

| | |
|----------|---|
| 氏名 | 角 大 輝 |
| 学位(専攻分野) | 博士 (人間・環境学) |
| 学位記番号 | 人 博 第 52 号 |
| 学位授与の日付 | 平成 11 年 3 月 23 日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第 4 条第 1 項該当 |
| 研究科・専攻 | 人間・環境学研究科人間・環境学専攻 |
| 学位論文題目 | Dynamics of rational semigroups and Hausdorff dimension of the Julia sets 有理半群の力学系とそのジュリア集合のハウスドルフ次元について |

(主査)

論文調査委員 教授 宇敷重廣 教授 浅野 潔 助教授 木上 淳

論 文 内 容 の 要 旨

リーマン球面上の有理関数から成る集合で、写像の合成を乗法として半群をなすものを、有理半群とよぶ。特に、有限個の有理関数でその半群のすべての元を生成することができる場合、その有理半群は有限生成であるという。リーマン球面のそれぞれの点について、その点の近傍において、その有理半群に属する有理関数の全体は関数の族をなしているが、この関数族が同等連続となるように近傍を選ぶことができるとき、その点は正規点であるという。正規点全体のなす集合をファトゥー集合といい、正規でない点全体のなす集合をジュリア集合という。ファトゥー集合においては、この関数族の振舞いは穏やかであり、ジュリア集合は、有理半群に属する関数の特異性を担っている。有限生成有理半群の一般的な性質として、ジュリア集合は後方自己相似性を持つ。

申請者は、この事実に基づき、有理半群のジュリア集合の持つ諸性質と従来のフラクタル幾何学での自己相似集合の持つ諸性質との関連を調べた。いわゆる自己相似集合は集合全体を相似変換によって縮小したものがその集合自身の部分集合になり、そうした部分を合わせて全体をなす。つまり、複数の縮小写像による像の和集合が全体に等しくなる。有理半群の場合では、逆写像が縮小写像の役割を果たす。逆写像は、一般に一価の関数ではないが、集合を集合に移す集合関数として、自己相似性を定式化できるのである。可逆な有理関数だけからなる有理半群の場合には、通常の自己相似性に帰着する。有限生成の有理半群において、「(後方) 開集合条件」を仮定すれば、ジュリア集合は内点を持たないということ、有限生成の場合、ファトゥ集合にアトラクターが存在するならば、生成元の摂動に応じてジュリア集合が連続に依存することを示した。ここでいう連続性は、リーマン球面内のコンパクト集合全体のなす空間でのハウスドルフ距離から定義される位相に関するものである。

一般的に有理半群といっても、あらゆる有理半群に対して成り立つ性質も重要であるが、適切な概念を設定して、面白い性質をもった標準的な有理半群のクラスを定式化し、考察する必要がある。力学系やクライン群における諸概念をもとにして、そうしたクラスとして、双曲型、劣双曲型、半双曲型、拡大型等の諸概念を定義し、有限生成有理半群においては、双曲型と拡大型はほぼ同値であることを示した。劣双曲型、半双曲型などのクラスにおいては、ファトゥ集合に遊走領域のないことを示し、特に、有限生成性をさらに仮定するならば、ファトゥ集合にアトラクターが存在することを証明した。そのことから種々の結果が得られ、それらを用いて半双曲型有限生成有理半群がある種の開集合条件を満たせばそのジュリア集合の2次元ルベグ測度が0になることを明らかにした。また有限生成有理半群か半双曲性をもつための十分条件を得た。

次にジュリア集合のハウスドルフ次元について調べた。ハウスドルフ次元は集合の複雑さを計る最も基本的な尺度である。そのための道具として、一般の可算個の濃度の有理半群について、劣等角測度を構成した。強い開集合条件を仮定すれば、等角測度を構成することも出来る。有限生成有理半群において、(1)劣双曲型かつ超吸引不動点がジュリア集合にないとき、または(2)半双曲型かつジュリア集合に内点がないとき、ジュリア集合のハウスドルフ次元は、劣等角測度が構成出来るよ

うな指数の下限で上から押えられ、それはさらにポアンカレ級数が収束するような指数の下限で上から押えられることを証明した。証明にはファトウ集合上にアトラクターが存在することから得られる種々の結果と、フラクタル幾何学の一般論を用いた。また、有限生成有理半群が拡大型のときには、生成系に付随する歪積上で、エルゴード理論の一つの手法である「熱力学形式」を用いてジュリア集合のハウスドルフ次元を上から評価することも出来る。なお、その不等式は、さらに「生成元によるジュリア集合の引き戻しが互いに交わらない」という条件をつけられ、等式になることを示し、ハウスドルフ次元は2より真に小さくなることを明らかにした。

有限生成有理半群に付随する歪積について、自己相似測度の一意性を示し、その測度論的エントロピーを求め、とくに位相的エントロピーが生成元の次数の和の対数となることを示した。これを応用して、生成元によるジュリア集合の引き戻しが互いに交わらない場合における、有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元の下からの評価を得た。

論文審査の結果の要旨

本学位申請論文は、有理半群と呼ばれる一つの数学の分野を開拓した、意欲的な論文である。カオス理論やフラクタル幾何学など、複雑な現象を取り扱う新しい数学が近年発展してきているが、そうした複雑な挙動を生成するメカニズムの基本的な構造として、力学系とよばれる数学的対象と、自己相似性を生成する縮小写像系がある。カオス理論では時間的な不規則挙動を主な研究対象とし、フラクタル幾何学では空間的な不規則性の解明をめざす。半群を考えることで、これらを統一的に扱うことができる。とくに、複素有理関数が定める、リーマン球面上の写像からなる半群は、複素力学系とクライン群の概念を統合する、豊かな数学的構造をもった研究対象であり、こうした研究対象を発見し、研究に着手し、基本的理論を構築したことは、高く評価できる。各章はそれぞれ一つの論文になっているので、章ごとに述べる。

第1章 双曲型有理半群のダイナミクス

有理関数のなす半群の数学的な定式化を行ない、有理半群のもつ基本的な諸性質を解明した。この内容は、この分野の基礎となるものである。複素力学系の理論においてはジュリア集合と呼ばれるものがもっとも重要な基本概念であるが、有理半群についてもそれと類似の集合が定義される。これを有理半群のジュリア集合となづけ、それが後方自己相似性を持っていることに着目し、フラクタル幾何学との関係を調べた。ジュリア集合は、半群の諸性質を特徴づける特異集合であるが、それが半群を連続的に変化させたときに、どのように変化するのであろうかということに関連して、半群が有限生成で、アトラクタがジュリア集合に含まれない場合、生成元とジュリア集合が連続に対応することを証明した。これは、ある種の構造安定性を示すものであり、研究対象として自然なものであることを示している。

第2章 双曲型有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元

ジュリア集合の複雑さの度合を表すハウスドルフ次元について考察を行っている。一般にフラクタル集合のハウスドルフ次元を求めるのは、簡単な自己相似性を持っていて容易に計算できる場合を除いて、極めて困難である。半群は、力学系とクライン群を統合したものであるので、そのそれぞれの分野で開発された手法を他方に応用することができる。おもに複素力学系においてハウスドルフ次元の研究に使われていた劣等角測度の概念を導入し、その測度が収束するような指数によってジュリア集合のハウスドルフ次元に対する上からの評価を得ている。また主にクライン群の極限集合のハウスドルフ次元の評価に使われていたポアンカレ級数の指数によっても同様の評価を得ている。これは、これらの分野をつなぐ架け橋となるもので、いわゆるサリバンの辞書とよばれている、二つの分野の類似性の謎の解明に寄与するものである。

第3章 劣双曲型および半双曲型の有理半群のダイナミクス

双曲型の有理半群は比較的構造安定であり、第2章において、従来の手法を応用することである程度その構造を解明することに成功している。この章では、そうした安定性や連続性が破れる状況について考察をすすめている。双曲型が破れる状況の内、最も典型的なものとして、劣双曲型および半双曲型という概念を設定し、半群の有限生成性との関わりと共に、遊走領域の存在の問題、アトラクタの存在の問題などを取り扱っている。クライン群における拡大型の概念と複素力学系における双曲型の概念が、半群を通じて、ほぼ同じ概念であることが示された。このことによって、有理半群の分岐理論への展開が準備されたといえる。

第4章 有限生成有理半群に由来する歪積写像

やや抽象的な歪積写像という概念を導入することによって、有理半群のエルゴード理論的な取り扱いが可能になり、エルゴード理論との障壁をとりはらっている。このことによって、新しい領域を切り開くと共に、有理半群のフラクタル理論をほぼ完成したという評価ができる。

第5章半双曲型超越半群

前章までは有理半群を扱っていたのに対し、この章では超越関数の作る半群についての理論を構築している。有理関数はリーマン球面からそれ自身への複素関数であるのに対し、超越関数は、複素平面からそれ自身への複素関数である。リーマン球面はコンパクトであるので、コンパクトでない複素平面よりも、数学的な扱いは、はるかに簡単である。超越関数についても、様々な困難を伴いながらも、半群理論の基礎をかためたものである。この章はゲッチンゲン大学のクリーテ教授との共同研究の成果である。

以上いずれの章もそのもととなっているのは独創的な論文であり、第1章及び第2章に相当する部分はずでに国際的な学術雑誌に掲載されており、他の章も国際的な学術雑誌に掲載される水準に達している。よって本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成11年1月18日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行なった結果、合格と認めた。