3.001	3.577	4.4
5.7	6.475	3.203	3.272	.5316	6.728	3.203	3.525	4.3
5.8	6.531	3.452	3.079	.5026	6.921	3.452	3.469	4.2
5.9	6.592	3.758	2.834	.4714	7.166	3.758	3.408	4.1
6.0	6.656	4.133	2.523	.4386	7.477	4.133	3.344	4.0
6.1	6.723	4.590	2.132	.4047	7.867	4.590	3.277	3.9
6.2	6.793	5.150	1.643	.3703	8.357	5.150	3.207	3.8
6.3	6.865	5.835	1.030	.3359	8.970	5.835	3.135	3.7
6.4	6.939	6.679	0.261	.3020	9.739	6.679	3.061	3.6
6.5	7.016	7.721	—	.2691	—	7.721	2.984	3.5
6.6	7.094	9.015	—	.2375	—	9.015	2.906	3.4
6.7	7.174	10.633	—	.2077	—	10.633	2.826	3.3
6.8	7.255	12.666	—	.1799	—	12.666	2.745	3.2
6.9	7.338	15.340	—	.1544	—	15.340	2.662	3.1
7.0	7.421	18.522	—	.1311	—	18.522	2.579	3.0
7.1	7.506	22.736	—	.1103	—	22.736	2.494	2.9
7.2	7.592	28.189	—	.0918	—	28.189	2.408	2.8
7.3	7.679	35.302	—	.0756	—	35.302	2.321	2.7
7.4	7.766	44.654	—	.0617	—	44.654	2.234	2.6
7.5	7.854	57.05	—	.0498	—	57.05	2.146	2.5
7.6	7.943	73.62	—	.0398	—	73.62	2.057	2.4
7.7	8.033	95.96	—	.0314	—	95.96	1.967	2.3
7.8	8.123	126.34	—	.0246	—	126.34	1.877	2.2
7.9	8.213	168.00	—	.0190	—	168.00	1.787	2.1
8.0	8.305	225.6	—	.0146	—	225.6	1.695	2.0
8.1	8.396	306.1	—	.0110	—	306.1	1.604	1.9
8.2	8.488	419.4	—	.0083	—	419.4	1.512	1.8
8.3	8.581	580.5	—	.0061	—	580.5	1.419	1.7
8.4	8.673	811.5	—	.0045	—	811.5	1.327	1.6
8.5	8.767	1145.9	—	.0033	—	1145.9	1.233	1.5
8.6	8.860	1634.3	—	.0024	—	1634.3	1.140	1.4
8.7	8.954	2354.0	—	.0017	—	2354.0	1.046	1.3
8.8	9.048	3425.8	—	.0012	—	3425.8	0.952	1.2
8.9	9.142	5032.7	—	.0008	—	5032.7	0.858	1.1
9.0	9.237	7473.8	—	.0006	—	7473.8	0.763	1.0
9.1	9.332	11198.2	—	.0004	—	11198.2	0.668	.9
9.2	9.426	16977.9	—	.0003	—	16977.9	0.574	.8
9.3	9.521	25974.0	—	.0002	—	25974.0	0.479	.7
9.4	9.617	40160.6	—	.0001	—	40160.6	0.383	.6
9.5	9.706	62500.0	—	.0001	—	62500.0	0.294	.5

附表 III. $P_r=0.05$ のときの自由度(n)とχ^2の値

n	χ^2	n	χ^2	n	χ^2
1	3.841	11	19.675	21	32.671
2	5.991	12	21.026	22	33.924
3	7.815	13	22.362	23	35.172
4	9.488	14	23.685	24	36.415
5	11.070	15	24.996	25	37.652
6	12.592	16	26.296	26	38.885
7	14.067	17	27.587	27	40.113
8	15.507	18	28.869	28	41.337
9	16.919	19	30.144	29	42.557
10	18.307	20	31.410	30	43.773

附表 IV. $Pr=0.05$ のときの自由度(n)と t の値

n	t	n	t	n	t
1	12.706	11	2.201	21	2.080
2	4.303	12	2.179	22	2.074
3	3.182	13	2.160	23	2.069
4	2.776	14	2.145	24	2.064
5	2.571	15	2.131	25	2.060
6	2.447	16	2.120	26	2.056
7	2.365	17	2.110	27	2.052
8	2.306	18	2.101	28	2.048
9	2.262	19	2.093	29	2.045
10	2.228	20	2.086	30	2.042