

バクテリアコロニーにおける
fingering pattern の形成とそのダイナミクス

狐崎 創 (So Kitsunezaki)¹

平成9年 2月 26日

¹京都大学理学部 物理第一教室 非線形動力学研究室、E-mail: kitsune@ton.scphys.kyoto-u.ac.jp

Abstract

finger pattern と呼ばれる樹木状パターンは物理系、生物系を問わず多くの系で現れるが、中でも多様なパターンを作るバクテリアコロニーについてはまだその形成機構ははっきりしていない。ここでは、まずバクテリアの硬い寒天表面での運動のし難さを非線形拡散として取り入れたコロニー成長の偏微分方程式モデルを新しく提案する。このモデルは実験のパターンを定性的にはかなりよく再現するだけでなく、界面の運動方程式を導出して他の既知の finger model との比較することが可能である。

次に、十分発達した finger pattern の複雑なダイナミクスを調べるために各 finger の先端を運動、成長する要素と見て、これらの要素の運動の軌跡として finger pattern を捉える見方を提案する。このように見た時、要素が分裂して系の自由度が変化するのが finger pattern の特徴である。我々は1次元空間での簡単な分裂要素モデルを提案し、分裂が系のダイナミクスに与える影響を調べた。分裂をルールとして導入すると finger pattern で観察される様々な時空乱流状態が現れた。この系の性質は従来の力学系の方法を拡張して調べることができる。また、長距離相互作用の極限で fractal が現れる原因が定性的に説明された。

目次

1	Introduction	2
2	バクテリアコロニーにおける finger の形成	4
2.1	実際のバクテリアコロニー ~ 実験の review ~	4
2.2	コロニー成長の偏微分方程式モデル	6
2.3	コロニー界面の運動	11
2.3.1	界面の運動方程式の導出	11
2.3.2	議論: 界面の運動としてみたコロニー成長	15
2.4	発達した finger の相互作用	17
2.4.1	finger の作る濃度場	18
2.4.2	finger の時間発展	19
3	fingering pattern のダイナミクス	22
3.1	1D fingering model	22
3.2	分裂する離散要素系の作るパターン	24
3.2.1	一様乱流状態	24
3.2.2	非一様状態 ~ 樹木状構造とフラクタル ~	27
3.2.3	分裂のない定常状態と Spatio-temporal intermittency	29
3.3	乱流状態の力学的特徴	32
3.3.1	一様定常状態の線形安定性	32
3.3.2	リヤプノフ数	34
3.3.3	一様乱流状態の力学的な構造	37
3.4	長距離相互作用の極限	38
4	結論 & 議論	45
5	謝辞	46
A	一定速度で進行する直線界面の線形安定性	47
B	分裂、消滅時のリヤプノフベクトルの変化	49

1 Introduction

細菌の個体は大きさ約数 μm 、分子よりはるかに大きいが目には見えない。しかし、彼らは分裂して個体数を増やしマクロな大きさの集団を形成する。例えば、ゼリーを店から買ってきてフタを空けて2~3週間食わずに放置すれば誰でもゼリーの表面に数種類の細菌コロニーが円形に広がっているのを観察することができるだろう。これらのコロニーは普通、1平方ミリメートル当たり10万匹を越える数の細菌で作られているので、パターン形成は決定論的なモデルでは説明できると考えられる。

好条件では単に円形に広がるコロニーも悪条件、例えばほとんど栄養分を含まないゼリーで成長させると多様なパターンを形成する。代表的なものに *finger* pattern と呼ばれる樹木状パターンがある。その1本1本の枝（以降、*finger* と呼ぼう）はやはり非常に多くの細菌の集団からなり、それらが木が育つように成長、分裂を繰り返し互いに相互作用して複雑なパターンをつくり出す。このような樹木状パターンは他のさまざまな系でも観察されている。物理系では、*viscous fingering*、電析（金属葉）、結晶成長、放電現象、亀裂などをあげることができるし [31]、生物系では、先ほどのゼリーにも同居するであろうカビのコロニー [14] や植物の根、あるいは樹木そのもののパターンも広い意味では *finger* pattern に含めることができよう。このような系の多様性から、我々は *finger* pattern の基本的な特徴は個々の系のミクロな性質には依存しないより普遍的なダイナミクスで説明できるのではと期待するが、そのようなより高次のダイナミクスへの縮約方法は現在までのところ見いだされていない。

本研究では細菌コロニーにおいてどのように *finger* が形成され、多数の *finger* がどのようなダイナミクスでパターンをつくり出すかを考察する。細菌コロニーの *finger* pattern には 1) 基本的に栄養濃度のつくる一変数の拡散場に支配されて成長する、2) 微視的過程の基本単位である細菌が既に統計力学的にはマクロな大きさである、3) 実験的には微視的過程を顕微鏡で直接観察できる、という特徴がある。細菌コロニーのパターン形成には多くの興味深い生物学的な問題も含まれるが、本論文ではそれらには全く触れず、むしろ物理系としてとらえる立場で細菌コロニーを扱うことにする。まず実際の実験をとりあげ、章を追っていくにしたがって、理想化された状況でのより一般的な話題を扱うことにしよう。

2章では、きれいな実験結果のある枯草菌コロニーのパターン形成 [9, 22, 32, 33] を研究対象として取り上げ、細菌コロニーにおける *finger* の形成を議論する。我々はまず実験結果を定性的に再現する偏微分方程式モデルを提案する。近年、実験の進展に伴い、いくつかのモデル [2, 3, 13, 11, 19] が提案されているが *viscous fingering* のような既知の物理系の *finger* pattern と比較できるような簡潔な形では議論されていない。我々のモデルはいくつかの条件のもとで界面の運動方程式に還元でき、それを用いて細菌コロニーでの *finger* の機構、既知の物理系との共通点、相違点を明らかにすることができる。

偏微分方程式や界面の運動方程式は実験の再現や *finger* 初期の不安定性を議論するには適当であるが、*finger* が十分発達した後で複雑な樹木状パターンがどのようにして形成されるのかまではわからない。2章後半では、*finger* が発達して十分 localize しているという理想的な状況を考えて *finger* 同士の相互作用について考察し、*finger* pattern の複雑なパターン形成には *finger* の分裂が必要であることを見る。

3章では個々の *finger* の先端を運動、成長する要素とみなし、多体系のダイナミクスとして *finger* pattern をとらえることを試みる。*Finger* pattern を dynamical な視点でとらえた

実験、理論はまだ非常に少ない [25, 18, 29]。この目的のために我々は問題を非常に単純化して、1次元空間で相互作用をして運動するごく簡単な離散要素モデルを考える。個々の要素に分裂する性質を与えると、このモデルはさまざまな *fingering pattern* を再現することがわかる。

このモデルは要素数が増えることが特徴であるが、従来の力学系と同様な手法で系を調べることができる。3章後半では *fingering pattern* に見られる乱流状態の特徴を調べ、フラクタル的な空間構造が現れる原因を考察する。4章ではこの研究を総括し、未解決な問題について整理してみたい。

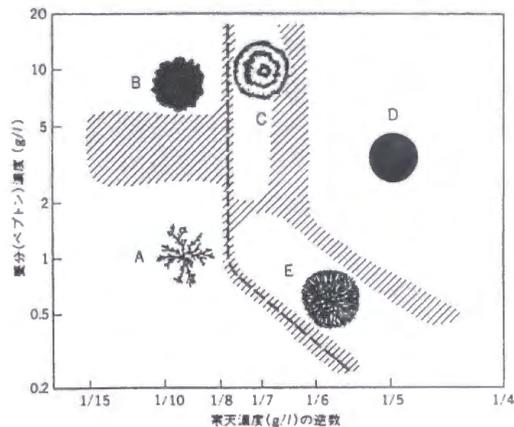


図 1: 枯草菌コロニーの相図 (中央大学、松下研究室の実験 [16])

2 バクテリアコロニーにおける finger の形成

ここでは個々のバクテリアを微視的に見ることはせず、個体数密度に対する偏微分方程式でバクテリアコロニーの成長を記述することにしよう。硬い寒天上でバクテリアが単独では動けなくなるという観察事実を再現するために、非線形拡散を導入したのが我々のモデルの特徴であり、非線形拡散を導入すると界面の運動方程式を systematic な方法で導出でき、それによって他の既知の物理系の fingering model との共通点、相違点が明らかになる。後半では fingering pattern が十分発達した後のダイナミクスを考察する。ここで、我々は個々の finger をパターン of 1 要素と捉える見方を取り、finger が分裂せず個数が増えない場合について複数の finger のダイナミクスの性質を調べる。

2.1 実際のバクテリアコロニー ~ 実験の review ~

理論の話に入る前に実際のバクテリアの fingering pattern について実際の現象に対するイメージをつくることにしよう。ここでは、この節の研究の対象である枯草菌コロニーの実験 [22, 32, 33] を中心に概説しよう。

1 匹の枯草菌は長さ約 $5 \mu\text{m}$ 、幅約 $1 \mu\text{m}$ の円筒形で複数の鞭毛を持つ。枯草菌コロニーの実験では、シャーレの中に作った一様に養分を含ませた寒天の表面にバクテリアを点状に接種し恒温恒湿器内でコロニーを培養する。バクテリアは寒天表面で鞭毛を使ってかなりランダムに動き回りながら養分を食べて増殖し数 cm 大のコロニーを作る。実験のコントロールパラメータは寒天を作る時に溶かした寒天の濃度 C_0 と養分の濃度 n_0 でそれ以外の培養条件は固定してある。寒天濃度が高いと寒天は硬くなり枯草菌はほとんど動けなくなるが、寒天濃度が低く寒天が軟らかいとバクテリアは非常に活発に運動する。寒天が軟らかいときのバクテリアの拡散係数は数 $100 \mu\text{m}^2/\text{s}$ であることが顕微鏡観察で知られている。一方、養分濃度はバクテリアの運動だけでなく増殖率も変化させる。水溶液中の培養のデータから養分が十分多いときには分裂は $0.5 \sim 1$ 時間に一回おきていると推定されている。養分濃度が低くなると増殖率と活動度が低下し、ついにはバクテリアは一切の活動を停止して、芽胞と呼ばれる冬眠用の耐久力のある形態に変化する。この 2 つのパラメータを変化させて培養して得られるバクテリアコロニーの形態について図 1 のよ



図 2: A 領域 (DLA)[32]

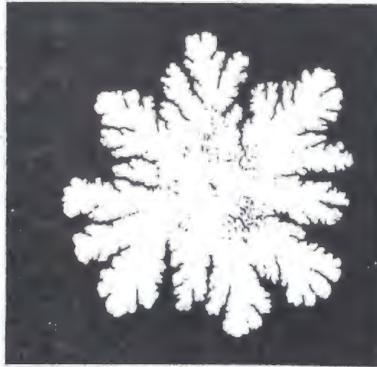


図 3: A から B への過程 [32]

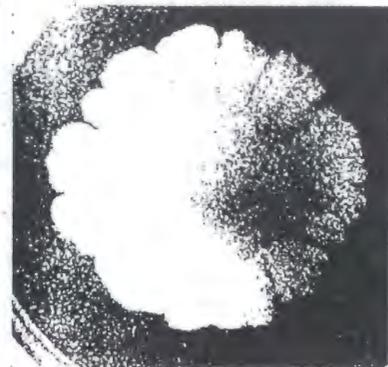


図 4: B 領域 [32]

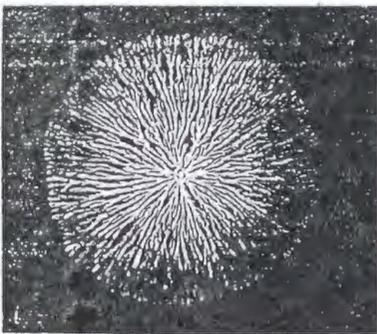


図 5: E 領域 (DBM)[16]

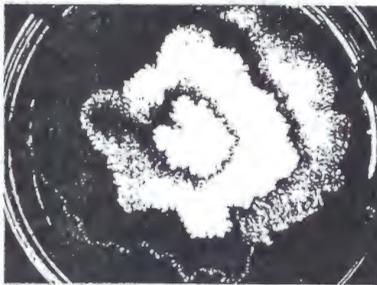


図 6: C 領域 (ring)[32]

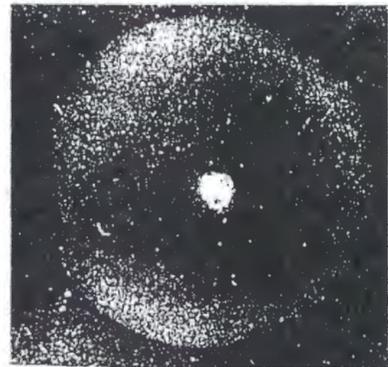


図 7: D 領域 (円形)[32]

うな相図が得られている。

この相図では縦軸が初期養分濃度 n_0 、横軸が寒天濃度の逆数 $1/C_0$ であるので、右上にいくほど養分が豊富で動きやすく細菌にとってはいい環境になる。おおまかにパターンは図 2~7 のような A~E 5 つに分類されている [16, 32]。養分が乏しくほとんど動けない最悪の条件では A のようなフラクタル的な *fingering pattern* が約 1 カ月の培養で得られる。このパターンはフラクタル次元の測定からほぼ *diffusion limited aggrigation* (DLA) シミュレーション [34] で得られるパターンと同じであることが知られている [22]。DLA パターンは養分濃度を上げて B 領域に入るに従って *finger* が太くなって合わさり、コロニー界面に凹凸があるコンパクトなパターンとなる。コロニーの成長速度も上がり B パターンは約 1 週間でできあがる。C~E は鞭毛のない枯草菌を作って行なった実験から、細菌が運動している場合にのみ現れるパターンであることがわかっている。細菌にとってもっとも条件のいい D 領域では滑らかな円形の *disk* パターンが薄く広がり約半日で大きくなる。中間的な E 領域ではほぼ滑らかな円形の外形をもつびっしりと詰まった *dense branching morphology* (DBM) と呼ばれる *fingering pattern* が生じる。栄養濃度を下げると *finger* 同士の間隔は広がるが A のようなフラクタルパターンにはならず枝の分岐も少ない。C 領域ではやや不規則な *ring* 状のパターンが現れる。それぞれの同心円はコロニー外縁の成長に伴って形成され、時間的には静止している。1 つ 1 つの同心円が DBM のような細かな *finger* でできていることも多い。E、C の領域ではコロニーは 2 ~ 3 日かかって成長する。

コロニーの中の細菌の状態は光学顕微鏡で容易に観察できる。図 8~10 にコロニー外縁



図 8: B 領域のコロニー界面の顕微鏡写真 (細菌はつながってスパゲッティ状) [32]

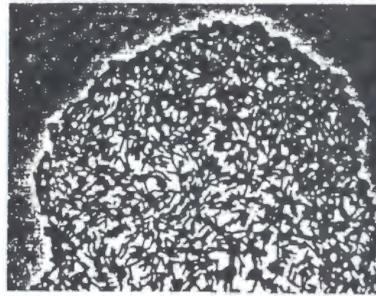


図 9: E 領域のコロニーの成長する finger 先端の顕微鏡写真 [16]

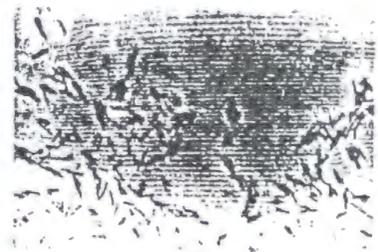


図 10: D 領域のコロニー界面の顕微鏡写真 (小さな棒状のものが細菌 1 個体) [16]

の界面付近の顕微鏡写真を載せた [16, 32]。A、B では細菌はコロニーのどの場所でもほとんど動かず、何層にも重なりあっている。A は界面のごく近くを除いてほぼ全体が芽胞状態にあるが、B の界面付近は細菌が縦につながってスパゲッティ状に絡まりあっている。A、B は細菌の増殖にともなって界面が内部から前に押し出されることでコロニーが成長する。E では細菌は重ならず 1 層で広がってコロニーを作っている。細菌はどこでも込み合っているが、栄養の豊富なコロニーの外縁部では活発に運動しており、栄養を食べ尽くした内部では動いていない。細菌が活発に運動していてもコロニーの界面は非常にシャープである。良く見ると界面はほとんど動かなくなった細菌数匹でできていて、内側から突っ込んできた細菌がわずかに界面を進めて動かなくなってしまうというプロセスを繰り返してコロニーが成長している。これは、寒天が硬いために細菌が単独で寒天上を動き回るのは困難で、他の細菌が通って道ができていたり、集団になって運動したりしなければ活発に運動できないためだと考えられている。C は内部では数層になることもあるがもっとも外側の ring の先端では細菌の状態は E と良く似ている。D でも細菌は 1 層でコロニーを作っているが、その密度は低くて比較的散らばっている。細菌はコロニーのだいぶ内側まで活発に動いている。肉眼で見るとコロニーの界面は滑らかな円であるが、顕微鏡で見るとはっきりした境界はなく数 $100\mu\text{m}$ の幅を持っている。E と異なり界面でも細菌はかなり自由に動き回ってコロニーを広げている。

このような状況はある程度まではどの細菌にも共通しているものと思われる。特に、DLA パターンのような *fingering pattern* は大腸菌 (*E.coli*)、サルモネラ菌、霊菌、プロテウス (*Proreus mirabilis*) など、それぞれの種にとって非常に悪い培養条件下で形成されることが確認されている (図 11 はサルモネラ菌の *fingering pattern* [17])。しかしながら、中間的な培養条件では種によって出現するパターンもかなり異なる。例えば、大腸菌 (*E.coli*) はきれいに整列したスポット状のパターンを作るし、プロテウス (*Proreus mirabilis*) では滑らかな同心円パターンや時間空間的に乱れた雲の衛星写真のようなパターンが見つかっている。また、図 12 のように同じ枯草菌で現れる *fingering pattern* でも株によって見かけがやや異なるのが普通である [17]。

2.2 コロニー成長の偏微分方程式モデル

前節で述べた枯草菌コロニーのパターン形成に対してはこの 1~2 年でいくつかのモデルが提案されてきている [2, 3, 13, 11, 19]。A 領域を DLA シミュレーション [34]、D 領域を Fisher 方程式で説明する立場は従来からあり実験でもある程度まで検証されているが、これらのモデルはこの



図 11:
サルモネラ菌 (*S.marcescense*) の fin-
gering pattern [17]

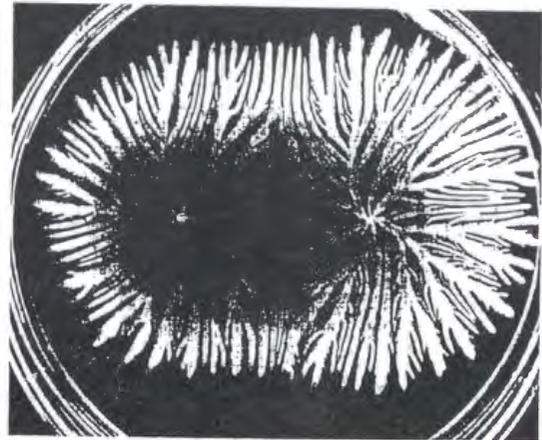


図 12: 別の枯草菌でできる fingering pat-
tern (2つのコロニーがあるのは最初に2
点に接種したため。) [17]

全く異なる2つのモデルを統一して、相図全体を再現することを目標にしている。現在のところ、偏微分方程式モデルあるいはバクテリアの小集団を1要素としてそれらの運動と増殖を lattice 上での適当なルールとして与えるモデルを Ben-Jacob、松下、川崎、三村らがそれぞれ独立に提案している [2, 3, 13, 11, 19]。これらは A ~ E のすべてを再現するモデルではないが、それぞれいくつかのパターンの再現には成功している。

我々はバクテリアコロニーのパターンの再現するとともに、既知の物理系の fingering モデルとの比較をしたい。ここでは、前節で述べたバクテリアのミクロな運動状態の違いを定性的に採り入れて、比較的解析の容易な偏微分方程式モデルを提案する。

モデルを簡単にするために、バクテリアの状態を活動状態と不活動状態の2つに分けて考え、それぞれの状態にあるバクテリアの個体数密度を $b(x, t)$ 、 $a(x, t)$ としよう。これは、他のいくつかのモデル [3, 19] でも使われている方法であり、不活動状態は芽胞状態と芽胞になりかけの状態に対応するものと考えてバクテリアは増殖、運動、養分の消費などいっさいの活動を行っていないとする。我々はさらに、活動状態にあるバクテリアの運動は養分濃度 $n(x, t)$ や不活動なバクテリアの密度 $a(x, t)$ には無関係にランダムに運動すると仮定しよう。養分濃度に対する依存性は活動状態のバクテリアの増殖率と不活動状態への転換率に含めて採り入れることにする。芽胞状態になったバクテリアは周囲の栄養濃度が増加すると数時間かけて再び活動状態に戻るが、この実験では栄養がなくなったところに再び栄養が供給されるという状況は起きないので不活動状態から活動状態への変化は無視できる。以上の点を考慮してコロニー成長の方程式を以下のように与える。

$$\partial_t b = \nabla[D(b)\nabla b] + g(n, b) - h(n, b) \quad (1a)$$

$$\partial_t a = h(n, b) \quad (1b)$$

ここで、 ∇ は寒天表面での2次元の空間微分、 $D(b)$ は活動状態にあるバクテリアの拡散係数、 $g(n, b)$ 、 $h(n, b)$ はそれぞれバクテリアの増殖と不活動状態への転換を表す。

養分は初期に一様な濃度 $n(\mathbf{x}, 0) = n_0$ で寒天中に用意され、バクテリアによって消費される。実験で使われる寒天は厚さ $2 \sim 3 \text{ mm}$ で、できあがるコロニーのサイズに比べてごく薄いので、養分濃度は以下のような2次元の拡散方程式に従うとみなしていいだろう。

$$\partial_t n = D_n \Delta n - f(n, b) \quad (2)$$

式中の Δ は寒天表面での2次元の Laplacian で、 D_n は養分の拡散定数、 $f(n, b)$ はバクテリアによる養分消費を表す。

上記のモデル方程式 (1), (2) は $b(\mathbf{x}, t)$ と $n(\mathbf{x}, t)$ の2変数で閉じた形になっている。実際にコロニーとして我々が観察しているのは全バクテリア密度 $b(\mathbf{x}, t) + a(\mathbf{x}, t)$ であることに注意しよう。

関数 $f(n, b)$ 、 $g(n, b)$ 、 $h(n, b)$ は通常、次の3つの条件を満足するように決めるのが自然であろう。

1. バクテリアによる養分の消費率 $f(n, b)$ は $f(0, b) = f(n, 0) = 0$ を満たし、養分濃度 $n(\mathbf{x}, t)$ 、活動状態のバクテリア密度 $b(\mathbf{x}, t)$ の増加関数である。
2. 単位時間当たりのバクテリアの増加数 $g(n, b)$ は $g(0, b) = g(n, 0) = 0$ を満たし、やはり $n(\mathbf{x}, t)$ 、 $b(\mathbf{x}, t)$ の増加関数になる。
3. 不活動状態へ転換するバクテリアの数 $h(n, b)$ は $h(n, 0) = 0$ を満たし、活動状態のバクテリア密度 $b(\mathbf{x}, t)$ とともに増加する。

簡単のため、ここでは上の条件を満たすもっとも単純な関数形を用い $f(n, b)$ 、 $g(n, b)$ は bn の定数倍、 $h(n, b)$ は b の定数倍であるとする。

バクテリアの運動状態は拡散係数 $D(b)$ に反映される。寒天が軟らかくバクテリアが動きやすい D 領域では $D(b)$ が定数であるとしてもそれほど不自然ではないが、その他の領域ではバクテリアは低密度ではほとんど動くことができない。また、通常の拡散で D 領域で見られるような徐々にバクテリア密度が増加する界面は説明できるが、E 領域のような階段関数的なシャープな界面は説明できない。このような観察から我々は D 以外の領域では $D(0) \simeq 0$ であり、非線形拡散が起こっているものと推定する。通常の拡散と非線形拡散がマクロなパターン形成にどう影響するか調べるために、我々は拡散係数 $D(b)$ を b^k に比例するものとし、 $k = 0$ の通常拡散と $k \neq 0$ の非線形拡散を比較しよう。

以上の議論と適当な無次元化によって、我々のモデル方程式 (1)、(2) は最終的に3つの非負のパラメータ D 、 μ 、 k をもつ以下の式になる。

$$\partial_t n = \Delta n - nb, \quad (3a)$$

$$\partial_t b = D \Delta (b^{k+1}) + (n - \mu)b \quad (3b)$$

$$\partial_t a = \mu b. \quad (3c)$$

ここで養分濃度の初期条件は $n(\mathbf{x}, 0) = 1$ に規格化されている。バクテリア密度の初期条件 $b(\mathbf{x}, 0) = b_0(\mathbf{x})$ はバクテリアの接種の仕方に依存して決まる。境界条件は実験にあわせた場合はシャーレの境界でノイマン条件を課すが、理論的解析ではシステムサイズ無限大とみなして $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ で $n(\mathbf{x}, t) \rightarrow 1$ 、 $b(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ 等を用いる。

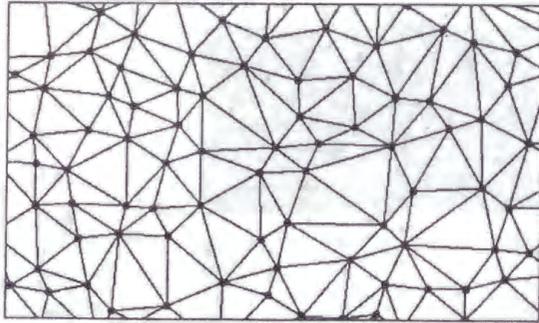


図 13: random lattice の例

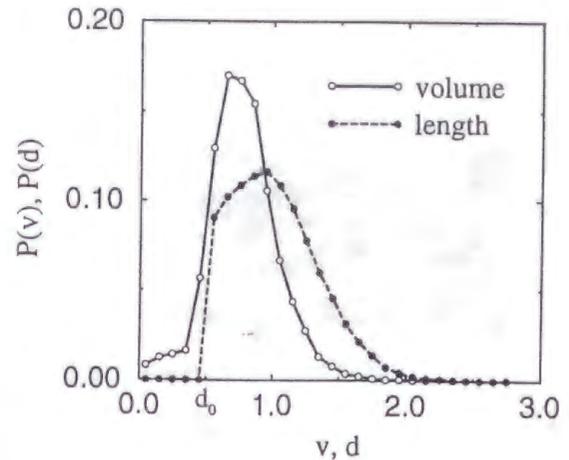


図 14: シミュレーションに使われた random lattice の Voronoi cell の体積 v とボンドの長さ d の分布。

まず、シミュレーションでこのモデルの振舞い調べよう。fingering pattern は一般にシステムの異方性に非常に敏感であり、シミュレーションで使われる格子の異方性の影響を取り除くのが難しい。その目的のために我々は random lattice[8, 20] を用いた。random lattice はランダムに散らばせた格子点から Voronoi 分割によって生成した図 13 のような格子である。ただし、我々は通常の Euler 差分が使えるように、random lattice の隣合う格子点の間の長さがある長さ $d_0 (\neq 0)$ 以上になるように格子点を分布させた。以下のシミュレーションでは人工的なノイズは加えていないが、格子点間の距離 d と Voronoi cell v の体積は図 14 のように分布しており、これによって自然にノイズが導入される。

シミュレーションは $k = 0, 1, 2, 3$ に対して、システムサイズ $(L_x, L_y) = (200, 40)$ で 10000 格子点からなる random lattice 上で行なわれた。我々は $y = 0, L_y$ に周期境界条件、 $x = 0$ に対してノイマン条件、 $x = L_x$ に対して $b(x, t) = a(x, t) = 0$ 、 $n(x, t) = 1$ の固定境界条件を課し、線状の初期条件 $n(x, 0) = 1$ 、 $a(x, 0) = 0$ 、 $b(x, 0) = 0.01\Theta(5 - x)$ が使われた。ここで $\Theta(x)$ は Heaviside ステップ関数である。シミュレーションの結果は以下のように要約できる。

- $k = 0$ の通常の拡散の場合、コロニーはパラメータ D 、 μ の値によらず直線界面を作って一定速度で成長する。界面の進行速度は D とともに増加し、 μ を大きくすると減少する。
- $k = 1, 2, 3$ の非線形拡散の場合、直線界面は D の減少、 μ の増加に伴って不安定になる。いくつかの D 、 μ に対する $k = 1$ の結果を図 15 に載せた。
 - D が小さくて $\mu = 0$ の時は、不安定化したコロニー界面はいくつかの cusp を形成してへこむが、cusp が成長して溝を作ることはない。
 - 一方、 μ が 0 でない場合は、不安定化した界面は fingering pattern を形成する。 D を小さく μ を大きくしていくと fingering pattern は次第にフラクタル的になる。同時にコロニーの成長速度は小さくなり、全バクテリア密度 $b(x, t) + a(x, t)$ は増加する。

これらの結果は前節で紹介した実験 [22, 9, 33] と定性的に一致している。実験のパラメータである初期養分濃度 n_0 は無次元化後のパラメータ μ の逆数に比例している。また以前に議論したよ

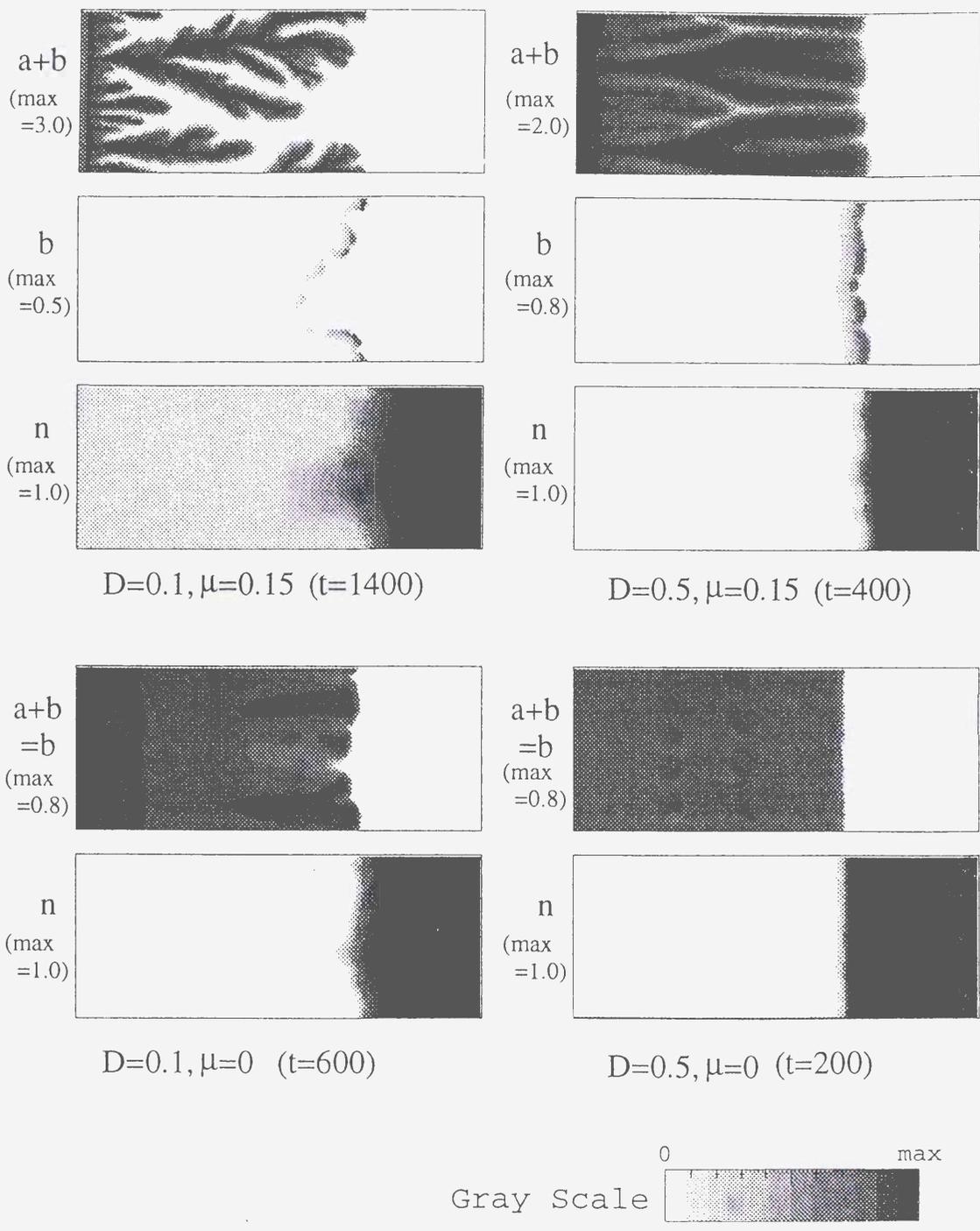


図 15: $D = 0.1, 0.5$ 、 $\mu = 0, 0.15$ に対する $a+b$ 、 b 、 n のスナップショットの濃淡図。 $\mu = 0$ の時、 $a = 0$ なので $a+b$ と b は同じになる。

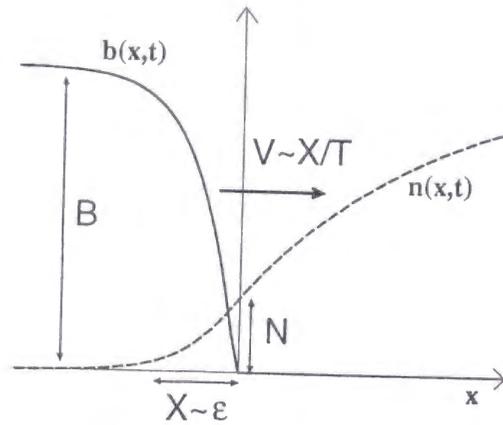


図 16: 界面付近での $b(x,t)$ 、 $n(x,t)$ の典型的な形

うに、D 領域以外では $k \neq 0$ であり、寒天濃度 C_a が大きいほどバクテリアの運動は抑えられて拡散係数 D が小さくなると考えられる。従って、D 領域は $k = 0$ で D が大きい場合に対応し、A 領域は $k \neq 0$ で D が小さく、 μ が大きい場合に対応する。このモデルでは C 領域で見られるような ring パターンは現れないが、この点は後の §2.3.2 の議論で触れよう。

2.3 コロニー界面の運動

2.3.1 界面の運動方程式の導出

fingering pattern を示す系の中では viscous fingering が早くから知られ多くの研究がある。viscous fingering のモデル方程式は粘性の異なる二種の液体の界面の方程式として与えられ、2次元 Laplace 場に従う圧力場中での成長であることから複素解析を活用した解析が行なわれている。また、2次元拡散方程式に従う温度場中での結晶成長現象の fingering model として提案された phase field model [12, 4] に対しても、Caginalp によって界面の運動方程式が導かれている [5]。このように fingering pattern を形成する既知の物理系は界面の運動方程式として表現したとき始めてお互いの共通点が明らかになる。ここでは前節で提案した偏微分方程式モデルからコロニー界面の運動方程式を導出して上記の物理系との比較をするとともに、バクテリアコロニーで fingering pattern が形成する条件を考察する。我々は Caginalp によって用いられた摂動展開法と類似の方法を使い、方程式 (3) で作られるコロニーの界面の厚さを ϵ とし、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で方程式を ϵ に対して摂動展開をする。この目的のために必要な唯一の物理的考察は方程式の各項が ϵ に対してどのようにスケールされるかをあらかじめ推定することである。計算の詳細に入る前にもっとも簡単な場合の界面の運動を考えよう。

図 16 に 1次元シミュレーションから得られる $k \neq 0$ 、 $\mu = 0$ での $b(x,t)$ 、 $n(x,t)$ の形の 1例を界面付近を拡大して示した。界面付近でのバクテリア密度と養分濃度の典型的な大きさをそれぞれ B 、 N 、特徴的な空間、時間スケールをそれぞれ X 、 T としよう。界面の進行速度 V のスケールは X/T と表せる。界面の運動方程式は界面の外側での変数の状態を内部の変数を決定するための境界条件とみなせる場合に導くことができるが、モデル方程式 (3a)、(3b) の各項が界面

付近ですべて同じ大きさで釣り合っている時にはそのような状態は明らかに実現しない。ここではバクテリアによる養分消費が非常に早く、式 (3a) の第 1 項 $\partial_t n \sim N/T$ と第 3 項 $nb \sim NB$ がバランスしていない場合を考え、界面での栄養濃度の勾配 $|\nabla n| \sim N/X$ を界面に対する境界条件と考えよう。式 (3a) の第 2 項と第 3 項のバランス $N/X^2 \sim NB$ 、式 (3b) の第 1 項と第 2、第 3 項のバランス $B/T \sim DB^{k+1}/X^2 \sim NB$ から B, N を消去すれば、我々は容易に界面での栄養濃度勾配 $|\nabla n|$ と速度 V の関係式

$$|\nabla n| \sim \frac{N}{X} \sim V \left(\frac{V}{D} \right)^{\frac{2}{2k+1}}$$

を推定することができる。界面の外部、特にコロニーの外側では式 (3a) の第 3 項 nb は 0 になり、第 1 項と第 2 項が釣り合って養分濃度は拡散方程式に従うだろう。 $x \rightarrow x/\epsilon$ の空間座標の変換でコロニーを遠くから眺めて、コロニーの界面の厚さを ϵX と見よう。この時、我々が $\epsilon \rightarrow 0$ の極限でも先の関係式と拡散方程式を不変にして意味のある界面の運動方程式を得るためには、時間座標の変換 $t \rightarrow t/\epsilon^2$ とパラメータの変更 $D \rightarrow \epsilon D$ をすればよい。

上の議論では式 (3b) の第 4 項 μb の大きさの評価をしなかったが、以下では $\mu \rightarrow \epsilon\mu$ の変換を採用しよう。実際、 $\mu \sim O(1)$ の時は界面は常に止まってしまい、 μ を $O(\epsilon)$ より小さくすると $\mu = 0$ と結果は変わらないことが以下の計算と同様の手続きですぐにわかる。

さて、以上の考察をもとに摂動計算を行なうことにしよう。上記の変換 $x \rightarrow x/\epsilon, t \rightarrow t/\epsilon^2, D \rightarrow \epsilon D, \mu \rightarrow \epsilon\mu$ をモデル方程式 (3) に行なうと以下の式が得られる。

$$\epsilon^2 \partial_t n = \epsilon^2 \Delta n - nb \quad (4a)$$

$$\epsilon^2 \partial_t b = \epsilon^3 D \Delta (b^{k+1}) + (n - \epsilon\mu)b \quad (4b)$$

$n(\mathbf{x}, t)$ と $b(\mathbf{x}, t)$ を

$$n = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m n^{(m)}(x, y, t), \quad (5)$$

のように ϵ で展開し、式 (4) に代入して整理すると ϵ の各次数に対して以下の式が得られる。

$$O(1) \quad n^{(0)}b^{(0)} = 0$$

$$O(\epsilon) \quad \begin{aligned} n^{(1)}b^{(0)} + n^{(0)}b^{(1)} &= 0 \\ \mu b^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

$$O(\epsilon^2) \quad \begin{aligned} \partial_t n^{(0)} &= \Delta n^{(0)} - n^{(0)}b^{(2)} - n^{(1)}b^{(1)} - n^{(2)}b^{(0)} \\ \partial_t b^{(0)} &= n^{(0)}b^{(2)} + (n^{(1)} - \mu)b^{(1)} + n^{(2)}b^{(0)} \end{aligned}$$

界面の内部では空間微分の大きさが $1/\epsilon$ 程度になるので、これらの展開は界面の外側でのみ正しい。この outer expansion を整理すると、我々は以下の結果を得る。

$$\text{もし } n^{(0)} \neq 0 \text{ なら、} \quad \partial_t n^{(0)} = \Delta n^{(0)} \text{ and } b^{(0)} = 0 \quad (6a)$$

$$\text{もし } n^{(0)} = 0 \text{ なら、} \quad \begin{aligned} b^{(0)} &= 0 \quad \text{for } \mu = 0 \\ \partial_t b^{(0)} &= 0 \quad \text{for } \mu \neq 0 \end{aligned} \quad (6b)$$

式 (6a) は明らかにコロニーの外側 $b(\mathbf{x}, t) + a(\mathbf{x}, t) = 0$ で成り立つ。また、後でわかるようにコロニーの内側では式 (6b) が成り立つ。

次に速度 V で進行している界面の近傍で、inner expansion を考えよう。 x 軸を界面に垂直な方向にとって、界面 $x = \phi(y, t)$ 近傍で x 方向に拡大した動座標 $\epsilon\xi \equiv x - \phi(y, t)$ を取ろう。 (x, y, t) から (ξ, y, t) に座標変換すると式 (3) は ξ 軸上で以下の形になる。

$$\epsilon^2 \partial_t n = \partial_{\xi\xi} n + \epsilon(V + \kappa) \partial_{\xi} n + \epsilon^2 \partial_{yy} n - nb \quad (7a)$$

$$\epsilon^2 \partial_t b = \epsilon D(\partial_{\xi\xi} + \epsilon\kappa \partial_{\xi} + \epsilon^2 \partial_{yy}) b^{k+1} + \epsilon V \partial_{\xi} b + (n - \epsilon\mu) b \quad (7b)$$

ここで、 $V \equiv \partial_t \phi$ と $\kappa \equiv -\partial_{yy} \phi$ はそれぞれ界面の速度と曲率を表す。

この座標系を用いて再び $n(x, t)$ と $b(x, t)$ を

$$n = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \tilde{n}^{(m)}(\xi, y, t) \quad (8)$$

のように書き、上の方程式を ϵ で展開する。以下では、この内部座標系を用いた inner expansion を \sim を付けて表記する。

$\tilde{n}^{(m)}$ と $\tilde{b}^{(m)}$ に対する境界条件は outer expansion (5) と inner expansion (8) の接続条件

$$\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \tilde{n}^{(m)}(\xi, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m n^{(m)}(\phi + \epsilon\xi, y, t)$$

から得られる。形式的な ϵ 展開から、 $\tilde{n}^{(m)}$ と $n^{(m)}$ の条件が $\epsilon\xi \rightarrow 0$ 、 $\xi \rightarrow \infty$ の極限で以下のよう
に得られる。

$$O(1) \quad \begin{aligned} \partial_{\xi} \tilde{n}^{(0)}(\pm\infty, y, t) &= 0, \\ \tilde{n}^{(0)}(\pm\infty, y, t) &= n^{(0)}(\phi \pm 0, y, t) \end{aligned}$$

$$O(\epsilon) \quad \partial_{\xi} \tilde{n}^{(1)}(\pm\infty, y, t) = \partial_x n^{(0)}(\phi \pm 0, y, t)$$

式中の $\tilde{A}(\pm\infty) = A(\phi \pm 0)$ は

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{A}(\xi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} A(\phi + \delta) \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tilde{A}(\xi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta < 0} A(\phi + \delta). \end{aligned}$$

の略記である。

式 (7) の $O(1)$ 展開は

$$\partial_{\xi\xi} \tilde{n}^{(0)} = \tilde{n}^{(0)} \tilde{b}^{(0)} = 0 \quad (9)$$

であり、これに対する境界条件は $\partial_{\xi} \tilde{n}^{(0)}(\pm\infty, y, t) = 0$ である。この方程式の唯一の可能な解は $\tilde{n}^{(0)} = \text{定数}$ で、これは条件 $\tilde{n}^{(0)}(\pm\infty, y, t) = n^{(0)}(\phi \pm 0, y, t)$ と合わせて、界面での $n^{(0)}(x, t)$ の連続条件 $n^{(0)}(\phi + 0, y, t) = n^{(0)}(\phi - 0, y, t)$ を与える。

この解を方程式 (7) に代入すると $O(\epsilon)$ の展開として以下の式が得られる。

$$\partial_{\xi\xi} \tilde{n}^{(1)} - \tilde{n}^{(1)} \tilde{b}^{(0)} - \tilde{n}^{(0)} \tilde{b}^{(1)} = 0 \quad (10a)$$

$$D \partial_{\xi\xi} \tilde{b}^{(0)k+1} + V \partial_{\xi} \tilde{b}^{(0)} + (\tilde{n}^{(1)} - \mu) \tilde{b}^{(0)} + \tilde{n}^{(0)} \tilde{b}^{(1)} = 0 \quad (10b)$$

この方程式の境界条件は $\partial_{\xi} \tilde{n}^{(1)}(\pm\infty, y, t) = \partial_x n^{(0)}(\phi \pm 0, y, t)$ と $\partial_{\xi} \tilde{b}^{(0)}(\pm\infty, y, t) = 0$ である。式 (9) と (10) から、 $\tilde{n}^{(0)} \tilde{b}^{(1)} = 0$ がすぐにわかる。従って、我々のモデル方程式はこの次数で閉じ $\tilde{n}^{(1)}$ と $\tilde{b}^{(0)}$ は上式 (10) を解くことによって得られる。

outer expansion で得られた式 (6a) と接続条件 $\tilde{b}^{(0)}(\pm\infty, y, t) = b^{(0)}(\phi \pm 0, y, t)$ から、 $\tilde{b}^{(0)}(+\infty, y, t)$ は 0 に等しいことがわかる。また、 $\tilde{b}^{(0)} \neq 0$ なら $n^{(0)}(\phi, y, t) = \tilde{n}^{(0)} = 0$ であるので、式 (6b) がコロニー内部で成り立つことがわかる。従って、 $\partial_\xi \tilde{n}^{(1)}(-\infty, y, t) = 0$ である。もし、この境界値問題 (10) の安定な解が一意的に決まれば、我々の得たい速度 V と界面での養分濃度の勾配 $\partial_x n^{(0)}(\phi + 0, y, t)$ の関数関係が求まる。

方程式 (10) は変数変換によって 1 パラメータ μ だけの方程式に変形できる。

$$\partial_{\xi\xi} \tilde{n}^{(1)} = \tilde{n}^{(1)} \tilde{b}^{(0)} \quad (11a)$$

$$\partial_{\xi\xi} \tilde{b}^{(0)k+1} + \partial_\xi \tilde{b}^{(0)} + (\tilde{n}^{(1)} - \mu) \tilde{b}^{(0)} = 0 \quad (11b)$$

$$\text{境界条件} \quad \partial_\xi \tilde{n}^{(1)}(-\infty, y, t) = \partial_\xi \tilde{b}^{(0)}(-\infty, y, t) = \tilde{b}^{(0)}(\infty, y, t) = 0$$

ここで使われた変数変換 $\tilde{b}^{(0)} \rightarrow \tilde{B} \tilde{b}^{(0)}$ 、 $\tilde{n}^{(0)} \rightarrow \tilde{N} \tilde{n}^{(0)}$ 、 $\xi \rightarrow \tilde{X} \xi$ 、 $\mu \rightarrow \tilde{N} \mu$ は $\tilde{X} \equiv (D/V)^{1/(2k+1)}$ 、 $\tilde{N} \equiv V/\tilde{X}$ 、 $\tilde{B} \equiv 1/\tilde{X}^2$ で与えられる。

我々の求めたい関係式では $\partial_x n^{(0)}(\phi + 0, y, t) = \partial_\xi \tilde{n}^{(1)}(\infty, y, t)$ は V から決まる未知変数であるので、上記の境界条件は単純に考えると 1 つ足りない。付加的な条件は $k \neq 0$ の場合には以下のように求まる。 $k \neq 0$ なら、図 16 のように界面のすぐ外側で b が完全に 0 になるので、 $\tilde{b}^{(0)}(\xi)$ が $\xi < 0$ で正で $\xi \geq 0$ で 0 になるように ξ の原点を取ることができる。式 (11b) の第 3、4 項は b が中的に小さくなる時、第 1、2 項に比べて無視できるので、原点付近 ($\xi < 0$) での $\tilde{b}^{(0)}(\xi)$ の漸近形が以下のように与えられる。

$$\tilde{b}^{(0)}(\xi) \rightarrow \left(-\frac{k}{k+1}\xi\right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{as } \xi \rightarrow 0 \quad (12)$$

従って、拡散の非線形性のために新しい境界条件

$$\partial_\xi \tilde{b}^{(0)}(0-, y, t)^k = -\frac{k}{k+1}. \quad (13)$$

が 1 つ加わる。

上述の境界条件のを満たす式 (11) の解が決まれば、 $\partial_x n^{(0)}(\phi + 0, y, t)$ と μ の関係

$$\partial_x n^{(0)}(\phi + 0, y, t) = F(\mu) \quad (14)$$

が求まる。ただし、ここで我々はこれらの解の安定性を仮定した。元のスケールに戻すと、この関係式は界面での養分濃度勾配の大きさ $|\nabla n^{(0)}| \equiv \partial_x n^{(0)}(\phi + 0, y, t)$ を界面速度 V の関数として以下のように与え、outer expansion の結果 (6) と共にバクテリアコロニーの界面の運動方程式を完成させる。

$$|\nabla n^{(0)}| = V \left(\frac{V}{D}\right)^{\frac{2}{2k+1}} F \left(\frac{\mu}{D} \left(\frac{D}{V}\right)^{\frac{2k+2}{2k+1}}\right) \quad (15a)$$

$$\begin{cases} \partial_t n^{(0)} = \Delta n^{(0)} & \text{コロニーの外側} \\ n^{(0)} = 0 & \text{コロニーの内側} \end{cases} \quad (15b)$$

式 (11b) で拡散の非線形性があるため始めて付加的な境界条件 (13) が得られるので、通常の拡散 $k = 0$ ではこのような界面の運動方程式は求まらないこと注意しよう。

我々は式 (11) と境界条件 (13) の境界値問題を緩和法を用いて数値計算し、式 (14) の関数 $F(\mu)$ を得た。図 17 にいくつかの k の値に対する $F(\mu)$ を示した。 $F(\mu)$ の特徴は以下のように要約できる。

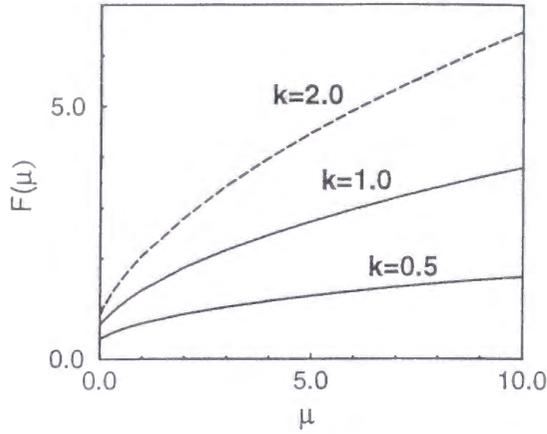


図 17: $k = 0.5, 1.0, 2.0$ に対する $F(\mu)$ の計算結果

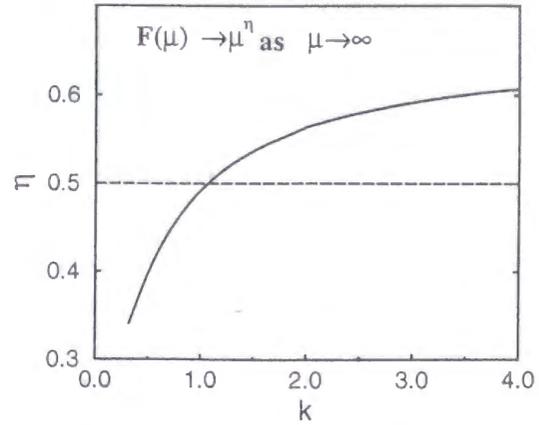


図 18: μ が大きい時の $F(\mu)$ の巾の指数 $\eta(k)$

- $F(0)$ は 0 でなく、 k の増加関数である。それで、 $\mu = 0$ か界面の速度 V が大きい時、

$$|\nabla n^{(0)}| \propto V \left(\frac{V}{D} \right)^{\frac{2}{2k+1}}. \quad (16)$$

が成り立つ。この関係式はこの節の始めに定性的な議論で得たものと同じである。

- μ が大きい時、 $F(\mu) \propto \mu^{\eta(k)}$ である。 $\eta(k)$ は k の増加関数で図 18 に示したように $\eta(1) \simeq 0.5$ である。大きな μ に対する $F(\mu)$ の関数形は以下のように V が小さい極限での界面の運動を表している。

$$|\nabla n^{(0)}| \propto V^\zeta \quad \text{as } V \rightarrow 0, \quad (17)$$

ここで $\zeta = [2k + 3 - (2k + 2)\eta]/(2k + 1)$ である。特に、 $|\nabla n^{(0)}|$ は $\eta = 0.5$ つまり $k \simeq 1$ の時、 V にほぼ比例する。

- $k \rightarrow 0$ の極限で $F(\mu)$ は 0 に近づく。

2.3.2 議論：界面の運動としてみたコロニー成長

以上のように $k \neq 0$ に対して我々のモデルから界面の運動方程式 (15) を構成することができた。これを用いてバクテリアコロニーのパターン形成について何がいえるか以下で議論しよう。

まず始めに 1 次元空間 x でコロニー界面の成長を考察しよう。拡散方程式 (15b) の定常進行解は

$$n^{(0)} = \begin{cases} 1 - e^{-V(x-Vt)} & x \geq Vt \\ 0 & x < Vt \end{cases} \quad (18)$$

のように与えられるので、界面での養分濃度の勾配 $|\nabla n^{(0)}|$ の値は V に近づく傾向がある。従って、1 次元成長の場合の進行速度 V の時間発展は固定点 $|\nabla n^{(0)}| = V$ を調べることで定性的に把握できる。図 19 の模式図に示してあるように、式 (15a) に従う界面の振舞いは定性的に以下の 3 つに分類できる

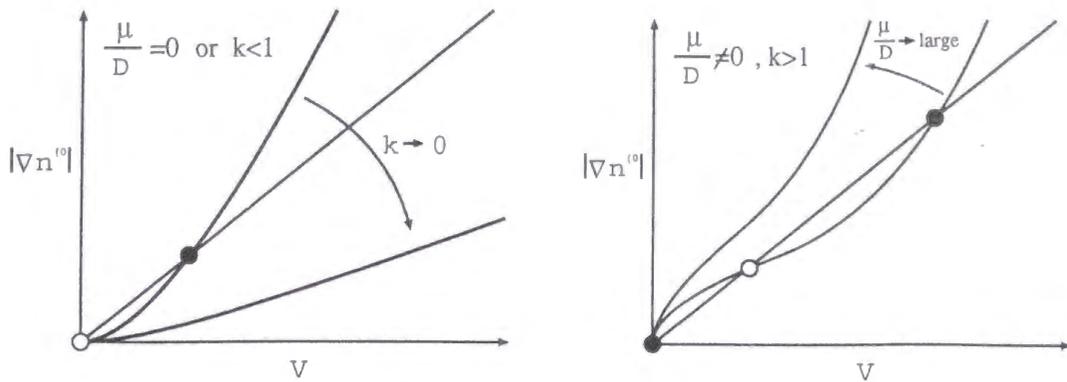


図 19: V に関する $|\nabla n^{(0)}|$ の特徴的な関数形

1. $\mu/D = 0$ または $k < 1$ の場合、 $V = 0$ に不安定固定点、 $V \neq 0$ に安定な固定点がある。したがって、任意の初期条件に対して界面の速度は 0 でない一定値に漸近する。
2. $\mu/D (\neq 0)$ が小さく、 $k > 1$ である時、 $V = 0$ と $V \neq 0$ の 2 つの固定点が安定になり、システムは双安定である。
3. μ/D が大きく、 $k > 1$ である時、唯一の安定な固定点は $V = 0$ である。したがって、定常進行解は存在せずコロニー成長は止まってしまう。

$V = 0$ の固定点のまわりでの安定性は非線形拡散と養分濃度の低下に伴う活動状態の停止という 2 つの効果合わさって生じたことに注意しよう。

2次元空間でのコロニー成長においても、このような $V = 0$ の安定性の変化はパターン形成に大きな影響を与えるであろう。我々は前節のシミュレーションで、上記の 1. のパラメータ領域では幾つかの cusp 状のへ込みを持つ界面ができ、2. のパラメータ領域では cusp がさらに成長して溝をつくり fingering pattern に発展するのを観察した。実際、我々の得た界面の運動方程式 (15) では Appendix A に示すように一定速度で進行する直線界面は常に不安定である。さらに、2. のように $V = 0$ に安定性があると、cusp 状にへ込んだ界面の奥では栄養濃度勾配が非常に小さくなるので界面が成長しにくい。こうして、cusp の奥の界面が停止して溝ができ finger に発展するものと考えられる。このような finger の発達はおもとのモデル方程式がすでに双安定系である結晶成長の phase field model に基本的にはよく似ている。

3. のパラメータ領域では μ/D が大きくなるほど、フラクタル的な fingering pattern が成長した。理論的にも界面の成長速度 V が十分小さくなり、コロニーのサイズが拡散長 D_n/V より十分に大きくなれば、式 (15b) は Laplace 方程式 $\Delta n^{(0)} = 0$ で近似でき、界面の濃度勾配 $|\nabla n^{(0)}|$ は式 (17) で与えられる。この極限でこのモデルはフラクタルパターンを示す標準的なモデル [21, 15] と一致する。

しかしながら、方程式 (15) は viscous fingering モデルのような標準的な界面の運動方程式とは異なり、表面張力が界面に働かない。実際、式 (14) の $|\nabla n^{(0)}|$ に対する界面の曲率 κ の寄与は $o(\epsilon)$ である。そのような場合、界面は凸の cusp に成長して、有限の時間内に cusp 先端に特異点を形成し界面の運動方程式による記述が破綻する。従って、実際のバクテリアコロニーでは finger の先端は界面の厚さ $O(\epsilon)$ 程度の幅になるまで発達すると予想できる。このようにバクテ

リアコロニーの発達した finger がシステムサイズや拡散長以外の特徴的なスケールを持つことは他の多くの fingering model と異なる大きな特徴であろう。表面張力が働く visous fingering モデルの場合、発達する finger は特徴的なスケールを持たず、表面張力が finger の形の決定に大きな役割を果たすことが知られている。

最後に、界面の運動方程式を導く際に除外した通常拡散 $k = 0$ の場合について考察しよう。式 (12) の漸近形からわかるように、 k が 0 に近づくにともなって $\xi = 0$ はバクテリア密度 $b(\xi)$ が実際に急激に減少する位置と一致しなくなる。従って、 $k \rightarrow 0$ の極限で、 $\xi = 0$ は実際に観察される界面の位置を表しておらず、上で得られたような界面の運動方程式からは $k = 0$ でのコロニー成長の様子を知ることはできない。 $k = 0$ の時、我々の偏微分方程式モデル (3) はコロニーの外側で $b(x, t) = 0$ の状態が不安定である。このように不安定な状態の媒質中で界面の伝播が起こる方程式は Fisher-type 方程式と呼ばれ多くの研究者によって調べられている [1, 7, 23, 24, 27, 28]。Fisher-type の方程式では異なる界面速度 V を持つ線形安定な定常進行解が無数にあり、ほとんどの現実的な初期条件に対してその中から 1 つの解が選択されることが知られている。W. van Saarloos によって提案された “The linear marginal hypothesis” [26] を使えば我々のモデル (3) の $k = 0$ の場合に対しても実際に選択される界面の進行速度を $V = 2\sqrt{D(1-\mu)}$ のように予想することができる。式 (3) に対する我々の 1 次元シミュレーションでもこの式が正しいことが確認できた。“The linear marginal hypothesis” の成り立つ Fisher-type 方程式の 2 次元の直線定常進行解が安定であることは筆者の知る限りではまだ証明されていないが、多くの数値計算から予想できる。我々の今回の $k = 0$ に対する式 (3) のシミュレーションの結果もそれを支持している。

我々のモデルには通常拡散から非線形拡散への変化の過程は含まれていない。実験的には ring パターンの C 領域や DBM パターンの E 領域がここに対応していると考えられるので、これがどのように起こり、パターンにどう影響するかは興味深い問題である。

2.4 発達した finger の相互作用

バクテリアコロニーの fingering pattern では活動状態のバクテリアは各 finger の先端のみにしか居らず、各 finger を作っているバクテリア同士は finger 自身の作る養分濃度場を介してしか相互作用することができない。また前節で見たように、十分発達した finger はシステムサイズに依存しない特徴的なスケールを持つと考えられる。このように見ると、各 finger の先端部分はそれぞれ 1 つのバクテリア集団として運動する比較的独立性の高い要素であり、その軌跡として fingering pattern を作り出しているとみなすことができそうである。Introduction で上げた他の多くの fingering pattern をこのような視点から見直してみると、カビや植物の根、あるいは特徴的な幅が分子スケールである亀裂や放電現象などは finger の要素としての独立性が高く、特徴的なスケールがシステムサイズに依存する visous fingering などは独立性がほとんどない fingering pattern と考えていいであろう。バクテリアコロニーの finger は上記の例のと比較すると中間的である。finger は特徴的なスケールを持つものの、他の finger なしでは安定に存在できない。

ここで述べたような視点で fingering pattern を理解するための数学的枠組はまだない。そのための手がかりとしてここでは、隣合う finger の間隔が finger 自身の幅に比べて十分大きいという理想化された状況を考え、finger 同士の相互作用がどのように行なわれるのかを考察しよう。先に上げた枯草菌コロニーの実験では E 領域の栄養濃度を小さくした条件でこのような状況に近いコロニーが形成されるが、典型的な DBM パターンでは隣合う finger の間隔は finger 自身の幅と同程度でこの近似は定量的な理解には不十分であることをあらかじめ断っておこう。

2.4.1 finger の作る濃度場

まず、幅 ϵ 程度の1つの finger によってどのような濃度場が作られるか考察しよう。養分濃度が以前と同様、消費項付きの2次元拡散方程式

$$\epsilon^2 \partial_t n = \epsilon^2 \Delta n - f(n, b) \quad (19)$$

に従って形成されているとしよう。ここで §2.2 と同様の条件を $f(n, b)$ に課す。今、この finger の先端の座標を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$ とすると、 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)| \gtrsim \epsilon$ では $b(\mathbf{x}, t)$ はほとんど0になるから、 $f(n, b)$ は finger 先端の ϵ 程度の大きさの領域でのみ0でない値を持つ。

養分濃度場は初期養分濃度 n_0 と無限遠で0になるような2次元拡散方程式の Green 関数 $G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-r^2/4t}$ を用いて、

$$n(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon^2} \int_0^\infty dt' \int d\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}', t - t') + n_0 \quad (20)$$

と表せるので、この式を $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$ の $\mathbf{x}_0(t)$ の周りでの Taylor 展開を用いて多重極表現しよう。

$$n(\mathbf{x}, t) = -2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty dt' G^{(m)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t - t'), t') C^{(m)}(t - t') + n_0 \quad (21a)$$

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t) - \mathbf{r}, t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} G^{(m)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t), t) \mathbf{r}^m \quad (21b)$$

$$C^{(m)}(t) \equiv \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \int d\mathbf{r}^2 \mathbf{r}^m f(\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{r}, t) \quad (21c)$$

上式では $G^{(m)}$ 、 $C^{(m)}$ 、 \mathbf{r}^m で m 階テンソルを簡略表記した。 $\mathbf{r} \rightarrow \epsilon \mathbf{r}$ と finger 幅が $O(1)$ になるように変数変換して値を評価すると、 m 次のモーメント $C^{(m)}$ は $O(\epsilon^m)$ の大きさであることがわかる。また、 $\mathbf{x}_0(t)$ を $C^{(1)} = 0$ となるように常にとることができるから、finger から十分遠方の場合は $O(\epsilon^2)$ の精度で、

$$n(\mathbf{x}, t) = -2\pi \int_0^\infty dt' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t - t'), t') C^{(0)}(t - t') + n_0 + O(\epsilon^2) \quad (22)$$

と書ける。以降、 $C^{(0)}$ を単に C と書き、finger のサイズと呼ぼう。 C は $f(n, b)$ に対する仮定から常に正である。

finger の作る濃度場 (22) から現在の速度 $\mathbf{V}_0(t) \equiv d\mathbf{x}_0(t)/dt$ とサイズ $C(t)$ によって作られる定常進行解を分離すると、

$$n(\mathbf{x}, t) = n_f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t), \mathbf{V}_0(t)) C(t) + n_0^{past}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t), t) + n_0 + O(\epsilon^2) \quad (23a)$$

$$n_f(\mathbf{r}, \mathbf{V}) \equiv -2\pi \int_0^\infty dt' G(\mathbf{r} - \mathbf{V}t') = -K_0\left(\frac{rV}{2}\right) e^{-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{2}} \quad (23b)$$

となる。ここで、 $K_0(x)$ は変形された第一種ベッセル関数である。 $n_0^{past}(\mathbf{r}, t)$ は $C(t)$ や $\mathbf{x}_0(t)$ の過去の時間変化が作る濃度場を表しており finger の原点でも発散しないなめらかな場である。特に、finger の速度が大きく $C(t)$ や $\mathbf{V}_0(t)$ が変化する特徴的な時間スケールの中に finger 先端が拡散長 $1/V_0$ より十分大きな距離進むなら

$$n_0^{past}(\mathbf{r}(t), t) \equiv -2\pi \int_0^\infty dt' [G(\mathbf{r}(t - t'), t') C(t - t') - G(\mathbf{r}(t) - \mathbf{V}_0(t)t', t') C(t)]$$

$$= -\frac{2}{V_0^2} e^{-\frac{V_0 \cdot \mathbf{r}}{2}} \left(\frac{dC}{dt} + \frac{\mathbf{r}}{4} \cdot \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} C \right) + O\left(\frac{1}{V_0^4}\right) \quad (24)$$

と展開でき、finger の進行速度 V_0 が大きくなると finger 自身の過去の履歴からの寄与は n_0 に比べて十分小さくなることがわかる。実際のバクテリアコロニーでは DLA パターンは $V_0 \rightarrow 0$ の極限なので過去の履歴が非常に重要であるが、DBM パターンはかなり好条件で成長し、finger が横に並んでほぼ揃って直進するのでこの状況がほぼ当てはまっているといえるだろう。

M 個の finger がある時にできる養分濃度場は個々の finger の作る場の線形和で表せる。 i 番目の finger はサイズ $C_i(t)$ の先端を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i(t)$ に作り、速度 $\mathbf{V}_i(t) \equiv d\mathbf{x}_i(t)/dt$ で進んでいるとする。 i 番目の finger の先端近傍にはその先端自身が形成している場に加えて、上記の形で近似できるような他の $M-1$ 個の finger 先端の形成する場が存在している。従って、 i 番目の finger の先端近傍に形成される養分濃度場は

$$n(\mathbf{x}, t) = n_i(\mathbf{x}, t) + n_i^{ext}(\mathbf{x}, t) \quad (25a)$$

$$n_i^{ext}(\mathbf{x}, t) \equiv n_i^{others}(\mathbf{x}, t) + n_i^{past}(\mathbf{x}, t) + n_0 \quad (25b)$$

$$n_i^{others}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{j \neq i}^M n_f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t), \mathbf{V}_j(t)) C_j(t) \quad (25c)$$

$$n_i^{past}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_j^M n_j^{past}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t), t) \quad (25d)$$

のように表せる。ここで、 $n_j^{past}(\mathbf{r}, t)$ は j 番目の finger の過去の時間変化の作る濃度場であり、前述のようにパターンの成長速度が早いほど小さくなる。 $n_i(\mathbf{x}, t)$ はこの finger 先端のバクテリアの寄与で形成されている場であり、finger から十分遠方では $n_f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t), \mathbf{V}_i(t)) C_i(t)$ に漸近する。このようにして、finger の作る濃度場は $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ でなめらかな場 $n_i^{ext}(\mathbf{x}, t)$ と幅 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で特異的になる自分自身の作る場 $n_i(\mathbf{x}, t)$ とに分離できる。

2.4.2 finger の時間発展

finger 近傍での場 $n_i(\mathbf{x}, t)$ は実際に i 番目の finger の近傍でもとのコロニー成長の方程式を解いて求めなければならない。その際、界面の運動方程式を求める際の理屈とのアナロジーで場 $n_i^{ext}(\mathbf{x}, t)$ が方程式の境界条件になると仮定しよう。この方程式がもし解ければ、finger の速度 $d\mathbf{x}_i/dt (= \mathbf{V}_i(t))$ とサイズの時間変化 $dC_i(t)/dt$ が finger は原点付近のなめらかな場 $n_i^{ext}(\mathbf{x}, t)$ の関数として与えられるはずである。

この方程式を実際に解くのは finger の定常進行解が安定な場合でさえ非常に困難である。実際には、finger は分裂するし、単に直進している場合でさえマイクロなノイズあるいは本質的な不安定性を抱えていて統計的に考えなければいけない可能性もある。

しかしながら、finger の幅が finger の間隔よりも十分小さい時、finger 先端のバクテリアはなめらかな場 $n_i^{ext}(\mathbf{x}, t)$ を非常に狭い範囲で感じて時間発展を決めている。このような場合、外場 $n_i^{ext}(\mathbf{x}, t)$ の finger の先端領域での空間変化に対して、 $n_i^{ext}(\mathbf{x}, t)$ の高階微分は $\epsilon^m \nabla^m n_i^{ext} \sim O(\epsilon^m)$ しか寄与せず、ほとんど無視できる。従って、サイズの時間変化 dC_i/dt と速度 $d\mathbf{x}_i/dt$ は一般的に $n_i^{ext}(\mathbf{x}_i(t), t)$ と $\nabla n_i^{ext}(\mathbf{x}_i(t), t)$ でほとんど決まると考えられる。 C_i はスカラー、 \mathbf{x}_i はベクトルであることに注意すると時間発展は現象論的に、

$$\frac{dC_i}{dt} = \mathcal{F}(C_i, n_i^{ext}) \quad (26a)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathcal{G}(C_i, n_i^{ext}) \nabla n_i^{ext}(\mathbf{x}_i, t) \quad (26b)$$

と書ける。

finger は周囲の養分濃度が大きければ成長しやすく、栄養濃度の大きい方へ動くのが普通だから、 $\mathcal{G} > 0$ 、 $\mathcal{F}_n \equiv \partial \mathcal{F} / \partial n_i^{ext} > 0$ であると考えるのが自然であろう。

上述の時間発展方程式の性質を見るために、特に簡単な状況を考えよう。過去の時間変化の影響 $n^{past}(\mathbf{x}, t)$ が全く無視でき、個々の finger の作る場 $n_f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ の関数形が同じであるとする。

この単純化はやや粗すぎるが、finger が滑らかな envelope を作ってかなり速い速度 $\mathbf{V}_i \sim \mathbf{V}$ で揃って成長する DBM パターンなどに対してはそれほど無理な仮定ではない。

この場合、 $n_i^{ext}(\mathbf{x}, t) = n_i^{others}(\mathbf{x}, t) + n_0$ であるが、 i 番目の finger の先端付近では、周りの finger の作る場の大きさ $|n_i^{others}(\mathbf{x}_i, t)|$ は初期濃度 n_0 や $|n_i(\mathbf{x}_i, t)|$ に比べて小さいのが普通であるから、式 (26) の $\mathcal{F}(C_i, n_i^{ext})$ 、 $\mathcal{G}(C_i, n_i^{ext})$ を n_0 の周りで展開して主要項のみ残そう。

$$\frac{dC_i}{dt} \simeq \mathcal{F}(C_i, n_0) + \mathcal{F}_n(C_i, n_0) n_i^{others} \quad (27a)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \simeq \mathcal{G}(C_i, n_0) \nabla n_i^{others}(\mathbf{x}_i, t) \quad (27b)$$

$|n_i^{others}(\mathbf{x}_i, t)| \ll n_0 (\sim |n_i(\mathbf{x}_i, t)|)$ が十分正確に成り立つためには finger の間隔が拡散長 $\sim 1/V_i$ に比べて十分大きいか、finger の幅 ϵ が拡散長に比べて十分小さいことが必要である。後者は finger の幅が小さくなると finger のサイズ $C(t)$ も小さくなって周りの場に対する影響も小さくなるせいである。このことは finger の外部 ($|\mathbf{x}| \geq \epsilon, b(\mathbf{x}, t) = 0$) にできる場 (21) を

$$n(\mathbf{x}, t) = -K_0 \left(\frac{rV_0}{2} \right) e^{-\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}_0}{2}} C(t) + \text{高次の多重極展開の項} + n_0 \geq 0 \quad (28)$$

と書き、 $K_0 \left(\frac{rV_0}{2} \right)$ の finger 近傍での $-\log(rV_0/4)$ 発散を抑えて $n(\mathbf{x}, t)$ を正に保つためには $C(t)$ 自身が $O(-\log(\epsilon V_0/4))^{-1}$ で小さくならなければならないことを見ればわかる。

このように近似された時間発展方程式 (27) は

$$\mathcal{H}(t) \equiv - \sum_i^M \left[\int_0^{C_i} dC \frac{\mathcal{F}(C, n_0)}{\mathcal{F}_n(C, n_0)} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^M n_f(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) C_i C_j \right] \quad (29)$$

を定義すると、

$$\frac{dC_i}{dt} = -\mathcal{F}_n(C_i, n_0) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C_i} \quad (30a)$$

$$C_i \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = -\mathcal{G}(C_i, n_0) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (30b)$$

のように自由エネルギーの形に書くことができる。従って、 $\mathcal{H}(t)$ の時間発展は

$$\frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} = - \sum_j^M \left[\mathcal{F}_n(C_j, n_0) \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C_j} \right)^2 + \frac{\mathcal{G}(C_j, n_0)}{C_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}_j} \right)^2 \right] \leq 0 \quad (31)$$

となり、 $\mathcal{H}(t)$ は常に減少する。

finger が単独では安定な定常解を持たず成長し続ける性質を持っていたら、 $\mathcal{F}(C, n_0) > 0$ で式 (29) の第 1 項は負である。式 (29) の第 2 項は常に正であるが、 i 番目の finger を除いて他のすべての finger が $C_j \sim 0 (j \neq i)$ になれば 0 になる。従って、 $d\mathcal{H}/dt \leq 0$ は 1 つの finger が他の成長を抑えて生き残ろうとする傾向を表している。

このような単調減少する自由エネルギー的な関数を持つ系では chaos は現れないはずだが、実際の fingering pattern の成長はもっと複雑で chaotic である。これには、ここで考慮しなかった finger の分裂、即ち系の要素数の増加が重要な役割を果たしていると考えられる。次章では、上の時間発展方程式の最も簡単な 1 次元版に要素の分裂をルールとして与えたモデルを作り、分裂がマクロなパターンの発展にどのような影響を及ぼすのか考察しよう。

3 fingering pattern のダイナミクス

前章の最後で見たように各 finger の先端を1つの要素とみなして fingering pattern を分裂する要素の多体系ととらえると、パターン全体はそれらの要素の運動の軌跡であり、我々は一種の時間-空間プロットを見ていると言っている。従来、fingering pattern は前章のような偏微分方程式や界面の運動方程式による研究、DLA シミュレーションなどのフラクタル次元による分類、平均場モデルによるパターンの外形や平均密度の推定などによって研究されているが、fingering pattern の時間発展の特徴はそれらでは捉えきれない。例えば、我々はいろいろな樹木状パターンをその枝の茂り方で区別するが、どういう性質を枝が持っていればどれだけ茂るのかという予測はもちろん、それが力学的な言葉でどう表現されるのかさえわからない。この問題は実は時空乱流を示すどのような系に対してもいえることであるが、fingering pattern ではより直観的に要素の分裂とそれ以外の時間発展を分離することができる分、特に重要である。また、fingering pattern では前節 §2.4 で考察したように分裂の有無が系の複雑な振舞いに決定的な役割を果たしているものと思われる。ここで我々は1次元空間で簡単な分裂する離散要素のモデルを作りその振舞いを調べる。分裂する離散要素という枠組は fingering pattern だけでなく、多くの生物系や比較的独立な特異点の集団が相互作用する系（例えば、2次元の渦糸系）でも重要であるが、要素数が変化するため力学系として取り扱うことが難しく研究が進んでいない。

3.1 1D fingering model

finger の時間発展方程式は §2.4 で考察したように理想化した極限では式 (27) のように表せる。以下で我々は問題を単純化して、成長している finger の先端が進行方向に垂直な1直線上に揃って並んでいる DBM パターンのような状況 $(x_i, y_i) = (x_i(t), V_e t)$ を考え、この速度 V_e で進む envelope より後ろに後退した finger は成長を停止して止まってしまうとしよう。§2.4 の近似は、非常に幅の狭く点とみなせる finger が y 方向に十分早い速度 ($|dx_i/dt| \ll V_e$) で進んでいる場合に相当する。fingering pattern は全く異なるたくさんの系で現れるから、要素や相互作用の細かな違いは fingering pattern の再現に本質的ではないだろう。ここでは、単純さを重視してモデルをつくることにする。

式 (27) の \mathcal{F} 、 \mathcal{F}_n 、 \mathcal{G} の実際の形はわからないから最も簡単な形を選び、

$$\mathcal{F}(C, n_0) = \alpha - \gamma C \quad \mathcal{F}_n(C, n_0) = \text{正定数} \quad \mathcal{G}(C, n_0) = \text{正定数} \quad (32)$$

としよう。この選択は dC_i/dt が $C_i = 0$ でも0にならないから、finger の成長方程式としては少し妙な感じもする。この点を考慮して我々は次節で説明するのシミュレーションを別の関数形

$$\mathcal{F}(C, n_0) = (\alpha - \gamma C)C \quad \mathcal{F}_n(C, n_0) \propto C \quad \mathcal{G}(C, n_0) = \text{正定数} \quad (33)$$

でも行なったが、以下に述べる結果は定性的には全く変わらなかった。

各 finger の作る場 $n_f(\mathbf{r}, \mathbf{V})$ は \mathbf{V} に垂直な座標 x に対して偶関数であり finger の遠方で $-K_0(\frac{rV}{2})e^{-\frac{rV}{2}}$ に従って指数関数的に減衰する。また、点状の finger が分裂するとほぼ同じ位置からお互いの反発力で有限の時間内に遠ざかって行くから、finger 近傍 $r \sim 0$ でも $n_f(\mathbf{r}, \mathbf{V})$ の傾きが0にならないようにとる必要がある。以上の条件を満足する簡単な関数として

$$n_f(x) = e^{-\beta|x|} \quad \beta > 0 \quad (34)$$

をとろう。

さて、要素数の増減をルールを設定して導入しよう。成長しすぎた finger が分裂するように閾値 C_{th} を作り、サイズ C_i が C_{th} を越えたら、同じ位置座標で $\frac{1}{2}(1+\delta)C_i$ と $\frac{1}{2}(1-\delta)C_i$ のサイズをもつ2つの要素に置き換えることにしよう。また、サイズ C_i が0になると finger が進行をやめて envelope から離れ、要素が消滅すると仮定する。サイズ C_i は本来、分裂や消滅によって保存する必要はないが、上記のように保存するように設定すると、全要素によって作られる濃度場

$$\Psi(x, t) \equiv \sum_i^M n_f(x - x_i(t)) C_i(t) \quad (35)$$

が時間的に連続に保たれるので finger を点とみなす極限をとる前の濃度場ともっとも整合性がよく、状況も簡単になる。

式(32)、(34)を§2.4の式(27)に代入して上記のルールを追加すると、 $(C_i(t), x_i(t))$ $i = 1, 2, \dots, M$ の時間発展方程式が得られる。適当な規格化をすると、我々の方程式は

$$\frac{dC_i}{dt} = \alpha - \gamma C_i - \Phi_i(x_i, t) \quad (36a)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_i(x_i, t) \quad (36b)$$

$$\Phi_i(x, t) \equiv \sum_{j \neq i}^M e^{-\beta|x-x_j(t)|} C_j(t) \quad (36c)$$

であり、要素数の増減が以下のルールでおこる。

$$C_i > 2 \rightarrow i \text{ 番目の要素が分裂して2つの要素 } (1+\delta, x_i), (1-\delta, x_i) \text{ になり、} M \text{ が1増加する。} \quad (37a)$$

$$C_i \leq 0 \rightarrow i \text{ 番目の要素を取り除き、} M \text{ を1減らす。} \quad (37b)$$

α, γ は個々の要素の成長の特性を表すパラメータであり、 $1/\beta$ が相互作用の range である。 δ は分裂の異方性を表すパラメータであるが、ここでは等方的な分裂 $\delta = 0$ の場合のみを考察する。以下ではこのモデル(36)、(37)の $t \rightarrow \infty$ での統計的性質を調べよう。

別の関数形(33)を用いた場合は、 C_i が0に漸近するだけで負にはならないので消滅のルール(37b)は必要ない。この場合は要素数は増え続け競合に負けた要素が $C_i \sim 0$ となって溜っているがこのような要素は系の他の要素のダイナミクスにはほとんど影響を与えない。

次節では上記のモデル(36)、(37)の振舞いを x 方向のシステムサイズが L の周期境界の下で数値シミュレーションによって調べる。 $0 \leq x_i < L$ $i = 1, 2, \dots, M$ 、 $x_i < x_{i+1}$ としよう。相互作用(36c)はこの時、

$$\Phi_i(x, t) = \Psi_L^{(p)}(x, t) - C_i \quad (38a)$$

$$\Psi_L^{(p)}(x, t) \equiv \sum_j^M \left[e^{-\beta|x-x_j|} + \frac{2}{e^{\beta L} - 1} \cosh \beta(x - x_j) \right] C_j \quad (38b)$$

となる。この関数は相互作用が指数関数的であるため、実際には $\Phi_i(x, t)$ を右側の要素からの寄与と左側の要素からの寄与に分けると以下の漸化式を使って効率よく計算できる。

$$\Phi_i(x, t) = L_i(x, t) + R_i(x, t) \quad (39a)$$

$$L_i \equiv \sum_{j < i}^{\infty} e^{-\beta|x-x_j|} C_j \quad R_i \equiv \sum_{j > i}^{\infty} e^{-\beta|x-x_j|} C_j \quad (39b)$$

$$L_{i+1} = e^{\beta(x_i-x_{i+1})}(L_i + C_i) \quad R_{i-1} = e^{\beta(x_{i-1}-x_i)}(R_i + C_i) \quad (39c)$$

$$L_1 = \frac{1}{1-e^{\beta L}} \sum_j^M e^{\beta(x_j-x_1-L)} C_j \quad R_M = \frac{1}{1-e^{\beta L}} \sum_j^M e^{\beta(x_M-x_j-L)} C_j \quad (39d)$$

以下で周期境界条件を用いるのは簡単のためであるが、多くの実験で使われる自由境界条件での場も上の関数 $\Psi_L^{(p)}(x, t)$ を使って、

$$\Phi_i(x, t) = \Psi_{2L}^{(p)}(x, t) + \Psi_{2L}^{(p)}(-x, t) - C_i \quad (40)$$

と表せるので以下に述べる統計的振舞いはほとんど変わらないことを注意しておこう。

このモデルでは分裂によって新しくできた2つの要素は分裂の瞬間は全く同じ位置座標を持つので、シミュレーションでは分裂直後にその2つの順番を決めている。相互作用の形から明らかのように要素同士の順番はその後の時間発展でも変わることはない。

$M = 1$ (C_1, x_1) = (1, $L/2$) から始めると、安定な定常状態に出会わない限り要素は分裂を繰り返して増加し、最終的には分裂と消滅の釣りあった統計的定常状態に陥る。以下では人工的なノイズは全く加えていないが、シミュレーションでは計算誤差によって自然に小さなノイズが加わることに注意しよう。もちろん、 $\delta = 0$ の周りに人工的に小さな範囲のノイズをかけても以下に述べる結果は変わらない。

研究時期が異なるためやや数値計算の方法が異なる。§3.2 は通常 Euler 差分で得た結果である。ただし誤差を減らすため、分裂が起こると分裂時刻を推定して、分裂が起きた要素に関する計算だけを外場を固定してその時刻からやり直した。より精度が必要な §3.3 は刻幅制御付きの2階 Runge-Kutta で計算した。分裂や消滅が起きるとその都度、分裂時刻を推定しその時刻まで戻ってすべての計算をやり直している。

3.2 分裂する離散要素系の作るパターン

ここでは前節のモデル (36)、(37) の振舞いを数値シミュレーションで調べた結果を紹介する。定性的には $\gamma = 0$ で一様乱流状態、あるいは樹木状態や fractal 的状态などの非一様状態が見られ、 γ を大きくして各要素に成長を抑制する効果を与えると分裂のない定常状態と Spatio-temporal intermittency が起きる。以下ではこれらを順に見ていこう。

3.2.1 一様乱流状態

まず、 $\gamma = 0$ の場合の振舞いから見ていこう。図 20 はシステムサイズ $L = 20$ の系の数値シミュレーションから特徴的なパターンをおおまかに分類した相図で、横軸に1要素の成長の強さ α 、縦軸に相互作用の range の逆数 β をそれぞれ対数でとってある。

α 、 β が大きいパラメータ領域では図 21 のような一様乱流状態が現れる。有限の L の場合、 α と β が十分小さければ最終的に1要素のみの定常状態となるが、このようなパラメータ領域はシステムサイズ無限大 $L \rightarrow \infty$ の極限で消滅する。

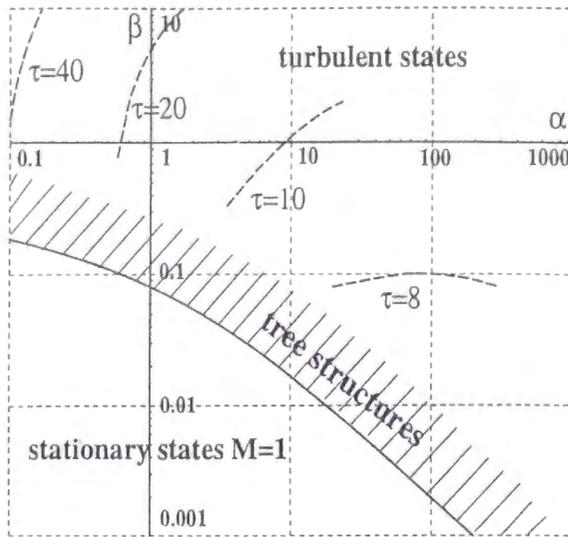


図 20: $\gamma = 0$ 、 $L = 20$ での 1D fingering model の相図

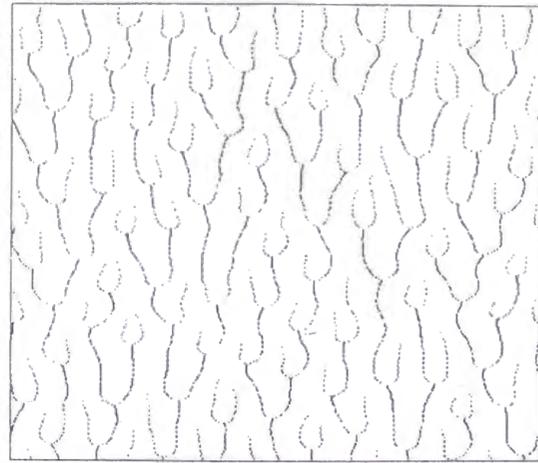


図 21: $\gamma = 0$ 、 $\alpha = \beta = 1$ 、 $L = 20$ に対する時空間パターン。横軸は $x = [0, 20]$ 、縦軸は $t = [0, 75]$ で下から上に各時間のスナップショットを重ね書きした。ドットの濃淡は C_i の大きさを表す。

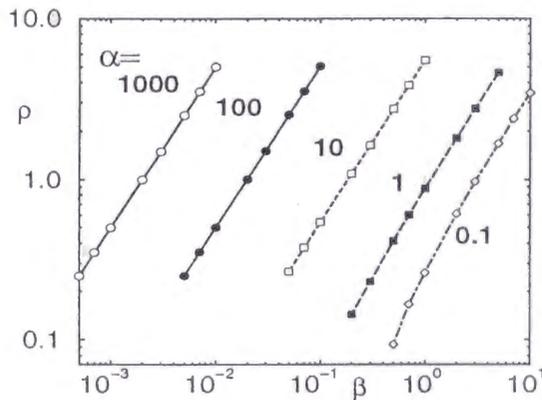


図 22: $\gamma = 0$ の乱流状態に対して得られた平均密度 ρ

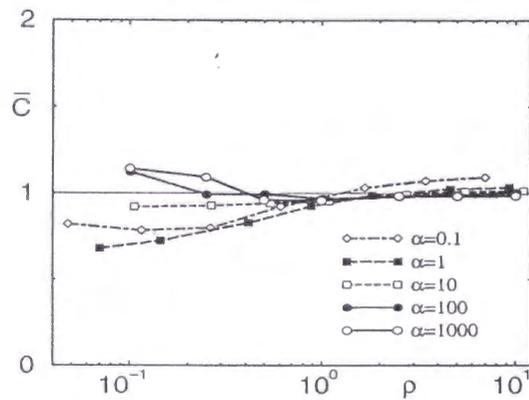


図 23: $\gamma = 0$ の乱流状態での C_i の平均値 \bar{C} 。横軸は平均密度 ρ

統計的な定常状態を特徴づけるために、平均密度 ρ 、平均サイズ \bar{C} と平均分裂周期 τ を以下のように定義しよう。

$$\rho \equiv \frac{1}{L} \left\langle \sum_i^M C_i \right\rangle \quad (41a)$$

$$\bar{C} \equiv \frac{1}{\langle M \rangle} \left\langle \sum_i^M C_i \right\rangle \quad (41b)$$

$$\tau \equiv \left\langle \sum_i^M C_i \right\rangle / \left\langle \frac{d}{dt} M_{split} \right\rangle \quad (41c)$$

ここで $M_{split}(t)$ は分裂の総回数で、 $\langle * \rangle$ は長時間平均を表す。

$L = 100$ の系の時間 $t = [500, 2500]$ のデータから得た平均密度 ρ と平均サイズ \bar{C} を図 22、23

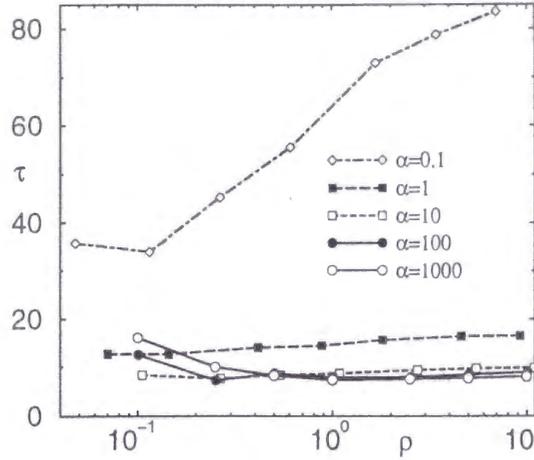


図 24: $\gamma = 0$ の乱流状態での平均分裂周期 τ 。横軸は平均密度 ρ 。

に示した。全パラメータ領域で C_i の平均 \bar{C} はほぼ 1 なので、 $\langle M \rangle \simeq \langle \sum_i^M C_i \rangle$ であり、 ρ^{-1} は隣合う要素間の平均距離 $l \equiv L/\langle M \rangle = \bar{C}/\rho$ 程度であると考えていい。また、ある要素が分裂によって作られてから消滅あるいは再び分裂するまでの時間は消滅する要素と分裂する要素がほぼ同数あるので、平均分裂周期の半分 $\tau/2$ 程度である。

図 22 からわかるように ρ は β に比例し、 ρ/β は α の増加関数である。

同じサイズ \bar{C} を持つ要素が間隔 $l = \bar{C}/\rho$ で等間隔に並んだ定常状態を考えると、 ρ と \bar{C} の関係を近似的に得ることができる。 $(C_i, x_i) = (\bar{C}, li)$ をモデル方程式 (36a)、(36c) に代入し、 $dC_i/dt = 0$ と置くと、

$$\bar{C} = \frac{\alpha}{\gamma + \bar{\Phi}} \quad \bar{\Phi} \equiv \frac{2}{e^{\beta l} - 1} \quad (42)$$

であるが、この関係式はシミュレーションから得た結果とよく一致する。特に $\gamma = 0$ 、 $\bar{C} \simeq 1$ とすると、

$$\rho \simeq \beta \left[\ln \left(1 + \frac{2}{\alpha - \gamma} \right) \right]^{-1} \quad (43)$$

である。従って、 $\gamma = 0$ の時、要素間隔 l と相互作用距離 $1/\beta$ の比は $\alpha \sim 1$ 付近で逆転し、 $\alpha \rightarrow 0$ で $l \gg 1/\beta$ 、 $\alpha \rightarrow \infty$ で $l \ll 1/\beta$ となる。

また、モデル方程式 (36a) と周期境界での相互作用の関数形 (38) は $\alpha\beta$ を固定して $\alpha \rightarrow \infty$ とする極限で、 $dC_i/dt = \alpha - 2\rho/\beta + O(1)$ となるので、 ρ/β はこの極限では正確に $\alpha/2$ に漸近する。

一方、一様乱流状態の代表的な時間スケールと考えられる平均分裂周期 τ は図 24 のようになる。相図 20 にもおおよっぱな等高線で τ を示した。シミュレーションで調べた範囲 $\alpha = 10^{-1} \sim 10^4$ では、 $\alpha\beta$ を固定して α を増加させると、 τ は減少してほぼ一定値に落ちつく。

ρ と異なり、 τ は簡単な平均場近似では求まらない。§2.4 で考察したように我々のモデル方程式は分裂がなければ自由エネルギーのような関数を持つ。実際、この場合の関数 (29) は

$$\mathcal{H} \equiv \sum_i (-\alpha C_i + \frac{1}{2} \gamma C_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} e^{-\beta |x_i - x_j|} C_i C_j \quad (44)$$

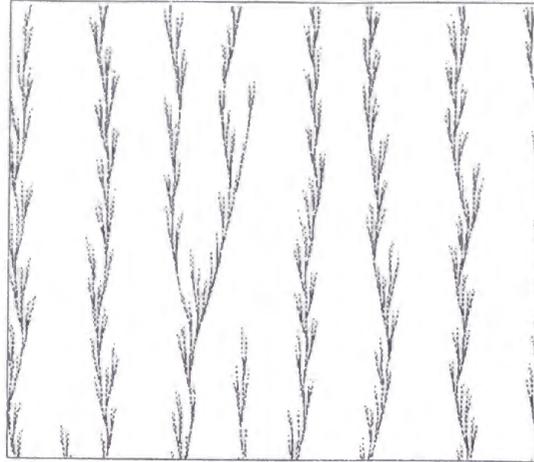
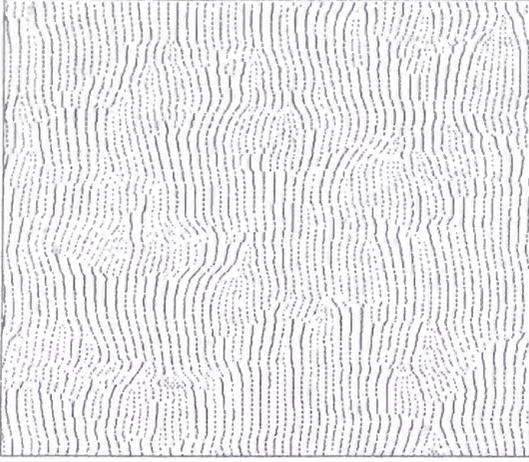


図 25: $\alpha = 0.1$, $\beta = 20$, $\gamma = 0$, $L = 10$ での時空パターン。 $x = [0, 10]$, $t = [0, 150]$

図 26: $\alpha = 50$, $\beta = 0.03$, $\gamma = 0$, $L = 50$ での時空パターン。 $x = [0, 50]$, $t = [0, 75]$

であり、式 (36a)、(36b) は

$$\frac{dC_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C_i} \quad C_i \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \quad (45)$$

と書ける。 \mathcal{H} は 1 回の分裂のたびに $1 + \gamma$ 増え、消滅に対しては変化しないので要素数が変化する時の \mathcal{H} の時間発展は

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\sum_i^M D_i + (1 - \gamma) \frac{dM_{split}}{dt} \quad (46a)$$

$$D_i \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C_i} \right)^2 + \frac{1}{C_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \right)^2 = (\Phi_i - \alpha - \gamma C_i)^2 + C_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \right)^2 \geq 0. \quad (46b)$$

である。

$\sum_i^M D_i$ は定常状態 $dC_i/dt = dx_i/dt = 0$ では 0 になるので、一様定常状態からのシステムの乱雑さの程度を表しているともみなすことができる。統計的定常状態では $d\mathcal{H}/dt$ の長時間平均は 0 になるので、

$$\left\langle \frac{d}{dt} M_{split} \right\rangle = \frac{1}{1 + \gamma} \left\langle \sum_i^M D_i \right\rangle. \quad (47)$$

である。この関係式はシステムの乱雑さと分裂頻度がバランスすることを表している。

3.2.2 非一様状態 ～ 樹木状構造とフラクタル ～

パラメータ領域によっては、前節の乱流状態が空間的に不均一になってくる。一つは、 α が小さく、 β が大きくて短距離相互作用の場合である。この時、前節の一様乱流状態と異なり図 25 のように空間的に近い要素同士がまとまって消滅、分裂する時空パターンが見られる。

一方、 β が小さくなって相互作用が長距離になると、樹木状の空間構造をもつ状態が現れる。典型的には図 26 のような時空パターンで、そこではいくつかの要素が小さな集団を作り、時にはその集団が分裂して配置を変える。この 1 集団を以下では tree と呼ぶことにしよう。樹木状の

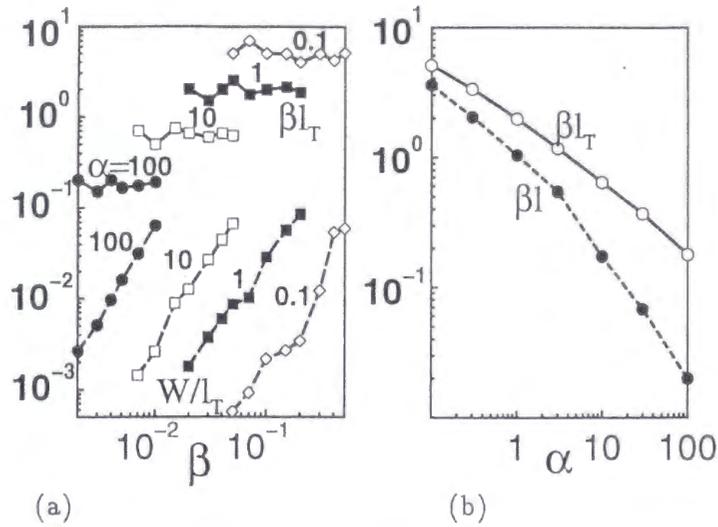


図 27: $\gamma = 0$, $L = 100$ に対して得られた tree 間距離 l_T 。
 (a) βl_T と W/l_T を β に対して log-log プロットした。
 (b) βl_T と βl の β に関する平均値を α に対して log-log プロットした。

状態を特徴づけるために、隣の要素との間隔 $l_i \equiv x_{i+1} - x_i$ が平均間隔 L/M より大きい要素を数えあげて tree の数 M_T とし、さらに tree 同士の間隔 l_T と tree の幅 W を以下のように計算した。

$$l_T \equiv L / \langle M_T \rangle \quad (48a)$$

$$W \equiv \left\langle \sum_{l_i < L/M} l_i \right\rangle / \langle M_T \rangle \quad (48b)$$

これらの定義は tree が十分局在していて W/l_T が十分小さい時のみ正しい。

図 27 がシミュレーションから得られた l_T , W の振舞いである。前節で見た平均要素間距離 l と同様に、平均 tree 間距離 l_T もまた β に比例するが、 l_T/l は一定ではなく α とともに増加する。これは 1 個の tree を構成する要素数が α とともに増加することを示している。

一様乱流状態から β を序々に小さくしていくと、システムは図 28、29 のような周期的定常状態にしばしば落ち込む。この状態は平均密度 ρ を見てもほとんどわからないが、図 30 のように平均分裂周期 τ は乱流状態よりやや下がる。これらの定常状態は L が大きくなるにつれて transient が長くなって実現しにくくなるが、十分大きな L に対しても安定である。周期的定常状態はパターンが伝播するかどうかで大きく 2 つに分類でき、その構成要素の数でさらに細分化される。周期構造が伝播する状態は α あるいは β が小さいパラメータ領域で現れやすく比較的小数の要素からなる。一方、周期構造が定在する状態は安定な tree 構造からなり、伝播状態より高い β でも現れる。次節で示すように分裂のない周期定常解は $\gamma = 0$ では常に不安定である。各 tree を複数の内部自由度を持つ 1 要素とみなすと、このような安定な周期 tree 構造は要素が小集団に分かれて周期解を安定化させたと見ることもできるだろう。

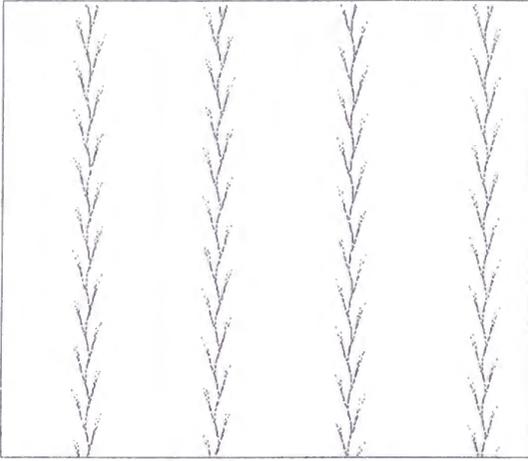


図 28: $\alpha = 4.8$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0$, $L = 50$ での時空パターン。 $x = [0, 50]$, $t = [0, 75]$ 。

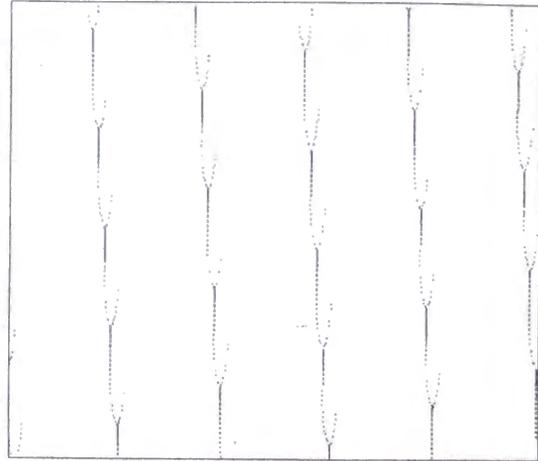


図 29: $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.4$, $\gamma = 0$, $L = 50$ での時空パターン。 $x = [0, 50]$, $t = [0, 75]$ 。

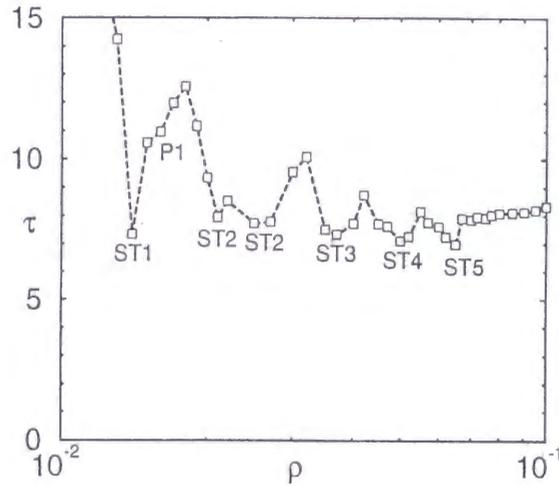


図 30: $\gamma = 0$, $\alpha = 10$, $L = 50$ での平均分裂周期 τ を平均密度 ρ の関数としてプロットした。 τ がやや下がっているところは定常状態に対応する。 $ST\ m$ は定在した m 個の tree をもつ周期構造、 $P\ m$ は伝播構造を表す。時間 $t = [10000, 12000]$ のデータから作った。

α が大きくなって tree の構成要素数が増加すると、周期的定常状態は現れにくくなり、時空パターンは図 31 のように fractal 的になる。図 32 に密度 $\rho(x) \equiv \sum_i C_i \delta(x - x_i)$ の波数空間でのパワースペクトルを $\alpha\beta$ を固定して幾つかの α に対してプロットした。 α が大きくなるにつれて、中ぐらいの大きさの波数でスペクトルは盛り上がり、高波数側へ巾的に減衰する。この極限では β が小さくなり 相互作用の range が長くなる。バクテリアの DLA パターンもコロニーの成長速度が遅くなって拡散長が長くなるので、状況は基本的に同じである。このような空間構造の変化は前節で調べた ρ や τ には反映されない。

3.2.3 分裂のない定常状態と Spatio-temporal intermittency

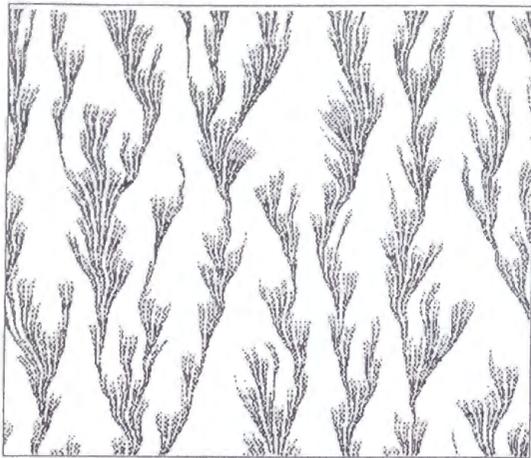


図 31: $\gamma = 0$, $\alpha = 1000$, $\beta = 0.01$, $L = 20$ での時空パターン。 $x = [0, 20]$, $t = [0, 75]$

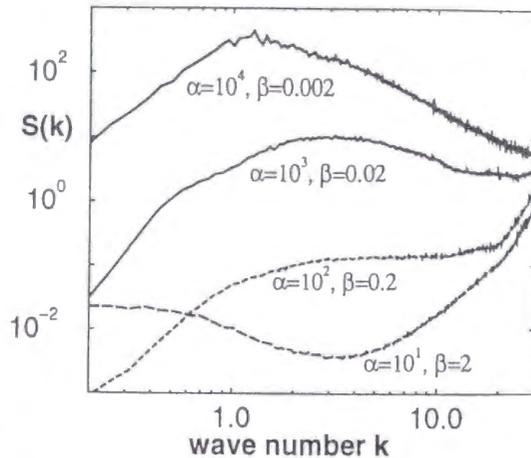


図 32: 波数空間での平均密度 $\rho(x)$ のパワースペクトル $S(k)$ 。 $\gamma = 0$, $\alpha\beta = 20$ 。

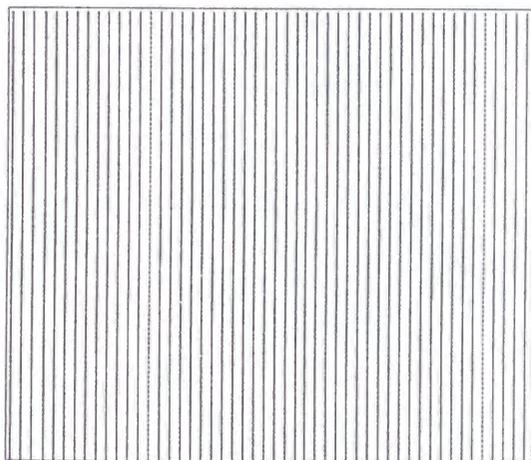


図 33: $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0.275$, $L = 100$ で得られた時空パターン。 $\gamma = 0.300$ で定常状態を作ってから γ を小さくした。 $x = [0, 100]$, $t = [0, 150]$ 。

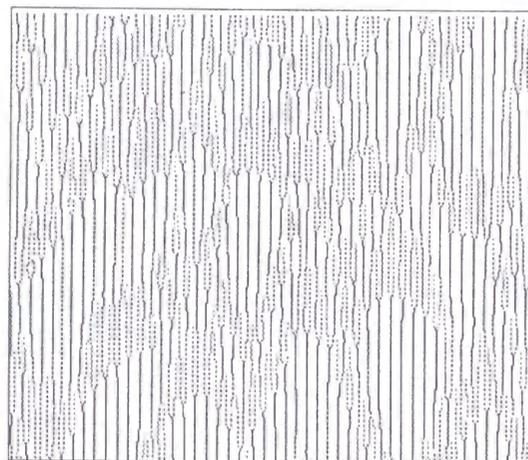


図 34: $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0.275$, $L = 100$ で得られた時空パターン。 $x = [0, 100]$, $t = [0, 150]$ 。

次に $\gamma \neq 0$ として、各要素が自分自身の成長を抑制する性質を持つ場合を見よう。§3.2.1 で見たようにモデル方程式 (36a)、(36b) には同一のサイズ \bar{C} をもつ要素が等間隔 l で並んだ図 33 のような一様定常解があり、 \bar{C} と l は式 (42) で与えられる関係を満足する。この定常解は要素間隔 l に対して族を作っており、 $0 < \bar{C} \leq 2$ から許される l の範囲が決まる。次章で見るように、このような定常状態は $\gamma > \gamma_{s,i} (\neq 0)$ で安定になる。

$\gamma < \gamma_s \equiv \min \gamma_{s,i}$ で系は一様乱流状態になることが数値シミュレーションから分かる。一様乱流状態から γ を大きくしていった γ_s を越えても、乱流状態はある $\gamma \equiv \gamma_c > \gamma_s$ まで持続する。 γ_c の近くでは、システムの振舞いは図 34 のような spatio-temporal intermittency (STI) になることがわかる。

式 (35) で定義した全要素の作る濃度場 $\frac{\rho}{2}\Psi(x, t)$ の周波数パワースペクトルを図 35 に示した。

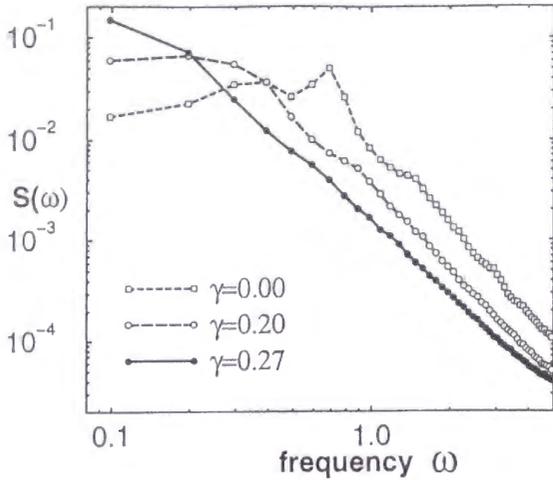


図 35: $\alpha = \beta = 1$, $L = 100$ でいくつかの γ に対して得られた場 Ψ の周波数パワースペクトル。

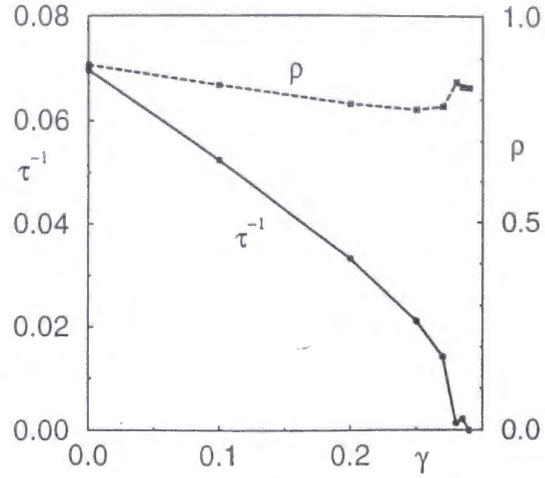


図 36: $\alpha = \beta = 1$, $L = 100$ で γ を大きくしていった時の平均密度 ρ と平均分裂頻度 $1/\tau$ 。 γ_c はこのパラメータでは $\gamma_c \approx 0.28 \pm 0.05$ と見積もられる。

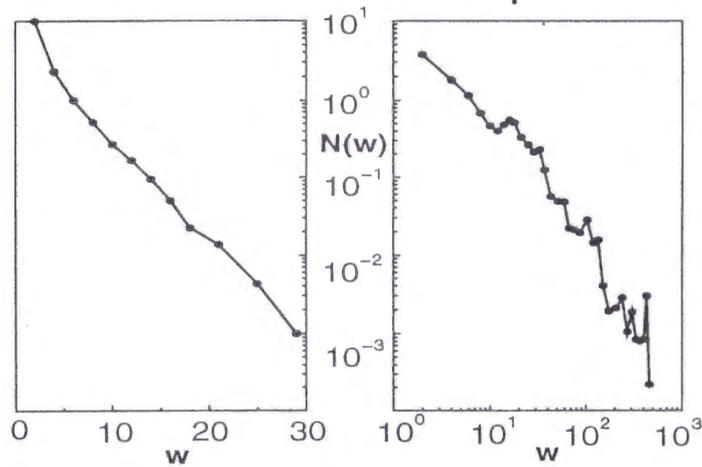


図 37: laminar ドメインの数 $N(w)$ をドメインサイズ w の関数として
 (左) $\gamma = 0.26$ の場合を linear-log プロット
 (右) $\gamma = 0.28$ の場合を log-log プロット で示した。
 この計算は $\alpha = \beta = 1$, $L = 1000$ で行なった。特に右図は十分長い時間 15000 の後の 10000 時間のデータから作られた。

$\gamma = \gamma_c$ に近づくにつれて、スペクトルは巾的な振舞いに近付いている。また、式 (46b) の D_i が 10^{-4} 以下である要素を laminar 状態にあると定義し、laminar ドメインサイズの空間サイズ w の分布 $N(w)$ を調べて図 37 にプロットした。サイズ分布 $N(w)$ は γ_c 近くで指数関数的分布から巾分布に変わる。

図 36 に α と β を固定して計算した平均密度 ρ と平均分裂周期 τ^{-1} を γ の関数としてプロットした。 τ^{-1} は $\gamma \rightarrow \gamma_c$ で $\tau^{-1} \propto \sqrt{\gamma_c - \gamma}$ のように 0 に近づくことがわかる。

これらの結果は coupled map lattice で発見された STI [10, 6] と一致している。また、fingering

pattern の実験では directional viscous fingering でこのような振舞いが報告されている [18]。

3.3 乱流状態の力学的特徴

本節では乱流状態が力学系としてどのような特徴があるのかを線形安定性解析、リヤプノフ解析などの手法を用いて考察しよう。また、分裂があると chaos の生じる理由を一様定常状態について定性的に考察する。

3.3.1 一様定常状態の線形安定性

モデル (36) の一様定常解

$$(C_i, x_i) = (\bar{C}, li), \quad \alpha \equiv (\gamma + \bar{\Phi})\bar{C}, \quad \bar{\Phi} \equiv \frac{2}{e^{\beta l} - 1} \quad (49)$$

の線形安定性をまず見てみよう。

各要素の状態 (C_j, x_j) を (\bar{C}, lj) からわずかにずらして $(C_j, x_j) = (\bar{C}, lj) + (\delta C, \delta x)e^{\lambda t + iqj}, \pi/q = 1, 2, 3, \dots$ と置こう。 $\delta C, \delta x$ に対して線形化すると、 λ の固有値方程式が得られる。

$$\lambda \begin{pmatrix} \delta C \\ \bar{C}\delta x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma + \bar{\Phi}_{q,r} & i\beta\bar{\Phi}_{q,i} \\ -i\beta\bar{C}\bar{\Phi}_{q,i} & \bar{C}\beta^2(\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_{q,r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta C \\ \bar{C}\delta x \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\bar{\Phi}_q \equiv \frac{2}{e^{\beta l + iq} - 1}$$

$$\bar{\Phi}_{q,r} \equiv \text{Re}\bar{\Phi}_q = \frac{\cos q - e^{-\beta l}}{\cosh \beta l - \cos q}, \quad \bar{\Phi}_{q,i} \equiv \text{Im}\bar{\Phi}_q = -\frac{\sin q}{\cosh \beta l - \cos q}, \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}_0 = \bar{\Phi}_{0,r}$$

固有値方程式

$$(\lambda + \gamma + \bar{\Phi}_{q,r})(\lambda + \bar{C}\beta^2(\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_{q,r})) - \beta^2\bar{C}\bar{\Phi}_{q,i}^2 = 0 \quad (51)$$

は、 λ に関する定数項が関係式

$$(\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_{q,r})^2 + \bar{\Phi}_{q,i}^2 = |\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_{q,r}|^2 = \frac{2}{\sinh \beta l} (\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_{q,r})$$

を使って

$$(\gamma + \bar{\Phi}_{q,r})(\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_{q,r}) - \bar{\Phi}_{q,i}^2 = (\gamma - \gamma_{s,l})(\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_{q,r}) \quad (52a)$$

$$\gamma_{s,l} \equiv \frac{2}{e^{\beta l} + 1} \quad (52b)$$

と書き換えられるので、 $q=0$ または $\gamma = \gamma_{s,l}$ の場合にゼロ固有値 $\lambda = 0$ を持つ。

上の行列は並進モード $q=0$ と最大波数のモード $q=\pi$ で対角的で、その時 C 方向 $(1,0)$ と空間方向 $(0,1)$ が固有モードになる。

$q=0$ でのゼロ固有値はシステムの並進対称性から生じる中立安定なモードで、 C 方向の固有値は負で $\lambda = -\gamma - \bar{\Phi} = -\alpha/\bar{C}$ であり常に安定である。

一方、最大波数 $q=\pi$ では x 方向は負の固有値 $\lambda = -\bar{C}\beta^2(\bar{\Phi} + \gamma_{s,l}) = -\alpha\beta^2\bar{C}/\bar{C}\gamma_{s,l}$ を持ち常に安定であるが、 C 方向のモードは $\lambda = \gamma_{s,l} - \gamma$ なので $\gamma < \gamma_{s,l}$ に対して不安定になる。

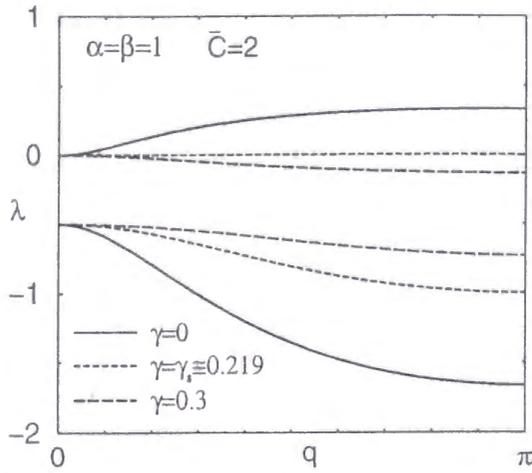


図 38: $\gamma = \gamma_s$ の前後での固有値 $\lambda(q)$ 。
 $\alpha = \beta = 1, \bar{C} = 2$ 。

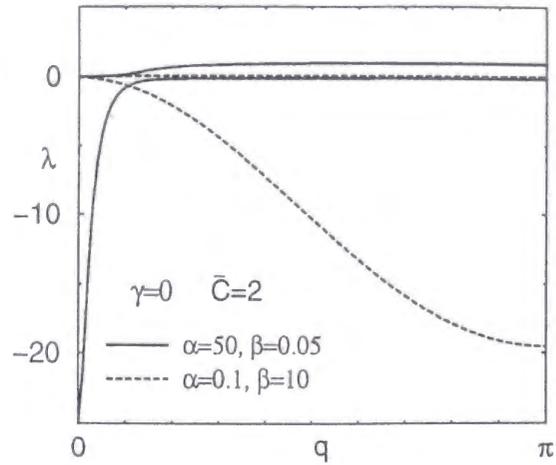


図 39: $\beta = 0.02$ と $\beta = 20$ に対する固有値
 $\lambda(q)$ 。 $\alpha\beta = 2, \gamma = 0, \bar{C} = 2$ 。

図 38 に γ を変えて固有値 $\lambda(q)$ をプロットした。ここで示したパラメータでは $\gamma = 0$ は典型的な一様乱流状態で、 γ を大きくしていくと STI を経て $\gamma_c \simeq 0.28$ 付近を越えると一様定常状態に落ち着く現象が見られた。間隔 l の定常状態は $\gamma = \gamma_{s,l}$ ですべての波数 q のモードに対して不安定化する。 $\gamma_{s,l}$ は要素間隔 l の減少関数で、 l は \bar{C} の増加関数であるから、最大サイズ $\bar{C} = 2$ に対応する定常状態が最小の $\gamma_{s,l} \equiv \gamma_s$ を持ち、この定常解の族の中で最も安定である。 γ_s の具体的な値は式 (49)、(52b) から α のみで決まり、

$$\gamma_s \equiv \frac{1}{4}(\alpha + 4 - \sqrt{\alpha^2 + 16}) \quad (53)$$

である。しかしながら、最も線形安定性な解ほど分裂の閾値 $C_i = 2$ に近く摂動に対して分裂を起こしやすい。シミュレーションで STI が見られるのは $\gamma > \gamma_s$ の一様定常解が安定な領域であり、これは coupled map lattice から得られている STI に対する知見と一致する [10, 6]。

$\gamma < \gamma_s$ では一様定常解はすべて不安定である。 $\gamma < \gamma_{s,l}$ では $q = \pi$ が λ の正の最大値になるので、一様定常状態は主に隣合う C_i が交互に大小大小... となって不安定化し始めることがわかる。

空間的に不均一な構造が見られた $\gamma = 0$ での $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty$ と $\alpha \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0$ の両極端のパラメータ領域での固有値は特徴的である。どちらの場合もすべての波数 $q = [0, \pi]$ で C 方向 $(1, 0)$ と空間方向 $(0, 1)$ が固有ベクトルになる。これらの領域での典型的な固有値 $\lambda(q)$ のグラフを図 39 に示した。

$\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty$ の極限では C 方向の固有値は 0 に漸近し、 x 方向の固有値は $\lambda = \alpha\beta^2(\cos q - 1) \leq 0$ に近づく。またこの時、 $\gamma_{s,l}$ も α に比例して小さくなる。従って、この極限では要素は空間的にはほぼ揃ってから C 方向の不安定性が全波数領域でゆっくり成長する。このことは、図 25 に見られたクラスティックな分裂、消滅を説明している。

一方、フラクタル的な空間構造が現れる $\alpha \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0$ の極限では x 方向の固有値が 0 に漸近し、 C 方向の固有値は並進モード $q = 0$ で大きな負の値 $\lambda = -\alpha/\bar{C} \ll 1$ を持ち、それ以外の波数で同じ正の値 $\lambda = 1$ を持つ。この極限での系の振舞いについては §3.4 でさらに議論する。

3.3.2 リヤブノフ数

自由度の変わるシステムに対しては力学系の研究で用いられるリヤブノフ数の定義をそのまま使うことはできない。しかしながら、式 (35) と同様な連続場 $\Psi_s(x, t) = s \sum_i^M e^{-s|x-x_i|} C_i$ を定義すれば、この場に対する微小摂動の時間発展の指数として自然にリヤブノフ数を導入することが可能である。

状態 $\mathbf{U} = \{(C_i, x_i) | i = 1, 2, \dots, M\}$ に無限小の摂動を加えた状態を $\mathbf{U}' = \{(C_i + \delta C_i, x_i + \delta x_i) | i = 1, 2, \dots, M\}$ とし、それぞれの状態での連続場 $\Psi_s(x, t)$ と $\Psi'_s(x, t)$ を用いて両者の距離を

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}'\| \equiv \int dx |\Psi_s(x, t) - \Psi'_s(x, t)|^2 \quad (54)$$

と定義しよう。この距離は時間とともに指数関数的に成長あるいは減衰する。

$\delta C_i, \delta x_i$ の 2 次の項まで展開すると

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}'\| \simeq \sum_i^M (\delta C_i^2 + s^2 C_i^2 \delta x_i^2) + \sum_i^M \sum_{j \neq i}^M e^{-s|x_i - x_j|} (i \text{ と } j \text{ の cross term}) \quad (55)$$

である。 s を大きくすれば、第二項は第一項に比べて十分小さくできる。また、 $\delta C_i, \delta x_i$ はダイナミクスで互いに線形に結合しているから、 $\sum_i^M \delta C_i^2$ と $\sum_i^M \delta x_i^2$ は同じ指数で成長する。従って、距離 $\|\mathbf{U} - \mathbf{U}'\|$ によって定義されるリヤブノフ数は s によらず、 $\sum_i^M \delta C_i^2$ や $\sum_i^M \delta x_i^2$ で定義しても結果は同じである。以下のシミュレーションでは最も簡単に $\delta \mathbf{U} \equiv \mathbf{U} - \mathbf{U}'$ を通常のユークリッド空間上の $2M$ 次元ベクトルとして扱い内積、距離を定義した。

リヤブノフ数の計算にはモデル (36)、(37) からベクトル $(\delta C_i, \delta x_i)$ に関する線形化された方程式を作れば良いが、注意を要するのは分裂、消滅の扱いである。分裂、消滅の際に摂動ベクトル $\delta \mathbf{U}$ は不連続に変化する。例えば要素 1 の消滅に対して摂動ベクトル $\delta \mathbf{U}$ は

$$(\delta C_1, \delta x_1, \delta C_i, \delta x_i) \Rightarrow (\delta C_i, \delta x_i) \quad i = 2, \dots, M \quad (56)$$

と変化し、分裂に対しては 2 要素 (C_L, x_L) と (C_R, x_R) ができて

$$(\delta C_1, \delta x_1, \delta C_i, \delta x_i) \Rightarrow (\delta C_L, \delta x_L, \delta C_R, \delta x_R, \delta C_i, \delta x_i)$$

$$\delta C_L = \delta C_R = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\frac{d}{dt} C_1}\right) \delta C_1, \quad \delta x_L = \delta x_1 - \frac{\beta \delta C_1}{\frac{d}{dt} C_1}, \quad \delta x_R = \delta x_1 + \frac{\beta \delta C_1}{\frac{d}{dt} C_1} \quad (57)$$

と変化する (Appendix B 参照)。

図 40 と図 41 にこのようにして計算された最大リヤブノフ数を示した。予想されたように $1/\beta$ または α が大きくなって、より発達した乱流が現れる領域ほど最大リヤブノフ数は大きい。また、 γ を大きくしていくと最大リヤブノフ数は徐々に減少するが、STI から一様定常状態に移る $\gamma = \gamma_c$ で急に 0 に落ちることが分かる。これも coupled map lattice で知られている STI の結果と一致する [10, 6]。

図 40 で調べた $\gamma = 0$ の乱流状態の最大リヤブノフ数に平均分裂周期 τ を掛けて、分裂の 1 周期当たりの摂動ベクトルの成長率を平均密度 ρ の関数としてプロットし直したのが図 42 である。このようにすると図 40 のすべてのグラフがほぼ同じ関数にスケールされる。ただし、これには全

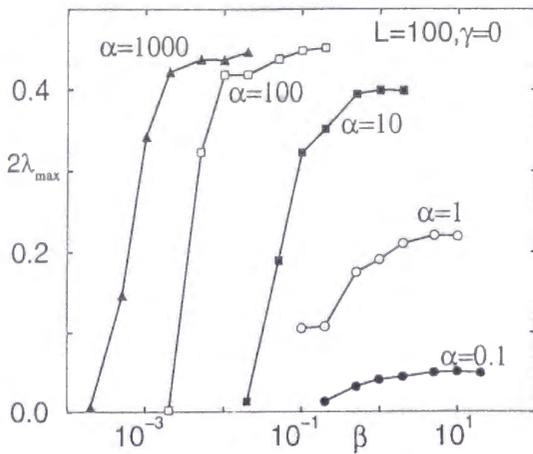


図 40: $L = 100, \gamma = 0$ での最大リヤプノフ数 λ_{max} の β に対する変化を $\alpha = 0.1, 1, 10, 100, 1000$ についてプロットした。時間 $t = [500, 2500]$ のデータから計算した。

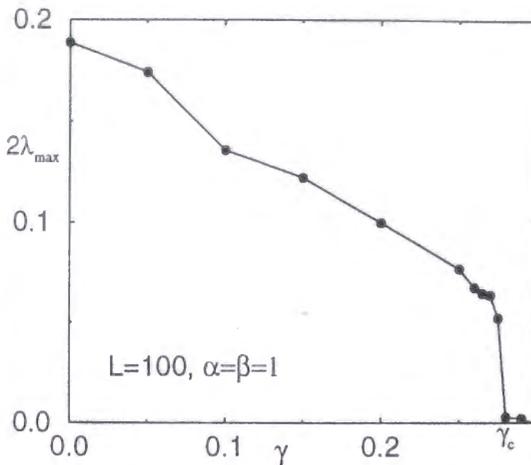


図 41: $L = 100, \alpha = \beta = 1$ での最大リヤプノフ数 λ_{max} の γ に対する変化。時間 $t = [500, 2500]$ 。

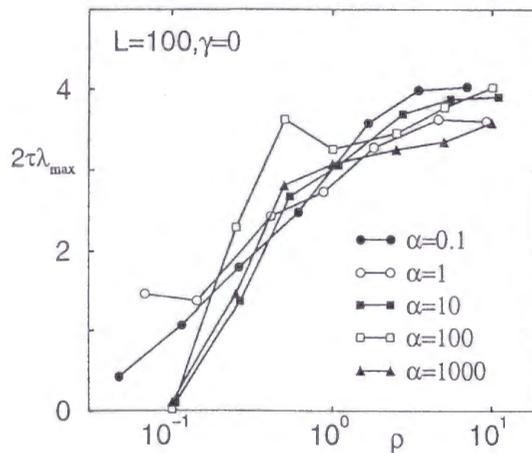


図 42: 図 40 のデータを平均密度 ρ に対する分裂周期当たりの成長率 $2\tau\lambda_{max}$ のグラフとしてプロットし直した。

空間が同じように乱れていることが必要で STI 状態の時や定常状態の時は当然ながらこの関数上には載らない。また、図 40 の $\alpha = 100$ のグラフの途中の 1 点が上に外れているが、調べてみるとこのパラメータでは tree 数が全く変化しない一様乱流とは言い難い状態がたまたま形成されていた。

このようなスケーリングができる原因はまだ明らかではない。比較的小さな L でシミュレーションをすると平均密度 ρ の低いパラメータ領域ではパターンがしばしば定常状態に近い状態になる。最大リヤプノフベクトルが大きく成長するのはこのような状態が破れて要素の再配置が起きている時である。一方、強い一様乱流状態では最大リヤプノフ数で定義される時間スケール

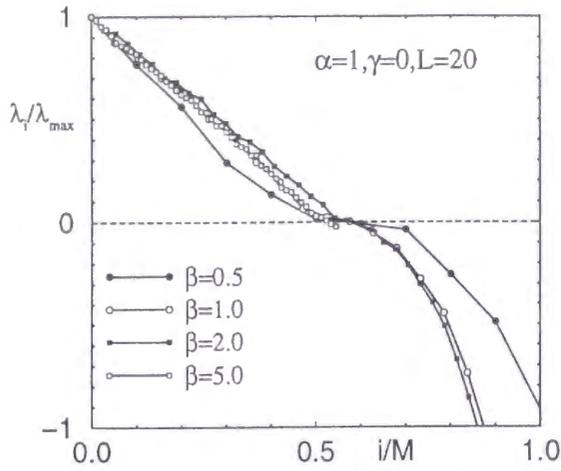


図 43: $L = 20, \alpha = 1, \gamma = 0$ でのリヤプノフスペクトル λ_i の β に対する変化。 λ_i を λ_{max} で、 i を要素数 M で規格化してプロットした。時間 $t = [500, 2500]$ のデータから計算した。

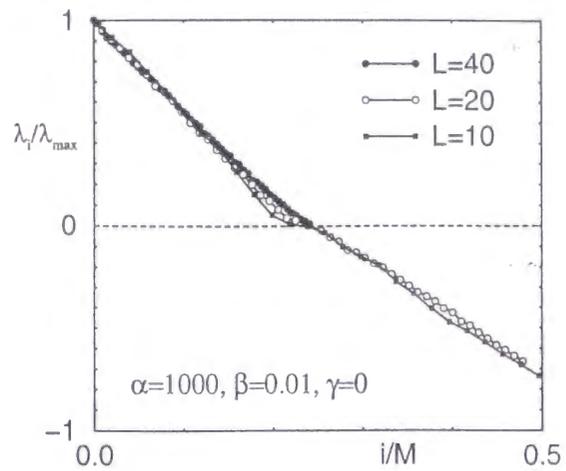


図 44: $\alpha = 1000, \beta = 0.01, \gamma = 0$ での規格化されたリヤプノフスペクトル λ_i/λ_{max} の L に対する変化。 $t = [500, 2500]$ のデータから計算した。

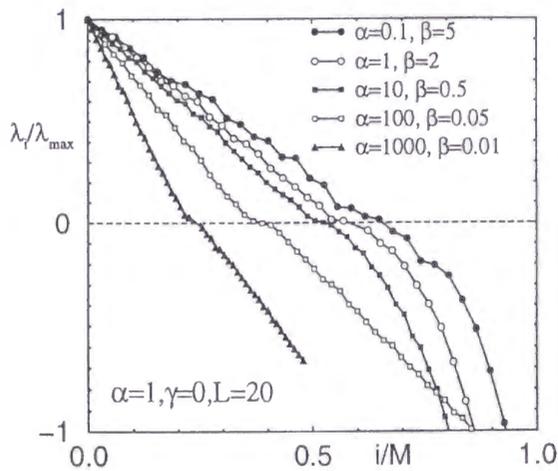


図 45: $L = 20, \gamma = 0$ での規格化されたリヤプノフスペクトル λ_i/λ_{max} の α に対する変化。 $t = [500, 2500]$ のデータから計算した。

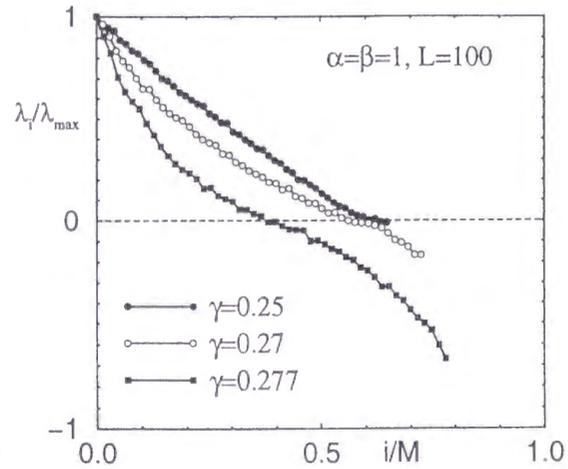


図 46: $L = 100, \alpha = \beta = 0$ での規格化されたリヤプノフスペクトル λ_i/λ_{max} の γ に対する変化。 $t = [5000, 10000]$ のデータから計算した。

$1/\lambda_{max}$ は平均分裂周期に比例する。こうした観察から tree の系統樹の多様性で定義されるエントロピーの増加率とリヤプノフ数との間に何らかの関係を予想したくなるが、この問題についてはまだこれからの課題である。

リヤプノフ数を大きい順に並べたリヤプノフスペクトル λ_i も同様にして得られる。図 43 は β に関するスペクトルの変化を調べたものである。 λ_i を最大リヤプノフ数 λ_{max} でスケールし、 i を要素数 M で割ると α が同じならほぼ同じ関数に載ることが分かる。また、図 44 からわかるようにシステムサイズ L に対する依存性はほとんどない。従って、相互作用距離 β^{-1} によって変

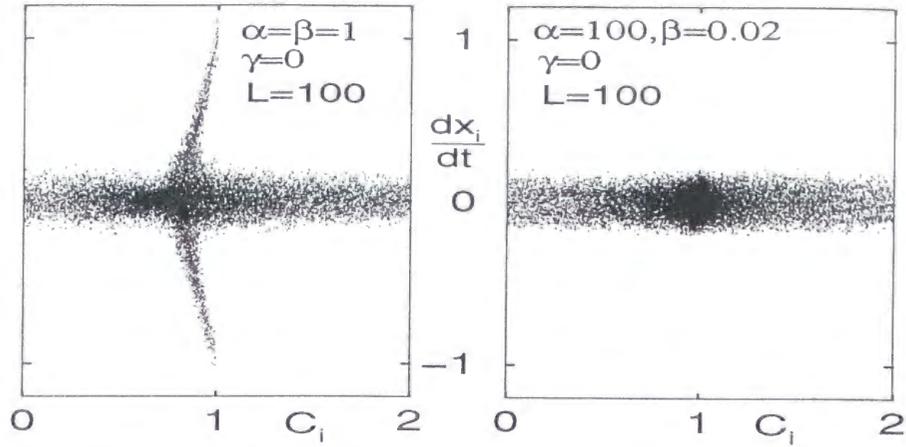


図 47: 全要素の $C_i(t)$ と $dx_i(t)/dt$ を 200 スナップショットを重ねてプロットした。 $L = 100$ 、 $\gamma = 0$ 、右) $\alpha = \beta = 1$ 、左) $\alpha = 100, \beta = 0.02$

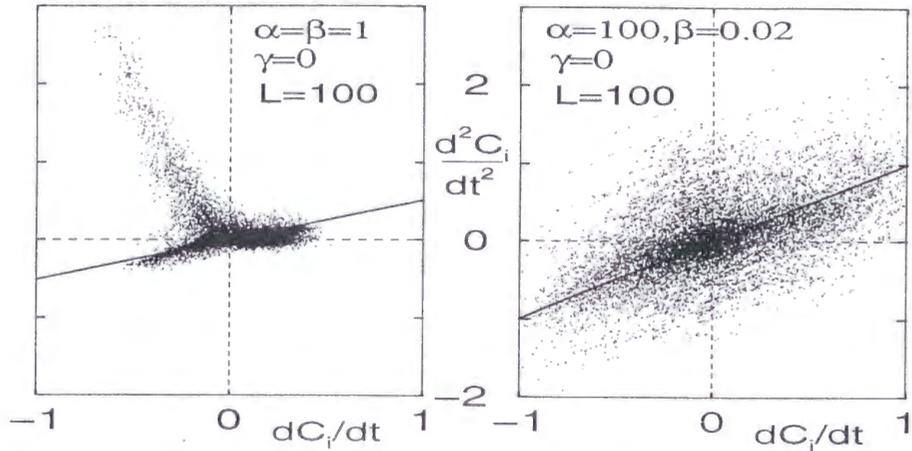


図 48: 全要素の $dC_i(t)/dt$ と $d^2C_i(t)/dt^2$ を 200 スナップショットを重ねてプロットした。(図 47 と同じパラメータ)

化するのには主に最大リヤプノフ数で定義される時間スケール $1/\lambda_{max}$ だけでその他の特徴はほとんど変化しないといえる。

図 45 は同様にスケールしてプロットしたスペクトルの α 依存性である。フラクタル的な時空パターンが現れる $\alpha \rightarrow \infty$ に伴って、要素数に対して正のリヤプノフ数の数 (リヤプノフ次元) が次第に減少している。このようなリヤプノフスペクトルの特徴は図 46 のように全く別のタイプのフラクタルパターンが現れる STI の場合と同じである。

3.3.3 一様乱流状態の力学的な構造

図 47 は典型的な一様乱流状態での全要素の $C_i(t)$ と $dx_i(t)/dt$ のスナップショットの重ね書きである。

要素 $(C_i, dx_i/dt)$ が $C_i = 2$ で分裂すると 2 要素 $(1, dx_i/dt \pm \beta)$ ができる。生成された要素は平均場で決まる鞍点 $(\bar{C}, 0)$ 付近に近付いて $dx_i/dt \sim 0$ に沿って遠ざかる。 $C_i = 0$ に向かった要

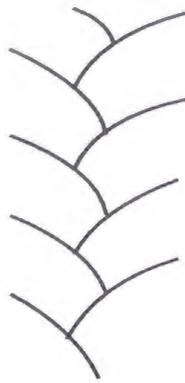


図 49: 2 要素
からなる tree

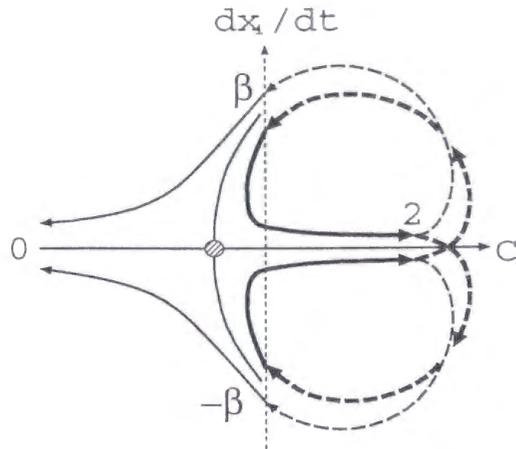


図 50: homoclinic orbit

素は消滅し、 $C_i = 2$ まで成長した要素は再び分裂して $(1, \beta)$ と $(1, -\beta)$ 付近の 2 要素に変換されている。 $dx_i/dt = 0$ の周りの分布の広がり α がかなり小さいか、 γ が大きくなると狭くなる。これは平均場の運動による鞍点の揺らぎが小さいことを反映している。

ここで形成される鞍点の基本的な性質は §3.3.1 で調べた一様定常解でサイズ $C_i = \bar{C}$ のものに近い。図 48 は全要素の dC_i/dt と d^2C_i/dt^2 のスナップショットの重ね書きで、図中の直線の傾きは $C_i = \bar{C}$ の一様定常解の C 方向の固有値 $\lambda_{\bar{C}}$ と同じである。鞍点近傍 $(dC_i/dt, d^2C_i/dt^2) \sim (0, 0)$ ではほぼ $d^2C_i/dt^2 \simeq \lambda_{\bar{C}} dC_i/dt$ であるのがわかる。

このように一様乱流状態では分裂後の要素は local には一様定常状態に向かい、平均場の揺らぎと一様定常状態自身の不安定性によって成長/消滅する。ただし、 β が小さくなって相互作用が遠距離の領域では dx_i/dt の分布の広がりのほうが β より大きく、 x 方向のはっきりした運動はほとんど見られない。

要素が分裂すると chaos が現れる理由は定性的には以下のように説明できる。図 49 のように左右の要素が交互に分裂するような 1 つの tree に着目し、さきほどの $(C_i, dx_i/dt)$ 平面上で考えると、周りの要素の作る平均場が一定の理想的な状態ではこの系は図 50 のような周期軌道と一種の homoclinic orbit を持つ。実際には、鞍点が平均場の運動によって揺らぐのでこの orbit は不安定であり、左右の選択は chaotic になる。

自由度の変化する系に対してこのように力学系の言葉を使って chaos を考察することは本来できないので注意を要する。ここで述べられた orbit も本来の力学系の orbit とは異なるが、この系の状態を要素の作る場 $\Psi(x, t) \equiv \sum_i^M e^{-\beta|x-x_i|} C_i$ で定義して $\Psi(x, t)$ の関数空間を状態空間と考えると無限次元の力学系の軌道として本来の定義で解釈できる。

3.4 長距離相互作用の極限

長距離相互作用の極限では乱流状態はフラクタル的な空間構造をもった。ここではそのような極限でのダイナミクスを考察し、巾則が出現する仕組みを考察しよう。

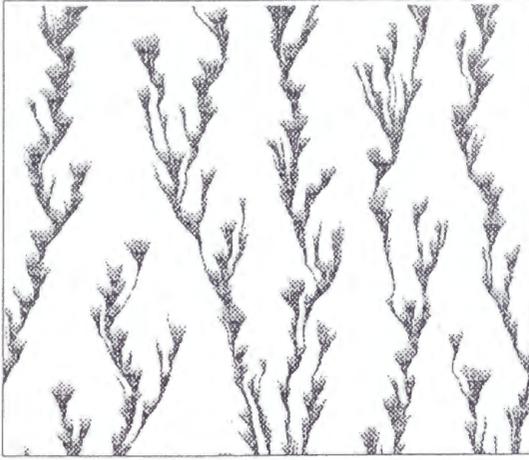


図 51: $L = 25, \alpha = 10000, \beta = 0.002$ での式 (59) による時空パターン。 $t = [0, 150], x = [0, 25]$ 。

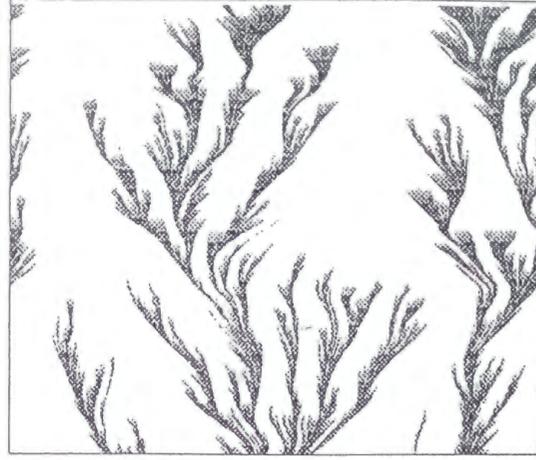


図 52: $L = 25, \alpha = 10000, \beta = 0.002, \delta = 10\beta^2$ でのモデル (60) の時空パターン。 $t = [0, 150], x = [0, 25]$ 。

有限のシステムサイズ L で $\beta \rightarrow 0$ の極限をとると、周期境界条件下で全要素によって作られる場 (38) は

$$\bar{\Psi}_L^{(p)}(x, t) = \frac{2}{\beta L} \sum_j^M C_j + \beta L \sum_j^M \psi\left(\frac{x - x_j}{L}\right) C_j + O(\beta^2) \quad (58)$$

$$\psi(x) \equiv \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

に漸近する。ここで、 $[x]$ は x を越えない最大の整数である。

従って、この極限での系の時間発展方程式は $O(\beta^2)$ の精度で

$$\frac{dC_i}{dt} = \alpha - \frac{2}{\beta L} \sum_j^M C_j + (1 - \gamma) C_i - \beta L \sum_j^M \psi\left(\frac{x_j - x_i}{L}\right) C_j \quad (59a)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \beta \sum_{j \neq i}^M \psi'\left(\frac{x_j - x_i}{L}\right) C_j \quad (59b)$$

である。ただし、 $\psi'(x) \equiv \frac{d\psi(x)}{dx} = 2x - 2[x] - 1$ である。図 51 はこの方程式による時空パターンの一例である。

簡単のため、以下では $\gamma = 0$ の場合のみを考えよう。 $\gamma \neq 0$ への一般化も容易である。

式 (59a) の右辺の最後の項は $O(\beta)$ であり、長距離相互作用の極限では前の 3 項に比べて十分小さくなりほとんど無視できる。しかしながら、この項がないと分裂後の 2 要素の時間発展は全く同じになってしまうので、この項は分裂後の 2 要素にわずかな違いをもたらす役割を果たしているであろう。 $t = 0$ である要素が分裂してできた 2 要素はお互いの斥力で $|x_i - x_j| \simeq \beta t$ と離れていく。平均分裂周期 τ はこの極限で $O(1)$ の一定値になることはすでに §3.2.1 で既に述べた。従って、隣合う要素同士の間隔は分裂/消滅してしまうまでに $|x_i - x_j| \sim O(\beta)$ 程度しか広がらず、式 (59a) の第 3 項は隣合う要素間で $O(\beta^2)$ しか変わらない。

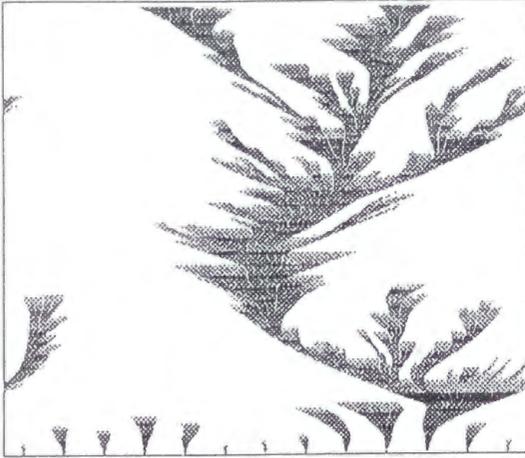


図 53: $L = 25, \alpha = 10000, \beta = 0.002$ で $\delta = 0.1\beta^2$ と小さくした場合のモデル (60) の時空パターン。この図では当間隔に要素を並べた初期状態から時刻 150 までの時間発展を載せた。横軸 $x = [0, 25]$ 。

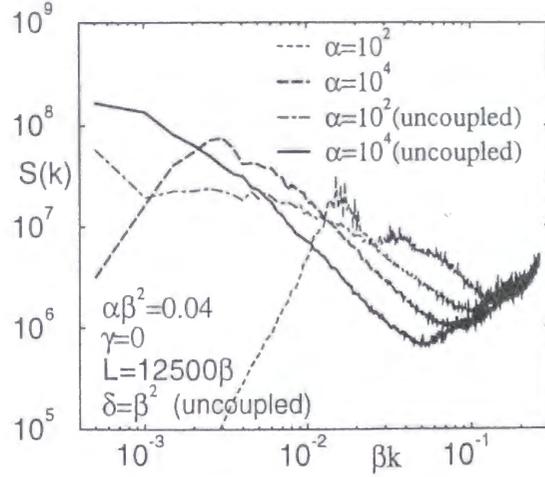


図 54: 方程式 (59) と空間との結合のないモデル (60) の空間パワースペクトル $S(k)$ の比較。横軸の波数 k は β を掛けてスケールしてある。 $\alpha = 10^2, 10^4, \alpha\beta = 0.04, \gamma = 0, L = 12500\beta, \delta = \beta^2$

この考察に基づいて式 (59a) の右辺の最終項をなくした以下のモデルを考えよう。

$$\frac{dC_i}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{1}{M_0} \sum_k C_k \right) + C_i \quad M_0 \equiv \frac{\alpha\beta L}{2} \quad (60a)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \beta \sum_{j \neq i}^M \psi' \left(\frac{x_j - x_i}{L} \right) C_j \quad (60b)$$

$$C_i > 2 \rightarrow i \text{ 番目の要素が分裂して 2 つの要素 } (1 + \delta, x_i), (1 - \delta, x_i) \text{ になり、} M \text{ が 1 増加する。} \quad (61a)$$

$$C_i \leq 0 \rightarrow i \text{ 番目の要素を取り除き、} M \text{ を 1 減らす。} \quad (61b)$$

いままでのモデルでは等分裂 $\delta = 0$ を用いたがこのモデルでは式 (59a) の第 3 項に対する代替として $\delta = O(\beta^2)$ ととることにしよう。

このモデルはサイズ C_i の時間発展が要素の空間座標 x_i と結合していないが、 $\beta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$ のパラメータ領域で形成される時空パターンは図 52、53 のようにやはりフラクタル的である。図 54 に密度 $\rho(x) \equiv \sum_i^M \delta(x - x_i) C_i$ ($\delta(x)$ はデルタ関数) のパワースペクトル $S(k)$ を示した。(正確には $S(k)$ の定数倍である。) 方程式 (59) による時空パターンのパワースペクトルは低波数に山を持つが、 $\beta \rightarrow 0$ に従って巾の部分の部分が長くなり方程式 (59) とモデル (60) の巾的性質はほぼ一致している。

式 (59a) のパラメータは α と M_0 である。 $\alpha \rightarrow \infty$ の極限では式 (60a) の右辺第 1 項の括弧内の大きさはほとんど 0 にならなければならないから $\sum_i^M C_i \rightarrow M_0$ である。サイズ C_i の平均値は $\bar{C} \equiv \frac{1}{M} \sum_i^M C_i \simeq 1$ であるから M_0 を変えると要素数 M が変化して $M \simeq M_0$ になることがわかる。

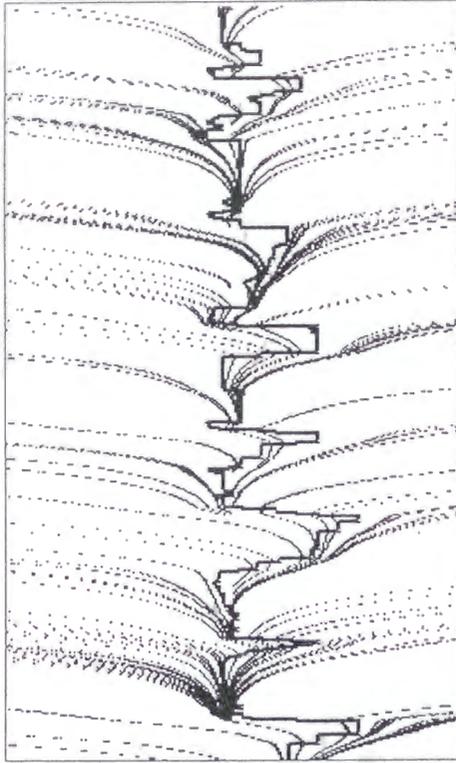


図 55: モデル (60) の C_i の時間発展を全要素について重ね書きした。 $\alpha = 10000$, $M_0 = 100$, $\delta = 10^{-6}$ 。横軸は $0 < C_i < 2$ 、縦軸は時間 $t = [0, 40]$ 。平均場 $\bar{C}(t)$ を太線で示した。

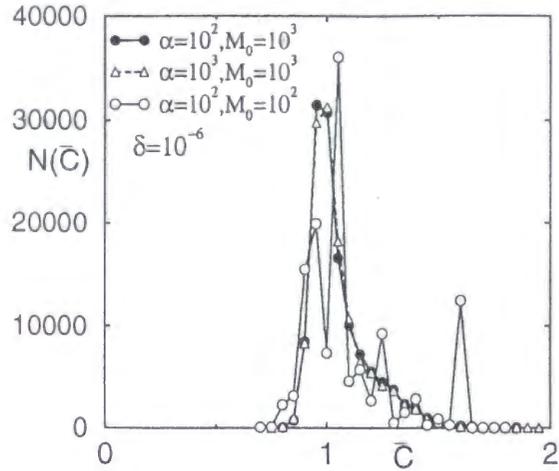


図 56: 平均場 \bar{C} の分布。 $\delta = 10^{-6}$ で、 $(\alpha, M_0) = (100, 1000)$, $(1000, 1000)$, $(100, 100)$ の場合の頻度分布をプロットした。 $\Delta t = 0.2$ おきにとった $t = [500, 25500]$ のデータから作られた。

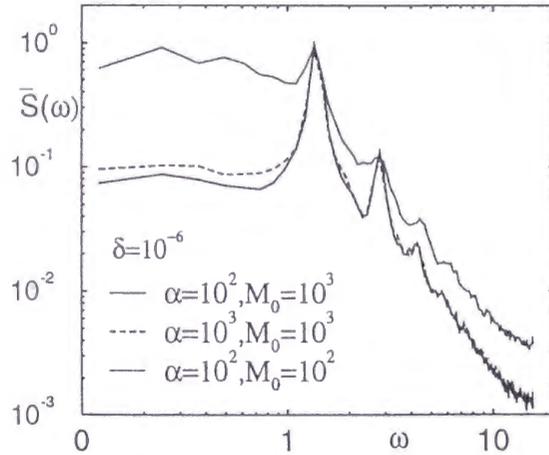


図 57: 平均場 $\bar{C}(t)$ のパワースペクトル $S(\omega)$ 。パラメータとデータは図 56 と同じ。

サイズ C_i の平均値 \bar{C} の時間発展は式 (60a) から

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = \alpha - \left(\frac{\alpha M}{M_0} - 1 \right) \bar{C} \quad (62)$$

と書けるので、要素数が変化しない間は

$$\bar{C}(t) = \bar{C}_M + (\bar{C}(0) - \bar{C}_M) e^{-(\alpha M/M_0 - 1)t} \quad \bar{C}_M \equiv \frac{\alpha}{\frac{\alpha M}{M_0} - 1} \quad (63)$$

のように安定固定点 $\bar{C} = \bar{C}_M$ に向かって減衰する。

M 個の要素を持つ系で平均分裂周期が τ の時、全体の要素数が変化しない時間は $t \sim \tau/M$ 程

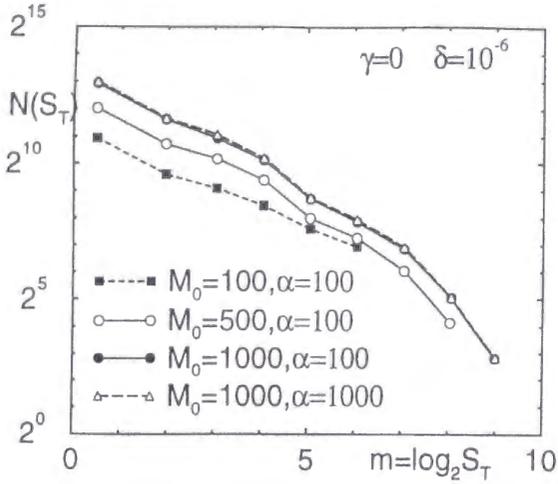


図 58: $\delta = 10^{-6}$ で $(\alpha, M_0) = (100, 100)$, $(500, 100)$, $(1000, 100)$, $(1000, 1000)$ に対してサイズ $S_T = 2^m$ の tree の個数 $N(S_T)$ を 2 の対数で log-log プロットした。グラフは区間 $[m - 0.5, m + 0.5]$ ごとに平均されている。図 56 と同様に取りられたデータから作った。

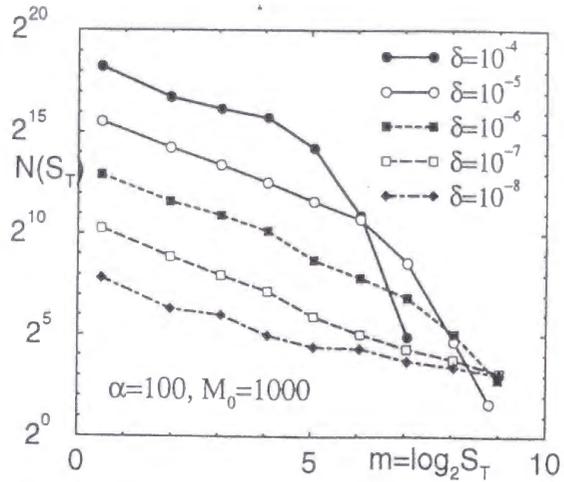


図 59: $(\alpha, M_0) = (100, 1000)$ で δ を $10^{-4} \sim 10^{-8}$ の範囲で変えて tree の個数 $N(S_T)$ を図 58 と同様 2 の対数で log-log プロットした。正確には $N(S_T)$ はサンプリングの回数倍されている。

度であるの見積もると、その間の減衰は $e^{-(\alpha M/M_0 - 1)t} \sim e^{-\alpha t/M_0} = e^{-2\tau/\beta L}$ である。今考えている極限は $\beta L \rightarrow 0$ であるから、ほとんどの時間 $\bar{C}(t) \simeq \bar{C}_{M(t)}$ が実現していることがわかる。

従って、式 (59a) は α が十分大きい時

$$\frac{dC_i}{dt} = C_i - \bar{C}_M \quad \bar{C}_M \simeq \frac{M_0}{M} \quad (64)$$

という簡単な方程式に還元される。モデルのパラメータは要素数を決める M_0 と分裂のルールに含まれる δ だけになる。図 55 はモデル (60) のシミュレーションでの C_i と \bar{C} の時間発展の一例である。図 56 に長時間のデータから得られた平均場 $\bar{C}(t)$ の分布関数を、図 57 にパワースペクトル $S(\omega)$ (の定数倍) を示した。予想されたように、これらは α にはほとんど依存しない。また、 M_0 を大きくして要素数を増やしても平均場 $\bar{C}(t)$ の揺らぎは減少しないことがわかる。

このダイナミクスでの tree の成長を考えてみよう。 $\beta \rightarrow 0$ で $\delta \sim O(\beta^2)$ が非常に小さい場合、ある要素が分裂してできた 2 要素のサイズ C_i は $1 + \delta$ と $1 - \delta$ であり始めのうちほとんど同じである。従って、この 2 要素はほとんど同じ時間発展をして、ほぼ同時に双方が分裂あるいは消滅するであろう。双方が分裂した場合、やはり各要素の C_i の違いはまだ小さく、合わせて 4 つとなった要素は再びほぼ揃って成長して、ほぼ同時に分裂あるいは消滅する。このようにして m 回分裂を繰り返すと合わせて 2^m の要素をもつ大きな tree が成長することになる。一方、要素同士の C_i の違いは指数関数的に増加するから時間が十分たつと同じ tree の中で消滅する要素が現れ、tree は小さなサイズに分裂してしまう。

構成要素の数が 2^m の tree が次に再びそろって分裂し、要素が 2^{m+1} 個になる確率を $p_{m,m+1}$ とする。 2^m が全要素数 $M \sim M_0$ に比べて十分小さいうちはその tree は全体の平均場にほとんど寄与しないから、 $p_{m,m+1} \simeq p_{0,1} \equiv p$ であろう。消滅と分裂の確率が半々なら $p = 1/2$ である

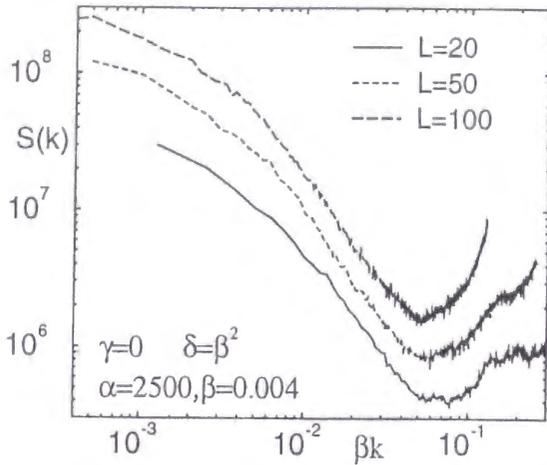


図 60: 空間との結合のないモデル (60) の空間パワースペクトル $S(k)$ のシステムサイズ L 依存性。 $\alpha = 2500, \beta = 0.004, \gamma = 0, \delta = \beta^2, L = 20, 50, 100$ 。

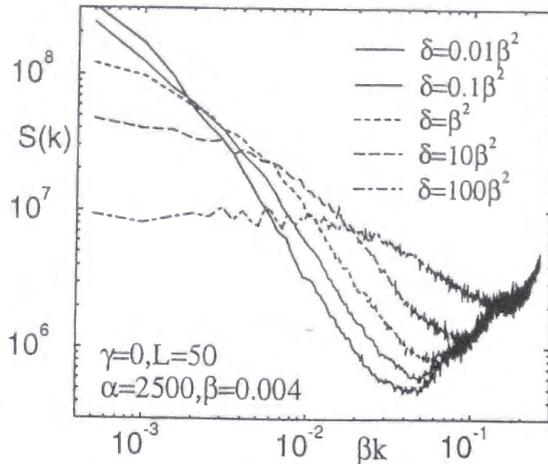


図 61: 空間との結合のないモデル (60) の空間パワースペクトル $S(k)$ の δ 依存性。 $\alpha = 2500, \beta = 0.004, \gamma = 0, L = 50$ 。

ので、 $p \equiv 2^{-\chi}$ と書こう。

時刻 t での構成要素数 $S_T \equiv 2^m$ の tree の個数分布を $N(S_T, t)$ としよう。 $\tau/2$ 程度の時間がたつて要素が一回分裂すると $N(S_T, t)$ のうち p 割が生き残って一回り大きな tree をつくるから、 $N(2S_T, t + \tau/2) = pN(S_T, t)$ が成り立つ。ただし、 $S_T \ll M_0$ である。統計的定常状態で長時間平均をとると $N(S_T, t)$ は時間によらない分布関数 $N(S_T)$ で置き換わるから、個数分布は $N(2S_T) = pN(S_T)$ で決まる。従って、 $N(S_T) = N(2^m) = p^m N(1) = N(1) S_T^{-\chi}$ であり、サイズ S_T の tree の個数分布関数は $S_T \ll M_0$ で巾分布を示すと予想される。

図 58, 59 はシミュレーションから得られた $N(S_T)$ の log-log プロットである。ここでは tree の構成要素のどれかが消滅した時、その要素を境に tree が分裂したと定義して各 tree のサイズを決めた。予想されたように $N(S_T)$ は小さな S_T に対して巾的に振舞っており、その関数形は $\alpha \rightarrow \infty$ で収束する。 $n(S_T)$ の巾の傾きは調べた範囲では要素数のパラメータ M_0 にはほとんどよらないが、 δ を小さくすると巾領域が広がるのがわかる。 δ の広い範囲に渡って巾の指数はほとんど変わらない。図 59 のデータから $\chi = -0.8 \sim -0.9$ と見積もれる。

次にこのような C_i のダイナミクスが空間構造にどう反映するかを考えよう。任意の 2 つの要素の距離の差 $x_i - x_j$ の時間発展は式 (59b) を使って整理すると

$$\frac{d}{dt}(x_i - x_j) = -\frac{2\beta}{L} \sum_k^M C_k(x_i - x_j) + 2\beta \left(\sum_{j < k < i} C_k + \frac{C_i + C_j}{2} \right) = 2\beta \int_{x_j}^{x_i} dx (\rho(x) - \bar{\rho}) \quad (65)$$

$$x_k < x_{k+1} \quad k = 1, \dots, M, j < i$$

と書けることがわかる。

今、 x_i, x_j を tree の両端の要素としよう。 §3.2.1 で説明したようにこの極限では平均密度は $\bar{\rho} \rightarrow 2/(\alpha\beta)$ である。一方、 tree 内部の隣接要素距離は β 程度でなので $\rho(x) \sim 1/\beta$ であり、

$\rho(x) \gg \bar{\rho}$ が成り立つ。従って、tree の空間的なサイズは

$$\frac{d}{dt}(x_i - x_j) = 2\beta \int_{x_j}^{x_i} dx \rho(x) = 2\beta \left(\sum_{j < k < i} C_k + \frac{C_i + C_j}{2} \right) \quad (66)$$

と成長する。左辺の括弧内は $C_i \sim 1$ であるから、tree の要素数 S_T とほぼ同じ値をもつ。従って、

$$\frac{d}{dt}(x_i - x_j) \simeq 2\beta S_T \quad (67)$$

である。

分裂を繰り返して成長している tree を考えると、要素数 S_T は tree が小さい間は指数関数的増加するから、その空間サイズは

$$x_i - x_j \propto \beta S_T \quad (68)$$

となり、tree の空間サイズは構成要素数 S_T に比例する。従って、tree の構成要素数に対する巾分布は tree の空間サイズの巾分布に直接反映している。

図 60,61にはモデル (60) の空間パワースペクトル $S(k)$ のシステムサイズ L 依存性と δ 依存性を載せた。システムサイズ L を変えると $M_0 \equiv \alpha\beta L/2$ が変化するが、予想通りパワースペクトルの形はほとんど変化しない。一方、 δ を小さくすると巾領域は広がる。これも、tree サイズの分布関数でみた事実から容易に予想できる。

以上のように、長距離相互作用極限での時空パターンのフラクタル的性質は空間結合のないサイズ C_i だけの簡単なダイナミクス (60) によって説明できる。

4 結論 & 議論

本研究の関心はバクテリアコロニーという実際の系で *fingering pattern* がどのようにして起きるのかということと、様々な *fingering pattern* に共通するメカニズムを力学的にどう説明するかとの2点であり、それぞれに対するアプローチが2章、3章で述べられた。

2章ではバクテリアコロニーの *fingering* を偏微分方程式モデルを使って考察した。硬い寒天上でバクテリアが単独ではほとんど運動できなくなるという観察事実を定性的に再現するために非線形拡散を導入すると我々の方程式から界面の運動方程式が導出できた。バクテリアコロニーで *fingering* が起きる仕組みは界面運動方程式で見ると既知の物理系に類似している。*Fingering* は界面運動方程式で界面の速度が0の状態が安定になるパラメータ領域で現れたが、それはバクテリアコロニーの言葉に直すとバクテリアの運動が困難になったこととバクテリアが不活動状態になる効果が合わさって起きたことであることが明らかになった。一方、このモデルによるバクテリアコロニーの *fingering pattern* の特徴はコロニー界面に表面張力が働かないことであり、この場合、界面の厚さと同程度になるまで *finger* が発達することが予想される。

[議論] バクテリア運動の非線形拡散をミクロな個体運動の立場から理解する必要がある。厳密には寒天が硬くなっても単体のバクテリアはまったく動けないわけではないから、ごく弱い通常拡散が残ると考えるべきであろう。通常拡散があれば偏微分方程式はまだ Fisher-type であり線形安定な定常進行解が無数にある。非線形拡散を含む Fisher-type 方程式が通常拡散が弱くなっていった時、非線形拡散方程式のみ近似できるようになる過程は速度選択の問題と絡んでいてまだ未解決である。最近、三村、坂口らのバクテリアモデルで ring パターンが再現されたがそこでは方程式が Fisher-type でなくなった時に ring が現れている [19]。我々のモデルでも相図全体の再現を目指そうとすれば、通常拡散から非線形拡散への遷移過程を調べる必要がある。

3章では *fingering pattern* を点状の *finger* 先端の運動の軌跡とみる立場を提案し、*finger* の分裂がパターンのダイナミクスに与える効果を簡単な1次元離散要素モデルで考察した。このモデルは分裂がなければ単調減少する自由エネルギー的関数を持ち複雑な振舞いは生じないが、分裂をルールとして与えると種々の *fingering pattern* の実験で観察されている一様乱流状態、樹木状状態、fractal、spatio-temporal intermittencyなどを再現する。また、自由度が変化する系であるがリヤプノフ解析などの力学系の手法で調べられるのが特徴である。

要素が分裂すると乱流状態が現れる理由が一様乱流状態で一種の homoclinic orbit が現れることと関連して定性的に説明された。また、長距離相互作用で fractal が現れる理由がこの極限での簡単な方程式に基づいて考察され、この領域での巾的性質の出現には要素の位置のダイナミクスは無関係であることを示した。

[議論] 要素の分裂をルールとして加えることは数学的にきれいでは言い難くこのモデルに対する主な問題点も分裂に絡むものである。通常的时间発展と分裂を区別するしっかりした定式化が必要である。モデルに関するもう一つの問題は場に対する過去の履歴の影響を含めなかったことである。fractal 的構造は過去の履歴を入れなくても出現することを示したことは重要であるが、DLAのような2次元系にモデルの結論を拡張しようすると問題が残る。

3章の結果にはまだ未解決の点が残っている。一つは §3.3.2 で述べた最大リヤプノフ数の平均分裂周期倍が要素密度のみの関数になるという特徴である。また、ともに巾的な時空間パターン

が現れる fractal と STI でリヤブノフスペクトルに共通の特徴が見られたことは self organized criticality(SOC) を相転移の一種ととらえる見解と一致していて興味深い [30]。

我々のモデルでは長距離相互作用で fractal が現れる機構は分裂する要素のサイズのみの簡単なダイナミクスで定性的に説明できたが、巾指数について定量的予測をし空間パワースペクトルの指数を理論的に求めるにはさらに考察が必要である。また、DLA などでの従来の巾則の説明や巾則の現れる他の系との関連ではまだわからないことが多い。

5 謝辞

蔵本由紀先生には研究についての議論から論文の査読まで様々な点で本当にお世話になりありがとうございました。

水口毅氏、守田智氏、中尾裕也氏をはじめ研究室の人々との日頃からの議論はともすれば停滞しがちな研究を進める上でとても刺激になりました。

元研究室の佐々伸一氏、中川尚子氏との議論もまた大変実り多いものでした。2章の研究で使った random lattice と Chaginalp 氏の存在を修士時代の私に最初に教えてくれたのは佐々氏でした。

松下貢先生、中原明生氏、脇田順一氏を始め中央大学松下研究室の皆さんには大変お世話になりました。彼らの行なった枯草菌コロニーのパターン形成実験が私の研究全体の直接の動機になっただけでなく、実験についての議論は非常に有益でした。

A 一定速度で進行する直線界面の線形安定性

ここでは §2.3 で導出した式 (15) の界面の運動方程式に従う直線界面の定常進行解の安定性を調べる。表面張力の効果を見るために式 (15) に表面張力項を加え、以下の形にしよう。

$$\partial_t n = \Delta n \quad (69a)$$

$$\begin{cases} n = 0 \\ V = Q(|\nabla n|) - c\kappa \end{cases} \text{ at the interface} \quad (69b)$$

ここで、 κ は界面に曲率で c は定数である。

定常進行界面は速度 $V_s = Q(V_s)$ 、位置 $x = V_s t$ で与えられ、その養分濃度場は

$$n = 1 - e^{-V_s(x-V_s t)} \quad x \geq V_s t \quad (70)$$

である。我々はこの解の線形安定性を以下で計算する。

座標変換 $V_s x \rightarrow x$ 、 $V_s^2 t \rightarrow t$ ができるので、一般性を失うことなく $V_s = 1$ としてよい。動座標系への変換 $x - \phi(y, t) \rightarrow x$ によって、式 (69) は

$$\partial_t n = \{[1 + (\partial_y \phi)^2] \partial_{xx} + \partial_{yy} + (\partial_t \phi - \partial_{yy} \phi) \partial_x - 2 \partial_y \phi \partial_{xy}\} n \quad (71)$$

のように書き換えられる。ここで、 $x = \phi(y, t)$ は界面の位置であり、この座標系で定常進行解 (70) は $Q(1) = 1$ とともに次の方程式で与えられる。

$$n = n_s(x) \equiv 1 - e^{-x} \quad \text{for } x \geq 0 \quad (72)$$

界面に小さな摂動

$$\begin{cases} \phi(y, t) = t + \delta \phi_{\lambda, q} e^{\lambda t} \cos qy \\ n(x, y, t) = n_s(x) + \delta n_{\lambda, q}(x) e^{\lambda t} \cos qy \end{cases} \quad (73)$$

を与えよう。 V と κ はそれぞれ $\partial_t \phi$ 、 $-\partial_{yy} \phi$ と書けるので、線形化された方程式は

$$(\nu - \mathcal{L}_s) \delta n_{\lambda, q} = \nu \delta \phi_{\lambda, q} \partial_x n_s \quad (74a)$$

$$\lambda \delta \phi_{\lambda, q} = Q' \partial_x \delta n_{\lambda, q} |_{x=0} - cq^2 \delta \phi_{\lambda, q} \quad (74b)$$

で与えられる。ここで $\nu \equiv \lambda + q^2$ 、 $\mathcal{L}_s \equiv \partial_{xx} + \partial_x$ 、 $Q' \equiv dQ(V_s)/d|\nabla n|$ である。

$\mathcal{L}_s \partial_x n_s = 0$ であるので並進モードは式 (74a) の特解である。それで、一般解は $(\nu - \mathcal{L}_s) u_\nu = 0$ を満足する斉次解 $u_\nu(x)$ を使って

$$\delta n_{\lambda, q}(x) = \delta \phi_{\lambda, q} \partial_x n_s(x) + u_\nu(x), \quad (75)$$

で与えられる。 $\delta n_{\lambda, q}(0) = \delta n_{\lambda, q}(\infty) = 0$ 、 $\partial_x n_s(0) = 1$ が成り立つので $u_\nu(x)$ の境界条件は $u_\nu(0) = -\delta \phi_{\lambda, q}$ と $u_\nu(\infty) = 0$ である。一般解 (75) を式 (74b) に代入し、 $\partial_{xx} n_s(0) = -1$ を使うと、固有値 λ が以下の形で求まる。

$$\lambda = -Q'(1 + \partial_x \log u_\nu |_{x=0}) - cq^2 \quad (76)$$

斉次解 $u_\nu(x)$ は $e^{-x(1+\sqrt{1+4\nu})/2}$ に比例するので、我々は λ に対する解析解を求めることができる。

$$\lambda = \frac{Q'(Q' - 1)}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(1-c)}{(1-Q')^2} q^2} \right] - cq^2 \quad (77)$$

一定速度で伝播する直線界面の安定性は Q' の値によって変わる。

$$\begin{aligned} Q' < c: & \text{ すべてのモードが安定} \\ c < Q' < 1: & \text{ 長波長モードが不安定} \\ 1 < Q': & \text{ 並進モードが不安定} \end{aligned}$$

もし、式 (17) のように Q が $|\nabla n|^{1/\zeta}$ に比例するなら、 Q' は単に $1/\zeta$ になる。2.3 で述べた 2. で現れるような不安定固定点は $1 < Q'$ に対応する。

式 (15) では c は $O(\epsilon)$ で事実上効かない。従って、式 (15) に従うバクテリアコロニーの直線界面は常に不安定である。上の結果は定常進行界面が小さな曲率 κ_s をもっている場合にも $V_s \rightarrow V_s + \kappa_s$ の書き換えによって適用できる。ただし、この時 $Q' \equiv dQ(V_s + \kappa_s)/d|\nabla n|$ であり、速度 V_s は $V_s = Q(V_s + \kappa_s) - c\kappa_s$ で与えられる。前出のようにもし $Q \propto |\nabla n|^{1/\zeta}$ なら、 $Q' = 1/[(1 + \kappa_s/V_s)\zeta]$ である。従って、界面は曲率の増加に伴い安定性を増す傾向がある。

B 分裂、消滅時のリヤプノフベクトルの変化

以下では分裂、消滅によって状態の無限小の摂動を表すベクトルがどのように変化するかを述べる。

そのために状態 $\mathbf{U}(t) = (C_i(t), x_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, M$ の要素 $i = 1$ が $t = 0$ に分裂または消滅をする場合を考え、それ以外の要素の変数をまとめて $\mathbf{u}(t) = (C_i(t), x_i(t))$, $i = 2, \dots, M$ と略記しよう。つまり、 $\mathbf{U} = (C_1, x_1, \mathbf{u})$ である。また、状態 \mathbf{U} から距離 $O(\epsilon)$ 離れた摂動状態を $\mathbf{U}' \equiv (C'_1, x'_1, \mathbf{u}')$ として同じ要素 $i = 1$ がわずかに遅れて $t = \Delta t$ で分裂あるいは消滅をしたとしよう。以下ではある関数 $F(\mathbf{U})$ に対して $F(\mathbf{U}') - F(\mathbf{U})$ を $\delta F(\mathbf{U})$ と表記する。

分裂、消滅の前後で系の時間発展方程式は不連続に変化するが、ある要素の分裂、消滅の際にそれ以外の要素の変数の値は連続に保たれることに注意しよう。

まず、消滅時の変化を考えよう。2つの状態の要素1の消滅の時間差は $C'_1(\Delta t) = 0$ と $C'_1(0) = \delta C_1(0-) = O(\epsilon)$ から

$$\Delta t \simeq -\delta C_1(0-) \Big/ \frac{dC_1(0-)}{dt} \sim O(\epsilon) \quad (78)$$

である。

消滅後の状態ベクトルの差は

$$\delta \mathbf{U}(\Delta t+) \equiv \mathbf{U}'(\Delta t+) - \mathbf{U}(\Delta t+) = \delta \mathbf{u}(\Delta t+) \simeq \delta \mathbf{u}(0-) + \left(\frac{d\mathbf{u}'}{dt}(0+) - \frac{d\mathbf{u}}{dt}(0+) \right) \Delta t \quad (79)$$

と書ける。 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t)$ は要素1の分裂、消滅に関しては連続なので

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt}(0+) - \frac{d\mathbf{u}}{dt}(0+) = \frac{d\mathbf{u}'}{dt}(0-) - \frac{d\mathbf{u}}{dt}(0-) = \frac{d\delta \mathbf{u}}{dt}(0-) \quad (80)$$

であり、これは摂動ベクトルの定義から $O(\epsilon)$ である。結局

$$\delta \mathbf{U}(\Delta t+) = \delta \mathbf{u}(0-) + O(\epsilon^2) \quad (81)$$

であり、無限小 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で消滅時の摂動ベクトルの変化は単に

$$(\delta C_1, \delta x_1, \delta \mathbf{u}) \Rightarrow (\delta \mathbf{u}) \quad (82)$$

であることがわかる。

分裂に伴う変化はもう少しややこしい。要素 (C_1, x_1) が分裂して2要素 $(C_L, x_L), (C_R, x_R)$ ができるとしよう。この時、 $\mathbf{U} = (C_L, x_L, C_R, x_R, \mathbf{u})$ であり、分裂のルール (37) から $C_L(0+) = C_R(0+) = 1, x_L(0+) = x_R(0+) = x_1(0-)$ が成り立つ。摂動状態に関しても同様に分裂後 $\mathbf{U}' = (C'_L, x'_L, C'_R, x'_R, \mathbf{u}')$ と書くと、 $C'_L(\Delta t+) = C'_R(\Delta t+) = 1, x'_L(\Delta t+) = x'_R(\Delta t+) = x'_1(\Delta t-)$ である。

分裂の時間差 Δt は $C'_1(\Delta t) = 2$ と $\delta C_1(0) = C'_1(0) - 2 = O(\epsilon)$ から、式 (78) と同じ形になる。

前と同様に $\delta \mathbf{u}(\Delta t+) = \delta \mathbf{u}(0-) + O(\epsilon^2)$ は成り立っているので、摂動ベクトルの要素1以外の成分 $\delta \mathbf{u}$ は要素1の分裂にたいして連続である。

分裂後の摂動ベクトルの要素1の成分を考えよう。分裂後の C_L の違いは

$$\delta C_L(\Delta t+) \equiv C'_L(\Delta t+) - C_L(\Delta t+) \simeq C'_L(\Delta t+) - C_L(0+) - \frac{dC_L}{dt}(0+)\Delta t \quad (83)$$

で、時間発展方程式 (36) から $\frac{dC_L}{dt}(0+) = \frac{dC_1}{dt}(0-) + (\gamma - 1)C_R(0+)$ であり、さらに $C'_L(\Delta t+) = C_L(0+) = C_R(0+) = 1$ だから

$$\delta C_L(\Delta t+) \simeq \left(\frac{dC_1}{dt}(0-) + \gamma - 1 \right) \Delta t = \left[1 + (\gamma - 1) / \frac{dC_1}{dt}(0-) \right] \delta C_1(0-) \quad (84)$$

となる。この式は C_R に関しても同じである。

また、分裂後の x_L の違いは

$$\begin{aligned} \delta x_L(\Delta t+) &\equiv x'_L(\Delta t+) - x_L(\Delta t+) \simeq x'_1(\Delta t-) - x_1(0-) - \frac{dx_L}{dt}(0+)\Delta t \\ &= \delta x_1(0-) + \left[\frac{dx'_1}{dt}(0) - \frac{dx_L}{dt}(0+) \right] \Delta t \\ &= \delta x_1(0-) + \left[\frac{d\delta x_1}{dt}(0-) + \frac{dx_1}{dt}(0-) - \frac{dx_L}{dt}(0+) \right] \Delta t \end{aligned} \quad (85)$$

と書け、 $\frac{d\delta x_1}{dt}(0-) \sim O(\epsilon)$ と時間発展方程式 (36) から $\frac{dx_L}{dt}(0+) = \frac{dx_1}{dt}(0-) - \beta C_r(0+)$ と書けることに注意すると

$$\delta x_L(\Delta t+) \simeq \delta x_1(0-) - \beta \Delta t = \delta x_1(0-) - \beta \delta C_1(0-) / \frac{dC_1}{dt}(0-) \quad (86)$$

であることがわかる。 x_R に対しては第2項の符号が正になる。

以上をまとめると、分裂によって無限小摂動ベクトルは

$$(\delta C_1, \delta x_1, \delta \mathbf{u}) \Rightarrow \left(\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\frac{d}{dt}C_1} \right) \delta C_1, \delta x_1 - \frac{\beta \delta C_1}{\frac{d}{dt}C_1}, \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\frac{d}{dt}C_1} \right) \delta C_1, \delta x_1 + \frac{\beta \delta C_1}{\frac{d}{dt}C_1}, \delta \mathbf{u} \right) \quad (87)$$

と変化する。

参考文献

- [1] D. G. Aronson and H. F. Weinberger: *Partial Differential Equations and Related Topics* J. A. Goldstein (Springer, New York, 1975) p. 5-49.
- [2] E. Ben-Jacob, O. Schochet, A. Tenenbaum, I. Cohen, A. Czirók and T. Vicsek: *Nature* **368** (1994) 46-9.
- [3] E. Ben-Jacob, O. Shodhet, A. Tenenbaum and O. Avidan: *Spatio-Temporal Patterns in Nonequilibrium Complex Systems, Proc. NATO Advanced Research Workshop* P. E. Cladis and P. Palfy-Muboray (Addison-Wesley, 1995) p. 619-33.
- [4] G. Caginalp and P. Fife: *Phys. Rev. B* **33** (1986) No. 11 7792-4.
- [5] G. Caginalp: *Phys. Rev. A* **39** (1989) No. 11 5887-96.
- [6] H. Châte and P. Manneville: *Physica D* **32** (1988) No. 3 409-22.
- [7] G. Dee and J. S. Langer: *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) No. 6 383-86.
- [8] R. Friedberg and H. -C. Ren: *Nuclear Physics B* **235** (1984) 310-20.
- [9] H. Fujikawa: *Physica A* **189** (1992) 15-21.
- [10] K. Kaneko: *Prog. Theor. Phys.* **74** (1985) No. 5 1033-44.
- [11] 川崎廣吉、望月敦史、重定南奈子: *計測と制御* **34** (1995) No. 10 811-816.
- [12] R. Kobayashi: *Physica D* **63** (1993) No. 3-4 410-23.
- [13] K. Komatsu, J. Wakita, A. Nakahara and M. Matsushita: *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994) No. 9 3230-3.
- [14] 松浦執、宮島佐介: *数理科学* (1992) No. 350 42-48.
- [15] M. Matsushita, K. Honda, H. Toyoki, Y. Hayakawa and H. Kondo: *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** (1986) No. 8 2618-26.
- [16] 松下貢、松山東平: *科学* **64** (1994) No. 2 104-113.
- [17] T. Matsuyama and M. Matsushita: *Critical Reviews in Microbiology* **19** (1993) 117-35.
- [18] S. Michalland, M. Rabaud and Y. Couder: *Europhys. Lett.* **22** (1993) No. 1 17-22.
- [19] M. Mimura and H. Sakaguchi: They reported an interesting model for the ring patterns in Japan, perhaps, to be published.
- [20] C. Moukarzel: *Physica A* **190** (1992) 13-23.
- [21] L. Niemeyer, L. Pietronero and H. J. Wiesmann: *Phys. Rev. Lett.* **52** (1986) No. 12 1033-6.
- [22] M. Ohgiwari, M. Matsushita and T. Matsuyama: *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** (1992) No. 3 816-22.

- [23] G. C. Paquette and Y. Oono: Phys. Rev. E **49** (1994) No. 3 2368-88.
- [24] G. C. Paquette, L. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono: Phys. Rev. Lett. **72** (1994) No. 1 76-79.
- [25] M. Rabaud, S. Michalland and Y. Couder: Phys. Rev. Lett. **64** (1990) No. 2 184-7.
- [26] W. van Saarloos: Phys. Rev. Lett. **58** (1987) No. 24 2571-4.
- [27] W. van Saarloos: Phys. Rev. A **37** (1988) No. 1 211-29.
- [28] W. van Saarloos: Phys. Rev. A **39** (1989) No. 12 6367-90.
- [29] H. Sakaguchi: Prog. Theor. Phys. **91** (1994) No. 5 1045-50.
- [30] D. Sornette, A. Johansen and I. Dornic: preprint (1994).
- [31] T. Vicsek: *Fractal Growth Phenomena*(World Scientific, Singapore, 1989).
- [32] 脇田順一: 修士論文、中央大学理工学研究科 (1993).
- [33] J. Wakita, K. Komatsu, A. Nakahara, T. Matsuyama and M. Matsushita: J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) No. 3 1205-11.
- [34] T. A. Witten and L. M. Sander: Phys. Rev. B **27** (1983) No. 9 5686-97.