

②
学位申請論文

非局所結合素子系の時空カオスと
その特異性

中尾 裕也

1998年12月18日

目次

| | | |
|----------|-----------------------|-----------|
| 1 | 序 | 6 |
| 1.1 | はじめに | 6 |
| 1.2 | 背景 | 6 |
| 1.3 | この論文の構成 | 8 |
| 2 | 非局所結合素子系 | 10 |
| 2.1 | 動的な素子 | 10 |
| 2.2 | 結合素子系 | 11 |
| 2.2.1 | 線形な平均場結合 | 11 |
| 2.2.2 | 局所・拡散結合系 | 12 |
| 2.2.3 | 大域・平均場結合系 | 13 |
| 2.3 | 非局所結合系 | 14 |
| 2.3.1 | モデル | 14 |
| 2.3.2 | 非局所結合の現れる例 | 14 |
| 2.3.3 | 空間的に離散的な格子点上の素子系 | 16 |
| 2.3.4 | 離散時間モデル | 16 |
| 2.3.5 | 補足 - 局所+大域結合系 | 17 |
| 3 | 連続時間モデル | 18 |
| 3.1 | 非局所結合複素ギンツブルクランダム振動子系 | 18 |
| 3.1.1 | モデル | 18 |
| 3.1.2 | 線形安定性解析 | 19 |
| 3.1.3 | 数値計算 | 21 |
| 3.1.4 | 空間相関関数およびパワースペクトル | 25 |
| 3.1.5 | 振幅場のフラクタル性 | 27 |
| 3.1.6 | 補足 - 拡散結合系の空間相関 | 28 |
| 3.2 | その他の素子 | 30 |
| 3.2.1 | ブラッセレータ系 | 30 |
| 3.2.2 | レーザー振動子系 | 33 |
| 4 | 離散時間モデル | 37 |
| 4.1 | ロジスティック写像系 | 37 |
| 4.1.1 | モデル | 37 |
| 4.1.2 | 特異的な時空カオス | 37 |
| 4.1.3 | ロジスティック写像系に特徴的なこと | 40 |
| 4.2 | 非対称テント写像系 | 40 |
| 4.2.1 | モデル | 40 |
| 4.2.2 | 特異的な時空カオス | 41 |
| 4.2.3 | 非対称テント写像に特徴的なこと | 41 |

| | | |
|-------|-------------------------------------|----|
| 5 | ベキ則の起源 | 45 |
| 5.1 | メカニズム | 45 |
| 5.2 | 確率過程モデル | 46 |
| 5.3 | ランダム乗法過程 | 47 |
| 6 | 弱い加法ノイズを含むランダム乗法過程におけるモーメントの漸近的なベキ則 | 49 |
| 6.1 | 導入 | 49 |
| 6.2 | 解析に使うモデル | 50 |
| 6.2.1 | ランジュバン方程式 | 50 |
| 6.2.2 | 境界条件 | 50 |
| 6.3 | 近似的な取り扱い | 51 |
| 6.3.1 | フォッカープランク方程式 | 51 |
| 6.3.2 | ベキ的なテイルを持つ定常分布関数 | 52 |
| 6.3.3 | モーメント | 53 |
| 6.3.4 | モーメントの漸近形 | 54 |
| 6.3.5 | 指数 | 55 |
| 6.3.6 | 他の漸近領域 | 55 |
| 6.4 | 厳密な扱い | 56 |
| 6.4.1 | フォッカープランク方程式 | 56 |
| 6.4.2 | ベキ的なテイルを持つ定常分布関数 | 56 |
| 6.4.3 | モーメント | 58 |
| 6.4.4 | モーメントの漸近形 | 58 |
| 6.4.5 | 指数と他の漸近領域 | 59 |
| 6.5 | ベキ則のロバストさ | 59 |
| 6.5.1 | 境界条件 | 61 |
| 6.5.2 | 離散モデル | 61 |
| 6.5.3 | ノイズの性質 | 61 |
| 6.5.4 | 数値計算例 | 61 |
| 6.6 | いくつかの関係した系 | 62 |
| 6.6.1 | ノイジーなオンオフ間欠性 | 62 |
| 6.6.2 | 結合カオス素子 | 63 |
| 6.6.3 | 空間分布したカオス素子 | 64 |
| 6.7 | 結論 | 65 |
| 7 | ランダムに変動する長波長の外場を与えた素子系 | 66 |
| 7.1 | 離散時間モデル | 66 |
| 7.1.1 | ロジスティック写像系 | 66 |
| 7.1.2 | 非対称テント写像系 | 67 |
| 7.2 | 連続時間モデル - 微分方程式系 | 70 |
| 7.2.1 | 位相モデル | 70 |
| 7.2.2 | 複素ギンツブルクランダム振動子 | 72 |
| 7.3 | 非局所結合系と外場系の違い | 74 |

| | | |
|-----------|---------------------------------|-----------|
| 8 | 時間的な間欠性 | 75 |
| 8.1 | オンオフ間欠性 | 75 |
| 8.2 | ノイジーなオンオフ間欠性 | 75 |
| 8.3 | 我々の系におけるオンオフ間欠性 | 76 |
| 8.3.1 | 非局所結合複素ギンツブルクランダウ方程式 | 76 |
| 8.3.2 | ランダムな長波長外場を与えたロジスティック写像 | 78 |
| 8.3.3 | その他の系 | 78 |
| 9 | 確率分布関数と局所リアブノフ指数 | 80 |
| 9.1 | ランダム長波長外場を与えた非対称テント写像系 | 80 |
| 9.2 | 非局所結合複素ギンツブルクランダウ振動子系 | 83 |
| 10 | 空間的な間欠性 | 86 |
| 10.1 | 空間パターンの間欠性 | 86 |
| 10.1.1 | 振幅場のマルチアフィン性 | 86 |
| 10.1.2 | 差分場のマルチフラクタル性 | 88 |
| 10.2 | 補足 - シングルスケーリングとマルチスケーリング | 90 |
| 10.2.1 | セルフアフィン性 | 91 |
| 10.2.2 | フラクタル性 | 92 |
| 10.2.3 | マルチアフィン性 | 92 |
| 10.2.4 | マルチフラクタル性 | 93 |
| 11 | マルチスケーリング性 | 94 |
| 11.1 | ランダムな長波長外場を与えた素子系におけるマルチスケーリング性 | 94 |
| 11.1.1 | モデル | 94 |
| 11.1.2 | 間欠的な振る舞い | 94 |
| 11.1.3 | 測度 | 95 |
| 11.1.4 | 分配関数 | 95 |
| 11.1.5 | 数値計算 | 96 |
| 11.2 | マルチスケーリングの起源 | 99 |
| 11.3 | 分布関数による記述 | 100 |
| 11.4 | 振幅場 X のマルチアフィン性の理論 | 103 |
| 11.4.1 | 分布関数からのスケーリング指数の計算 | 103 |
| 11.4.2 | PDF の微視的なモデル | 104 |
| 11.5 | 差分場 Y のマルチフラクタル性について | 105 |
| 11.5.1 | 低次のモーメントに対する対数正規近似 | 105 |
| 11.5.2 | PDF の引き延ばされた指数分布テイルと高次のモーメント | 107 |
| 11.5.3 | PDF の微視的なモデルの難しさ | 108 |
| 11.5.4 | 乗数の分布 | 109 |
| 11.6 | 議論 | 111 |
| 11.6.1 | 平均の取り方 | 111 |
| 11.6.2 | 流体乱流との類似性および非類似性 | 112 |
| 11.6.3 | 差分場 Y のマルチフラクタル性の理解へ向けて | 113 |

| | |
|------------------------|------------|
| 12 その他のトピック | 114 |
| 12.1 空間 2 次元の系 | 114 |
| 12.2 自由度 | 116 |
| 12.3 再び極限へ | 119 |
| 12.4 カスケードプロセスとウェーブレット | 119 |
| 12.5 速い拡散場により結合した系 | 124 |
| 12.6 実験系の可能性 | 124 |
| 13 まとめ | 126 |

1 序

1.1 はじめに

これは、「非局所結合素子系の時空カオスとその特異性」というテーマで著者(中尾裕也)が1995年の春から3年半にわたって研究してきた内容をまとめたドクター論文である。著者が主となって作成したふたつの公表論文[5]と[7]¹を主な内容として、それ以前の研究のレビュー、補足的な説明、および現在進展中の研究に関することをいくつか付け加えて構成されている。なお、この論文の内容すべてが著者のみによって行われたものではない。非局所結合素子系を導入し、その特異的な時空カオス状態を発見したのは著者の指導教官である蔵本由紀教授であり、著者はその最初の論文が書かれた頃にこの内容をテーマとして与えられ、その後共同研究を行ってきた。特異的な時空カオスを生成するメカニズムの解明や、ランダムに変動する外場を与えた系の導入など、この論文で述べられる内容には蔵本教授が最初の重要な寄与をし、その後著者が拡張したことも少なくない。この論文が幾分冗長なのは、非局所結合素子系の最初の論文のレビューと、それ以降の共同研究の結果についてひとつとおり述べてあるからである。では、背景の説明に移ろう。

1.2 背景

多彩な非平衡散逸系を研究するにあたって、現実の系を徹底的に抽象あるいは捨象して、その特徴のうち重要と思われるごく一部のみを取り入れた単純なモデルを詳細に解析し、その結果から何らかの一般的な主張をしようとする手法は、標準的なもののひとつである。

この論文で扱う結合素子系は、そのような単純化されたモデルのひとつの典型的なクラスをなしている。それは字義通り、現実の系に典型的な(あるいは人間のものの見方として典型的な)ふたつの特徴、すなわち系がいくつかの要素的部分(素子)に分割できることと、それらの部分間になんらかの相互作用が存在することを抽出して構成されたモデルである(図1)。

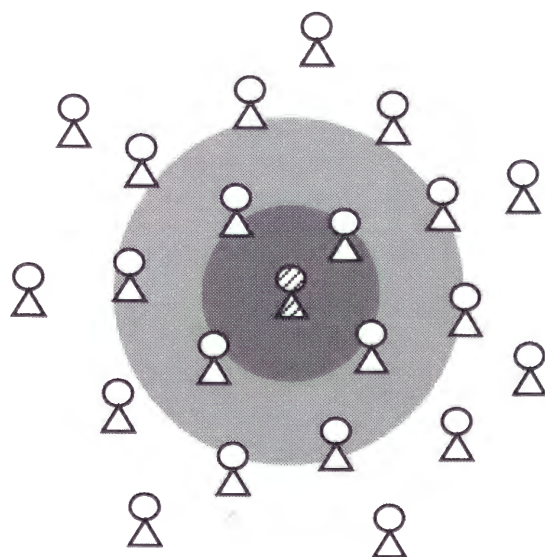


図1: 相互作用する素子系.

¹1998年12月16日現在投稿中で、まだレフェリーのコメントは受け取っていない。

さて、我々が興味を抱くような非平衡散逸系においては、一般に各素子は内部状態を持ち、その内部状態の自律的なダイナミクスを持つ。また素子間の相互作用は、各々の素子の内部状態が他の素子の内部状態と影響をおよぼし合うようなものが一般的である。

幾つか例を挙げよう。最もよく引き合いに出されるのは、空間的な広がりのある(つまり、空間的な不均一性を持ち得る)化学反応系であろう。非平衡散逸系のパターン形成などの理解に重要な役割を果たしてきた Belousov-Zhabotinski 振動化学反応系 [10] は、溶液の各部分が自動的に振動する化学物質の濃度を内部状態として持つ素子であり、それらが拡散的に結合したものであると見なすことができる。またレーザー発振は、キャビティ中の原子の双極子モーメントを素子として、それらが電磁場(光子)を介して相互作用することによって生じる共同現象であることも有名である [8]。他に、心筋細胞は各細胞がそれぞれ自動的に振動子で、他の細胞より微妙に周期の短いペースメーカーから興奮波が他の細胞に伝わって集団的に振動することにより心臓の鼓動を作り出していることや、オス同士が点滅のタイミングを同期させ、集団でひとつの光源となってメスを引きつけようとするある種のホタルの群れは、結合振動子系と見なすことができるということもよく主張されることである [11, 14]²。さらに、脳は無数の神経細胞が種々の結合を介して非常に複雑な相互作用をした一種の結合素子系と見ることができるとも知れないし [9]、生物の増殖と拡散や [13]、各エージェントが種々の行動を通じて相互作用する社会システムなども、この種の結合素子系として見ることができよう。

これまでの結合素子系の研究に多くにおいて、素子は双安定素子、振動子や興奮性素子、あるいはせいぜい低自由度のカオス素子とされ、また素子間の相互作用としては、主にふたつの極限的な場合、すなわち化学反応系や心筋細胞の場合のようになりの素子とのみ影響をおよぼし合う局所・拡散的なもの(図2)と、ホタルやレーザーのように(光の伝播は非常に速いので)全素子と均等に影響をおよぼし合う大域・平均場的なもの(図3)が考えられてきた³。

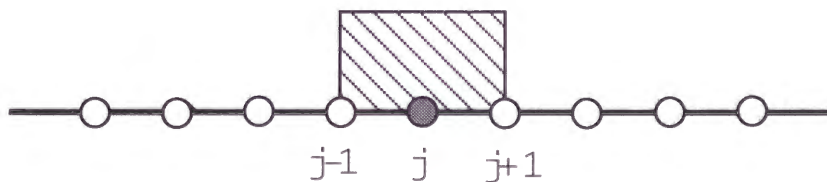


図 2: 局所・拡散結合.

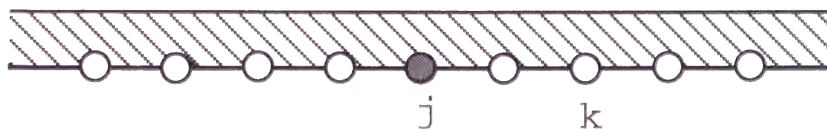


図 3: 大域・平均場結合.

そのようなモデルの研究から、局所・拡散結合系においては非線形波動の伝播、様々なパターン形成や時空カオスの発生など、大域・平均場結合系においては素子間の引き込みやクラスタリン

²しかし、例えば疎水でゲンジボタルを観察していても、点滅が引き込むところは見たことがない。生物系の人話によると、彼らは光の明滅の微妙なタイミングで互いを認知するなど高度な情報交換をしているらしく、振動子と見なしてしまうのは失礼であろう。

³局所結合が常に拡散的だとは限らないし、大域結合が平均場結合しかないわけでもないのだが、次の章で示すような結合の導入をするとそうなるのである。

グ、集団運動や大自由度カオスの発生などの様々な現象が発見され、概念化されてきた。多くのモデルは詳しく取り扱うために現実の系を単純化しすぎており、得られた結果が一般的過ぎて結局現実の系の理解に役に立たない嫌いはあったが、それでもそのようなして得られた概念が我々の認識を豊かにしてきたことに違いはない。

さて、次に当然考え付くのは、結合の仕方がその中間的な非局所結合 (図 4)、つまり、近傍の素子とは強く相互作用するが、遠方の素子とはさほど影響を及ぼしあわないような場合である。現実の世界を見渡すと、上に述べたふたつの極限的な場合よりもむしろこの場合の方が自然であるようにさえ思える。また後で示すように、細胞集団が化学物質を拡散させて相互作用しているときなどは、実際にこの場合に相当する。ところが、このような系に関する研究は意外なほど少ない⁴。

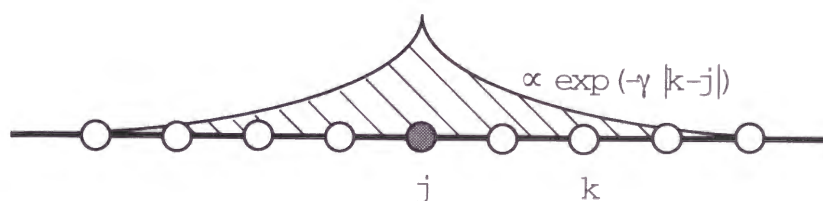


図 4: 非局所結合

標語的に言えば、大域結合系は各素子がすべての素子と均等に相互作用するという意味で、素子にとって系はすべて内部であり、一方拡散結合系は各素子はすぐとなりの素子としか相互作用しないので、素子にとって系はすべて外部である。一方、非局所結合素子系の重要な特徴は、系の中に各素子にとっての内部と外部、すなわち結合長の内側と外側が存在することである。そのため、局所・大域どちらの系の特徴をも含むような、逆に言えばどちらの系でも見られないような、独自の性質を示すことが期待される。

そして、今後述べてゆくように実際そのとおりであり、非局所結合素子系は、素子の内部状態のなす場のパターンのフラクタル性や空間相関関数のスケーリング挙動で特徴づけられるような、特異的な時空カオス状態を非常に一般的に示す。この論文では、この特異的な時空カオス状態を主題とし、詳しい解析を行う。

1.3 この論文の構成

今後のこの論文の構成は以下の通りである。まず第 2 章で、局所・拡散結合素子系と大域・平均場結合素子系の中間にあるものとして非局所結合素子系を導入し、そのような結合が現れる可能性のある具体的な系について議論する。

第 3 章では、まず非局所結合素子系の代表的なものとして非局所結合複素ギンツブルクランダム振動子系を導入して解析を行い、系が振幅場のパターンのフラクタル性や空間相関関数の短距離でのべき的な挙動で特徴づけられる「特異的な時空カオス状態」を示すことを説明する。また、素子をブラッセレータやレスラー振動子に置き換えた系を導入し、この特異的な時空カオス状態が複素ギンツブルクランダム振動子系に限らず、より一般的に見られるものであることを示す。さらに次の第 4 章では、系が離散時間モデルで記述されるような場合を考え、素子としてロジスティック写像と非対称テント写像を使った場合を調べる。その結果、やはりこの種の時空カオス状態が観測さ

⁴我々がこの研究を初めて 4 年近く経過しているが、その間に注意を惹かれたこのような系に関する論文も数えるほどしかない。

れ、統計量の挙動も定性的に同一であることを示す。

このように幅広い系において観測されるということから、特異的な時空カオス状態を生成するメカニズムは本質的には簡単で普遍性を持つものであることが予想されるが、このことは第5章で明らかにされる。つまり、場のフラクタル性やベキ的な空間相関は、素子間の状態差が素子のカオティックな運動による乗法的な駆動と、長波長の非局所的な平均場の微少なずれによる加法的な駆動の両方をランダムに受けている結果であるとして説明される。このような状況を記述するための最初のモデルは蔵本によって導入され、その後本質的には同じだが異なるものもいくつか提案された。そのようなモデルは、実はノイジーなオンオフ間欠性と呼ばれる現象を説明するためのモデルや、レーザー発振や生物の個体数変動、経済の価格変動のモデルとして使われているものと同じものであり、我々の系においても任意のふたつの素子の間にオンオフ間欠性が生じていることや、素子間の状態差の分布がベキ的になることなどが予想される。第6章では、このようなモデルの典型例として、乗法および加法ノイズに駆動されたランジュバン方程式を導入して詳しく解析し、場のフラクタル性や空間相関のベキ則を近傍の任意のふたつの素子間のノイジーなオンオフ間欠性の結果であるとして説明するとともに、フラクタル次元やベキ則の指数などを素子の局所リアブノフ指数のゆらぎの統計的性質と関係づける。この章は著者の公表論文 [5] の日本語への直訳である。

この簡単な確率過程モデルによる結果は、特異的な時空カオス状態の短距離における統計量の挙動を定性的に非常にうまく説明できる。ところが、このモデルで仮定されたことの中に、非局所結合そのものは入っていない。場のフラクタル性や空間相関のベキ則が生成されるためには、単に素子の局所リアブノフ指数がゆらぎ、ランダムな長波長の場が素子に影響を与えていけばよいのである。つまり、少なくとも短距離の統計量の特異的な性質に関しては、非局所結合は必要条件ではなく、そのような性質はランダムに長波長の外場を与えた素子系においても生成される可能性がある。第7章では、この予想を実際に確かめるために、ランダム長波長外場を与えた素子系を導入し、数値計算により統計量を測定する。その結果、それらの系においても特異的な空間相関や場のフラクタル性を示す「特異的な時空乱流の状態」が観測されることがわかる。

第8章と第9章では、上の確率過程モデルから予想されたふたつの素子間のノイジーなオンオフ間欠性や状態差のベキ的な分布、場の統計量の性質と素子の局所リアブノフ指数のゆらぎの関係などを幾つかの系において実際に確かめる。

我々の系においては、場の空間パターンそのものも間欠的である。第10章では、この空間間欠性を特徴づけるために、これまで場のフラクタル性や空間相関のベキ則などとしてばらばらに扱ってきた量を、場の高さの差の q 次モーメントのベキ則として一般化する。この一般化した量のスケールリング指数の測定の結果、もとの振幅場のマルチアフィン性と、振幅場の差分で定義した振幅場のマルチフラクタル性というふたつの重要な性質が明らかになる。これらのマルチスケールリング性は、流体乱流の速度・エネルギー散逸場や、荒れた表面成長現象でも知られている興味深い性質であり、場の量の分布関数に基づいた詳細な解析を第11章で行う。なお、この章は著者が主著となっている論文 [7] の日本語への直訳である。

以上がこの論文の主要部分である。最後の第12章には、まだ確立しておらず公表論文にもなっていないが、興味深く、今後進展し得るいくつかのトピックスについて簡単に述べることにする。

なお、このドクター論文は、第6章と第11章に公表論文を日本語訳したものをそのまま転載し、それに非局所結合素子系のイントロダクションとその他のトピックスを補足するという形で作られたため、話の流れが前後したり、重複して述べられている部分があったり、また記号の統一がとれていない部分が多少はあることを、あらかじめご了承ください。

2 非局所結合素子系

まず結合素子系という概念を導入する。次に歴史的によく調べられてきたふたつの極限的な系、すなわち局所結合系と大域結合系について簡潔に述べる。その後非局所結合素子系を導入し、いくつかの具体例を与えよう。

2.1 動的な素子

動的な素子を考えよう。ここで動的とは、素子が何らかの内部状態を持ちその内部状態が自励的なダイナミクスを持つという意味であって、素子はその位置を変化させ得るという意味ではない⁵。素子の時刻 t における内部状態を適当な次元のベクトル $\mathbf{X}(t)$ で表わし、そのダイナミクスを連続時間モデルで、

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)), \quad (1)$$

と記述することにしよう。確率的な要素は考えず素子は決定論的方程式に従うものとした。素子は自励的なので右辺は時刻 t にあらわにはよらない。

考えている素子によって、内部状態ベクトル \mathbf{X} の次元は 1 から非常に大きな値まで様々であり、そのダイナミクス $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ も単なる緩和のように非常に単純なものから、無数の変数が複雑に絡み合ったとても記述できないようなものまで様々であろう。例えば内部状態ベクトルの次元が 1 の場合、そのダイナミクスが有界な領域にとどまるためには、 $F(X)$ は固定点への単なる緩和を表わさなくてはならない。例えば、

$$\frac{dX}{dt} = aX - X^3. \quad (2)$$

これは実係数 a の正負によりひとつあるいはふたつの安定な固定点を持ち、実ギンツブルクランダム方程式と呼ばれる。内部状態ベクトルが 2 次元の場合、ポアンカレ・ベンディクソンの定理により有界な領域にとどまるダイナミクスは単なる固定点への緩和以外に極限周期軌道、すなわちリミットサイクルへの漸近がありうる。例えば、

$$\frac{dW}{dt} = aW - (1 + ic)|W|^2W, \quad (3)$$

ここで a, c は実定数、 W は複素数の変数である。この方程式は、 a が負の時には原点に安定な固定点を持つが、 a が増加して正になるとホップ分岐によりこの固定点が不安定化し、まわりに安定なリミットサイクルが生じる。これが今後頻繁に使用する複素ギンツブルクランダム振動子の従う方程式である。内部状態ベクトルが 3 次元以上になると、そのダイナミクスは固定点、リミットサイクルに加え、カオティックな軌道を取り得るようになる。レスラー振動子やローレンツモデルなどが有名な例であろう。

さらに内部状態の次元が上がるとともに、素子のダイナミクスはいくらでも複雑になり得る。が、素子のダイナミクスは、常にそれがとりうる最大の複雑さをとっているわけではない。例えば神経細胞は非常に多くの分子からなっており、もし各分子がばらばらに動いたらそのダイナミクスは想像もつかないものになるだろうが、実際にはそれらの挙動は非常に強く組織化されており、神経細胞のダイナミクスはある条件下では単に規則正しくパルスを発するリミットサイクルであったり、せいぜい少数自由度のカオスであったりする。つまり、実際の多くの素子のダイナミクスはその可能な位相空間の中の非常に限られた部分空間上 (不変多様体) に実質的に制限されており、その記述には、その部分空間の次元程度の個数の変数を用意すれば実際には十分である。素子の記述をこ

⁵細胞などの中には動くものもあり、それはそれで面白いだろうが、以下では考えないことにする。

の部分空間上に制限し、素子のダイナミクスをその上でのより少ない変数によって記述しなおすことを縮約という。しかし、仮に素子を記述するマイクロな方程式が全てわかっていたとしても、この部分空間がいつも容易に求まるわけではない。

そのような縮約の手続きが解析的に可能な重要な場合として、素子のダイナミクスの固定点が不安定化して分岐を起こす分岐点近傍での縮約がある [14, 15]。このとき、素子のダイナミクスは分岐点において中立安定になるような固有ベクトルの張る空間上 (固有値の縮退がない場合にはその次元は 1 か 2 である) の変数で書き表される。上で挙げた方程式は、そのような分岐点近傍での縮約を行ったときの標準形のうちのふたつの典型的な例である。

以下で我々は動的な素子を多数結合した系を考えるが、そのときに素子の内部状態のダイナミクスとして複雑なものを考えて問題を複雑にするよりは、むしろ簡単なもの、特にリミットサイクル振動子と 3 次元の低自由度カオスを取り扱うことにする。にもかかわらず、系は非自明で一見非常に複雑な挙動を示すことがいずれ明らかにされるであろう。

2.2 結合素子系

さて、そのような素子が空間的に分布し (この空間は抽象的なものでもよい)、周囲の素子と影響を及ぼしあっているような状況を考えよう。すでに述べた通り、現実の世界には化学反応系、心筋細胞、神経回路系、バクテリア、ホテルの群れ、経済活動におけるエージェントの群れなど、そのように捉えることのできそうな系が多数存在する。なお、以下では簡単のため素子はその位置を変えるような状況は考えない。空間に連続的に分布した素子を考え、その位置を \mathbf{r} で表そう。素子内部状態は $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ 、そのダイナミクスを $\mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{r}, t))$ と表すことにする。

2.2.1 線形な平均場結合

素子間の結合には様々なものが考えられるが、以下ではそれをあるひとつの種類、しかし広い応用範囲を持ったものに限定する。

その結合とは、線形で平均場的なものである。つまり、各素子はその近傍の素子の内部状態の線形な重ね合わせによる平均的な場を感じ、その影響を受けて運動するものとする。この平均的な場を内部場と呼び、位置 \mathbf{r} での内部場を $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r}, t)$ と書くことにしよう。より具体的には、場 $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r}, t)$ を次のように定義する:

$$\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r}, t) := \int G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \mathbf{X}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'. \quad (4)$$

ここで、 $G(r)$ は適当な重み関数であり、この重み関数をどう選ぶかによって結合の様子を変えることができる。系の空間的な等方性を仮定して、 $G(r)$ は 2 点間の距離のみによって決まるものとした。また、 $G(r)$ は次のように規格化されているものとする:

$$\int G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) d\mathbf{r}' = 1. \quad (5)$$

各素子はこの内部場と、素子の内部状態との差に比例した影響を場から受けつつ運動するものとする。すなわち、素子系が、

$$\frac{d\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)) + \mathbf{K} \cdot [\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{X}(\mathbf{r}, t)], \quad (6)$$

というダイナミクスに従うとする。ここで \mathbf{K} は一般には行列だが、この論文では多くの場合単位行列 \mathbf{I} を K 倍したものが使われるので、以下では単に K と書くことにする。 K は素子が内部場か

ら受ける影響の大きさをコントロールするパラメータ、つまり結合強度である。 K が正なら、この結合は素子の内部状態と内部場を一致させるように働く。この結合による素子同士を揃えようとする効果と、各素子の自律的なダイナミクスによる (一般には) ばらばらになろうとする効果のバランスにより、この種の結合素子系は様々な挙動を示す。さて、以下にこの種のダイナミクスに従う結合素子系の典型的なもの、その具体例を挙げてゆくことにしよう。

2.2.2 局所・拡散結合系

まず、素子間の結合の短い極限を考えよう。つまり、重み関数 $G(r)$ が原点近傍のごく狭い領域でのみ非常に大きな値をとる場合である。このとき、素子の内部状態のなす場 $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ が適度になめらかなら、その程度のスケールでは場 $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ がほとんど変動しない状況を考えることができる。すると、点 \mathbf{r} の近傍で $\mathbf{X}(\mathbf{r}')$ は、

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}') = \mathbf{X}(\mathbf{r}) + [(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla] \mathbf{X}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} [(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla]^2 \mathbf{X}(\mathbf{r}) + \dots, \quad (7)$$

と展開されるので、これを式 (4) に代入し、 $G(r)$ の対称性から座標の奇数次の項が消えることを用いると、内部場は、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \mathbf{X}(\mathbf{r}') \\ &\simeq \int d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \left\{ \mathbf{X}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} [(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \nabla]^2 \mathbf{X}(\mathbf{r}) \right\} \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{r}) + \left\{ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2 \right\} \nabla^2 \mathbf{X}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (8)$$

と計算される。 $G(r)$ の値をとる領域が原点付近に集中すればするほど、4 次以上の項からの寄与は無視できるようになり、その極限において拡散結合系が実現される。これをダイナミクスの式 (6) に代入すると、

$$\frac{d\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)) + D\nabla^2 \mathbf{X}(\mathbf{r}, t), \quad (9)$$

を得る。ここで、式 (6) における結合強度 K (または行列 \mathbf{K}) と上の展開式に現れた $G(r)$ の 2 次モーメントを掛けたものを新たに D (または行列 \mathbf{D}) とおいた。これは各素子が互いに拡散的に結合したものであり、反応拡散系と呼ばれ、非常に幅広い応用を持つ。以下にその例をいくつか挙げる。

各素子が固定点への緩和型の式 (2) に従うとき、系のダイナミクスを表わす式は、

$$\frac{dX(\mathbf{r}, t)}{dt} = X - X^3 + D\nabla^2 X, \quad (10)$$

となる。これは最も簡単な「時間依存 (実) ギンツブルクランダウ (TDGL) 方程式」であり、空間分布した双安定な素子が拡散的に結合したものである。この方程式は場の量のある自由エネルギー汎関数に対する勾配方程式に書き直すことができるので、系はリアプノフ汎関数を持つ。そのため、外力がなければ系のダイナミクスは最終状態への単純な緩和であり、それほど複雑ではない。この方程式は、相転移の臨界現象のモデルとして使われる最も簡単なものであり、膨大な研究がなされている。Hohenberg-Halperin[16] はこれを相転移のモデル A と分類した。この方程式に種々の効果を表す様々な項を追加したものは、数多くの相分離現象のモデル方程式として使われている。また、結晶成長のモデルに使われるフェイズフィールドモデルや、その他多くの非平衡系のパターン形成のモデルもこの形をしている [17]。この論文でこれ以上このモデルに立ち入ることはできない。

各素子が式 (3) に従うときには、適当に変数変換すると系のダイナミクスは、

$$\frac{dW(\mathbf{r}, t)}{dt} = W - (1 + ic_2)|W|^2W + (1 + ic_1)\nabla^2W, \quad (11)$$

と表わされる。これは「複素ギンツブルクランダウ (CGL) 方程式」と呼ばれるもので、空間分布したリミットサイクル振動子が拡散的に結合したものである [12, 15]。TDGL 方程式 (10) との違いは、各素子の内部状態の自由度が 2 であり、そのため系が一般にはリアップノフ汎関数を持たないことである。実際この方程式の示すダイナミクスは TDGL 方程式 (10) よりはるかに複雑であり、特にパラメータ c_1 と c_2 が Benjamin-Feir 不安定条件 $1 + c_1c_2 < 0$ を満たすと全ての平面波解が不安定化し、時空カオス状態を示す [12, 15, 20]。

前に述べたように、式 (10) と (11) は、より一般的な方程式から分岐点近傍での縮約手続きにより標準形として導出される普遍的なものであり、これらの系の解析はそれらの一般的な系の分岐点近傍での挙動に対する定性的な予言能力を持つため、多くの研究がなされてきた。

各素子のダイナミクスとしてさらに複雑なもの、例えば低次元カオスを使うことも可能であり、そのような研究も多数ある。この場合、上述の縮約の意味における普遍性はないが、系は当然時空カオスを含む多彩な挙動を示しうるといって、興味を持たれる。

2.2.3 大域・平均場結合系

次に逆の極限を考えよう。つまり素子間の結合が距離によらず、 $G(\mathbf{r})$ が空間的に完全に一樣な場合である。素子の存在する空間領域の体積を V とすると $G(\mathbf{r}) \equiv 1/V$ なので、内部場は場所によらず、

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \frac{1}{V} \int \mathbf{X}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}', \quad (12)$$

となる。これを使って素子のダイナミクスは、

$$\frac{d\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)) + K [\tilde{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}(\mathbf{r}, t)], \quad (13)$$

と与えられる。内部場が全素子に共通なので、系から空間構造はなくなる。つまり系から空間の意味が失われ、 \mathbf{r} は単に素子のインデックスとなる。

この系は、例えば統計力学のイジングスピンモデルにおける平均場近似のような、通常の意味での平均場結合系である。これは、相互作用の伝わる速さが十分に速く、また遮蔽されてもいないので、素子がどこにいても瞬時に他の素子の影響を均等に受けるような状況を表わしている。現実の系では、例えばホタルやレーザー発振などのように光で相互作用するものの他に、神経系のネットワークなどで素子間に非常にたくさんのランダムな配線があるような場合にも、大域結合・平均場近似が妥当な場合があるかもしれないと言われている。

再び、素子が式 (3) に従うとしてみよう。すると、系のダイナミクスは、

$$\frac{dW(\mathbf{r}, t)}{dt} = W - (1 + ic_2)|W|^2W + K(\tilde{W} - W), \quad (14)$$

となる。このモデルは CGL 振動子を大域的に結合したもので、Hakim と Rappel[21] や、中川と蔵本たち [22] によって調べられ、素子がいくつかの完全に同一な挙動を示す集団に別れて運動するクラスタリング、低自由度の集団カオス、また素子がある種の秩序を持ちつつもばらばらに振る舞う大自由度カオスなどを示すことが発見された。

2.3 非局所結合系

2.3.1 モデル

前節でふたつの極限的な結合素子系について述べたが、当然次に考えることになるのは重み関数 $G(r)$ がデルタ関数的でも空間一様でもなく、適当な広がりを持った場合である。まず、近くの素子には遠くの素子によりも強い影響を受けると考えるのが自然であろう。つまり、 $G(r)$ が $r = 0$ で最大値を持ち、 r が増加するとともに現象する関数となる場合である。

そのような $G(r)$ としては様々なものが考えられるが、例えば今後 1 次元の系を扱う場合には次の指数的な形を使うことにする:

$$G(r) = G_0 \exp(-\gamma|r|). \quad (15)$$

ここで、 γ^{-1} は重み関数 $G(r)$ が減衰する長さスケールを与え、以下これを結合距離と呼ぶ。 G_0 は式 (5) を満たすための適当な規格化定数である。なお、この形は仮想的な反応拡散系の断熱消去により自然に得られることを後ほど示す。

このような重み関数を使って内部場は、

$$\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r}, t) = \int G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \mathbf{X}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}', \quad (16)$$

と与えられ、系のダイナミクスはこの $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r}, t)$ を使って、

$$\frac{d\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)) + K \left[\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) \right], \quad (17)$$

と表わされる。

重み関数の形は様々だろうが、現実の系の多くは、実際にはこの種の非局所結合系に属するであろう。そのような系を扱うときに、解析的な簡単さのために極限をとり、上述した局所または大域結合系と見なせば十分な場合も多いかもしれない。しかし、局所結合系の結合距離を無限小からごく小さいが有限の値にすること、または大域結合系の結合距離を無限大から非常に大きい有限の値にすることは、系への特異的な摂動になりうる。実際、この摂動により拡散結合においては完全に保証されていた場の連続性、また大域結合においては完全に保証されていた空間的な一様性は破られ、それはふたつの極限どちらの場合においても見られないような（また、ある意味ではどちらでも見られるような）非局所結合系独自の特異的な挙動に導かれる。

素子が式 (3) に従う場合を考えよう。系のダイナミクスは

$$\frac{dW(\mathbf{r}, t)}{dt} = W - (1 + ic_2)|W|^2W + K(1 + ic_2) \left[\int d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) W(\mathbf{r}', t) - W \right], \quad (18)$$

で与えられる。これを「非局所結合複素ギンツブルクランダウ方程式」と呼ぶことにしよう。このモデルが蔵本によって最初に導入された非局所結合素子系であり、「特異的な時空カオス状態」を示すことが発見された [1]。なお、この方程式も、非局所結合した振動子をホップ分岐点近傍で振幅縮約することによって得られる普遍的なものである。

2.3.2 非局所結合の現れる例

前節では非局所結合の重み関数 $G(r)$ の例として、空間 1 次元の場合について指数的なものを示したが、そのような指数的な $G(r)$ が自然に現れるような状況をひとつ挙げておこう。素子が空間的に分布している状況を考える。素子同士は直接相互作用はせず、かわりにある拡散的な場を介

するものとする。素子はこの拡散場に変化を及ぼし、その変化の影響を受ける。例えば、細胞集団が化学物質を通じて相互作用しているような場合である。この時、系のダイナミクスは以下のようなものになるだろう：

$$\frac{d\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)) + \bar{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (19)$$

$$\epsilon \frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{dt} = -\eta \mathbf{A} + D \nabla^2 \mathbf{A} + \mathbf{X}(\mathbf{r}, t). \quad (20)$$

ここで $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ は拡散場を表わし、 η はその減衰の時定数、 D は拡散定数を表わす。行列 $\bar{\mathbf{K}}$ は拡散場が素子の内部状態に与える影響を表わしている。 ϵ は素子のダイナミクスと拡散場のダイナミクスのタイムスケールの比である。

さて、 ϵ が非常に小さい場合を考えよう。すなわち、拡散場のダイナミクスが素子のダイナミクスに比べて十分速く、拡散場が各瞬間での素子の内部状態によって決まる定常状態に瞬間的に緩和し、素子のダイナミクスに追従する場合である。このとき、上の拡散場の式の時間微分の項を 0 とおいて、その定常解を求めてみると、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta - D \nabla^2} \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{X}(\mathbf{r}'), \quad (21)$$

と表わされる。ここで $G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ は、

$$(\eta - D \nabla^2) G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}'), \quad (22)$$

を満すグリーン関数で、考えている空間の次元を d とすると

$$G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{q} \frac{\exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})]}{\eta + D|\mathbf{q}|^2}, \quad (23)$$

と表わされ、系が空間的に等方的な場合、距離のみの関数となり、

$$\begin{aligned} G(r) &\propto \exp(-\gamma|r|) && 1 \text{次元}, \\ G(r) &\propto K_0(\gamma|r|) && 2 \text{次元}, \\ G(r) &\propto \frac{\exp(-\gamma|r|)}{\gamma|r|} && 3 \text{次元}, \end{aligned} \quad (24)$$

などと計算される。ここで定数：

$$\gamma := \sqrt{\frac{\eta}{D}} \quad (25)$$

を定義したが、これがちょうど前述べた結合距離の逆数を与えていることがわかる。重み関数は 1 次元の場合には既に述べたように指数型の減衰を示し、3 次元では湯川ポテンシャル型である。2 次元では変形ベッセル関数 $K_0(r)$ であらわされ、その遠方での漸近形は $\sim \exp(-r)/\sqrt{r}$ である。

なおこの状況は、例えば川崎 [69] が流体効果のある核生成モデルを作るときにしたように、ストークス近似により粘性の大きな流体の速度場のダイナミクスを断熱消去するオセーテンソルの方法などと類似している。実際、世の中はマイクロには近接相互作用のみからなっているので、非局所結合が現れるのは、多くの場合このように何らかの断熱消去が行われた場合であろう。

2.3.3 空間的に離散的な格子点上の素子系

なお、ここまでは素子が連続体をなすものとして説明してきたが、実際に考察する上では、また数値計算の都合上も、素子が空間的に離散的な格子上のみに配置されており、素子数を増やすことで格子間隔を短くしてゆくような場合を考える方が適当である。

その理由のひとつに、非局所結合系には結合長よりマイクロな最小スケールが存在しないことが挙げられる。拡散結合系においては、拡散長によって決まる最小スケールが存在し、そのスケールより小さな場の変動は強く抑えられ、場の連続性が保証される。そのような系を数値計算する場合には、この拡散長より十分短いメッシュを切れば、連続体を近似できる。一方、非局所結合系においてはしばしば場はフラクタル的であり、メッシュを細かく切れば切るほど細かい構造が見えて来る。このような場に対しては、例えば積分や微分などの演算を数学的に妥当に扱うのが難しくなってしまう。そこで、連続体モデルを数値的にメッシュを切って近似的に扱っていると考えよりは、むしろもともと離散的な格子点上の素子系の、格子間隔を短くした極限を扱っていると考えの方が現実的である。離散的な格子点上の素子系を考え、そのダイナミクスを、

$$\frac{d\mathbf{X}_i(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_i(t)) + K \left[\sum_j G(|j-i|) \mathbf{X}_j(t) - \mathbf{X}_i(t) \right], \quad (26)$$

で与えよう。 $G(|j-i|)$ は再び同じ形の重み関数だが、長さスケールは適当に変えた。

2.3.4 離散時間モデル

ここまでは連続時間モデルを考えてきたが、離散時間モデルも考えることもできる。素子の内部状態を変数 $\mathbf{X}(t)$ で表わし、そのダイナミクスを写像で、

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)), \quad (27)$$

と表わすことにしよう。写像の場合は、内部状態の次元が1でも素子はカオティックな挙動を示し得る。最もその性質がよく知られている写像は、ロジスティック写像 [47]:

$$F(z) = cz(1-z), \quad (28)$$

であろう。ここで c は分岐パラメータである。

離散的な格子点上の素子集団を考えよう。素子間に平均場的な結合を導入して、 i 番目の素子のダイナミクスが、

$$\mathbf{X}_i(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_i(t)) + K \left[\tilde{\mathbf{F}}_i(t) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_i(t)) \right], \quad (29)$$

に従うことにしよう。ここで、 $\tilde{\mathbf{F}}_i(t)$ は i 番目の素子の位置での内部場で、

$$\tilde{\mathbf{F}}_i(t) = \sum_j G(|j-i|) \mathbf{F}(\mathbf{X}_j(t)) \quad (30)$$

と定義される。右辺第2項の結合項に、変数 \mathbf{X} ではなくそれを写像した $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ が入っているのは、自明な一様解や、良識的な連続極限の存在のためには、そのほうが都合が良いからである [19]。

空間1次元、素子の内部状態も1次元として、拡散的、大域的、非局所的な相互作用の場合についての系の運動方程式を書くと、それぞれ以下のようになる:

$$X_i(t+1) = F(X_i(t)) + K \left[\frac{F(X_{i+1}(t)) + F(X_{i-1}(t))}{2} - F(X_i(t)) \right], \quad (31)$$

$$X_i(t+1) = F(X_i(t)) + K \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(X_j(t)) - F(X_i(t)) \right], \quad (32)$$

$$X_i(t+1) = F(X_i(t)) + K \left[\sum_j \frac{\exp(-\gamma|j-i|)}{2\gamma} F(X_j(t)) - F(X_i(t)) \right], \quad (33)$$

どの方程式も、各素子の自励的なダイナミクスをあらわす項と、結合強度 K で平均場にあわせようとする効果をあらわす項を持っており、その平均場は、拡散的な場合には隣接した左右の素子について、大域的な場合には全素子について、非局所的な場合には重みをつけて周辺の素子について取る形になっている。この種のモデルは結合写像格子 (coupled map lattice) と呼ばれ、金子 [18] により初めて導入された。カオティックな素子が拡散的に相互作用した系 (31) は、時空カオスや空間欠性など、様々な面白い性質を示すことが発見されており、また大域結合した系 (32) も、クラスタリングや大自由度カオス、集団運動など多くの興味をそそる現象が発見され、研究されてきた。非局所結合の場合 (33) については、今後詳しく調べることになるであろう。

2.3.5 補足 - 局所+大域結合系

以上、特に興味のある CGL 振動子を中心に、相互作用が拡散的な場合と大域的な場合について述べた。これに関して、最近 Mikhailov たちによって興味あるモデルが詳しく調べられているので、ここで少し触れておこう (例えば [23, 24])。彼らは通常の拡散的に結合した CGL 方程式に、大域的な結合をも追加した系を調べた。これは例えば振動化学反応系において、液相中の通常の拡散的な結合に加え、気相を通じた結合も存在するような場合のモデルで、以下のようなものである:

$$\frac{dW(\mathbf{r}, t)}{dt} = W - (1 + ic_2)|W|^2W + (1 + ic_1)\nabla^2W - \mu e^{i\chi}\tilde{W}, \quad (34)$$

右辺最後の項が大域的な結合を表しており、 \tilde{W} は W の平均場、 μ と χ は平均場から系への影響の強さと位相差をコントロールするパラメータである。彼らはこの系を解析し、CGL 方程式の時空カオスを大域結合のフィードバックで抑制できることや、空間周期パターンを生じることを発見した。また金属の触媒で振動化学反応実験を行い、実験的にも同じ結果を得た。

しかし、我々が調べて行く非局所結合素子系の振る舞いは、そのような拡散と平均場両方の結合を導入したような系の振る舞いとはまったく異なるものであることが今後明らかになるであろう。

3 連続時間モデル

3.1 非局所結合複素ギンツブルクランダム振動子系

では、非局所結合素子系の最初の例として蔵本 [1] により導入され、この論文の主題である「特異的な時空カオス」が発見された非局所結合複素ギンツブルクランダム振動子系 (以下非局所結合 CGL 系と呼ぶ) について、多少詳しくレビューしよう。

3.1.1 モデル

すでに一度述べたが、複素ギンツブルクランダム方程式:

$$\frac{dW}{dt} = W - (1 + ic_2)|W|^2W, \quad (35)$$

は、固定点が超臨界ホップ分岐により不安定化して安定なリミットサイクルが出現した後の状況を記述する最も単純な方程式であり、ホップ分岐点近傍でのダイナミクスの標準形である。原点に不安定化した固定点があり、任意の初期点から出発した軌道は半径 1 の円であるリミットサイクルに漸近し、角速度 $-c_2$ で回転するようになる (図 5)。ごく簡単な計算により、軌道の原点からの距離 R が $R < 1/\sqrt{3}$ であるとき微少にずれたふたつの軌道間の距離は拡大し、それ以外では縮小することがわかる。どちらの軌道もリミットサイクル上にあるときには位相方向に中立安定なので拡大も縮小もしない。

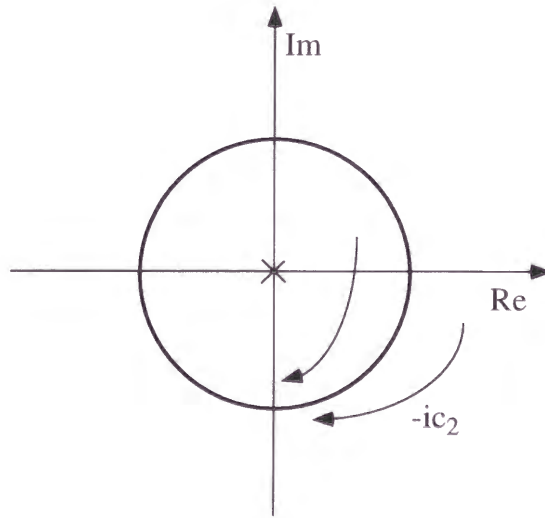


図 5: 複素ギンツブルクランダム振動子.

1 次元空間の格子点上に素子を配置する。時刻 t での i 番目の素子の内部状態を表わす変数を $W_i(t)$ と表わすと、系の従う方程式は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} \frac{dW_i(t)}{dt} &= W_i - (1 + ic_2)|W_i|^2W_i + K(1 + ic_1)(\tilde{W}_i - W_i), \\ \tilde{W}_i(t) &= G_0 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp(-\gamma|j - i|) W_j, \end{aligned} \quad (36)$$

ここで c_1, c_2 は実数のパラメータで、 c_2 は単一の振動子の回転速度、 c_1 は内部場 \tilde{W} が素子に影響をおよぼす際の位相ずれを表わし、 K は結合強度である。規格化定数 G_0 は、無限に広がった格子を考えると $G_0 = \tanh(\gamma/2)$ となる。実際の数値計算では $N = 2^{10} \sim 2^{13}$ 個の素子を使い、周期境界条件を課すが、やはりこの G_0 を使うことにする。

3.1.2 線形安定性解析

最初に空間一様解の線形安定性解析をしておこう。非局所結合 CGL 系は勾配系ではないので、線形不安定になった後のことは線形安定性からはほとんど何もわからないが、固有値のふるまいから多少はヒントが得られる。簡単のため、再び空間連続な系で考える：

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = W - (1 + ic_2)|W|^2W + K(1 + ic_1) \int G(y - x) (W(y) - W(x)) dy. \quad (37)$$

変数 $W(x, t)$ が空間一様な場合右辺の結合項が消えるので、明らかに空間一様振動解 $W_0(t)$ が存在して、

$$\frac{dW_0(t)}{dt} = W_0 - (1 + ic_2)|W_0|^2W_0, \quad (38)$$

を満す。この方程式のリミットサイクル解は簡単に $W_0(t) = \exp(-ic_2t)$ と求まる。では、この空間一様振動解のまわりの微少な摂動を考えよう：

$$W(x, t) = W_0(t)(1 + \rho(x, t)) \exp(i\theta(x, t)), \quad (39)$$

ここで実関数 $\rho(x, t)$ と $\theta(x, t)$ はそれぞれ振幅と位相の摂動である。これを式 (37) に代入して線形化すると、次の式が得られる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} &= -2\rho + K \int G(y - x) \{[\rho(y) - \rho(x)] - c_1 [\theta(y) - \theta(x)]\} dy, \\ \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} &= -2c_2\rho + K \int G(y - x) \{c_1 [\rho(y) - \rho(x)] + [\theta(y) - \theta(x)]\} dy. \end{aligned} \quad (40)$$

波数 q の摂動を考え、 $(\rho(x, t), \theta(x, t)) = (\rho_q(t), \theta_q(t)) \exp(iqx)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_q(t) &= -2\rho_q + K(\tilde{g}_q - 1)(\rho_q - c_1\theta_q), \\ \dot{\theta}_q(t) &= -2c_2\rho_q + K(\tilde{g}_q - 1)(c_1\rho_q + \theta_q), \end{aligned} \quad (41)$$

を得る。ここで、 \tilde{g}_q は重み関数のフーリエ変換：

$$\tilde{g}_q = \int \exp(iqz)G(z)dz, \quad (42)$$

で、1次元の指数型 $G(z) \propto \exp(-\gamma|z|)$ の場合、

$$\tilde{g}_q = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + q^2}, \quad (43)$$

で与えられる。この式の固有値 λ_q は、

$$\lambda_q = -1 - K(1 - \tilde{g}_q) \pm \sqrt{1 - 2c_1c_2K(1 - \tilde{g}_q) - c_1^2K^2(1 - \tilde{g}_q)^2}, \quad (44)$$

で与えられる。指数型の重み関数の場合、

$$1 - \tilde{g}_q = \frac{q^2}{\gamma^2 + q^2}, \quad (45)$$

なので、 q が小さいときは、 $1 - \tilde{g}_q$ も小さい。そこで大きい方の固有値を長波長展開すると、

$$\begin{aligned}\lambda_q &= -K(1 - \tilde{g}_q)(1 + c_1 c_2) + O((1 - \tilde{g}_q)^2) \\ &= -\frac{Kq^2}{\gamma^2 + q^2}(1 + c_1 c_2) + O(q^4),\end{aligned}\quad (46)$$

が得られ、長波長での不安定性が、

$$1 + c_1 c_2 < 0, \quad (47)$$

という条件のときに起こることがわかる。一方、上の計算において、形式的な対応:

$$\int G(y-x)(f(y) - f(x)) dy \rightarrow \left(\frac{1}{2} \int G(z)z^2 dz\right) \nabla^2 f(x), \quad (48)$$

から、

$$K(1 - \tilde{g}_q) \rightarrow Dq^2, \quad D := \left(\frac{1}{2} \int G(z)z^2 dz\right) K, \quad (49)$$

と置き換えれば、拡散的 CGL 系における固有値:

$$\lambda_q = -1 - Dq^2 \pm \sqrt{1 - 2c_1 c_2 Dq^2 - c_1^2 D^2 q^4}, \quad (50)$$

が得られ、大きい方の固有値の長波長展開:

$$\lambda_q = -(1 + c_1 c_2)Dq^2 + O(q^4), \quad (51)$$

から通常の Benjamin-Feir 不安定条件:

$$1 + c_1 c_2 < 0, \quad (52)$$

が得られる。重み関数が指数型の場合、 $D = K/\gamma^2$ である。このことから、非局所結合 CGL 系においても通常の拡散的な CGL 系の場合と同じ条件で長波長の不安定化が起こることがわかる。

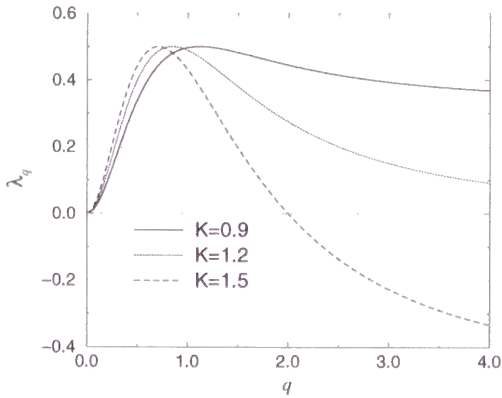


図 6: 非局所結合 CGL の一様解のまわりの摂動の固有値 λ_q . パラメータ $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $\gamma = 1.0$ で、結合強度 $K = 0.9, 1.2, 1.5$.

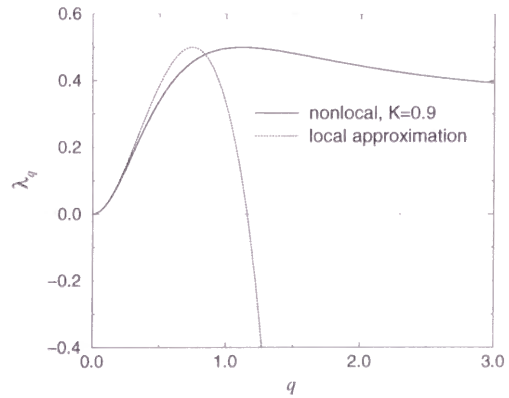


図 7: 結合強度 $K = 0.9$ の非局所結合 CGL の固有値 λ_q と、対応する拡散結合 CGL の固有値.

一方、Benjamin-Feir 不安定領域における拡散的な場合と非局所的な場合の決定的な違いは、線形安定性解析の範囲では $q \rightarrow \infty$ での固有値の振る舞いの違いとして現れる。つまり、拡散結合系

においては、短波長成分は非常に強く抑えられ、いかなる場合でも $q \rightarrow \infty$ で $\lambda_q \ll 0$ となるのに対し、非局所結合系においてはそれほど強く抑えられず、 $q \rightarrow \infty$ でも $\lambda_q > 0$ となることがある。図 6,7 に $c_1 = -2, c_2 = 2$ の場合について得られた固有値をいくつかの K の値について示す。非局所結合系では、 K の値によっては $q \rightarrow \infty$ でも λ_q は正に留まるが、対応する拡散結合系ではそのようなことはない。線形安定性の範囲では断言できないが、このことは、非局所結合素子系において、短波長成分が抑えられず、場が連続的ではなくなり得ること、同時に拡散結合系とは全く異なる性質が観測される可能性を示唆する。

3.1.3 数値計算

一様解が不安定化した後、非線形領域で何が起こるかは実際に数値計算してみないとわからない。系の長さを 1 に固定し、結合長 γ^{-1} を系の長さとの比で決めることにしよう。以下では、結合長を系の長さの $1/8$ 、つまり $\gamma = 8$ にとり、パラメータを $c_1 = -2.0, c_2 = 2.0$ に固定する。そして、結合強度 K を変えて非局所結合 CGL 系の挙動を調べることにする。

結合強度が十分大きいときには ($K \sim 2.0$)、全素子が完全に同じ状態に相互に引き込むことはないものの、系は空間的に長波長の固まった振幅パターンを示し、単に位相が一定の角速度で増加し続ける周期状態を示す。その後、 K を小さくするとともに分岐が次々に起こり、やがて系は時空カオス状態となる。

図 8 に、結合強度が $K = 1.2$ の時の素子の変数 $W(x)$ の複素平面におけるスナップショットを示す。素子は一本のひものようにループをなして分布している。図 9 に、対応する変数の振幅 $|W(x)|$ のスナップショットを示す。複素平面における変数の分布の連続性と対応して、振幅のパターンも空間的に連続である。図 10 にはこの変数の振幅 $|W(x)|$ の時間発展を示した。なめらかな時空変動をする時空カオス状態を示していることがわかる。この結合強度 $K = 1.2$ ではパターンはほぼ連続であるように見える。(連続性の判定は実は難しい。後で議論する。)

結合強度を小さくして $K = 0.85$ の場合を見よう。図 11 に、素子の変数 $W(x)$ の複素平面におけるスナップショットを示す。素子はもはや一本のひものようではなく、ばらばらに分布しているが、部分的に比較的連続性を保ったコヒーレントな部分も存在する。図 12 に、対応する変数の振幅 $|W(x)|$ のスナップショットを示す。振幅のパターンももはや空間的に連続ではなく、激しく乱れている部分と比較的連続性を保った部分から成っている。図 10 には変数の振幅 $|W(x)|$ の時間発展を示した。非常に特徴的な模様を示し、比較的なめらかな時空変動をする背景の中から、時々山のように見えるコヒーレントな領域が成長し(上のスナップショットにおける比較的連続性を保った部分)、しばらく持続した後また背景と一体化する。この領域と背景の間には不連続性があり、CGL 振動子の回転のタイムスケールに比べてかなり長時間持続している。結合強度 $K = 0.85$ ではパターンは連続と不連続の間にあるように見える。この状態が、今後詳しく調べて行く「特異的な時空カオス状態」であり、多くのとても面白い性質を示す。

さらに結合強度を小さくした $K = 0.60$ の場合を調べよう。図 14 に、素子の変数 $W(x)$ の複素平面におけるスナップショットを示す。素子はほぼばらばらに分布しているが、まだ完全に秩序を失っているわけではなく、全体としては逆 ρ 字のような構造を持っており、ちょうど大域結合 CGL 系で知られている素子の逆 ρ 字形の分布を乱れさせたように見える [21]。図 15 に、対応する変数の振幅 $W(x)$ のスナップショットを示す。振幅のパターンもほぼばらばらだが、やはり完全に秩序を失ったわけではなく、ばらばらなパターンが長波長のモジュレーションを受けているように見える。図 16 には変数の振幅 $W(x)$ の時間発展を示した。ほとんど構造は見えないが、やはりなんらかの秩序は系に残されている。結合強度 $K = 0.60$ ではパターンはほぼ不連続で、しかも大域結合

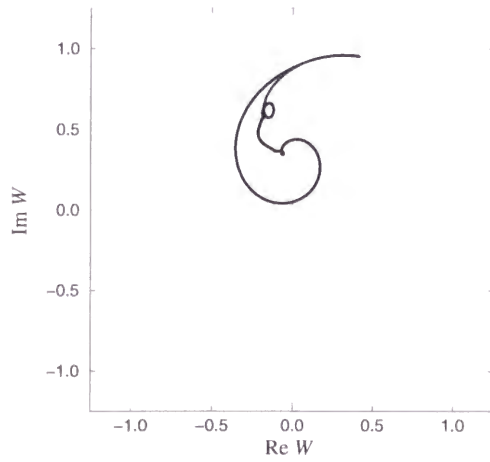


図 8: 非局所結合 CGL の変数 $W(x)$ の複素平面でのスナップショット. 結合強度 $K = 1.2$.

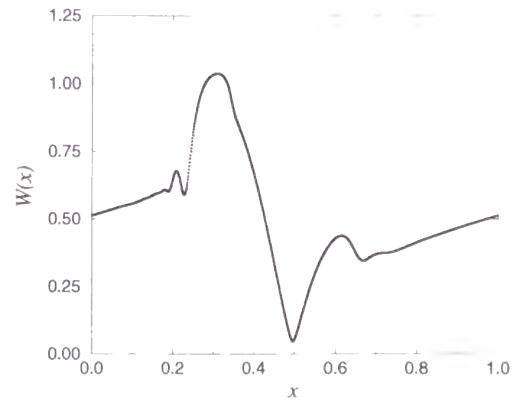


図 9: 変数の振幅 $|W(x)|$ のスナップショット.

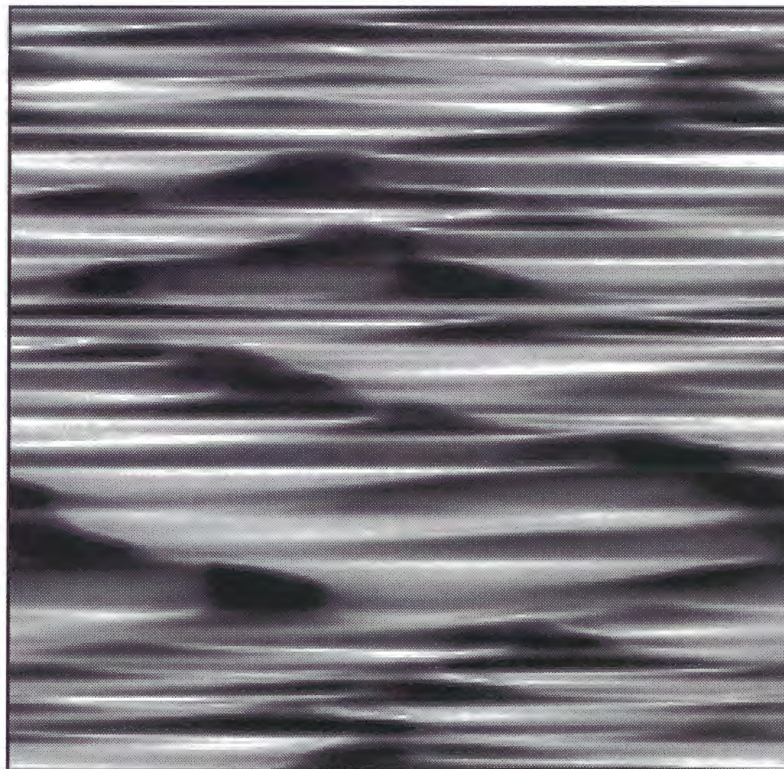


図 10: 変数の振幅 $|W(x)|$ の時間発展. 黒いほど振幅が大きく、白いほど小さい.

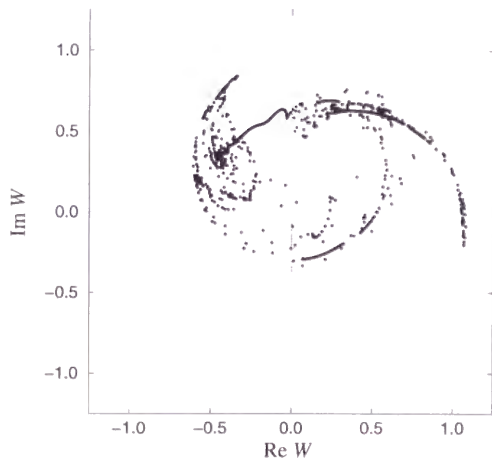


図 11: 非局所結合 CGL の変数 $W(x)$ の複素平面でのスナップショット. 結合強度 $K = 0.85$.

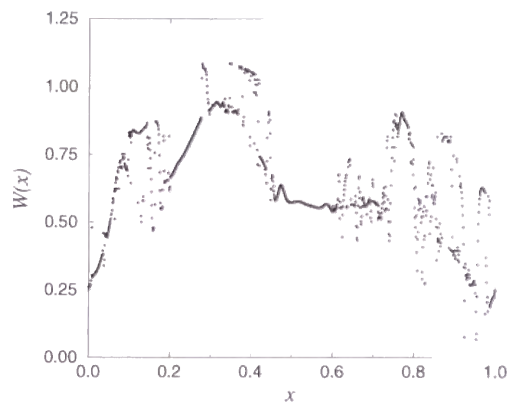


図 12: 変数の振幅 $|W(x)|$ の時間発展.

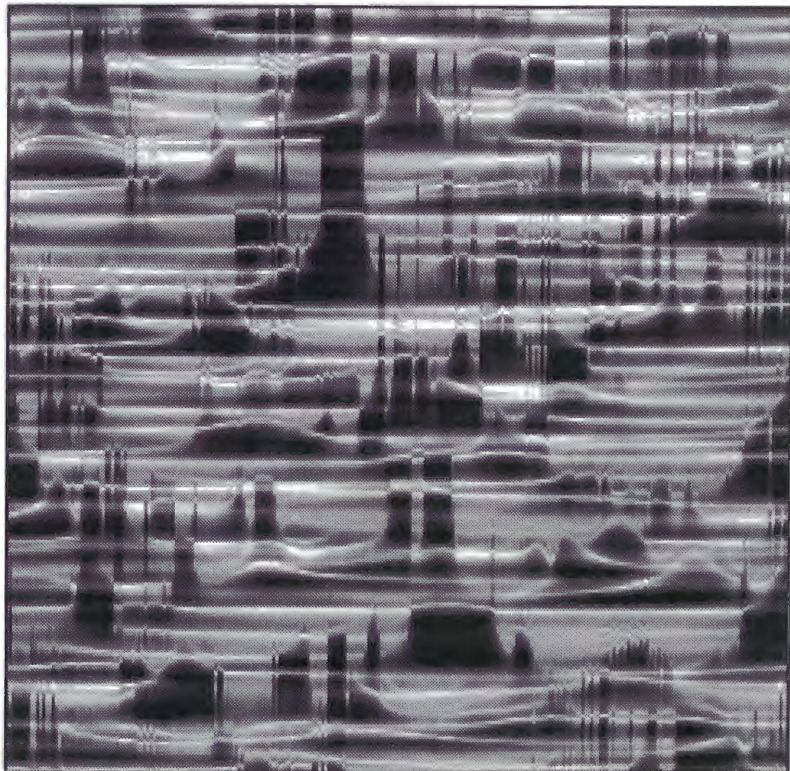


図 13: 変数の振幅 $|W(x)|$ の時間発展.

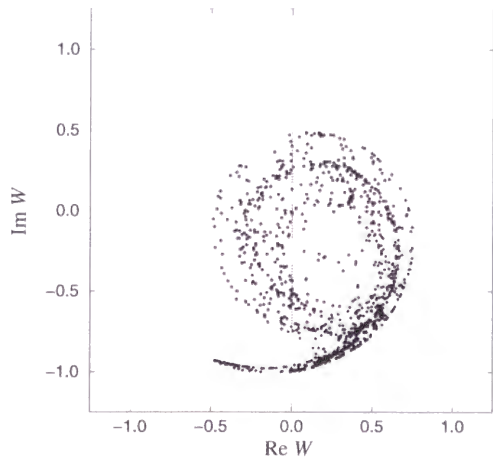


図 14: 非局所結合 CGL の変数 $W(x)$ の複素平面でのスナップショット. 結合強度 $K = 0.60$.

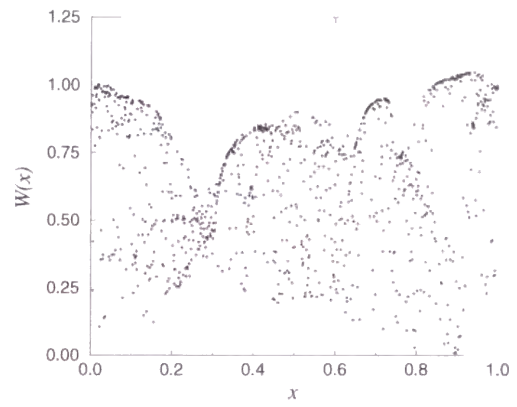


図 15: 変数の振幅 $|W(x)|$ の時間発展.

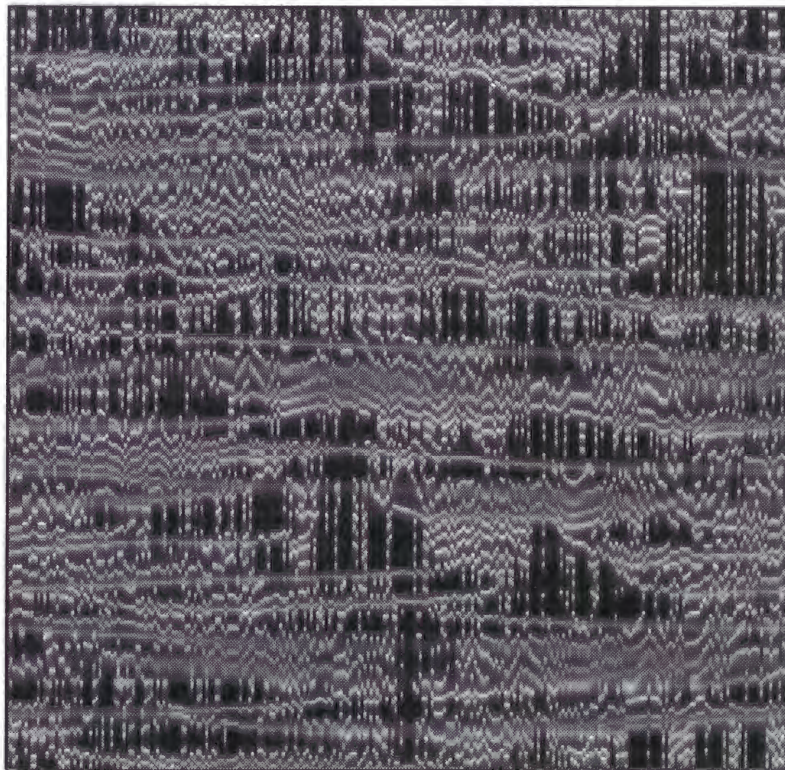


図 16: 変数の振幅 $|W(x)|$ の時間発展.

CGLで見られるのと共通するいくつかの性質を持ちあわせているようにも見える。

さらに K を小さくして行くと、 $K \sim 0.5$ くらいで素子の振幅の自由度がほぼなくなり、各素子は同一の円の上で、単に位相のみを変化させるようになる。この状態では系はもはやカオティックではなく、ばらばらに円上を回転し、目立った秩序は示さない。以下、 K が 0 になるまでこの理想気体的な状態が続く。

以上、 K を変化させることにより系の振幅場のパターンがどのように変化するかを見てきた。パターンの連続性からすると、 K が大きなところでは拡散結合系であり、一方 K が小さなところでは大域結合系である。非局所結合系がこれらふたつの極限の間にどう位置づけられるのかは興味ある問題である。

3.1.4 空間相関関数およびパワースペクトル

次に、時空パターンの特徴づけへの第一歩として、空間相関関数を測定することにしよう。空間相関関数 $C(x)$ を、

$$C(x) := \langle W(0)W^*(x) \rangle = \frac{1}{T} \frac{1}{2L} \int_0^T \int_{-L}^L W(y)W^*(y+x) dy, \quad (53)$$

と定義する。積分時間 T と系のサイズ L が十分大きく系の統計的な並進対称性と反転対称性を仮定できるときには、 $C(x)$ は実数である。

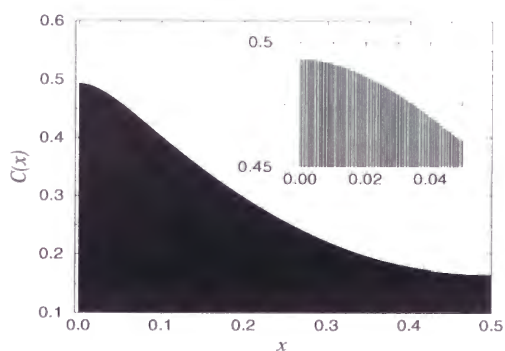


図 17: $K = 1.2$ での相関関数 $C(x)$.

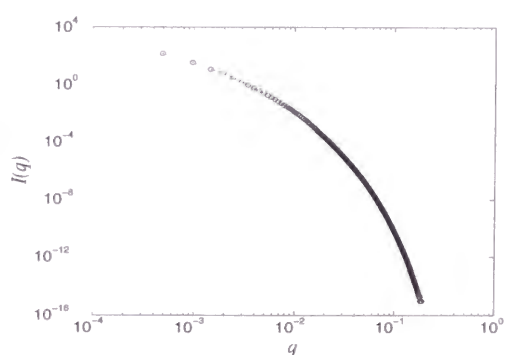


図 18: $K = 1.2$ でのパワースペクトル $I(q)$.

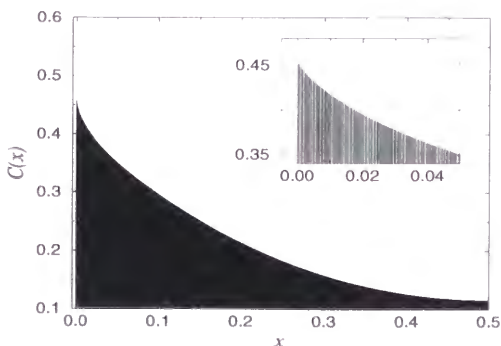


図 19: $K = 0.85$ での相関関数 $C(x)$.

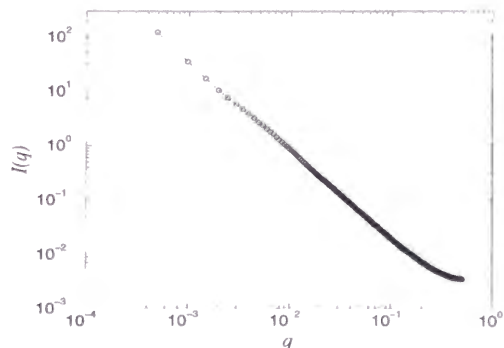


図 20: $K = 0.85$ でのパワースペクトル $I(q)$.

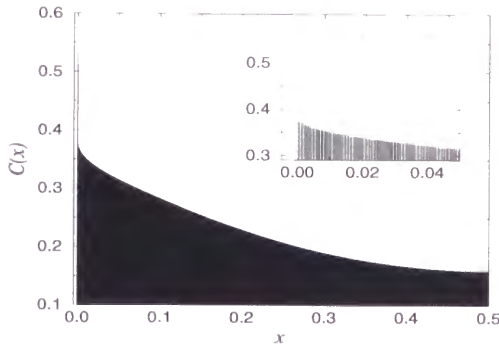


図 21: $K = 0.60$ での相関関数 $C(x)$.

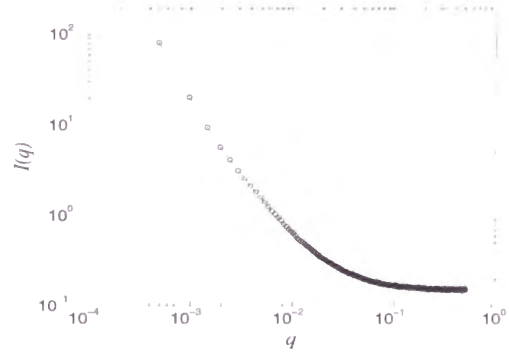


図 22: $K = 0.60$ でのパワースペクトル $I(q)$.

図 17,19,21 に、結合強度 $K = 1.2, 0.85, 0.60$ での空間相関関数を示す。空間パターンが連続的な $K = 1.2$ の場合には空間相関関数の原点付近が上に凸であるのに対し、空間パターンが連続と不連続の間にある $K = 0.85$ においては、原点付近が尖っている。さらに結合が弱い $K = 0.60$ においては、単に尖るだけでなく原点において他の部分から不連続に突出したピークがある。これは、場のパターンの連続性が完全に失われ、素子の自己相関 $C(0)$ と、無限小だけずれた位置にある素子との相関 $\lim_{x \rightarrow +0} C(x)$ の間に有限の差が生じたことを示す。

図 18,20,22 に、結合強度 $K = 1.2, 0.85, 0.60$ に対応するパワースペクトルを示す。Wiener-Khinchine の定理より空間相関関数のフーリエ変換はパワースペクトルであり、

$$I(q) = \frac{1}{2\pi} \int C(x) \exp(-iqx) dx, \quad (54)$$

の関係がある。特異的な時空カオス状態である $K = 0.85$ において、パワースペクトルがべき的:

$$I(q) \sim q^{-\alpha-1}, \quad (55)$$

に振る舞っていることが注目される。図 20 よりこの指数 α は $\alpha \sim 0.63$ と見積もられる。上の関係式より、これは相関関数が原点付近でべき的:

$$C(x) \sim C_0 - C_1 x^\alpha, \quad (56)$$

のように振る舞うことを予想させる。これを確かめるのが図 23 である。実際の計算においては、得られた $C(x)$ を使って、 $C_0 - C(x)$ がもっともよくべき則に乗るような C_0 を探した。いくつかの結合強度 K の値に対し、空間相関関数 $C(x)$ は原点付近でべき的に振る舞っており、その指数 α は結合強度 K とともに変化する。結合強度 K に対し指数 α をプロットしたのが図 24 である。指数は K とともに連続的に変化する、 K のある値で極小を持つことがわかる。 $K = 0.85$ では $\alpha \sim 0.66$ であり、これはパワースペクトルから得た値 $\alpha \sim 0.63$ とほぼ一致している。また、図 25 に示したように、結合強度 K が小さくなるとともに、空間相関関数の原点での値 $C(0)$ と、べき則によるフィットの原点での値 C_0 ($\lim_{x \rightarrow +0} C(x)$ のかわりに使う) の差として定義したギャップが 0 から有限の値をとるようになる。これは先に述べたように、素子間の距離 x を 0 に近づけた極限でも、素子の自己相関とは有限の違いがある、すなわち場の連続性が破れて素子固有の運動が顔を出してきていることを意味する。図 24 で指数が極小となる K の値と、図 25 で原点に有限のギャップが出現する K の値は、少しずつれているように見える。このことについては後で少し議論する。なお、指数が極小をとる点の近傍では、べき則 (56) はあまりよく成り立っていない。かわりに、対数的

な発散:

$$C(x) \sim C_0 + C_1 \frac{1}{|\ln x|}, \quad (57)$$

が成り立っているように見える。これを図 26 に示しておく。

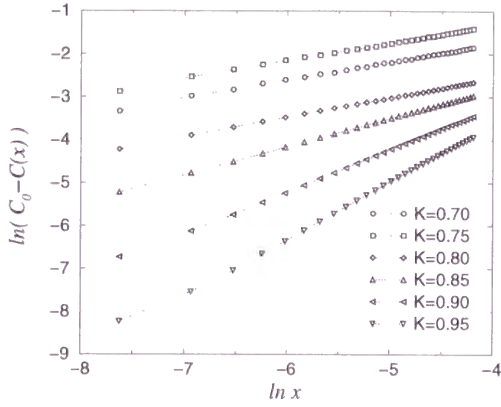


図 23: いくつかの K の値での相関関数のべき則 $C_0 - C(x) \simeq C_1 x^\alpha$.

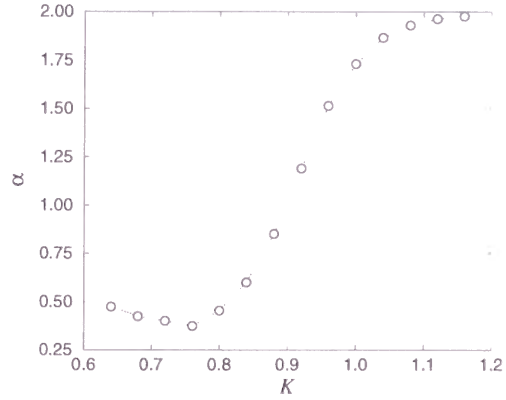


図 24: べき則の指数 α の結合強度 K 依存性.

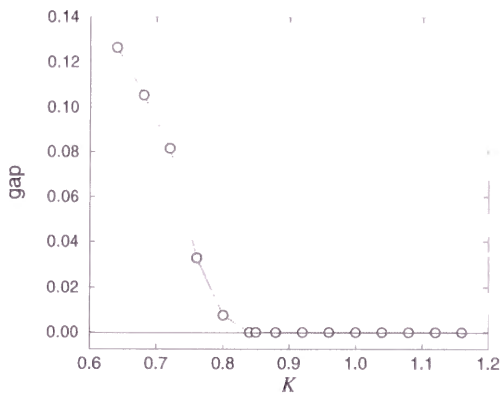


図 25: 空間相関関数の原点でのギャップ $C(0) - C_0$ 対結合強度 K .

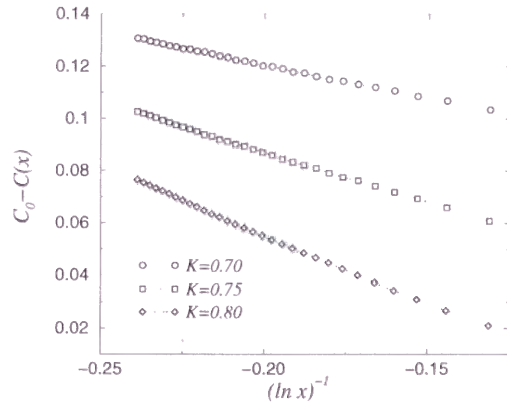


図 26: 指数が極小をとる近傍での相関関数の対数的な振る舞い.

3.1.5 振幅場のフラクタル性

振幅パターンのフラクタル性は、例えば最小スケールを l として測ったパターンの高低差の総和:

$$S(l) := \sum_j |W((j+1)l) - W(jl)|, \quad (58)$$

の測定スケール l への依存性を見ればわかる。この量に l を掛けたものは、測定スケール l が小さい極限でパターンの長さに帰着する。つまり、もし、

$$S(l) \sim l^\beta, \quad (59)$$

のような依存性があれば、このパターンのフラクタル次元 D_f は $D_f = 1 - \beta$ である。実際にいくつかの K について $S(l)$ を測定した結果を図 27 に、測定された $S(l)$ より計算したフラクタル次元を図 28 に示す。パターンが連続的な $K = 1.2$ では、 $S(l)$ は小さな l についてはほぼ l に依存せず、指数 β はほぼ 0 であり、パターンの長さはそれを測定するスケールによらない。すなわち、このときパターンはフラクタル的ではなく、そのフラクタル次元 D_f は 1 である。特異的な時空カオス状態における $K = 0.85$ では、 $S(l)$ は小さな l について l にべき的に依存し、その指数 β は自明でない非整数値 ~ -0.43 をとる。つまり、このときパターンはフラクタル的であり、その次元は $D_f \sim 1.43$ で、1 と 2 の間にある。さらに、パターンが不連続になっている $K = 0.60$ においては、 $S(l)$ は l の広い範囲で l にべき的に依存しているが、その指数 β はほぼ -1 に近い。つまり、このときパターンはフラクタルというよりは完全にランダムで (あくまで $S(l)$ による見方では、だが)、その次元は 2 である。後で少し議論するが、このフラクタル次元に関する結果は、系の自由度との非自明な関係を示唆しており、面白い。

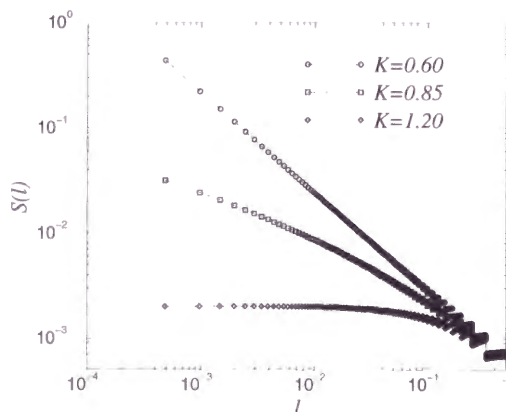


図 27: パターンの高低差の総和 $S(l)$.

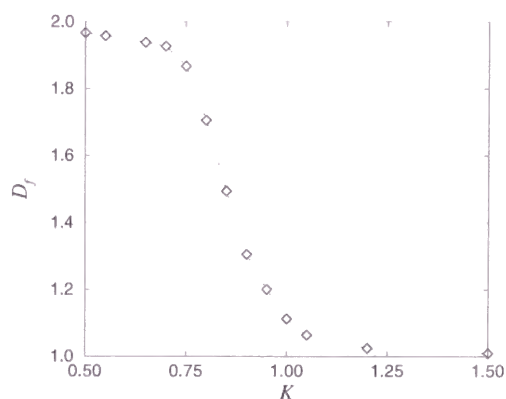


図 28: パターンのフラクタル次元 D_f vs. 結合強度 K .

以上、非局所結合 CGL 系の特異的な時空カオス状態を特徴づけるため、振幅場のパターンの高低差の総和と相関関数を調べ、非自明なべき則を得た。実はこれらの量は振幅場の高さの差の 1 次と 2 次の相関にほかならない。この論文の後半の解析で、我々はこれらの解析を場の量の q 次の相関の短距離でのべき則の解析へと一般化する。そのような解析は、例えば流体乱流の速度場などに対しても行われており、指数の q に対する非線形性は我々をマルチアフィン性という興味深い概念に導く。

3.1.6 補足 - 拡散結合系の空間相関

時空カオス自体は通常の拡散結合 CGL 系などの反応拡散系においても見られるが、非局所結合系の振幅場の様子はそれらのものとはかなり異なっている。拡散結合系においては、拡散項のため場は必ずなめらかで連続であり、空間相関関数は原点において常に上に凸で、非局所結合系のように短距離におけるべき的な特異性や原点でのギャップは見られない。つまり、拡散結合のため場 $X(x)$ はいつもテイラー展開:

$$X(x) = X(0) + X'(0)x + \frac{1}{2}X''(0)x^2 + \dots, \quad (60)$$

できる程度になめらかであり、空間相関関数は短距離付近で、

$$\langle X(0)X(x) \rangle = \langle X(0)^2 \rangle + \langle X(0)X'(0) \rangle x + \frac{1}{2} \langle X(0)X''(0) \rangle x^2 + \dots, \quad (61)$$

と展開されるが、 x の 1 次項は系の反転対称性により消えるので、空間相関関数の短距離での振る舞いは必ず $C(x) \simeq C_0 - C_1 x^2$ という形になる。

図 29 および 30 に示したように、非局所結合系においても、各素子が感じる内部場は周囲の素子の非局所的な平均場であるため、素子の変数の場がいかにはらばらで乱れていても、なめらかで連続である。また、必然的に非局所平均を取る距離程度に長波長でもある。そのため、空間相関の特異性は非局所的な平均そのものによるのではない。

上で見たように空間相関の短距離での振る舞いが $C_0 - C_1 x^2$ というべき的な形を持つのは非局所結合系独自の特異的な性質であり、そのメカニズムを今後研究して行くことになる。

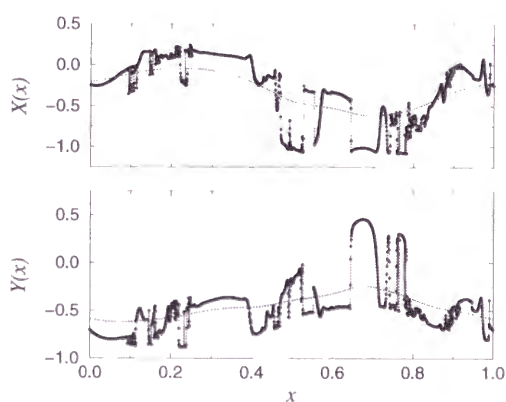


図 29: $K = 0.85$ での素子の変数 $X(x)$, $Y(x)$ と素子の感じる非局所平均場 $\tilde{X}(x)$, $\tilde{Y}(y)$ の典型的なスナップ. 内部場は点線で表されている.

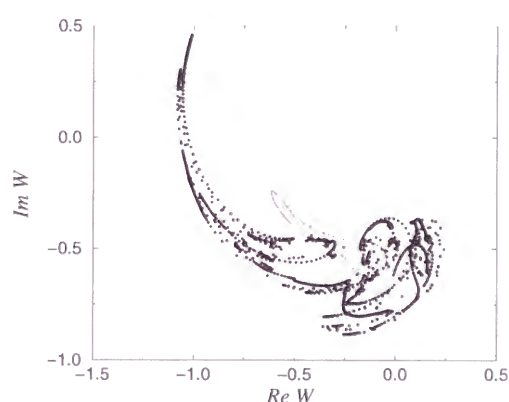


図 30: $K = 0.85$ での素子の変数 $W(x)$ と素子の感じる非局所平均場 $\tilde{W}(x)$ の複素平面での典型的なスナップ. 内部場は点線で表されている.

3.2 その他の素子

非局所結合した CGL 振動子系においては、結合強度のある範囲で「特異的な時空カオス状態」が見られることがわかった。この時空カオス状態がどれだけ一般性を持つかを調べるため、他のふたつの異なる性質の素子を使って計算した結果を、ここで簡単に述べておこう。実際、それらの系においても特異的な時空カオス状態が観察され、それは非局所結合 CGL 系に限らずより一般的に見られる現象であることがわかる。なお、ここで述べるブラッセレータに関する結果は公表論文 [4] に、レスラー振動子に関する結果は部分的に公表論文 [6] に載っている。

3.2.1 ブラッセレータ系

CGL 振動子にある程度似てはいるが異なる素子として、非平衡散逸系の研究において重要な役割を果たしてきた振動化学反応系の典型的なモデル、ブラッセレータ [10] を素子として使ってみよう。ブラッセレータはふたつの化学物質の濃度を模した 2 変数の内部自由度を持った素子であり、パラメータを変化させると、ホップ分岐によって固定点からリミットサイクルへと挙動を変化させる。空間的広がりのある振動化学反応系のモデルとして、このブラッセレータを拡散的に結合したものがよく用いられるが、そのような系においては空間周期パターンのような散逸構造の形成や、時空カオスの発生などが知られている。

また、ホップ分岐点のごく近傍では、前に述べた縮約、具体的には中心多様体縮約と呼ばれる方法により、ブラッセレータの結合系を CGL 振動子の結合系の形に簡略化でき、そのときに対応する CGL 振動子系のパラメータを求めることができる [12]。が、そのようにして縮約した CGL 方程式の挙動が常にもとのブラッセレータの挙動と定性的に一致するとは限らない。実際、ホップ分岐点からのごくわずかなずれが系に特異振動的に働き、長時間での挙動が全く異なるものになる場合もありうる。例えば、論文 [4] の最後に述べた、結合の弱い状態におけるクラスタリング現象などが挙げられよう。

ここでは、素子のパラメータをホップ分岐点の少し上のリミットサイクル解が存在するような値にとり、系が非局所結合 CGL 系において見られたような特異的な時空カオス状態を示すかどうかを調べてみることにする。非局所結合ブラッセレータ素子系が次の方程式に従うものとしよう：

$$\begin{aligned}\frac{dX(x,t)}{dt} &= A - (B+1)X + X^2Y + Kd \left[\tilde{X}(x,t) - X \right], \\ \frac{dY(x,t)}{dt} &= BX - X^2Y + K \left[\tilde{Y}(x,t) - Y \right],\end{aligned}\tag{62}$$

ここで A, B はブラッセレータ素子のパラメータ、 K は変数 X, Y と内部場 \tilde{X}, \tilde{Y} との結合強度を与え、 d は変数間の結合強度の比である。 \tilde{X}, \tilde{Y} の定義は前と同様で、結合長 γ^{-1} は系の長さの $1/8$ に取る。

パラメータを $A = 2.574, B = 8.0, d = 7.964, K = 0.04$ としよう。図 31 は、ある瞬間における各素子の内部状態のスナップショットを XY 平面にプロットしたものである。結合が無ければ素子は不安定化した固定点の近傍のリミットサイクル上を運動するが、結合のため互いに影響しあって CGL 系の場合にも見られたような逆 ρ 字型の構造が壊れたような分布をしている (かなりゆがんではいるが)。図 32 は、対応する素子の内部状態のなす空間パターンのスナップショットである。CGL 系の場合と同様、パターンは比較的連続なところとばらばらなところから成る。図 33 に、振幅の時間発展を示した。CGL 系の場合の時間発展の図との類似性は著しく、ブラッセレータ系の

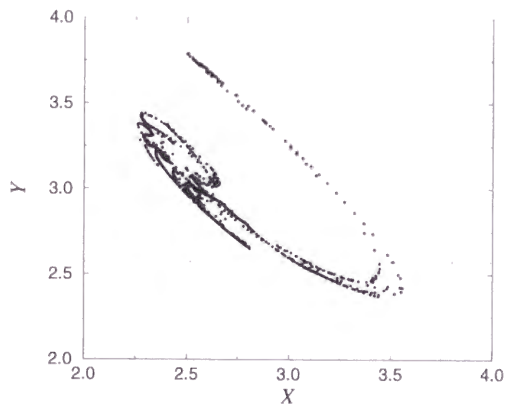


図 31: 非局所結合ブラッセレータの変数の $(X - Y)$ 平面におけるスナップショット. 点線の交点は不安定化した固定点の位置を表わす.

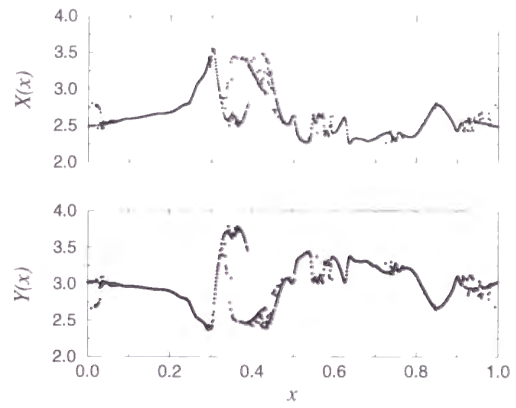


図 32: 変数 X と Y のなす空間パターンのスナップショット.

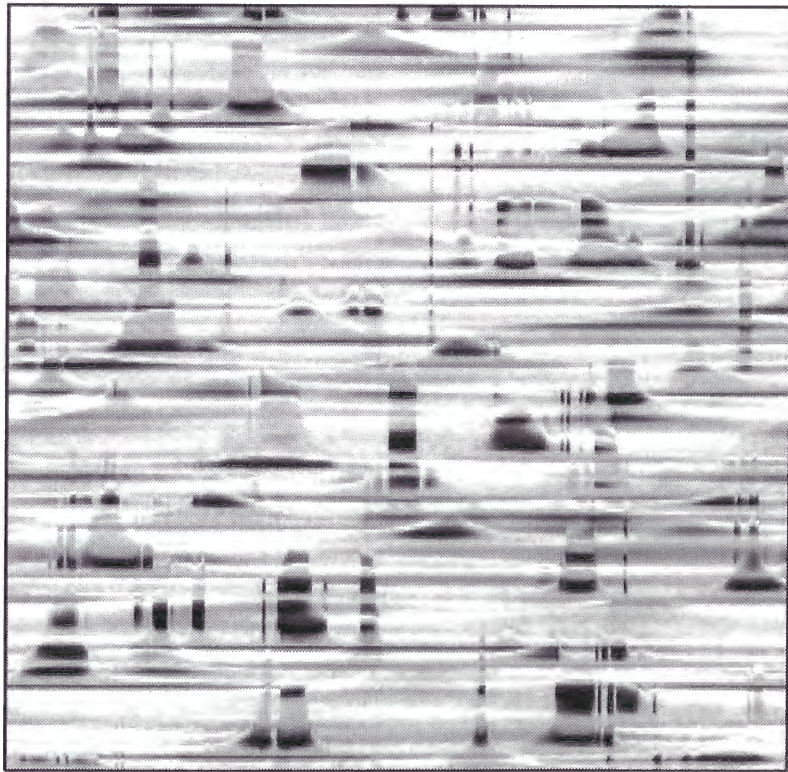


図 33: 振幅の時間発展.

場合にも CGL 系の場合と同様な「特異的な時空カオス状態」が示され得ることがわかる⁶。

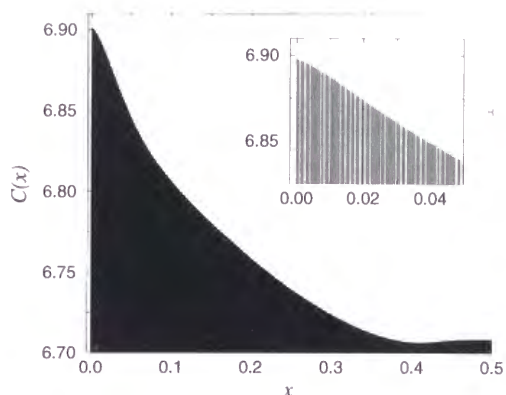


図 34: $K = 0.05$ における空間相関関数 $C(x)$. 挿入図は原点付近の拡大.

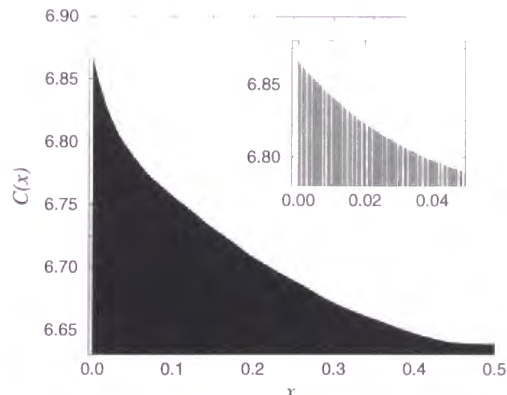


図 35: $K = 0.04$ における空間相関関数 $C(x)$.

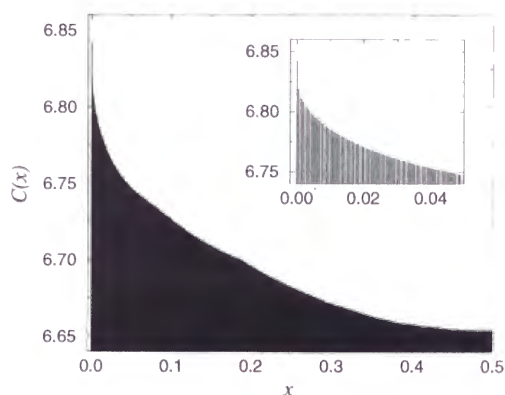


図 36: $K = 0.035$ における空間相関関数 $C(x)$.

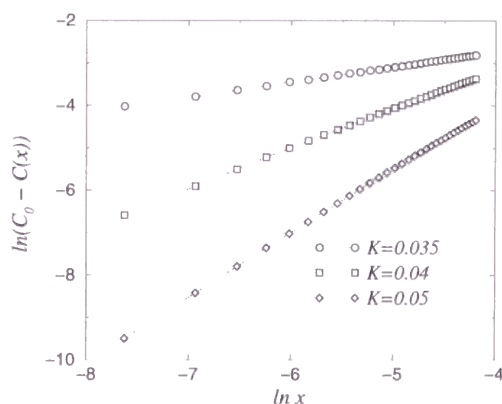


図 37: 空間相関関数のべき則 $C_0 - C(x) \sim C_1 x^\alpha$.

このことをより定量的に示しておこう。すなわち、ブラッセレータの「特異的な時空カオス状態」において、再び場の空間相関関数、パワースペクトル、フラクタル性などを測定してみることにする。図 34,35,36 に、変数 X の空間相関関数 $C(x) := \langle X(0)X(x) \rangle$ を $K = 0.05$, $K = 0.04$, $K = 0.035$ の場合について示した。空間パターンは、 $K = 0.05$ では連続的で $K = 0.035$ ではかなりばらばらになっているが、これを反映して、空間相関関数の原点付近の振る舞いがそれぞれ上に凸、カスプ状、原点にギャップ発生、となっている。図 37 はこの空間相関関数のべき則 $C(x) \sim C_0 - C_1 x^\alpha$ を確かめている。実際、 K のそれぞれの値で空間相関関数はべき的に振る舞い、その指数 α は K とともに変わる。これを図 38 に示す。図 39 は空間相関関数の原点に生じるギャップの結合強度 K 依存性である。指数 α が極小をとる K の値とギャップの発生する K の値がほぼ等しいのは注目し値する。

図 40 にはそれぞれの K の値でのパワースペクトルを示す。 $K = 0.04$ のときには、空間相関関

⁶ パターンの特徴を言葉で説明することの難しさにも関わらず、人間にはふたつのパターンの類似性が一見して明らかなのは面白い。

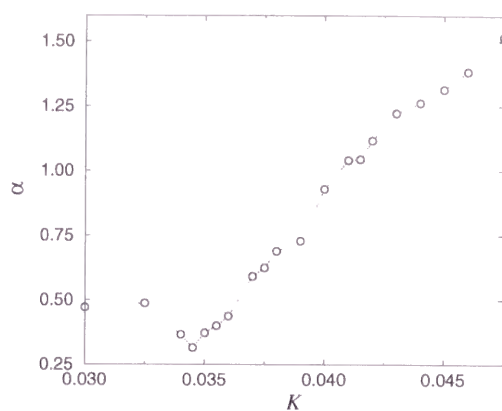


図 38: 空間相関関数のべき則の指数 α vs. 結合強度 K .

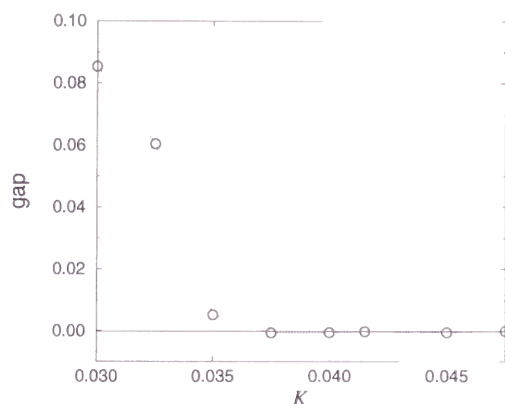


図 39: 空間相関関数の原点でのギャップ $C(0) - C_0$ vs. 結合強度 K .

数の短距離でのべき則に対応して、パワースペクトルも高波数側でべき的に振る舞っている。図 41 には測定スケール l を変えて測ったパターン的高低差の総和 $S(l)$ を各 K に対して示す。非局所結合 CGL 系の場合と同じように、パターンのフラクタル次元は $K = 0.05$ のときほぼ 1, $K = 0.035$ のときほぼ 2 で、特異的な時空カオス状態にある $K = 0.04$ においてはその中間の非整数値を取っている。

ここでは示さないが、指数が極小値をとる近傍ではべき則はあまり良くなく、むしろ対数的な発散が見られることなども同様である。以上、非局所結合ブラッセレータ系においても、非局所結合 CGL 系の場合に見つかったような特異的な時空カオス状態が生じることがわかった。

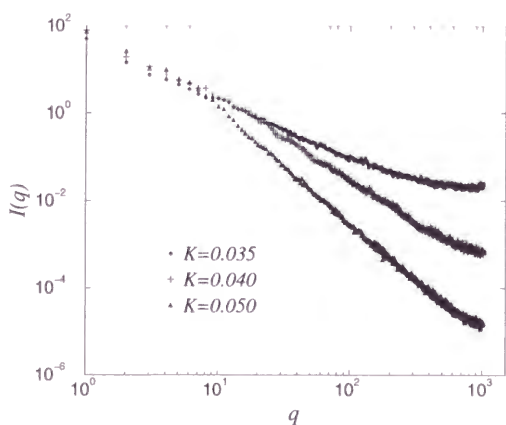


図 40: $K = 0.05, 0.04, 0.035$ におけるパワースペクトル $I(q)$.

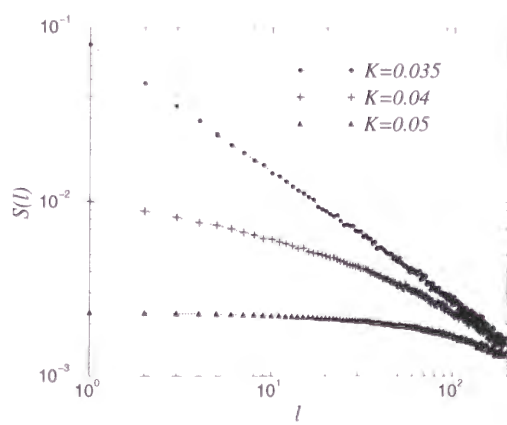


図 41: $K = 0.05, 0.04, 0.035$ における高低差の総和 $S(l)$.

3.2.2 レスラー振動子系

ブラッセレータが素子の場合には、非局所結合 CGL 系で見られたような特異的な時空カオス状態が観測された。さらにこの状態の一般性を調べるために、素子として CGL とはかなり性質の異なるレスラー振動子を用いてみよう。レスラー振動子は 3 自由度の常微分方程式系であり、少数自

再度カオスの研究において教科書的なモデルとして考案され、引き延ばされて折り畳まれるような、カオスが起ることが明快に分かる形状のアトラクターを持つ。このレスラー振動子を2個結合させたものはカオス振動子同士の引き込みを調べるために良く使われ [70]、暗号通信などへの応用が議論されている。また、多数のレスラー振動子を拡散的 [71]、ないしは平均場的に結合させたモデルもよく調べられてきた。

次の方程式に従う非局所結合レスラー振動子を導入しよう：

$$\begin{aligned}\frac{dX(x,t)}{dt} &= -Y - Z + K [\tilde{X} - X], \\ \frac{dY(x,t)}{dt} &= X + aY + K [\tilde{Y} - Y], \\ \frac{dZ(x,t)}{dt} &= b + XZ - cZ + K [\tilde{Z} - Z],\end{aligned}\tag{63}$$

ここで a, b, c はパラメータで、以下では素子がカオス状態を示す $a = 0.3, b = 0.2, c = 5.7$ にとる。簡単のため非局所平均場 $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ との結合強度 K は変数によらず一定としよう。 Z 成分は若干特殊なので、この設定がなんらかの実験系のモデルとして現実的であるかということについては議論の余地があるだろうが、今我々は単にこのような系においても特異的な時空カオス状態があり得るかどうかを調べているのだから、この設定でもそのような状態が見つかりさえすればそれで十分である。結合長さは再び系の長さの $1/8$ と取る。

図 42 に、 $K = 0.140$ の場合の素子の内部状態 (X, Y, Z) をプロットした。結合のため各素子の内部状態はレスラー振動子のもともとのアトラクターのまわりにはほぼ連続的に分布しているが、一部激しく乱れているところが存在する。対応する変数 X の空間分布を図 43 に示す。図 42 に対応して、比較的連続な部分とばらばらに乱れた部分が共存しており、これまで述べてきた CGL やブラッセレータの場合によく似ている。系のパターンの時間発展を図 44 に示す。レスラー振動子に特徴的な振動成分を消してパターンを見やすくするため、ここでは $X(x, t), Y(x, t)$ の各瞬間での空間平均を $\bar{X}(t), \bar{Y}(t)$ として、そこからの振幅：

$$W(x, t) := \sqrt{[X(x, t) - \bar{X}(t)]^2 + [Y(x, t) - \bar{Y}(t)]^2},\tag{64}$$

を濃淡プロットした。予想通り、時空パターンは CGL やブラッセレータの場合とある種の特徴を共有しており、レスラー振動子系においても同様な特異的な時空カオス状態の存在を示唆する。

このことをより定量的に確かめるために、 $K = 0.14$ の場合について、場 $X(x)$ の空間相関数 $C(x)$ を測定したものを図 45 に示す。空間相関関数の原点付近のベキ則は、 $\ln(C_0 - C(x))$ を $\ln x$ に対して表示した図 46 から明らかであり、レスラー振動子系においても特異的な時空カオス状態が存在することを示している。ベキ則の指数 α を図 47 に示した。やはり K のある値で極小となる。図 48 には、空間相関関数の原点でのギャップ $C(0) - C_0$ を示した。ギャップが有限になる K の値は、指数が極小になる K の値とほぼ一致している。空間パワースペクトルのベキ則、空間パターンのフラクタル性などについても他の素子の場合と全く同様な結果が得られるので、ここでは示さない。このように、レスラー振動子系においても特異的な時空カオス状態の存在が確認された。

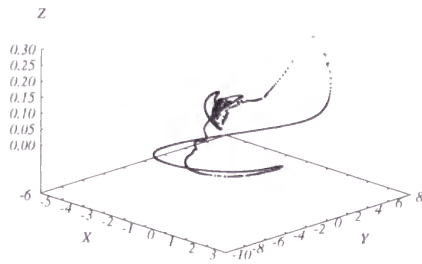


図 42: $K = 0.14$ における素子の内部状態のスナップショット.

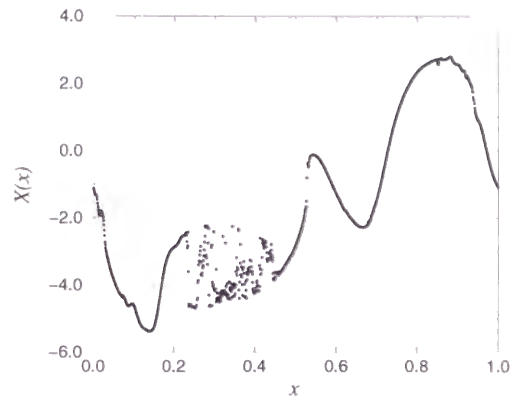


図 43: $K = 0.14$ における素子の変数 X の空間パターン $X(x)$.

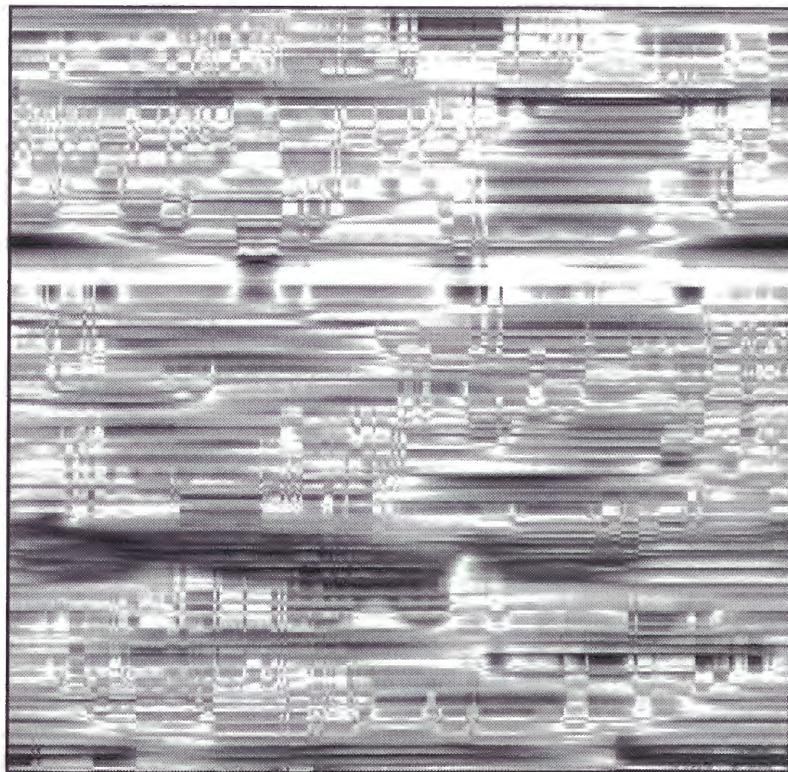


図 44: $K = 0.14$ における素子の振幅パターンの時間発展.

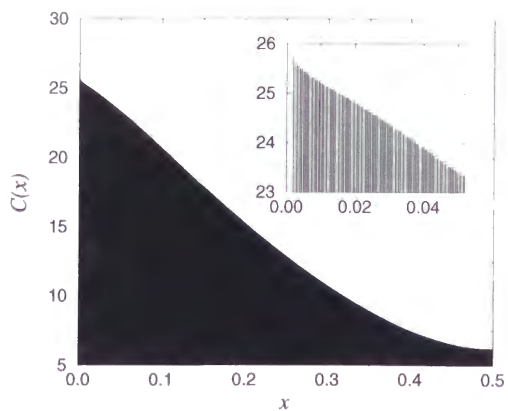


図 45: $K = 0.14$ における空間相関関数 $C(x)$. 挿入図は原点付近の拡大.

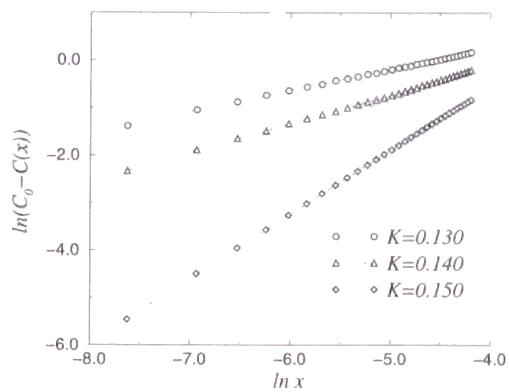


図 46: $K = 0.13, K = 0.14, K = 0.15$ における空間相関関数のべき則.

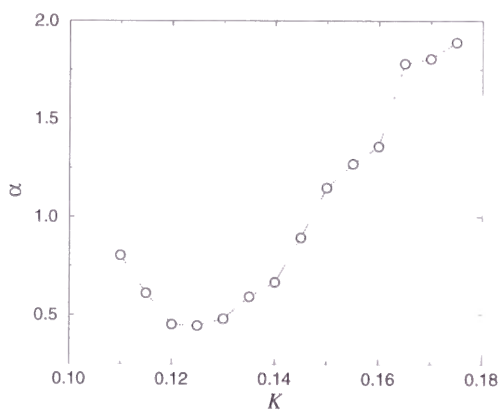


図 47: 空間相関のべきの指数 α vs. 結合強度 K .

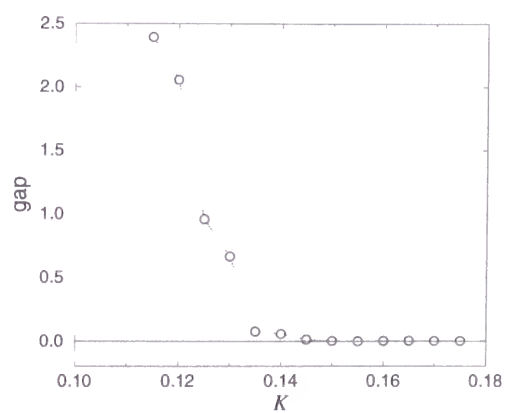


図 48: 空間相関のギャップ $C(0) - C_0$ vs. 結合強度 K .

4 離散時間モデル

さて、連続時間モデルではいくつかの素子系で特異的な時空カオス状態が見られることを述べてきたが、離散時間モデルにおいてはどうか。ここでは素子として2種類のカオティックな写像を使い、離散時間モデルでも実際にそのような特異的な時空カオス状態が観察されることを述べる。ここでの結果のうち、ロジスティック写像に関するものは公表論文 [3] にも部分的に載せられている。

4.1 ロジスティック写像系

4.1.1 モデル

次の式に従う非局所結合ロジスティック写像を考えよう:

$$X_i(t+1) = F(X_i(t)) + K \left[\tilde{F}_i(t) - F(X_i(t)) \right], \quad (65)$$

ここで、 $X_i(t)$ は時刻 t における i 番目の素子の内部状態、 $\tilde{F}_i(t)$ は i 番目の素子の位置での内部場で、

$$\tilde{F}_i(t) = G_0 \sum_j \exp(-\gamma|j-i|) F(X_j(t)), \quad (66)$$

と定義される。ここで G_0 は適当な規格化定数である。素子のダイナミクス $F(z)$ は、

$$F(z) = cz(1-z), \quad (67)$$

であり、分岐パラメータ c は以下 $c = 3.7$ に固定する。この値で結合がなければ、各素子はカオティックに振る舞う [47]。

4.1.2 特異的な時空カオス

以下、系の長さを 1 として $N = 2^{10} \sim 2^{15}$ 個の素子を使い、素子の位置を $x := i/N$ で表そう。結合長は系の長さの $1/16$ 、すなわち $\gamma = 16/N$ とする。結合長が系の長さの $1/8$ の時には、おそらく有限サイズ効果のため系が有限時間で空間周期的な構造を持った固まった状態に落ち込んでしまう確率が高く、時空カオスは観測しづらい。ロジスティック写像系がそのような状況に落ち込みやすい理由は後述する。

図 49 には素子の内部変数のなす場 $X(x)$ の連続した 4 ステップの時間発展を示す。素子の運動はカオティックでランダムだが、大体 4 くらいの周期を持っており、パターンは大体番号で示した順に図の下側、上側、下側、上側と動き、再び下側に戻る。各パターンは、これまで CGL やブラッセレータ、レスラー振動子において見てきたパターンと同様、なめらかで比較的連続的な部分と、ばらばらに乱れた部分が共存していることがわかる。

図 50 に、系の中央の素子 (並進対称性より典型的である) の変数 X のリターンマップを示した。変数は不安定化した固定点の左右を行き来している。他の素子の影響により軌道はゆらいでおり、もとの写像 $z' = F(z)$ の上に分布している。各素子は、上で述べた 4 周期性に対応して、固定点の左側のある点から動き始め、右、左、右と動き、再び固定点の左側の最初の点の近くに戻ってくる。隣接した 2 素子間の変数の差は、図 50 の上側のバンドから写像されるときには縮小され、右側のバンドから写像されるときには拡大される。このふたつの繰り返しの繰り返しにより、場のパターンはあ

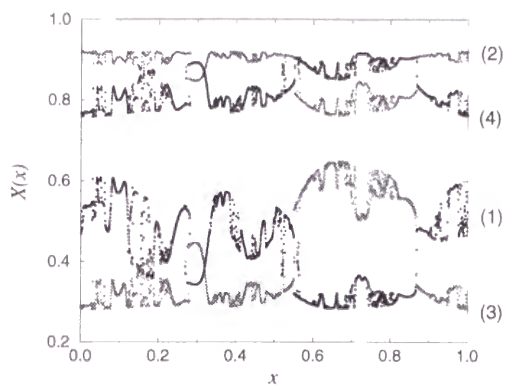


図 49: 非局所結合ロジスティック写像系の振幅場 $X(x)$ の空間パターン. 連続した4ステップ分を重ね描きした.

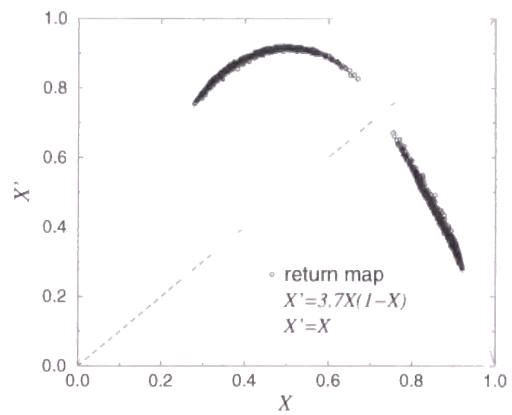


図 50: 非局所結合ロジスティック写像系の中央の素子の変数 X のリターンマップ. 結合強度は $K = 0.25$.



図 51: 非局所結合ロジスティック写像系の振幅場 $X(x)$ の時間発展.

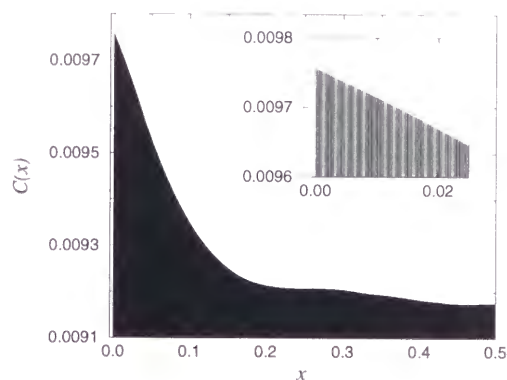


図 52: $K = 0.26$ での振幅場 $X(x)$ の空間相関関数 $C(x)$.

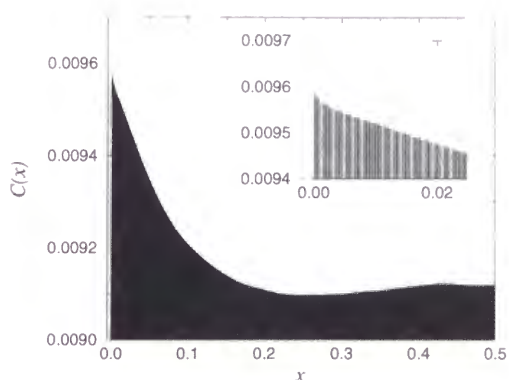


図 53: $K = 0.22$ での振幅場 $X(x)$ の空間相関関数 $C(x)$.

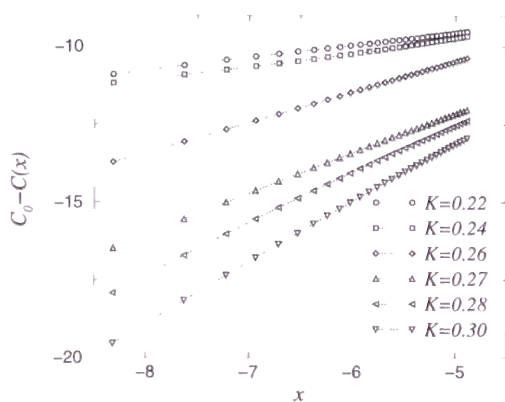


図 54: 空間相関関数 $C(x)$ の原点でのべき則 $C(x) \simeq C_0 + C_1 x^\alpha$.

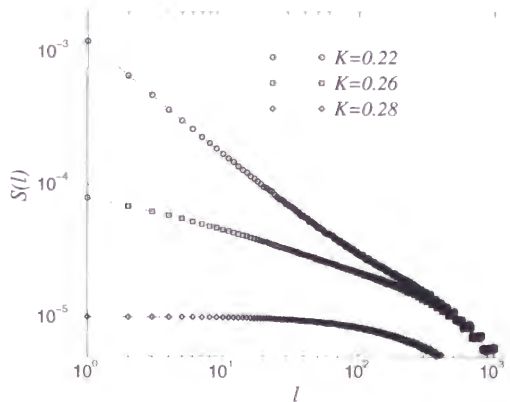


図 55: スケール l で測定した高低差の総和 $S(l)$.

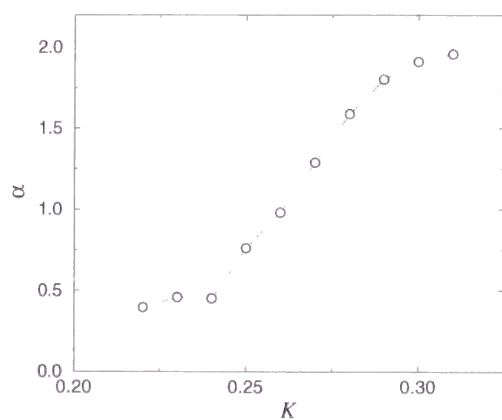


図 56: 空間相関関数 $C(x)$ のべき則の指数 α 対結合強度 K . $K < 0.22$ は測定できない (本文参照).

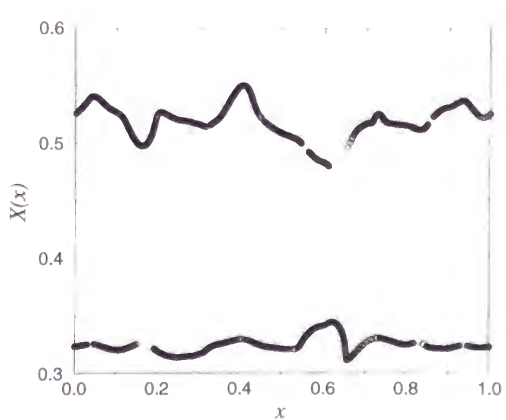


図 57: $K = 0.2$ における 2 クラスタ状態. 素子は空間的な連続性をほとんど持たず、ばらばらに上か下のどちらかのクラスタに属している.

る部分では引き延ばされて折り畳まれ、またある部分では単に縮められて、空間的に乱れたパターンへと発展してゆく。

図 51 には振幅パターンの時間発展を示した。やはり、他の系の時間発展の様子とある種の特徴を共有している。なお、見やすくするため、図には 4 ステップごとに $X(x)$ から各瞬間での空間平均値を引いたものを濃淡プロットした。

図 52 と 53 には、結合強度が $K = 0.26$ と $K = 0.22$ のときの空間相関関数 $C(x) := \langle X(0)X(x) \rangle$ を示した。 $K = 0.22$ のときには原点に飛びがあり、パターンの連続性が失われていることがわかる。空間相関関数の原点付近でのベキ則は、図 54 から明らかである。また、パターンのフラクタル性も、スケール l で測定した高低差の総和 $S(l)$ の l に対する依存性をプロットした図 55 から明らかであろう。このように、ロジスティック写像の非局所結合系においてもやはり同様な特異的な時空カオス状態が見られる。

結合強度 K の変化に対する空間相関関数のベキ則の指数 α の変化を図 56 に示した。他の系と異なり、 α は K とともに単調に減少しており、グラフに示された範囲では極小を持たない。 $K < 0.22$ の領域も測定すれば良いように思われるかも知れないが、実は $K < 0.22$ では系は特異的な時空カオス状態ではなく空間的な連続性のほとんどない 2 クラスタ状態に落ち込んでおり、空間相関関数はベキ的ではなく、指数の測定はできない。この 2 クラスタ状態の典型例を図 57 に示す。

後の理論で、指数が極小をとるのは素子の局所リアプノフ指数の平均が 0 となる時 (プロウアウト分岐点) であることが明らかにされる。ところが、ロジスティック写像系では結合を弱めてゆき平均局所リアプノフ指数を負の値から増加させてゆくと、ちょうど 0 になるあたりで系はこの 2 クラスタ状態に転移する。この転移点は $K \sim 0.21$ と予想されるが、その近傍ではヒステリシスや初期条件依存性が顕著なため明確ではない。適当な初期条件からはじめると、系は最初は特異的な時空カオスのような状態を見せるが、その後徐々にふたつのクラスタに分離しはじめる。その過程では局所的に激しい素子の入れ替えが時空間欠的に起こり、ある程度安定した形になるとそこで固まるように見える。この状態も長い遷移過程の途中でないとは言い切れないのではあるが。

4.1.3 ロジスティック写像系に特徴的なこと

ロジスティック写像系は特異的な時空カオス状態が最初に観測された離散時間モデルだが、その後の解析からロジスティック写像系はそれほど素直な系ではなく、独自の特徴を持っていることが明らかになってきた。特に、そのクラスタリングする傾向の強さは顕著である。先に述べたように、系がふたつのバンドの間を大体 4 周期で行き来していたり、初期条件にノイズを与えずに周期的なものを与えるとそのまま分離して空間周期的な 2 クラスタ状態になってしまったり、結合を弱くしてゆくとすぐにばらばらになって空間的な連続性のない 2 クラスタ状態になってしまったりするのは、素子がふたつのグループに分離しようとする強い傾向を持つことの反映である。また、後で述べる理論の予想と異なり、空間相関関数の指数が極小値をとる K の値と有限のギャップが現れる K の値が違っていることも、この傾向によるものかもしれない。

4.2 非対称テント写像系

4.2.1 モデル

次の式に従う非局所結合非対称テント写像写像を考えよう：

$$X_i(t+1) = F(X_i(t)) + K \left[\tilde{F}_i(t) - F(X_i(t)) \right],$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_i(t) &= G_0 \sum_j \exp(-\gamma|j-i|)F(X_j(t)), \\ F(z) &= \frac{z}{p} \quad (z < p), \quad \frac{1-z}{1-p} \quad (z > p),\end{aligned}\tag{68}$$

ここで p は非対称テント写像のピーク位置をコントロールするパラメータで、 $p = 1/2$ の時には通常の対象なテント写像に帰着するが、後で述べるように通常のテント写像では素子の局所リアプノフ指数(時間的に)がゆらがないので特異的な時空カオスは見られない。以下ではパラメータ p は 0.75 に固定する。

4.2.2 特異的な時空カオス

以下、 $N = 2^{10} \sim 2^{15}$ 個の素子を使い、ロジスティック写像の場合に習って結合長を系の長さの $1/16$ 、すなわち $\gamma = 16/N$ としよう。

図 58 に、対応する素子の変数のなす場 $X(x)$ の典型的なスナップショットを示す。非対称テント写像の区分線形性のため、パターンは直線的だが、何度も折り畳まれて激しく乱れた部分と比較的なめらかな部分が共存している。図 59 に、結合強度 $K = 0.6$ の場合について、系の中央にある素子の変数のリターンマップを示す。ロジスティック写像の場合と同様不安定化した固定点の周囲に分布しており、頂点の左から写像されるときには近傍のふたつの軌道間の距離は縮まり、右から写像されるときには拡大されて折り畳まれる。振幅場 $X(x)$ の時間発展を図 60 に示す。あまりわかりやすくはないが、今まで見てきた他の系の特異的な時空カオス状態と何かしら共通する特徴を持っていることが見て取れるだろう。

では、再び前と同じ手続きにより特異的な時空カオス状態の存在を定量化しよう。図 61 と 62 に、 $K = 0.65$ と $K = 0.55$ の時の空間相関関数 $C(x)$ を示した。 $K = 0.55$ の時には原点にギャップがあり、パターンの連続性が失われている。空間相関関数 $C(x)$ の原点付近でのべき的な挙動は、 $\ln(C_0 - C(x))$ を $\ln x$ に対してプロットした図 63 から明らかである。なお、 $K > 0.6$ では空間相関関数の原点のギャップはほぼ 0 だが、 $K < 0.6$ では有限のギャップがある。図 64 に、結合強度 K に対して原点付近のべき則の指数 α をプロットした。以前と同様、 K のある値で極小となっている。図 65 には、空間相関の原点でのギャップ $C(0) - C_0$ を結合強度 K に対してプロットした。指数が極小となる K のあたりでギャップが 0 から有限の値をとるようになる。後ほど、実はこの K の値で素子の局所リアプノフ指数が平均的に 0 になっていることを説明する。

図 66 には、パターンのフラクタル性を確かめるためスケール l で測定した高低差の総和を示した。傾きは K が大きいところではほぼ 0、 K が小さいところではほぼ -1 となり、特異的な時空カオス状態においてはその中間の非整数値を取っている。

4.2.3 非対称テント写像に特徴的なこと

まず、よく使われる対称なテント写像では「特異的な時空カオス状態」は現れないことに注意しておこう。後の理論で明らかになるように、空間相関のべき則などの原因は、隣接した素子間の状態差のランダム乗法過程であり、局所リアプノフ指数がゆらぐことのできない対称なテント写像系においてはそのような状況が成り立たないからである。

非対称テント写像系においてはクラスタリングのような現象はなく、バンドのような構造もない。これは局所リアプノフ指数が単に正か負のふたつの値しかとらず、ロジスティック写像の場合

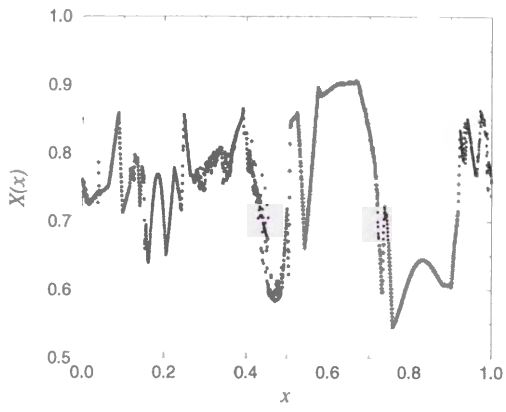


図 58: 振幅場 $X(x)$ の空間パターン.

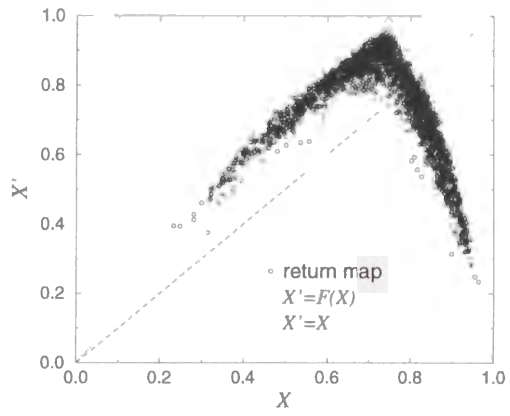


図 59: 中央の素子の変数 X のファーストリターン写像。結合強度は $K = 0.60$.

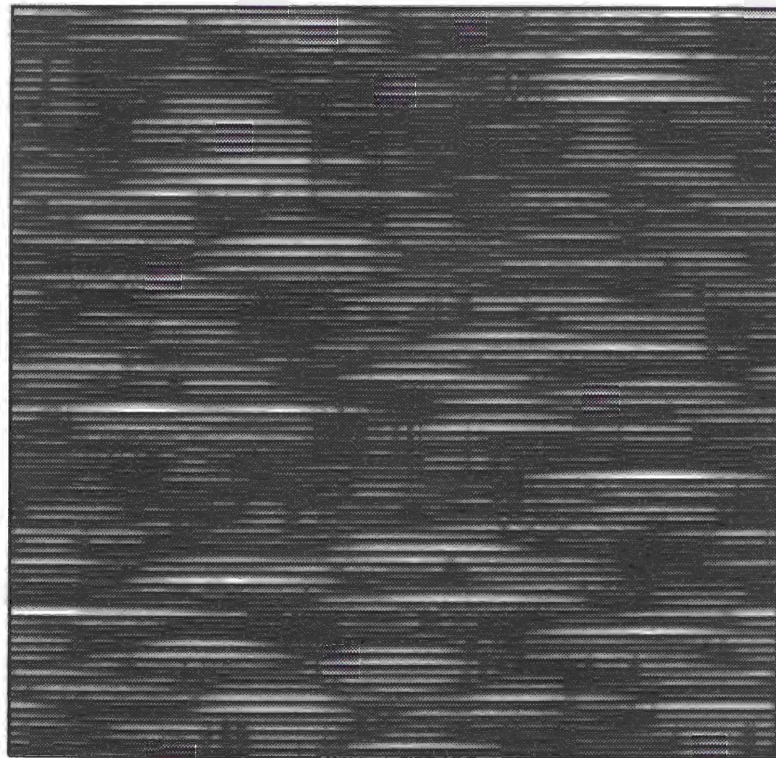


図 60: 振幅場 $X(x)$ の時間発展.

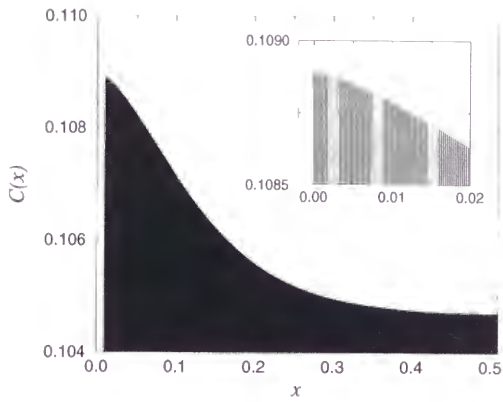


図 61: $K = 0.65$ での空間相関関数 $C(x)$.

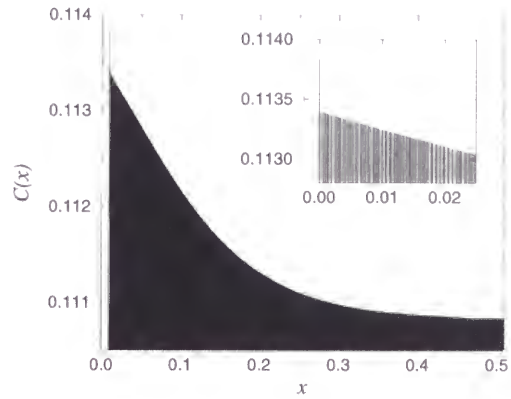


図 62: $K = 0.55$ での空間相関関数 $C(x)$.

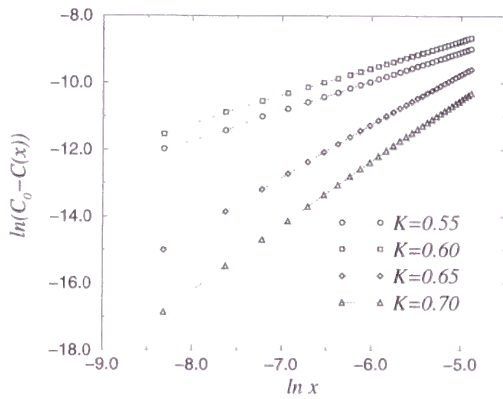


図 63: 空間相関関数 $C(x)$ の原点付近でのべき則.

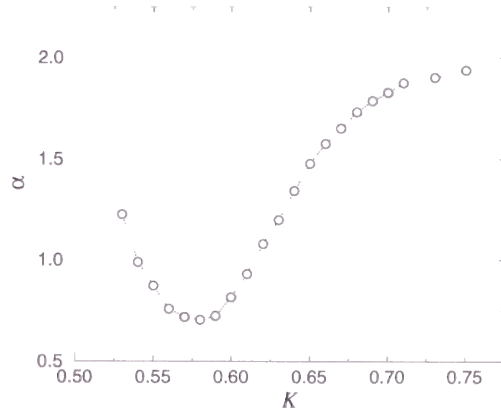


図 64: 空間相関関数 $C(x)$ のべき則の指数 α 対結合強度 K .

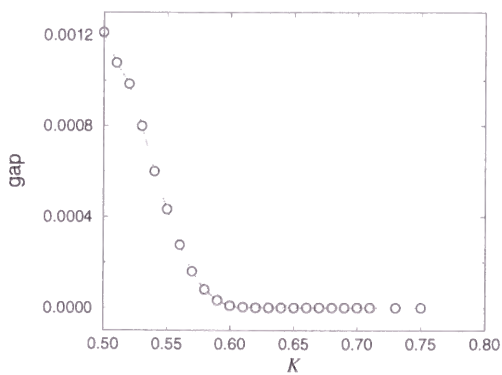


図 65: 空間相関の原点でのギャップ $C(0) - C_0$.

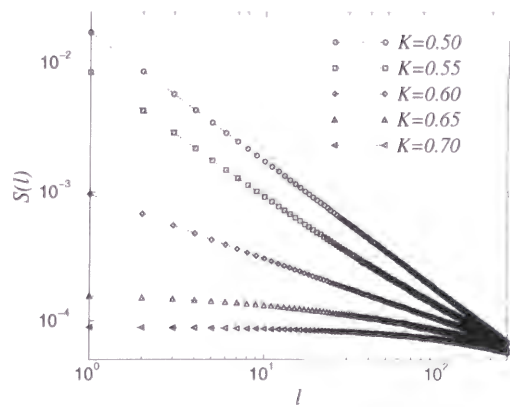


図 66: スケール l で測定した高低差の総和 $S(l)$.

のように部分的に強く状態差が押さえられるような領域がないためである。そのせいもあってか、非対称テント写像系の結果は広い結合強度の範囲で比較的きれいであり、後で述べる理論とも定性的に非常によく一致する。たとえば、空間相関のベキ則の指数が極小となる点は、原点に有限のギャップが生じはじめる点とほぼ一致する。

また、非対称テント写像系においては、振幅パターンの時間発展図に長時間にわたる素子間の不連続性を表す縦線が見られない。CGL系やロジスティック写像系の場合には、素子のダイナミクスの中に局所リアプノフ指数が非常に大きな負の値をとって素子間の状態差を強く抑制するような領域があり、大域結合系の場合に観測されるようなクラスター状態の原因となっている。それらの系においては、非局所結合の場合にもそのようなクラスターの残骸が、平均場の長波長の不均一性のために崩れてはいるが、系の中にある程度の時間持続して存在しているように見える。そして、時間発展図の中の縦線は、隣接したふたつの素子がそれぞれ別のクラスターの残骸に属しているような場合に対応しているように見受けられる。このことは、CGLやロジスティック写像の系において結合強度を弱めてゆくときに、原点に有限のギャップが現れ始める点が、空間相関関数のベキ則の指数が極小となる点より先に現れることとも関係があるようにも思われるが、そのメカニズムはまだ明らかではない。また、このことは素子の局所的なダイナミクスが系のグローバルな挙動にどのようにフィードバックされるかとの関連でも興味深い。

5 ベキ則の起源

以上述べてきたように、「特異的な時空カオス状態」は多くの非局所結合素子系において非常に一般的に見られる現象であり、場のパターンのフラクタル性、空間相関関数の原点付近でのベキ的な振る舞いなどによって特徴づけられる。これらのベキ則の起源は、論文 [3] において蔵本によりその本質を明らかにされた。この章では、これらのベキ則生成のメカニズムを説明し、それを記述するために考案されたふたつのモデルについて簡単に触れる。次の章で、これらのベキ則を、弱い加法ノイズの影響を受けたランダム乗法確率過程における一般的性質として、ノイジーなオンオフ間欠性と関連づけて詳しく解説する。

5.1 メカニズム

非局所結合系においては、各素子が感じる内部場は周囲の素子の非局所的な平均場なので、素子の内部状態のなす場がいかにばらばらで不連続であっても、なめらかで連続である。また、非局所平均を取る重み関数の幅、つまり結合長程度に長波長でもある。

さて、各素子の内部状態はそのような内部場に影響され、常にその本来の軌道からずらされるような揺動を受け続けている。結合長より十分短い距離だけ離れたふたつの素子を考えよう。内部場は長波長なので、これらの素子はほぼ同じ値の平均場に駆動されており、それらの内部状態は独立ではない。しかし、内部場は空間的に完全に一樣ではないので、これらふたつの素子の受ける内部場の値には微少な (平均場の長波長性より、素子間の距離に比例する程度) ずれがある。

さて、我々がここまで使ってきた素子は、全て局所リアプノフ指数 (各瞬間での軌道の不安定指数) が正負にゆらぎうる。例えば CGL 振動子なら、原点の回りの半径 $1/\sqrt{3}$ の円の内側ではふたつの微少に離れた軌道の差は拡大され、外側では縮小される。また、非対称テント写像なら、写像の頂点の右側から写像される軌道の差は拡大され、左側から写像される軌道の差は縮小される。

ふたつの素子間の内部状態の差は、内部場によって与えられる微少なずれを種として、素子の局所リアプノフ指数のゆらぎによって拡大縮小させられ続け、何らかの統計的定常状態になっているであろう。空間相関関数などの短距離でのベキ則は、この素子間の状態差の幾分特殊なダイナミクスの定常状態から出てくるものと考えられる。

もう少し具体的に考察するため、1次元の系で小さな距離 x 離れて隣接したふたつの素子のダイナミクスを考えよう:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(0, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}(0, t)) + K \left[\tilde{\mathbf{X}}(0, t) - \mathbf{X}(0, t) \right], \\ \dot{\tilde{\mathbf{X}}}(x, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}(x, t)) + K \left[\tilde{\mathbf{X}}(x, t) - \mathbf{X}(x, t) \right].\end{aligned}\quad (69)$$

これらの変数の差 $\mathbf{y}(t) := \mathbf{X}(x, t) - \mathbf{X}(0, t)$ のダイナミクスは、

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = [\mathbf{F}'(\mathbf{X}(0, t)) - K\mathbf{I}] \cdot \mathbf{y} + K \tilde{\mathbf{X}}'(0, t)x + \mathbf{N}(\mathbf{y}, x, \dots), \quad (70)$$

と表わされる。ここで、 \mathbf{y} と x を微少として \mathbf{F} と $\tilde{\mathbf{X}}$ を展開した。なお、 $'$ は微分、 \mathbf{I} は単位行列、 \mathbf{N} はその他の非線形項を表わす。

この式からわかるように、近傍にあるふたつの素子の内部状態の差 \mathbf{y} は、素子のカオティックな運動から来る局所リアプノフ指数のゆらぎによる乗法的な駆動 $[\mathbf{F}'(\mathbf{X}(0, t)) - K\mathbf{I}] \cdot \mathbf{y}$ (結合項による縮もうとする駆動力 $-K\mathbf{y}$ も含まれている) と、内部場の微少なずれによる素子間の距離 x に比例する加法的な駆動 $K \tilde{\mathbf{X}}'(0, t)x$ を受けている。これらふたつの駆動力と非線形項のバランスにより、素子の内部状態の差 \mathbf{y} はある特徴的な定常状態に至り、特異的な空間相関の原因となる。

なお、上の方程式は一般にふたつ以上の成分を持つベクトル \mathbf{y} についてのものなので、局所リアプノフ指数という呼び方はそのままでは適当ではないが、例えば $\mathbf{y}(t)$ を行列 $[\mathbf{F}'(\mathbf{X}(0, t)) - K\mathbf{I}]$ の各瞬間での最大固有値に対応する固有ベクトルへ射影した量を $y(t)$ とすれば、 $y(t)$ のダイナミクスは、

$$\dot{y}(t) = \lambda(t)y(t) + b(t)x + O(y, x, \dots), \quad (71)$$

のように書き表せ、 $\lambda(t)$ を局所リアプノフ指数として解釈できるであろう。ここで $b(t)x$ は非局所平均場からの寄与である。

系がマップであらわされる場合もほぼ同様で、距離 x 離れた 2 素子を考え、

$$\begin{aligned} X_{n+1}(0) &= F(X_n(0)) + K \left[\tilde{F}(X_n(0)) - F(X_n(0)) \right], \\ X_{n+1}(x) &= F(X_n(x)) + K \left[\tilde{F}(X_n(x)) - F(X_n(x)) \right], \end{aligned} \quad (72)$$

y_n を 2 素子の状態の差 $X_n(x) - X_n(0)$ とすると、

$$y_{n+1} = (1 - K)F'(X_n(0))y_n + K\tilde{F}'(X_n(0))x + N(y_n, x, \dots), \quad (73)$$

より、

$$y_{n+1} = e^{\lambda_n}y_n + b_nx + O(y_n^2), \quad (74)$$

という方程式が得られる。ここで、 $\lambda_n = \ln [(1 - K)F'(X_n(0))]$ は素子の局所リアプノフ指数で、 $b_nx = \tilde{F}'(X_n(0))x$ は素子間の距離に比例した加法ノイズである。

5.2 確率過程モデル

では、このような状況を説明するために導入されたモデルをふたつ紹介しよう。素子の内部状態 \mathbf{X} とそれらの非局所平均場 $\tilde{\mathbf{X}}$ のダイナミクスは一般にカオティックであり、非常に複雑である。最も簡単で現実的な近似は、それらをノイズおよび下限と見なすことである。つまり、内部場の微少なずれは素子間の状態差に下限を与え、それが素子のカオティックなダイナミクスから来る局所リアプノフ指数のゆらぎによりランダムに駆動されると考えるのである。

このような状況を定性的に記述するために論文 [3] で提案されたモデルは、次のようなものである。簡単のため、空間を 1 次元、素子の状態差も最大固有値に対応する成分だけ取り出して 1 次元として、素子間の状態差を y と書く。素子間の距離に比例する大きさの内部場の微少なずれを下限として、また非線形項による状態差を飽和させる効果を上限として近似し、変数を適当にスケールして下限が $y = x$ 、上限が $y = 1$ の位置に来るようにする。素子のカオティックなダイナミクスによる $\mathbf{F}'(\mathbf{X}(0))$ のランダムな変動に対応するノイズを $\lambda(t)$ と表すことにしよう。そして、次のような確率過程モデルを導入する：

$$\dot{y}(t) = \lambda(t)y(t) + \varepsilon[-\theta(y(t) - 1) + \theta(x - y(t))], \quad (75)$$

ここで $\theta(z)$ はヘビサイド階段関数で、 $\theta(x - y)$ は素子間の距離 x に比例した位置に y の下限を与え、 $-\theta(y - 1)$ は非線形効果を近似した y の上限を与えており、最終的には $\varepsilon \rightarrow 0$ として無限に高い壁にする (図 67 参照)。また、 $\lambda(t)$ としては、 ± 1 のふたつの値の間を確率 p と q で行き来する 2 値 (dichotomous) ノイズを使うことにする。このとき、局所リアプノフ指数の平均は $\bar{\lambda} = (p - q)/(p + q)$ 、ゆらぎは 1 となる。ここで詳しい計算は書かないが、論文 [3] においては、この確率過程モデル (75) から、下限の位置 x をパラメータとして y の定常分布 $P(y; x)$ が計算され

た。この分布関数 $P(y; x)$ の特徴は中間部分でべき則 $P \propto y^{-1+\beta}$ に従うことであり、 $\beta = p - q$ で与えられる。そしてこの分布関数から、パターンのフラクタル性と空間相関の原点でのべき則が、下限の位置 x に対する y の 1 次と 2 次のモーメントの漸近的なべき則として説明され、さらにそれらの指数、すなわちフラクタル次元と空間相関のべき則の指数が、素子の局所リアプノフ指数のゆらぎと定性的にはあるが関係づけられた。

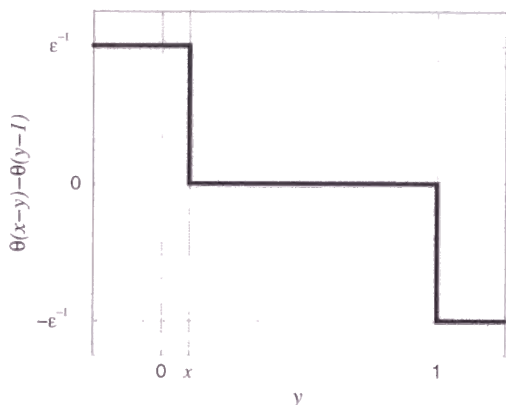


図 67: y に働く上限と下限を与える力。

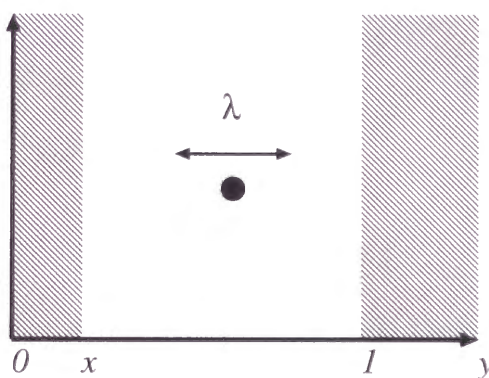


図 68: 加法ノイズの効果を表す $y = x$ の反射壁と非線形項の効果を表す $y = 1$ の反射壁。

離散時間モデルの場合については、やはり同様な考え方にに基づき、論文 [4] において、式 (74) から次のような非常に簡単な確率過程モデルが導入された:

$$y_{n+1} = \exp(\lambda_n) y_n, \quad (76)$$

ここで λ_n は適当な分布 $w(\lambda)$ から各時刻で独立に拾ってきたノイズで、やはり非線形項と加法ノイズのかわりに $y = 1$ と $y = x$ に反射壁を置いた (図 68 参照)。再びこの方程式より下限の位置をパラメータとして含む y_n の定常分布関数 $P(y; x)$ が計算され、この分布関数に対する y の 1 次および 2 次のモーメントのパラメータ x に対する漸近的なべき則として、場のフラクタル性や空間相関のべき則が定性的に説明された。この $P(y; x)$ もやはり中間部分でべき則 $P \propto y^{-1+\beta}$ に従い、今度は $\beta = \langle \lambda \rangle / \langle \lambda^2 \rangle$ で与えられる。ここで平均は $w(\lambda)$ についてのものである。

5.3 ランダム乗法過程

上で紹介したモデルは、どちらも変数が乱数により乗法的に駆動されるランダム乗法過程 (random multiplicative process) に、弱い加法ノイズと非線形項による飽和の効果を変数の下限および上限として近似的に導入したものである。

その後、実はこのような乗法確率モデルは、レーザー発振や (ノイジーな) オンオフ間欠性、生物の増殖モデルや経済モデルなどで広く使われており、生成される時系列が間欠的であることや、その定常分布関数がべき的なテイルを持つことが重要な特徴として注目されていたものであることが明らかになった。このことは、我々の系においてもオンオフ間欠性やべき的な分布関数が観測される可能性を意味しており、後ほど議論する。

なお、我々の系における空間相関のべき則は、ランダム乗法過程によって作られる分布関数のテイルのべき則とは違うものであることに注意しておく必要がある。それは、分布関数 $P(y; x)$ の下限の位置 x に対する y の 2 次モーメントのべき則であり、分布のテイルのべき則と混同してはな

らない。実際、分布関数のべき的なテイルはそのようなモーメントのべき則の出現の必用条件ではない。分布関数のべき的なテイルの効果は、解析を2次のモーメントである空間相関から、一般の q 次のモーメントにまで広げたとき、その指数 $H(q)$ の q に対する突然の変化(q -相転移)として現れてくる。このことについては、第11章で議論する。

次の第6章では、ここで紹介したのと同じ性質を持つモデルを、最も標準的だと思われるランジュバン方程式の形で導入して詳しく解析し、指数などに関する議論をする。しかし、我々の系におけるべき的な挙動の本質は、すでに上述のモデルにおいて完全に捉えられている。

6 弱い加法ノイズを含むランダム乗法過程におけるモーメントの漸近的なベキ則

第5章で、空間相関などのベキ則の起源はランダム乗法過程であることを述べたが、この章ではこのことについてより詳細な議論をする。具体的には、乗法ノイズと加法ノイズの両方を持つ一般的な形の線形なランジュバン方程式から、近似および厳密にベキ的なテイルを持つ分布関数を導出し、我々の系における空間相関のベキ則がこのランジュバン方程式の変数の2次モーメントの加法ノイズの強さに対するベキ則であることを述べる。また、オンオフ間欠性やその他のモデルとの関連についても触れる。なお、この章は公表論文 [5] をほぼそのまま日本語へ翻訳したものである。多少記号の混乱が生じるかも知れないが、ご容赦願いたい。

6.1 導入

ベキ則はたくさんの種類の自然現象や数理モデルにおいて観察されている。例えば2次相転移点近傍での臨界現象、発達乱流におけるコルモゴロフの法則、自己組織臨界現象における雪崩のサイズ分布、地震におけるグーテンベルク・リヒターの法則、経済学における価格変動の分布、言語学におけるジップの法則などである。これらのベキ則の出現するメカニズムを明らかにするために、多くの挑戦がなされてきた。

ランダム乗法過程 (Random Multiplicative Process, RMP) はベキ的な挙動へ導くよく知られたメカニズムの一つである。それは確率変数が乗法的なノイズにより駆動される確率過程であり、多くの系のモデルとして広く使われてきた。例えば、オンオフ間欠性 [25, 26, 27, 29, 31, 32], レーザー [33], 経済活動 [34, 35], 変動する環境中での生物の個体数変動 [36], 流体によって移流されるパッシブスカラーなど [37] である。

現実の系においては、確率変数はしばしば乗法的なノイズだけではなく弱い加法的なノイズによっても駆動されている。この弱い加法的なノイズは確率変数 x の振幅が小さな値を取ったとき重要になり、 x に実効的な下限を与える。この下限は非常に重要になり得る。というのは、この下限により定常確率分布関数の存在が保証されるからである。この確率分布関数は広い x の範囲でベキ的に振る舞う [25, 27, 31, 34, 35, 37, 4]。

例えば、Venkataramani たち [31] は、ノイジーなオンオフ間欠性のモデルとして、乗法および加法ノイズのふたつの項を持つランジュバン方程式を導入した。彼らはベキ的なテイルを持つ定常確率分布関数を得た。同じ形のランジュバン方程式は高安たち [35] によっても経済活動のモデルとして導入され、やはり確率分布関数がベキ則に従うことを示された。同様なモデルが Levy たち [34] によっても導入された。それは乗法的なノイズに駆動される離散確率過程で、確率変数にあらわに下限が導入されていた。彼らはやはり確率分布関数がベキ則に従うことを示した。Venkataramani たちと高安たちは加法的なノイズをあらわに扱った一方、Levy たちによって導入された下限は加法的なノイズと同様な役割を果たす。この章では、このタイプの確率過程を取り扱う。

さて、この種の確率過程においては、別のタイプの漸近的なベキ則が見つかっている。論文 [3, 4] において、我々は非局所的に結合した素子系の時空カオス状態において観測された空間相関関数 $C(r)$ の短距離でのベキ則、つまり $C(r) \simeq C_0 - C_1 r^\alpha$ を説明するために、確率過程モデルを導入した。我々の説明は上に述べたものと同様なランダム乗法過程に加法的なノイズを加えたものであったが、そこでのベキ的な空間相関は確率分布関数そのもののベキ的なテイルの直接の結果ではなく、確率変数 x のモーメント $\langle x^q \rangle$ の加法的なノイズの強さ s に対する漸近的なベキ則、すなわ

ち $\langle x^q \rangle \simeq G_0 + G_1 s^{H(q)}$ であった。これはこの種の確率過程においてベキ的な挙動へ導く別種のメカニズムの例を与える。

この章の目的は、この加法的なノイズの強さに対するモーメントのベキ則の発生のメカニズムを明らかにすることである。具体的には、簡単なランジュバン方程式を導入して解析し、このメカニズムがそのようなベキ則を導く上で一般的であることを示す。

6.2 解析に使うモデル

6.2.1 ランジュバン方程式

加法ノイズを含んだランダム乗法過程 (RMP) の典型例として、次のランジュバン方程式を考えよう：

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda(t)x(t) + \eta(t), \quad (77)$$

ここで $x(t)$ は確率変数、 $\lambda(t)$ は乗法ノイズ、 $\eta(t)$ は加法ノイズである。解析的に扱うために、 $\lambda(t)$ と $\eta(t)$ は白色ガウスノイズであると仮定し、それらの平均と分散を次のように仮定する：

$$\begin{aligned} \langle \lambda(t) \rangle &= \lambda_0, & \langle [\lambda(t) - \lambda_0] [\lambda(t') - \lambda_0] \rangle &= 2D_\lambda \delta(t - t'), \\ \langle \eta(t) \rangle &= 0, & \langle \eta(t) \eta(t') \rangle &= 2D_\eta \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (78)$$

さらに、 $D_\eta \ll D_\lambda$ 、つまり加法ノイズは乗法ノイズより十分弱いものと仮定する。

この簡単な形をしたランジュバン方程式 (77) は、様々な系のモデルとして広く使われている [31, 33, 35, 37]。 $x(t)$ 、 $\lambda(t)$ 、 $\eta(t)$ の物理的意味は考えている状況ごとに異なる。例えば、レーザー発振のモデルを考えている場合、 $x(t)$ は光子の数、 $\lambda(t)$ は時間的に変動する増幅率、 $\eta(t)$ は原子の自然放射などによるノイズを表わす。ノイジーなオンオフ間欠性を扱っているときには、 $x(t)$ は不変多様体からの距離、 $\lambda(t)$ は各瞬間での垂直リアブノフ指数、 $\eta(t)$ はパラメータのずれなどに起因するノイズである。経済学のモデルにおいては、 $x(t)$ は富の量、 $\lambda(t)$ は富の量の変化の度合、そして $\eta(t)$ は様々な原因による外的なノイズを意味するかも知れない。

6.2.2 境界条件

ランジュバン方程式 (77) から統計定常状態を得るには、一般に変数 x の上限が必要である。また、弱い加法ノイズの項は変数 x (の絶対値) が小さくなりすぎないようにする下限の効果を与える。

(a) **下限** 平均拡大率 λ_0 が負である場合には、もし加法ノイズがなければ $x(t)$ は 0 へと近づくであろう。加法ノイズは、 $x(t)$ に実効的な下限の効果を与え、 $\lambda_0 < 0$ の場合でも $x(t)$ を完全には 0 にならないようにする。この章ではこの加法ノイズをあらわに扱うが、これを反射壁 (無限に高いポテンシャル障壁) が小さな x の位置にあるものと近似することもよくある。

(b) **上限** 現実的には、 $x(t)$ が非常に大きな値を取ったときには、非線形効果などにより抑えられるであろう。ここではこれを単に境界条件、すなわち $x = \pm 1$ にある反射壁として取り入れる。

これらの反射壁と加法ノイズによる上限と下限のため、ランジュバン方程式 (77) は統計定常状態を取り得る。図 69 に、小さな負の値の λ_0 での $x(t)$ の典型的な時系列を示す。平均拡大率 λ_0 が負であるにもかかわらず、 $x(t)$ は単に減衰するだけではなく間欠的なバーストを示す。これらのバースト

ストの発生は次のように解釈される。弱い加法ノイズのため、 $x(t)$ は小さいが有限の値を取る。もしまたま $\lambda(t)$ がしばらくの間正である状態が続くと、 $x(t)$ は指数的に増幅され大きな値を取る。これがバーストである。もちろん、 λ_0 が負なので $x(t)$ はいずれまた加法ノイズのレベルまで戻る。バーストの起こる機会が加法ノイズの強さと共に増加する。このことがなぜ $x(t)$ のモーメントの加法ノイズの強さに対するベキ則につながるのかは、以下の議論で明らかになるであろう。

なお、ここで説明した間欠性は、いわゆるノイジーなオンオフ間欠性と同一統計的性質を持つ。実際、ノイジーなオンオフ間欠性は、ここで述べたような確率過程としてモデルされる。

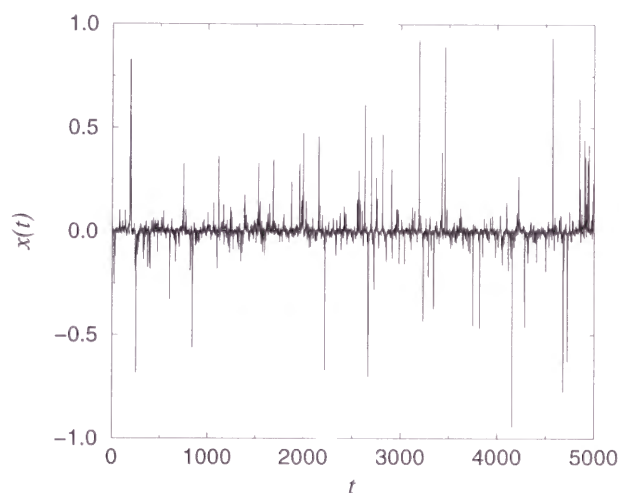


図 69: $\lambda_0 = -0.5$ 、 $D_\lambda = 0.5$ 、 $D_\eta = 0.00005$ におけるランジュバン方程式 (78) に従う振幅 $x(t)$ の典型的な時間発展。

6.3 近似的な取り扱い

モーメントのベキ則の発生のメカニズムの概要をつかむため、まずランジュバン方程式 (77) を近似的に扱おう。

6.3.1 フォッカープランク方程式

まず特徴的な振幅:

$$s = \sqrt{\frac{D_\eta}{D_\lambda}} \quad (0 < s < 1), \quad (79)$$

を導入しよう。これは乗法ノイズによるゆらぎ $\langle (\lambda x)^2 \rangle \sim D_\lambda x^2$ と、加法ノイズによるゆらぎ $\langle \eta^2 \rangle \sim D_\eta$ が同程度になる振幅である。変数 x の範囲を、 $0 < |x| < s$ と $s < |x| < 1$ のふたつの領域に分けて、各領域で支配的ではないノイズの項を無視することにしよう。系は変換 $x \rightarrow -x$ に対して対称なので、以下絶対値 $|x|$ だけを考えることにする。

(a) $s < |x| < 1$ この領域では、加法ノイズの効果を無視して次のランジュバン方程式を考える:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda(t)x(t). \quad (80)$$

新しい変数 $y(t) = \log |x(t)|$ を導入すると、式 (80) は次のように書き換えられる:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lambda(t), \quad (81)$$

ストラトノビッチ解釈のためこのような書き換えが可能である。これは平均値がドリフトしてゆくような拡散過程である。 $P_1(x, t)$ を $x(t)$ の分布関数とし、 $\bar{P}_1(y, t)$ を対応する $y(t)$ の分布関数としよう。式 (80) に対応するフォッカープランク方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{P}_1(y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} j_1(y, t), \quad (82)$$

という形を持ち、流れ $j_1(y, t)$ は、

$$j_1(y, t) = \lambda_0 \bar{P}_1(y, t) - D_\lambda \frac{\partial}{\partial y} \bar{P}_1(y, t). \quad (83)$$

という形となる。 $x = \pm 1$ での反射壁は、 j_1 の $y = 0$ 、つまり $j_1(y = 0, t) = 0$ でのノーフラックス境界条件となる。

(b) $0 < |x| < s$ この領域では、乗法ノイズの効果を無視することにより、次のランジュバン方程式:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \eta(t). \quad (84)$$

得る。 $P_2(x, t)$ を $x(t)$ の分布関数だとすると、 $P_2(x, t)$ は次のフォッカープランク方程式に従う:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_2(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} j_2(x, t) \quad (85)$$

ここで流束 $j_2(x, t)$ は、

$$j_2(x, t) = -D_\eta \frac{\partial}{\partial x} P_2(x, t). \quad (86)$$

で与えられる。ここで課される境界条件は、 P_1 と P_2 、 j_1 と j_2 の位置 $|x| = s$ ($y = \log s$) での連続性である。

6.3.2 ベキ的なテイルを持つ定常分布関数

では、フォッカープランク方程式の定常解を計算しよう。

(a) $s < |x| < 1$ 定常条件 $\partial \bar{P}_1 / \partial t = 0$ より $\partial j_1 / \partial y = 0$ 、つまり $j_1(y) \equiv \text{const.}$ が得られ、ノーフラックス境界条件 $j_1(y = 0) = 0$ より $j_1(y) \equiv 0$ が得られる。ゆえに、定常解 $\bar{P}_1(y)$ は、

$$0 = \lambda_0 \bar{P}_1(y) - D_\lambda \frac{\partial}{\partial y} \bar{P}_1(y) \quad (87)$$

を満し、これは、

$$\bar{P}_1(y) = C \exp\left(\frac{\lambda_0}{D_\lambda} y\right) \quad (88)$$

と解くことができる。ここで C は規格化定数である。これをもとの変数 x で書き直すと、

$$P_1(x) = \bar{P}_1(y) \frac{dy}{dx} = C \frac{1}{|x|} \exp\left(\frac{\lambda_0}{D_\lambda} \log(|x|)\right) = C|x|^{\frac{\lambda_0}{D_\lambda}-1}. \quad (89)$$

となる。このように、分布関数はこの領域でべき則に従うことがわかる。指数は λ_0 と D_λ の比、つまり乗数 $\lambda(t)$ の基本的な統計的性質によって決まり、加法ノイズの性質にはよらない。以下、この比を β と書くことにしよう：

$$\beta = \frac{\lambda_0}{D_\lambda}. \quad (90)$$

(b) $0 < |x| < s$ 定常解の一般形は定数 A と B を使って $P_2(x) = Ax + B$ と表わされる。 $|x| = s$ で の流束と分布関数の連続性、つまり $j_2(s) = j_1(s) \equiv 0$ と $P_2(s) = P_1(s)$ より、 $A = 0$ と $B = P_1(s)$ が得られるので、 $P_2(x)$ は単に定数値を取る：

$$P_2(x) \equiv P_1(s) = Cs^{\frac{\lambda_0}{D_\lambda}-1}. \quad (91)$$

結局、近似的な定常分布関数は、

$$P(x) = \begin{cases} Cs^{\beta-1} & (0 < |x| < s) \\ Cx^{\beta-1} & (s < |x| < 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases} \quad (92)$$

と求められる。規格化定数 C は、

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = 2 \int_0^1 P(x) dx = 1, \quad (93)$$

によって決まり、

$$C = \left[2 \left(\int_0^s s^{\beta-1} dx + \int_s^1 x^{\beta-1} dx \right) \right]^{-1} = \left[2 \left(s^\beta + \frac{1-s^\beta}{\beta} \right) \right]^{-1} \quad (94)$$

と計算される。

このように、分布関数はふたつの部分から成る。つまり、 $x(t)$ が通常の拡散過程に従う原点付近の定数領域と、 $x(t)$ がランダム乗法過程に従うべき的なテイル領域である。定数部分とべき的なテイル部分の境界の位置は $|x| = s$ で、これは加法ノイズの強さ $\sqrt{D_\eta}$ に比例している。この近似的な分布関数 (92) を図 70 に示した。

6.3.3 モーメント

この定常状態 (92) における変数 $|x|$ の q 次のモーメント $\langle x^q \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle x^q \rangle &= \int_{-1}^1 |x|^q P(x) dx = 2 \int_0^1 x^q P(x) dx \\ &= 2C \left(\int_0^s x^q s^{\beta-1} dx + \int_s^1 x^q x^{\beta-1} dx \right) \\ &= \frac{\beta}{\beta+q} \frac{1 + \left(\frac{\beta+q}{1+q} - 1\right) s^{\beta+q}}{1 + (\beta-1) s^\beta} \end{aligned} \quad (95)$$

と計算される。この形は、

$$\langle x^q \rangle = c_q \frac{1 + a_q s^{\beta+q}}{1 + a_0 s^\beta}, \quad (96)$$

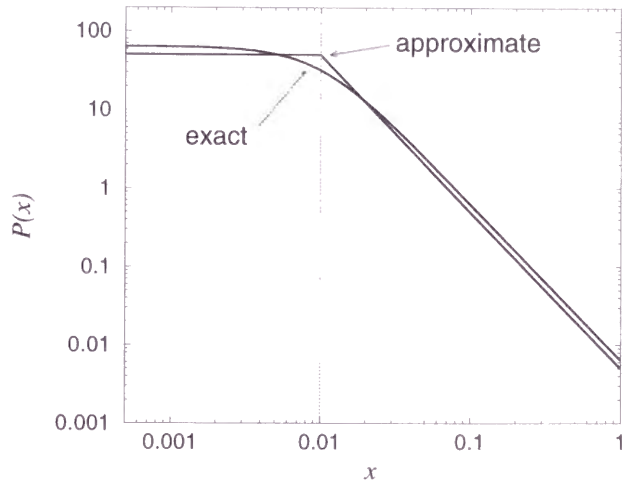


図 70: 近似および厳密に得られた確率分布関数 $P(x)$ vs. x 。パラメータは図 1 と同じ。

と書くことができる。ここで c_q と a_q は

$$c_q = \frac{\beta}{\beta + q}, \quad a_q = \frac{\beta + q}{1 + q} - 1. \quad (97)$$

と与えられる。分布関数の指数 β が s の指数として現れたことに注意せよ。以下で説明するように、モーメントの漸近的なベキ則は、この式 (96) の形から来ている。

6.3.4 モーメントの漸近形

加法ノイズ s が小さい極限でのモーメント $\langle x^q \rangle$ の漸近形を調べよう。以下、実際上興味のある正の q に限って議論する。

(a) $\beta > 0$ $\langle x^q \rangle$ の分母を展開して s の最低次をとると、

$$\langle x^q \rangle \simeq c_q (1 - a_0 s^\beta) \quad (98)$$

が得られる。

(b) $\beta < 0$ $\langle x^q \rangle$ の分母にある 1 を無視すると、

$$\langle x^q \rangle \simeq \frac{c_q}{a_0} (s^{|\beta|} + a_q s^q) \quad (99)$$

を得る。 $|\beta|$ と q のどちらが小さいかが右辺のふたつの項のどちらが支配的かを決め、

$$\langle x^q \rangle \simeq \begin{cases} \frac{c_q}{a_0} s^{|\beta|} & (|\beta| < q) \\ \frac{c_q a_q}{a_0} s^q & (|\beta| > q) \end{cases} \quad (100)$$

が得られる。

以上の結果から、モーメント $\langle x^q \rangle$ は境界の位置 s 、あるいは加法ノイズの強さ $\sqrt{D_\eta}$ に対して簡単なべき的な依存性:

$$\langle x^q \rangle \simeq G_0 + G_1 s^{H(q)}, \quad (101)$$

を示すことがわかる。ここで G_0 と G_1 は定数である。 G_0 は $\beta < 0$ ($\lambda_0 < 0$) の時には消えるが、 $\beta > 0$ ($\lambda_0 > 0$) の時には有限の値をとる。このように、モーメントのべき則が得られた。

6.3.5 指数

モーメント $\langle x^q \rangle$ の指数 $H(q)$ は β 、すなわち λ_0 と D_λ の比により決められる。式 (98) と (100) より、 $H(q)$ は q とともに次のように変化する:

(a) $\beta < 0$

$$H(q) = \begin{cases} q & (0 < q < |\beta|) \\ |\beta| & (|\beta| < q) \end{cases}, \quad (102)$$

(b) $\beta > 0$

$$H(q) = \beta. \quad (103)$$

指数 $H(q)$ は、 $0 < q < |\beta|$ の時には q に単に比例しており $H(q) = q$ だが、 $|\beta| < q$ or $\beta > 0$ の時には q に依存せず $H(q) = |\beta|$ となる。

6.3.6 他の漸近領域

$\beta \simeq 0$ の場合や $|\beta| \simeq q$ の場合には、 $s \rightarrow 0$ の極限でのモーメントの漸近形がべき則でない場合がある。

(a) $\beta \simeq 0$ $\beta \simeq 0$ かつ $|\beta \log s| \ll 1$ であるようなパラメータ領域を考えよう。この場合 $\langle x^q \rangle$ の分母は、

$$\begin{aligned} 1 + a_0 s^\beta &= 1 + a_0 \exp(\beta \log s) \\ &= 1 + a_0 + a_0 \beta \log s + O(|\beta \log s|^2), \end{aligned} \quad (104)$$

と展開される。 $a_0 = \beta - 1$ 、 $|\log s| \gg 1$ なので $a_0 \beta \log s$ の項が支配的であることがわかり、

$$\langle x^q \rangle \simeq \frac{c_q}{|a_0 \beta \log s|}, \quad (105)$$

が得られる。このように、 $\langle x^q \rangle$ は $s \rightarrow 0$ で $1/|\log s|$ のように対数的に発散する。⁷

⁷この対数的発散を CGL 系で確かめた。

(b) $|\beta| \simeq q$ $\beta < 0$ かつ $|\beta| \simeq q$ であるようなパラメータ領域を考えよう。さらに、 $|(q - |\beta|) \log s| \ll 1$ であるとする。モーメント $\langle x^q \rangle$ は、

$$\langle x^q \rangle \simeq \frac{c_q}{a_0} \left(s^{|\beta|} + a_q s^q \right) = \frac{c_q}{a_0} s^{|\beta|} \left(1 + a_q s^{q-|\beta|} \right). \quad (106)$$

と与えられ、右辺を展開することにより、

$$\begin{aligned} 1 + a_q s^{q-|\beta|} &= 1 + a_q \exp((q - |\beta|) \log s) \\ &= 1 + a_q + a_q (q - |\beta|) \log s + O(|(q - |\beta|) \log s|^2). \end{aligned} \quad (107)$$

を得る。 $a_q = \frac{\beta+q}{1+q} - 1$ と $|\log s| \gg 1$ を使うと、 $a_q (q - |\beta|) \log s$ の項が支配的であることがわかり、

$$\langle x^q \rangle \simeq \frac{c_q a_q}{a_0} |(q - |\beta|) s^{|\beta|} \log s|. \quad (108)$$

が得られる。つまり、 $s \rightarrow 0$ で $\langle x^q \rangle$ は $|s^{|\beta|} \log s|$ のように発散する。

6.4 厳密な扱い

次に、加法ノイズの効果を近似なしに扱おう。前の場合と議論は完全に平行しており、結果は定性的に一致する。特に指数については同一の結果を与える。分布関数の計算の仕方は Venkataramani ら [31] に従う。

6.4.1 フォッカー-プランク方程式

ランジュバン方程式 (77) に従うフォッカー-プランク方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x, t), \quad (109)$$

と与えられる。ここで、 $P(x, t)$ は $x(t)$ の分布関数で、流束 $j(x, t)$ は、

$$j(x, t) = (\lambda_0 + D_\lambda) x P(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} [(D_\lambda x^2 + D_\eta) P(x, t)]. \quad (110)$$

という形を取る。 $x = \pm 1$ においた反射壁は、 $x = \pm 1$ にノーフラックス境界条件、つまり、

$$j(x = \pm 1, t) = 0. \quad (111)$$

を置くことと等価である。

6.4.2 ベキ的なテイルを持つ定常分布関数

フォッカー-プランク方程式 (109) の定常解 $P(x)$ を計算しよう。定常条件 $\partial P(x, t)/\partial t = 0$ より $\partial j(x, t)/\partial x = 0$ 、すなわち $j(x) \equiv \text{const.}$ が得られ、ノーフラックス境界条件 $j(x = \pm 1) = 0$ より $j(x) \equiv 0$ が得られる。ゆえに、 $P(x)$ は、

$$(\lambda_0 + D_\lambda) x P(x) - \frac{\partial}{\partial x} [(D_\lambda x^2 + D_\eta) P(x)] = 0, \quad (112)$$

に従い、これを解くことにより、

$$P(x) = C (D_\lambda x^2 + D_\eta)^{\frac{\lambda_0}{2D_\lambda} - \frac{1}{2}}, \quad (113)$$

が定常確率分布関数として得られる。ここで C は規格化定数であり、

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = 2 \int_0^1 P(x) dx = 1 \quad (114)$$

から決まる。積分公式:

$$\int_0^1 (1 + cx^2)^a dx = {}_2F_1\left(-a, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -c\right), \quad (115)$$

を使うと (ここで ${}_2F_1(a, b, c; z)$ は超幾何関数)、 C は、

$$C = \left[2D_\eta^{\frac{\lambda_0}{2D_\lambda} - \frac{1}{2}} {}_2F_1\left(-\frac{\lambda_0}{2D_\lambda} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{D_\lambda}{D_\eta}\right) \right]^{-1} \quad (116)$$

と表わされる。

前と同様に、 β を平均拡大率 λ_0 とそのゆらぎ D_λ の比として定義し、 α を $P(x)$ の指数として定義しよう。すなわち、

$$\beta = \frac{\lambda_0}{D_\lambda}, \quad \alpha = \frac{\beta - 1}{2} = \frac{\lambda_0}{2D_\lambda} - \frac{1}{2}. \quad (117)$$

さらに、 s を加法ノイズの強さ $\sqrt{D_\eta}$ と乗法的なノイズの強さ $\sqrt{D_\lambda}$ の比で定義しよう:

$$s = \sqrt{\frac{D_\eta}{D_\lambda}} \quad (118)$$

すると、定常確率分布関数は、

$$P(x) = \begin{cases} \frac{(1 + \frac{x^2}{s^2})^\alpha}{2 {}_2F_1(-\alpha, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{1}{s^2})} & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases} \quad (119)$$

と表わされる。

この定常確率分布関数は $x \rightarrow 0$ で定数に近づき、 $s^2 \ll 1$ であるとき、つまり加法ノイズが乗法ノイズより十分弱いときには、 $x \rightarrow \pm 1$ でべき則に漸近する:

$$P(x) \sim \begin{cases} \text{const.} & (x \rightarrow 0) \\ |x|^{2\alpha} & (x \rightarrow \pm 1) \end{cases}. \quad (120)$$

このべき則の指数は、

$$2\alpha = -1 + \beta = -1 + \frac{\lambda_0}{D_\lambda}, \quad (121)$$

で与えられる。

以上のように、前の近似的な結果 (92) と定性的に同じ確率分布関と、同一の指数を持ったべき則が得られた。確率分布関数の定数領域とべき的な領域の移り変わり点は $P(x)$ の分子のふたつの項のバランス:

$$1 \simeq \frac{x^2}{s^2} \quad (122)$$

より決められ、

$$s = \sqrt{\frac{D_\eta}{D_\lambda}}, \quad (123)$$

の近くである。これはちょうど前の近似的な扱いにおいて x の領域をふたつに分けた点である。

この厳密な確率分布関数 (119) を図 70 に示す。近似的な確率分布関数 (92) が厳密なものの特徴をよくとらえていることがわかる。図 71 と 72 に、式 (119) において理論的に求められた確率分布関数のふたつのグラフを示す。図 71 は D_η を固定していくつかの異なる値の λ_0 についての確率分布関数を示し、図 72 は λ_0 を固定していくつかの異なる値の D_η について示した。それぞれの確率分布関数は原点近くで定数値をとり、それ以外ではべき則に従う。指数は λ_0 とともに変化し、定数からべき則へ移り変わる点は加法的なノイズの強さ $\sqrt{D_\eta}$ の増加とともに右の方向へ移動する。

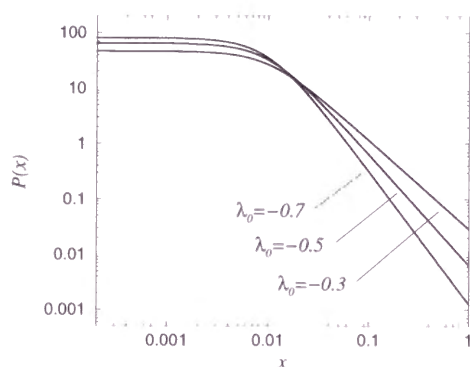


図 71: いくつかの λ_0 の値に対する確率分布関数 $P(x)$ vs. x 。パラメータ $D_\lambda = 0.5$ と $D_\eta = 0.00005$ は固定。

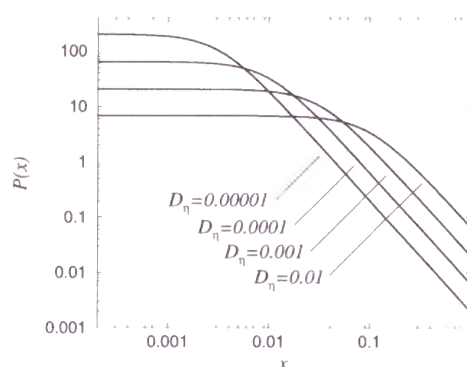


図 72: いくつかの D_η の値に対する確率分布関数 $P(x)$ vs. x 。パラメータ $\lambda_0 = -0.5$ と $D_\lambda = 0.5$ は固定。

6.4.3 モーメント

定常確率分布関数 (119) より、 $|x|$ の q 次のモーメント $\langle x^q \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle x^q \rangle &= \int_{-1}^1 |x|^q P(x) dx = 2 \int_0^1 x^q P(x) dx \\ &= \frac{1}{1+q} \frac{{}_2F_1(-\alpha, \frac{1+q}{2}, \frac{3+q}{2}; -\frac{1}{s^2})}{{}_2F_1(-\alpha, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{1}{s^2})}, \end{aligned} \quad (124)$$

と計算される。ここで積分公式:

$$\int_0^1 x^q (1+cx^2)^a dx = \frac{1}{1+q} {}_2F_1(-a, \frac{1+q}{2}, \frac{3+q}{2}; -c). \quad (125)$$

を用いた。図 73 にこれを示す。

6.4.4 モーメントの漸近形

では、加法的なノイズの小さな極限、 $s \rightarrow 0$ でのモーメント $\langle x^q \rangle$ の漸近形を調べよう。前と同じく、 $q > 0$ の場合だけを考える。

超幾何関数の漸近形、すなわち、

$${}_2F_1(a, b, c; z) \simeq \Gamma_1(a, b, c)(-z)^{-a} + \Gamma_2(a, b, c)(-z)^{-b} \quad (z \rightarrow \infty), \quad (126)$$

を使うと、 $\langle x^q \rangle$ の漸近形を

$$\langle x^q \rangle \simeq \frac{1}{1+q} \frac{\Gamma_1(-\alpha, \frac{1+q}{2}, \frac{3+q}{2})}{\Gamma_1(-\alpha, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})} \frac{1 + \Gamma_3(-\alpha, \frac{1+q}{2}, \frac{3+q}{2}) s^{\beta+q}}{1 + \Gamma_3(-\alpha, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) s^\beta}, \quad (127)$$

と表わすことができる。ここで Γ_1, Γ_2 と Γ_3 はガンマ関数 $\Gamma(a)$ を使って

$$\Gamma_1(a, b, c) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}, \quad \Gamma_2(a, b, c) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}, \quad (128)$$

および

$$\Gamma_3(a, b, c) = \frac{\Gamma_2(a, b, c)}{\Gamma_1(a, b, c)}. \quad (129)$$

と定義される。

ここで、再び先ほどの近似的な計算で得られたのと同じ形が得られたことに注意しよう：

$$\langle x^q \rangle = c_q \frac{1 + a_q s^{\beta+q}}{1 + a_0 s^\beta}. \quad (130)$$

しかしながら、 c_q と a_q は先ほどとは異なり、

$$c_q = \frac{1}{1+q} \frac{\Gamma_1(-\alpha, \frac{1+q}{2}, \frac{3+q}{2})}{\Gamma_1(-\alpha, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})}, \quad a_q = \Gamma_3(-\alpha, \frac{1+q}{2}, \frac{3+q}{2}). \quad (131)$$

で与えられる。先ほどと全く同じ議論により、この形から $\langle x^q \rangle$ が $s \rightarrow 0$ で漸近的にベキ則：

$$\langle x^q \rangle \simeq G_0 + G_1 s^{H(q)}. \quad (132)$$

に従うことが言える。

図 74 に、モーメント $\langle x^q \rangle$ を小さな s の領域について示した。各モーメントは加法的なノイズ s に対してベキ的な依存性を示している。

6.4.5 指数と他の漸近領域

この厳密な結果と前の近似的な結果の違いはいくつかの係数だけで、指数は同一なので、 $H(q)$ の挙動は前と完全に同じである。 $a_q = -1 + O(\beta)$ と $|\log s| \gg 1$ に気をつければ、他の漸近領域が $\beta = 0$ や $|\beta| = q$ の近くで存在することも前と同じであることがわかる。

図 75 に、式 (102)、(103) において理論的に得られた指数とランジュバン方程式 (78) の直接数値計算により得られた指数が λ_0 に対して示されている。それぞれの $H(q) - \lambda_0$ 曲線はふたつの部分、すなわち $H(q)$ が $|\lambda_0|$ に比例して変わる領域と $H(q)$ が定数に飽和する領域からなる。上述したベキ的でない漸近領域に置いてもベキ則を仮定して指数を求めたため、そこでの値は当然理論値からずれている。

6.5 ベキ則のロバストさ

さて、ここまではランジュバン方程式 (77) を扱ってきたが、上で議論されたタイプのベキ則は他の多くのモデルでも見られる。それは課された境界条件や時刻の連続/離散性、もしくはノイズの項の性質などのモデルの詳細には鈍感である。ここではこのベキ則のロバストさについて議論しよう。

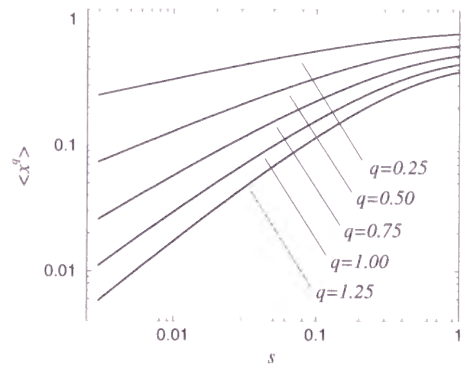


図 73: いくつかの q に対するモーメント $\langle x^q \rangle$ vs. 加法ノイズの強さ s 。パラメータは $\lambda_0 = -0.5$ と $D_\lambda = 0.5$ 。

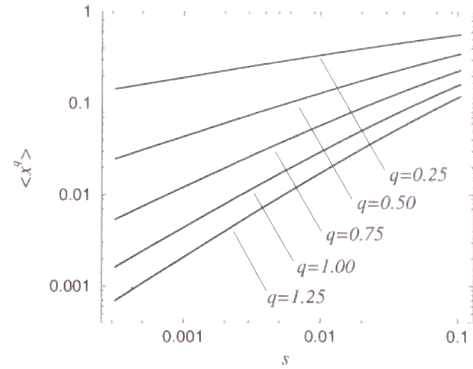


図 74: いくつかの q に対するモーメント $\langle x^q \rangle$ vs. 加法ノイズの強さ s 。図 5 の小さな s の領域の拡大。

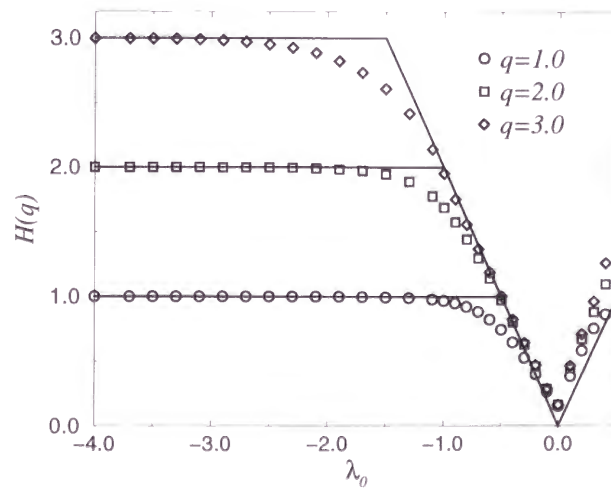


図 75: $q = 1, 2, 3$ の場合の指数 $H(q)$ vs. λ_0 。記号は数値計算、実線は理論。 D_λ の値は 0.5 に固定。

6.5.1 境界条件

加法的なノイズの効果を近似的に、および厳密的に調べてきた。べき的な確率分布関数の生成における加法的なノイズのもっとも重要な役割は、原点付近に小さなゆらぎにより通常の拡散過程が支配的な領域を作ることによって確率変数が完全に減衰することを防ぐことにある。よく使われる加法的なノイズのかわりに反射壁境界条件によって変数に下限を与える近似がうまく働くのもこのためである。

なお、確率変数の上限は単に反射壁によって与えられるものとしたが、例えばそれを $-x^3$ のような非線形項によって置き換えても、少なくとも大きすぎない q に関しては、結果は同一である。

6.5.2 離散モデル

ベキ則は離散時間モデルにおいても現れ、その原因は前と全く同じである。例えば、論文 [4] において、我々は次のような離散確率過程を導入した:

$$x_{n+1} = e^{\lambda_n} x_n + O(x_n^2) + \eta_n, \quad (133)$$

ここで n は時間ステップで、 λ_n と η_n はノイズである。我々は加法的なノイズの項と非線形項を単なる反射壁による下限と上限として近似し、べき的な確率分布関数を得た。さらに、 x のモーメントの下限の位置、すなわち加法的なノイズの強さに対するべき的な依存性を得た。

6.5.3 ノイズの性質

もちろん、白色ガウスノイズを仮定することはしばしば現実の系のモデルに適當ではない。モーメントのベキ則は、色つきノイズのモデルにおいても見られている。例えば、我々は論文 [3] では上限と下限を反射壁として導入し、色つきの 2 値ノイズによって駆動された確率過程を考察したが、やはり下限の壁の位置に対するモーメントのベキ則が得られた。

6.5.4 数値計算例

モーメントのベキ則のノイズの性質や境界条件に対するロバストさを調べるため、いくつかの数値実験を考えてみよう。確率過程:

$$\frac{dx(t)}{dt} = [\lambda_0 + \lambda(t)]x(t) + \eta(t), \quad (134)$$

を数値計算してみる。ここで $\lambda(t)$ は何らかの色つきノイズで、一方 $\eta(t)$ は前と同様白色ガウスノイズであるとする。ノイズ $\lambda(t)$ として、(i) 通常の Ornstein-Uhlenbeck 過程によって作られたガウスマルコフノイズ、(ii) 1 か -1 のどちらかの値を等しい遷移確率で取る二値ノイズ、(iii) ローレンツモデルで作ったカオティックなノイズの 3 つを考えてみよう。各ノイズの平均と分散をそれぞれ 0 と 1 に規格化しておき、それを $\lambda(t)$ として用いる。 $x(t)$ が図 69 のような間欠性を示すような値に λ_0 を設定した。

図 76 に、各ノイズについて得られた 2 次モーメント $\langle x^2 \rangle$ を加法ノイズの強さ s に対してプロットした。モーメント $\langle x^2 \rangle$ は加法ノイズの強さ s に小さな s の領域でべき的に依存していることがわかる。 x の上限が反射壁ではなく非線形項 $-x^3$ で与えられる場合も調べたが、やはり同じ指数の

ベキ則が観測された。それぞれのタイプのノイズに対し、確率分布関数がベキ的なテイルを持つことも確認された。

ここで使ったノイズは色つきなので、前の理論からモーメントの指数を予言するのは難しい。このためには、 λ_0 と D_λ の実効的な値を与えるために例えば Pikovsky[27] によってなされたようなノイズの繰り込みが必要であり、定性的な説明を目的としたこの章の視野を越える⁸。

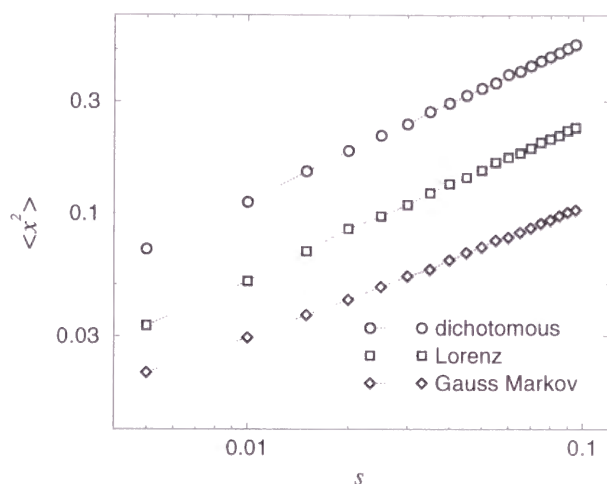


図 76: 2 次のモーメント $\langle x^2 \rangle$ vs. 加法ノイズの強さ s 。二値ノイズ、ガウスマルコフノイズ、ローレンツノイズに対して計算。 λ_0 の値は二値およびガウスマルコフノイズの時には -0.5 で、ローレンツの図の時には -0.3 。各線は重ならないように上下してある。

6.6 いくつかの関係した系

6.6.1 ノイジーなオンオフ間欠性

ノイジーなオンオフ間欠性はモーメントのベキ則が観測される典型的な現象なので、ここで簡単に議論しよう。オンオフ間欠性は、不変多様体に埋め込まれているカオティックなアトラクターが、その不変多様体に垂直な方向への摂動に対し中立安定になったときに生じ、このタイプの不安定性はブロウアウト分岐と呼ばれている。系はふたつの相を間欠的に行き来する。ひとつは系がほぼ不変多様体の上にあるラミナー状態で、もうひとつは不変多様体からの距離が突然増大するバースト状態である。オンオフ間欠性の生じるメカニズムは、軌道と不変多様体との距離がカオティックに変動する素子の局所リアプノフ指数により乗法的に駆動されることにある。それゆえ、適当な対応する数学モデルはランダム乗法過程で、乗数の速いカオティックな変化が乗法ノイズとして採り入れられる。

Platt たち [29] は、オンオフ間欠性を示すような系に弱い加法的なノイズも存在している状況を考えた。彼らは、もともとはブロウアウト分岐の超臨界側の狭いパラメータ領域でしか観測されなかった間欠性が、亜臨界側も含むより広い領域で観測されることを発見し、これをノイジーな

⁸しかし、Pikovsky は論文で一般論は展開したものの、結局性質の良いホワイトノイズを出すカオス素子を選んで使っている。

オンオフ間欠性と呼んだ。この現象を説明するために、彼らはオンオフ間欠性の伝統的なモデルであるランダム乗法過程に加法的なノイズ項を近似的に下限として取り入れたモデルを考案した。Venkataramani たち [31] と Čenys たち [32] も同様なモデルを解析し、いくつかのノイジーオンオフ間欠性の性質を説明した。しかしながら、上に述べてきたようなモーメントのベキ則についてはあまり十分に調べられていないようなので、ここでひとつ例を挙げよう。

6.6.2 結合カオス素子

互いに結合したふたつの同一なカオス素子 [25] は、オンオフ間欠性を示す典型的な系である。頻繁に使われるモデルは、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{X}_1) + k(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1), \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{X}_2) + k(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2),\end{aligned}\tag{135}$$

である。ここで $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ は各素子の固有の運動を表わし、 k は結合強度を表わしている。これらふたつの素子は、 k がある臨界結合強度 k_c より強ければ同期する。差分 $\mathbf{x} = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1$ は素子のカオティックな運動により乗法的に駆動される：

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[D\mathbf{F}\left(\frac{\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2}{2}\right) - 2k\mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{x} + O(\mathbf{x}^2),\tag{136}$$

ここで D は微分を表わし、 \mathbf{I} は単位行列である。 k_c よりわずかに下では、この \mathbf{x} はオンオフ間欠性を示す。もしさらに弱い加法的なノイズを系に加えれば、 \mathbf{x} は k_c より上でも間欠性を示すであろう。この状態で、加法的なノイズの強さ s を変化させて \mathbf{x} のどれかの成分の q 次のモーメント $\langle x^q \rangle$ を測れば、先ほどの議論からそれは s が十分小さいときには $\langle x^q \rangle \simeq G_0 + G_1 s^{H(q)}$ のようにベキ的にふるまうことが予想される。

ひとつの例として、互いに結合されたレスラー振動子に、弱い加法的なノイズを変数の最初の成分に与えたモデルを数値計算してみよう：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -y_1 + z_1 + k(x_2 - x_1) + s\xi_1(t), \\ \dot{y}_1(t) &= x_1 + 0.3y_1 + k(y_2 - y_1), \\ \dot{z}_1(t) &= 0.2 + x_1z_1 - 5.7z_1 + k(z_2 - z_1),\end{aligned}\tag{137}$$

また、

$$(1 \longleftrightarrow 2).\tag{138}$$

ここで $\xi_{1,2}(t)$ は平均 0、分散 1 の白色ガウスノイズで、 s がそれらの強さをコントロールする。結合強度 k を k_c より少し上にあわせて、系にノイジーなオンオフ間欠性を起こさせる。図 77 に、いくつかの結合強度 k の値について得られた 2 素子の最初の成分の差 $x = x_2 - x_1$ の 2 次モーメント $\langle x^2 \rangle$ を与えたノイズの強さ s に対して示した。予想されたように、それらは s にベキ的に依存しており、指数が k とともに変化する。

同様なモーメントのベキ則は、弱い加法的なノイズの代わりに、わずかなパラメータのずれを与えた系においても観測されるであろう [26]。また、例えば結合していないふたつのカオティックな素子において、パラメータをカオスに転移する値より少し下にしておき、それらにわずかにずれたノイズを与えた場合にも起こる [27]。このことが、後で述べるように非局所結合素子系における空間相関のベキ則に深く関係する。

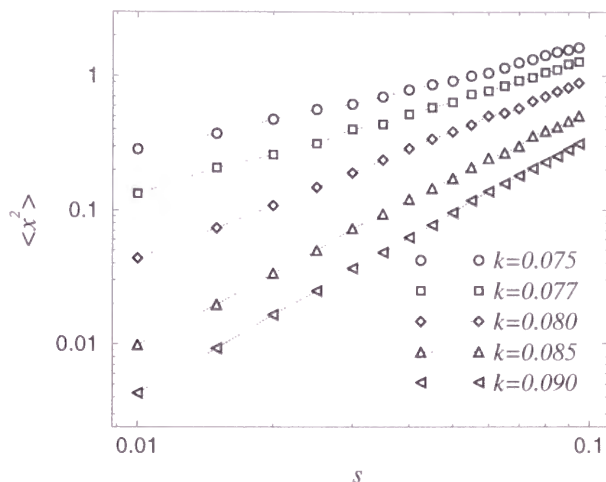


図 77: いくつかの結合強度 k の値に対し、結合レーザー振動子系において得られた 2 次モーメント $\langle x^2 \rangle$ vs. 加法ノイズの強さ s 。

6.6.3 空間分布したカオス素子

我々が前の章で述べたべき的な空間相関は、変数に適当な解釈を与えると、ここで述べてきたものと同じ種類のべき則であることがわかる。我々の系は空間的に分布したカオティックな素子の集団であり、非局所結合によって作られる長波長で時間的にランダムにゆらぐ内部場に駆動されている。

距離 r 離れたふたつの素子の振幅 X の差 $x(r) = X(r) - X(0)$ を考えると、そのモーメント $\langle x(r)^q \rangle$ は流体乱流における速度場の構造関数、あるいはフラクタルな表面成長における高さ-高さ相関関数に対応する量となり、振幅 X の空間相関と関係する。 $x(r)$ のダイナミクスはランダム乗法過程に弱い加法的なノイズを加えたもので、ランダムな乗数は素子のカオティックな運動による局所リアプノフ指数のゆらぎ、弱い加法的なノイズは内部場のふたつの素子の位置での小さなずれから来る。

加法的なノイズの強さ s は、内部場の空間変化がゆるやかであることから短距離では r に比例するので、モーメントの s に対するべき則は、結局振幅差 x のモーメントの素子間の距離 r に対するべき則となる:

$$\langle x(r)^q \rangle \sim G_0 + G_1 s^{H(q)} \sim G_0 + G_2 r^{H(q)}, \quad (139)$$

ここで G_0, G_1, G_2 は定数である。

平均リアプノフ指数が負なら、 G_0 は消えて指数 $H(q)$ は式 (102) で与えられる。これは例えばノイズを与えたパーガース方程式 [45] などにおいて知られているような“バイフラクタル性”をあらわしており、そのような場の間欠性的な構造を暗示している。

6.7 結論

ノイジーなオンオフ間欠性や経済活動のモデルのように、乗法および加法ノイズに駆動された確率過程はベキ的な確率分布関数を示す。この確率分布関数は定数部分とベキ的な部分から成り、それらの境界の原点からの距離は、加法的なノイズの強さ s に比例する。このノイズの強さ s に対する境界の位置の系統的な依存性が、弱い加法的なノイズの強さに対するモーメントのベキ則を生じさせる。

この現象を詳しく解析するために、乗法および加法ノイズの両方を持ったランジュバン方程式 (77) をこの種の確率過程の一般的なモデルとして導入した。その定常状態を理論的および数値的に解析することにより、このモデルは実際にモーメントのベキ則を再現することがわかった。さらに、加法的なノイズの近似的な扱いと厳密な扱いを比較することにより、通常の加法的なノイズを下限として導入する近似も正当化された。

我々の解析は厳密さのためランジュバン方程式 (77) に限ったが、ベキ則そのものは使われるモデルの詳細に敏感ではなく、乗法および加法ノイズに駆動される多くの確率過程において広くみられるものと考えられる。このロバストさを、いくつかの色つき非ガウスノイズによって駆動されたモデルの数値計算によって示した。さらに、この種のベキ則のひとつの典型的な現れとして、ノイジーなオンオフ間欠性におけるモーメントのベキ則と、非局所結合素子系の時空カオス状態におけるベキ的な空間相関関数について議論した。これは様々な系で知られている空間相関関数のベキ則に対し、別の視点からの洞察となりうるかもしれない。

すでに指摘したように、ここで述べたメカニズムによるモーメントのベキ則は多くの系の広いパラメータ領域で見られる現象である。このメカニズムは簡単なため一般的であり、現実の世界で観察されるベキ則のいくつかはこのクラスに属するのではないかと考えられる。

7 ランダムに変動する長波長の外場を与えた素子系

第5章と第6章で述べた理論モデルの仮定からわかるように、空間相関関数やその他の場の差のモーメントのベキ則に必要なのは、

1. 素子の局所リアプノフ指数が正負に揺らぐこと、
2. ランダムに変動する長波長の場による影響、

だけである。つまり、これまで長波長の場は非局所結合による内部場であったが、これを外から適当に与えたもので置き換えても、そのようなベキ則が観察される可能性を示唆する。ここでは、いくつかの素子系について、実際にランダムに変動する長波長の外場を与えた系で同様の特異的な空間相関が見られることを示す。

7.1 離散時間モデル

まず素子のダイナミクスが写像で記述される場合を考えよう。素子のダイナミクスが $\mathbf{X}_{n+1} = F(\mathbf{X}_n)$ と表わされるものとする。この素子が空間分布した状況を考えよう。素子間に直接の結合は無いものとする。位置 \mathbf{r} の素子の変数を $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ と表わし、それに長波長の外場 $\mathbf{h}_n(\mathbf{r})$ を与える:

$$\mathbf{X}_{n+1}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{X}_n(\mathbf{r})) + \mathbf{h}_n(\mathbf{r}), \quad (140)$$

ここで n はタイムステップを表わす。位置 \mathbf{r} にある素子と位置 $\mathbf{r} + \mathbf{x}$ にある素子の状態の差:

$$\mathbf{y}_n := \mathbf{X}_n(\mathbf{r} + \mathbf{x}) - \mathbf{X}_n(\mathbf{r}), \quad (141)$$

を考えると、そのダイナミクスは

$$\mathbf{y}_{n+1} = F'(\mathbf{X}_n(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{y}_n + \mathbf{h}'_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{x} + N(\dots), \quad (142)$$

となることから、再び前と同様に弱い加法ノイズを受けたランダム乗法過程と見ることができ、ベキ的な空間相関などが観測されることが予想される。

以下では簡単のため空間1次元、素子の変数を1次元とする。系のサイズを1に固定し、素子の位置を x で表わす。系のダイナミクスは次のようになるだろう:

$$X_{n+1}(x) = F(X_n(x)) + h_n(x). \quad (143)$$

リアプノフ指数がゆらぎうる素子としては、前と同様ロジスティック写像と非対称テント写像を使うことにし、また、長波長の外場としては最も単純な系に存在しうる最長の波長成分のみを持ったものを考える。非局所結合素子系の場合に比べ素子が感じる場はより長波長になるが、短距離での性質に注目する限りは違いは出ない。

7.1.1 ロジスティック写像系

素子のダイナミクスがロジスティック写像:

$$F(z) = cz(1-z), \quad (144)$$

で表わされるものとしよう。ここで c は分岐パラメータであり、再び $c = 3.7$ とする。なお、この値は典型的なもので、特に意味はない。系のダイナミクスは次の式に従うものとする：

$$X_{n+1}(x) = (1 - K)F(X_n(x)) + Kh_n(x), \quad (145)$$

ここで、 K は系に対する外場の影響をコントロールするためのパラメータ、すなわち外場との結合強度である。以後外場 $h_n(x)$ としては、

$$h_n(x) = \frac{1 + \cos(2\pi(x + \psi_n))}{2}, \quad (146)$$

を使う。ここで ψ_n は 0 から 1 の間の一様乱数である。つまり、系に存在する最も長い波長の成分に同じ振幅でランダムな位相の入力を与えることになる。

写像の前の因子 $1 - K$ は、0 から 1 の範囲の値をとる写像 $F(X_n)$ と外場 h_n に対し、次の時刻の値 X_{n+1} をこの範囲に留めるために挿入した。この因子により、ロジスティック写像の実効的なパラメータは $(1 - K)c$ となり、今後使う K の値 0.2 程度では写像はカオティックではなく、安定な固定点を持つ。つまり、外場を与えなければ全素子は固定点に落ち込み、パターンはすぐに一樣になる。

図 78 に、 $K = 0.2$ での振幅場 $X(x)$ の典型的なスナップショットを示す。一見して、パターンがこれまで見てきたような非局所結合素子系の時空カオス状態におけるものとよく似ていることがわかるであろう。

もちろん、いまや系にはランダムな外場を与えられており、自励系ではないので系は時空カオス状態ではない。が、以下に見るようにその短距離での統計的性質は非局所結合素子系の特異的な時空カオス状態と同一である。そこで、以下ではこの系におけるこのような状態を「特異的な時空乱流的状态」とでも呼ぶことにする。

中央の素子のリターンマップを図 79 に示す。ロジスティック写像の非局所結合系の時とは異なり、素子の変数の分布はふたつのバンドには分かれておらず、非局所結合系の時に見られたような時間発展の 4 周期性もあまり顕著ではない。非局所結合系の時のように、初期条件によってクラスタリング状態に落ち込んでしまうこともない。また、リターンマップはもとの写像 $X' = cX(1 - X)$ よりむしろ実効的な写像 $X' = (1 - K)cX(1 - X)$ に近く、それがノイズにより上方向にランダムにずらされたような分布をしている。これらは非局所平均場の場合に比べ、外場の振幅が大きいためだが、ふたつの素子間の振幅の微少な差がロジスティック写像の局所リアプノフ指数のゆらぎにより拡大縮小されることに違いはない。

振幅パターンの時間発展を図 80 に示す。あまり見やすくはないが、非局所結合素子系の時空カオスと共通な特徴を持っていることがわかるであろう。

空間相関関数の原点付近でのベキ則と飛びの発生や、パターンのフラクタル性なども全く非局所結合素子系の場合と同じである。これを図 81, 82, 83 に示しておく。

7.1.2 非対称テント写像系

非局所結合素子系の場合と同様、素子として非対称テント写像を使用することもできる。後ほど詳しく解析することになるのでここでは議論しないが、やはりロジスティック写像の場合と同じく特異的な時空乱流状態を示し、そこでベキ的な空間相関やパターンのフラクタル性が観察される。図 85 と図 86 に、空間相関のベキ則とその指数、および原点でのギャップのデータのみ示しておく。

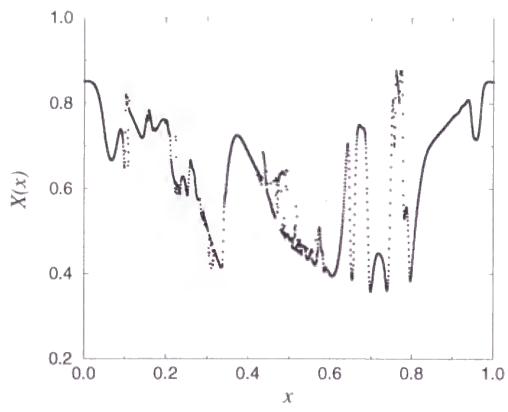


図 78: $K = 0.2$ でのロジスティック写像系のスナップ。

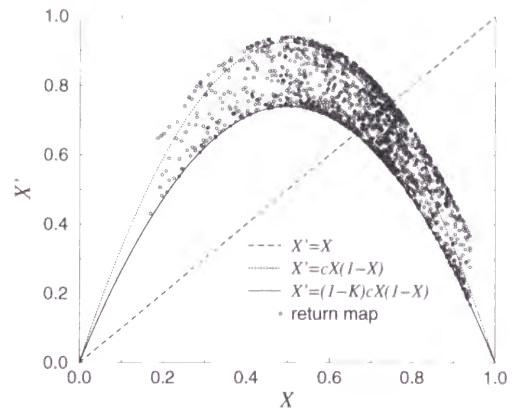


図 79: $K = 0.2$ での中央の素子のリターンマップ。

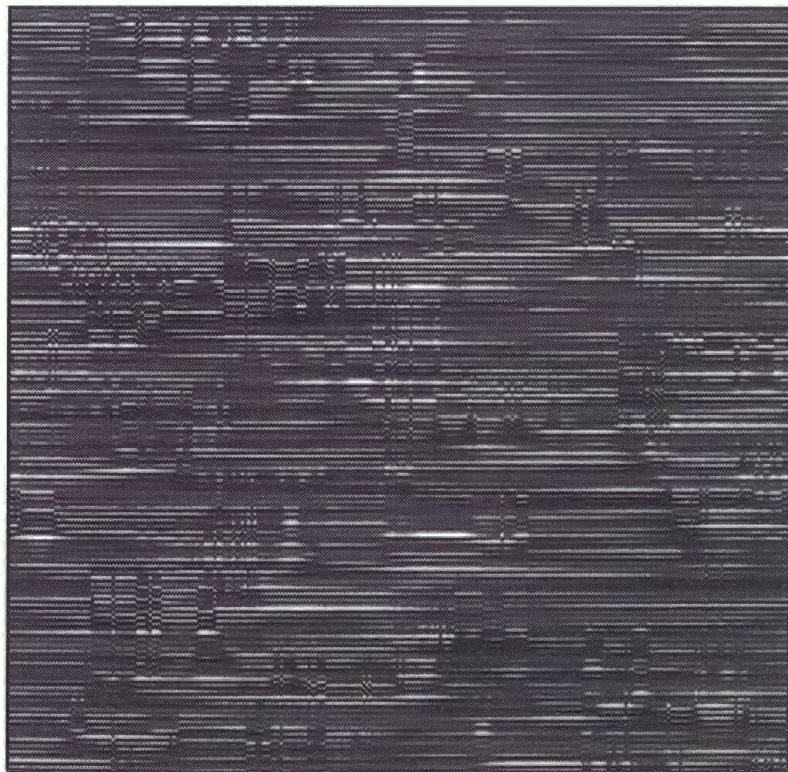


図 80: $K = 0.2$ での時間発展。

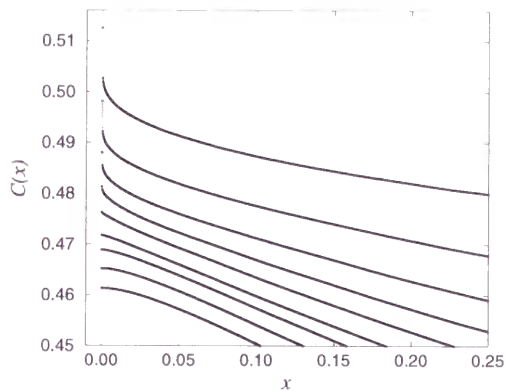


図 81: 空間相関関数の原点付近。一番上が $K = 0.14$, 一番下が $K = 0.30, 0.02$ づつ。

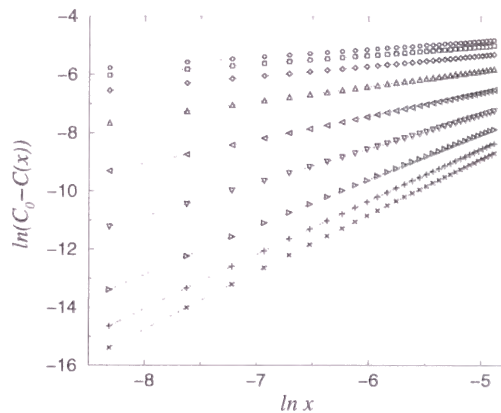


図 82: 空間相関関数の原点付近のベキ則。一番上が $K = 0.14$, 一番下が $K = 0.30, 0.02$ づつ。

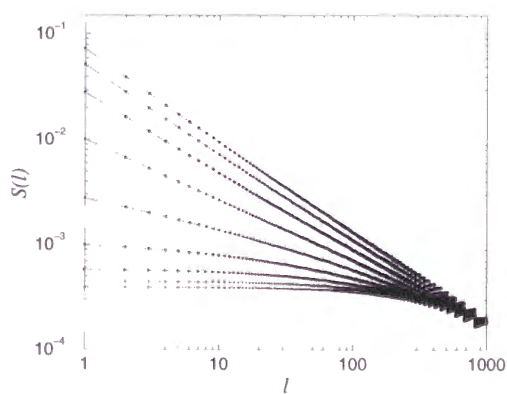


図 83: スケール l で測定した高低差 $S(l)$ 。一番上が $K = 0.14$, 一番下が $K = 0.30, 0.02$ づつ。

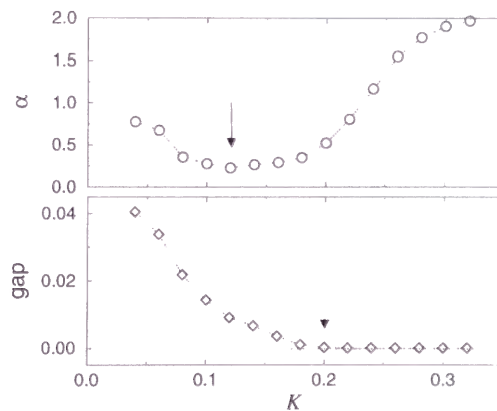


図 84: (上) ベキ則の指数 α 対結合強度 K 。矢印は極小と思われる位置。(下) ギャップ $C(0) - C_0$ 対 K 。矢印はギャップが有限になるとと思われる位置。

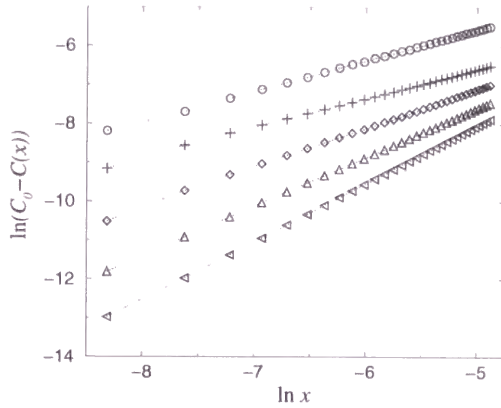


図 85: 外場を与えた非対称テント写像系の空間相関関数の原点付近のべき則。上から $K = 0.4, 0.45, 0.475, 0.5, 0.525$ 。

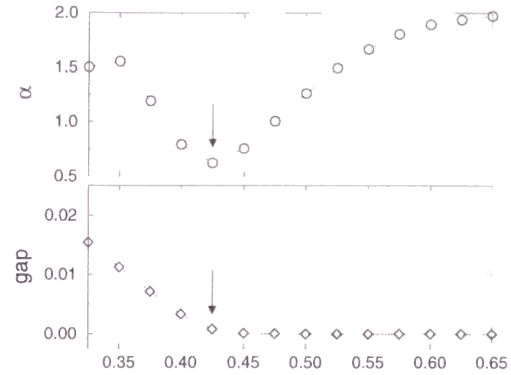


図 86: (上) ベキ則の指数 α 対結合強度 K 。矢印は極小と思われる位置。(下) ギャップ $C(0) - C_0$ 対 K 。矢印はギャップが有限になるとと思われる位置。

7.2 連続時間モデル - 微分方程式系

7.2.1 位相モデル

論文 [4] においては、素子に写像を使った離散時間モデルの他に、連続時間モデルも提案され、同様な空間相関関数のスケーリング則が観測されることが示された。この例は、素子がカオティックである必要はないことを実際に示した点で重要なので、ここで触れよう。

局所リアプノフ指数がゆらぎうる素子として、外場に駆動された位相振動子を使い、1次元の格子点上に N 個の素子を配置する。系は次のような方程式に従うものとする：

$$\dot{\phi}_j(t) = 1 - c \cos \phi_j(t) + b h_j(t), \quad (147)$$

ここで $\phi_j(t)$ は j 番目の素子の位相で、 c は素子の性質を決めるパラメータ、 $h_j(t)$ はランダムに変動する長波長の外場で、 b が外場の素子に対する影響の強さを決めるパラメータである。パラメータ c は、 $|c| < 1$ として位相が常に増加するようにしておく。が、 \cos の項のため位相の増え方は時間的にゆらいでおり、また対応してその局所リアプノフ指数も正負にゆらいでいる。外場 $h_j(t)$ は再び前と同様に系のもっとも長い波長成分のみの関数の位相をランダムに変化させることにする：

$$h_j(t) = \cos 2\pi \left(\frac{j}{N} + \psi(t) \right). \quad (148)$$

ここで $\psi(t)$ はランダム変数だが、今度は系の時間発展が連続であることを考慮して、一様乱数を使うかわりに次のブラウン運動に従うことにする：

$$\dot{\psi}(t) = av(t), \quad \dot{v}(t) = -v(t) + \xi(t), \quad (149)$$

ここで $\xi(t)$ は平均 0、分散 1 の白色ガウスノイズ：

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\delta(t - t'), \quad (150)$$

である。以下、 $a = 30$ 、 $b = 2.0$ に固定し、 c を変化させて系の様子を見ることにしよう。図 87 に $c = 0.4$ での素子の位相 $\phi(x, t)$ のなすパターンを示した (位相は増加し続けるので、平均値をさし

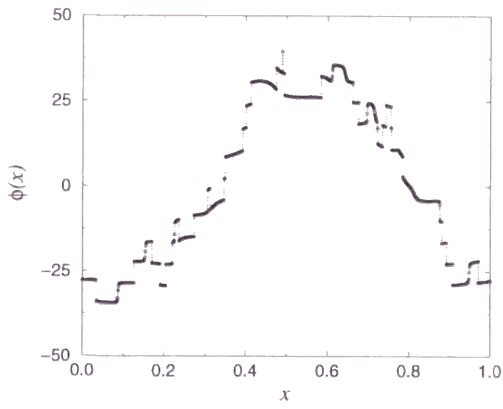


図 87: 外場を与えた位相モデルの $c = 0.4$ における典型的なスナップショット。

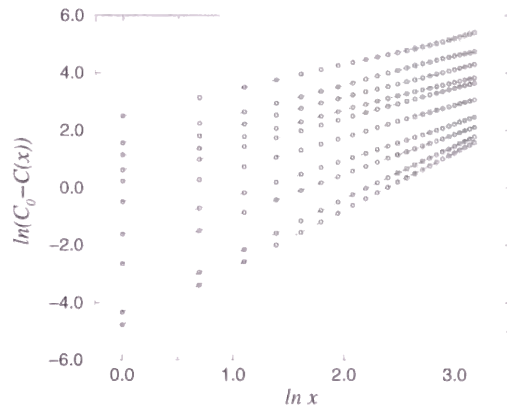


図 88: 空間相関関数の原点付近のべき則。一番下が $c = 0$ で一番上が $c = 0.9, 0.1$ ずつ。指数は 2 から 1 まで徐々に減少する。

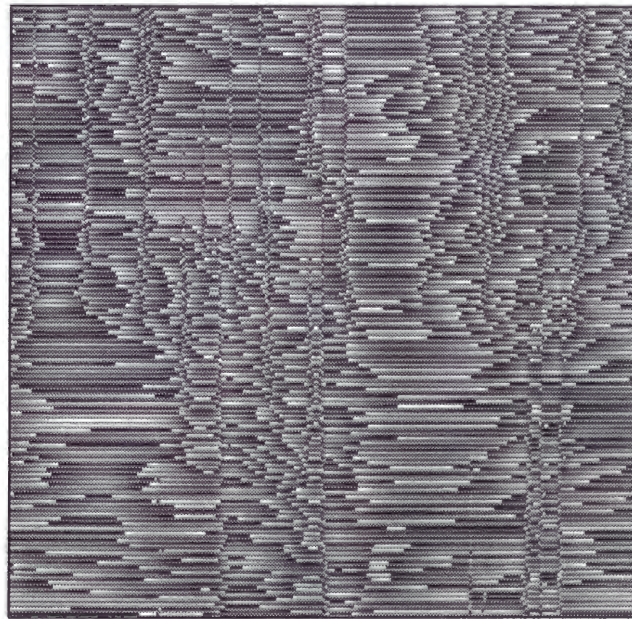


図 89: $c = 0.4$ での時間発展の様子。

引いて表示してある)。ところどころに位相スリップが発生していることがわかる。この図からだけではこの状態がこれまで見てきた特異的な時空乱流状態なのかどうかはわかりにくい、図 88 に示したように、空間相関関数はやはり原点付近でベキ的に振る舞っており、その指数はパラメータ c とともに連続的に変化する。なお、他の多くの系では結合定数 K を変化させると素子そのものの実効的なパラメータが変化していたので指数も K とともに変化していたが、この系では外場との結合定数 b を変化させても素子そのものの性質に変化はないので指数も変化しない。 c は素子の局所リアプノフ指数をあらわに変化させるので、相関関数のベキ則の指数を変化させる。図 89 には $c = 0.4$ での位相パターンの時間発展を示した。位相 $\phi(x, t)$ の 2π でのモジュラスを濃淡プロットしてあう。至るところで位相スリップが起り、複雑な時間発展をしていることがわかる。

7.2.2 複素ギンツブルクランダム振動子

結合していない CGL 振動子の集団にランダムに揺らぐ長波長の外場を与えても同様な現象が観測されることは容易に予想される。非局所結合 CGL の非局所平均場の項を空間相関のある長波長のノイズで置き換えた、次の確率微分方程式を考えよう：

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = W - (1 + ic_2)|W|^2W + K(1 + ic_1)(Z(x, t) - W), \quad (151)$$

ここで $Z(x, t)$ は長波長のノイズだが、今度は単純な三角関数より多少複雑なものを使ってみることにする。

空間相関のあるノイズ $\lambda(x)$ は、次のような方法で簡単に作ることができる。まず、平均 0 の独立な白色ガウスノイズを空間の各点にばらまく。次にこれを初期条件とした拡散方程式を適当な時間 t だけ解くのである。白色ガウスノイズによる初期条件を $\eta(x, 0)$ としよう：

$$\langle \eta(x, 0)\eta(x', 0) \rangle = \delta(x - x'). \quad (152)$$

これに t 時間の拡散 $\exp(-Dt\nabla^2)$ を作用させると、

$$\eta(x, t) = \exp(-Dt\nabla^2)\eta(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(-Dtk^2 + ikx)\tilde{\eta}(k, 0)dk, \quad (153)$$

を得る。ここでは空間 1 次元の状況を考えて、 $\tilde{\eta}(k, 0)$ は $\eta(x, 0)$ のフーリエ変換である：

$$\langle \eta(k, 0)\eta(k', 0) \rangle = \delta(k + k'). \quad (154)$$

以後積分時間 t は 1 として、時刻 1 における解 $\eta(x, 1)$ を生成された空間ノイズ $\lambda(x)$ としよう。 $\lambda(x) := \eta(x, 1)$ の空間相関は、容易に次のように計算できる：

$$\langle \lambda(x)\lambda(x') \rangle = \sqrt{\frac{1}{8\pi D}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{8D}\right). \quad (155)$$

つまり、空間相関長さは拡散定数 D でコントロールできる。以下では各瞬間でこの方法を使ってノイズを生成するので、時間相関はホワイトである。なお、さらに各瞬間にホワイトノイズを用意するかわりに各点でオルンシュタインウーレンバックプロセスを走らせておくことにより時間相関もあるノイズを生成する方法もあるが、ここでは立ち入らない。

このようにして生成したふたつの空間相関のあるノイズ $u(x, t)$ と $v(x, t)$ を用意し、これを外場 $Z(x, t)$ として系に与えることにする：

$$Z(x, t) := Z_0(u(x, t) + iv(x, t)), \quad (156)$$

ここで Z_0 はノイズの大きさを決める実パラメータで、空間相関長を決める D は u, v で同一にとる。

では、実際に数値計算してみよう。系の長さを 1 とし、拡散定数 D も 1 とすることにしよう。図 89 に、上に述べた方法で生成したノイズのある実現を示した。予想通り、長波長の空間ノイズとなっている。図 90 には $c_1 = -2.0, c_2 = 2.0, Z_0 = 4.0, K = 0.4$ の場合の素子の振幅 $|W(x, t)|$ のなす場の典型的なスナップショットを示した。特異的な時空乱流状態と呼べるような特徴を示していることがわかる。図 91 は振幅の空間相関関数の原点付近でのベキ則を確かめている。図 92 は複素平面上における素子の分布のスナップショットである。ノイズのため素子は本来のリミットサイクルの内側や外側に外れており、そのため局所リアップノフ指数がゆらいでベキ則の原因となっている。

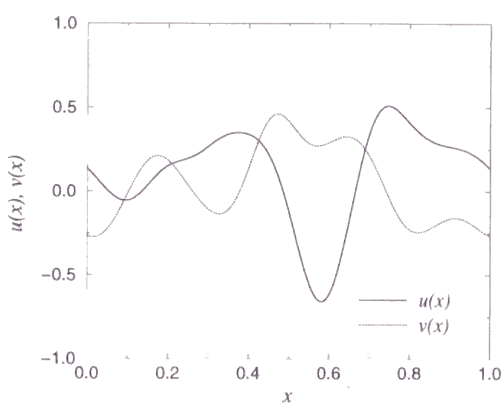


図 90: 空間相関のあるノイズ $u(x)$ と $v(x)$ のある実現。

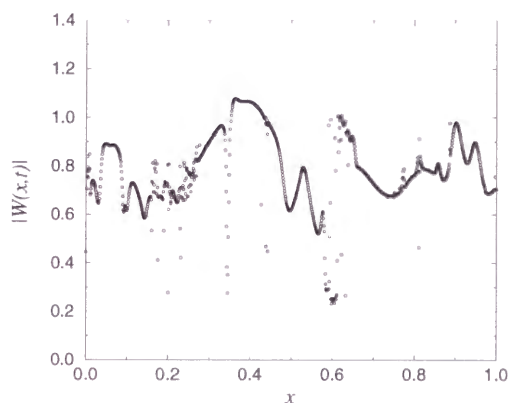


図 91: 空間相関のあるノイズを与えた CGL 素子集団の典型的なスナップショット。

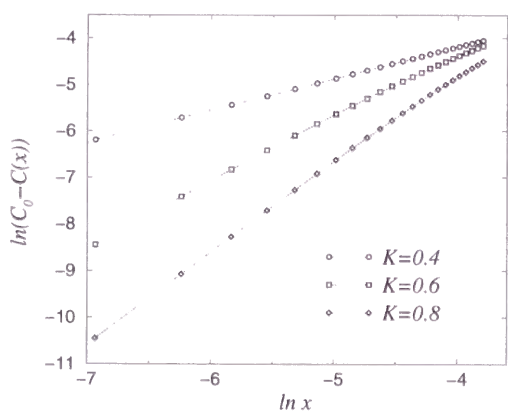


図 92: 空間相関関数の原点付近のベキ則。

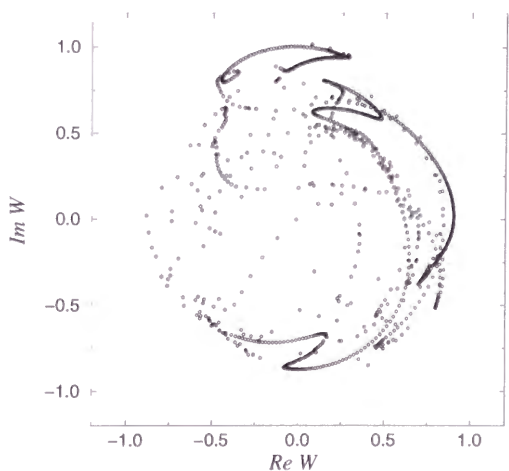


図 93: W 平面での典型的なスナップショット。

7.3 非局所結合系と外場系の違い

以上述べてきたように、ランダム外場を与えた系は少なくとも短距離でのスケールリング則に関しては、非局所結合素子系の特異的な時空カオス状態によく似た時空乱流的状态を示す

しかしもちろん両者は異なる系であり、大きく性質の異なる点も多数ある。例えば、当然ではあるが、外場系においてはミクロな揺ぎのマクロへのフィードバックがないため、クラスタリングのような現象は生じない。特に空間次元が2の数値計算においては、ハターンの違いが顕著である

8 時間的な間欠性

第5章と第6章の空間相関などのベキ則の確率モデルについての議論が正しいとすると、我々の系(非局所結合素子系とランダム長波長外場を与えた素子系)は以下のような性質を持つはずである:

1. 近所にある任意のふたつの素子の状態差はノイジーなオンオフ間欠性を示す,
2. そのようなふたつの素子の状態差の分布関数はベキ的な部分を持つ,
3. 分布関数の原点付近(状態差が小さいところ)には外場によるカットオフがある.

この章では、我々の系がこれらの性質を示すことを実際に数値計算して確かめることにしよう。

8.1 オンオフ間欠性

オンオフ間欠性は、恐らく藤坂たち [25] によって最初に指摘された。彼らはふたつのカオティックな挙動をする同一の性質の素子を互いに引き込みあうように結合させ、その臨界結合強度のわずかに下側において、素子が完全には引き込み合わないものの長時間非常に状態差が小さい状態をとり続け(ラミナー)、それが時々発生するごく短い時間の状態差の激しい増大(バースト)によって中断されることを発見した。彼らはその後の解析で、この特殊な間欠性のメカニズムが本質的にランダム乗法過程であること、オンオフ間欠的な状態はパワースペクトルやバースト間のラミナー長の分布のベキ則によって特徴づけられることなどを明らかにした。

なお、オンオフ間欠性 (on-off intermittency) という言葉自体は、簡単な確率モデルでこれらのベキ則を明らかにした Platt たちによるものであろう [28]。また、Ott たち [30] は力学系の視点からこの状況を考え、不変多様体上にカオティックなアトラクターが埋め込まれていて、その軌道が不変多様体に対し垂直な方向への摂動に対し平均的に不安定化する(プロウアウト分岐, blowout bifurcation) ときに起こる現象であると位置づけた。

8.2 ノイジーなオンオフ間欠性

オンオフ間欠性は、ふたつの素子が引き込みあう臨界結合強度のごく近傍で生じる臨界現象であり、パワースペクトルやラミナー長分布などのベキ則は臨界点のごく近傍でのみ観測される。

一方、オンオフ間欠性を示すような系に対し、別種の弱いノイズ(外的なものでもよいし、素子の微妙な性質のずれに起因する内的なものでもよい)を与えるとこの状況は一変する。このときには、この弱いノイズが種となって、臨界結合強度の上側、つまりもし素子が完全に同一で他の影響がなければ素子が完全に引き込み合うような領域を含む広い範囲で、同種の間欠性が観測されるようになる。このことはおそらく Platt たち [29] によって最初に指摘され、簡単な乗法確率モデルに基づく明快な説明がなされた。

また、このことに関連して、Ashwin たち [40] はやはり力学系的な立場から、不変多様体に対し垂直な方向への摂動に対し、不変多様体に埋め込まれたカオティックアトラクター中のある一本の軌道 (Hunt と Ott の主張 [41] によると多くの場合不安定な周期軌道だが、明らかではない) についての平均で不安定化すること (アトラクターの泡立ち, bubbling) が重要であると主張し、その状態に対するノイズの効果などを議論した。

またかつて Pikovsky [27] も、ノイジーなオンオフ間欠性という言葉は使わなかったが、微妙にパラメータずれた結合カオス素子や、パラメータは同じだが微妙に異なるノイズによって駆動され

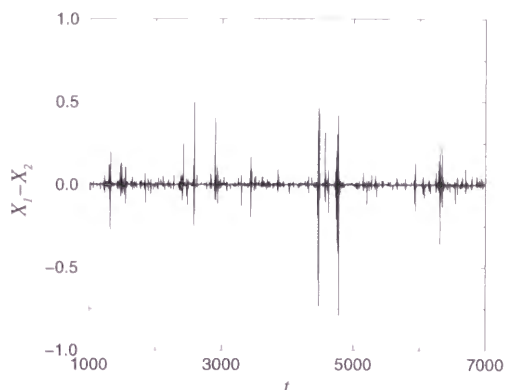


図 94: 非局所結合 CGL の中央の素子とひとつとなりの素子 ($\Delta x = 2^{-10}$) の変数の実部の差。素子の個数は $N = 1024$ で、パラメータは $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $\gamma = 1.0$, $K = 0.85$ 。

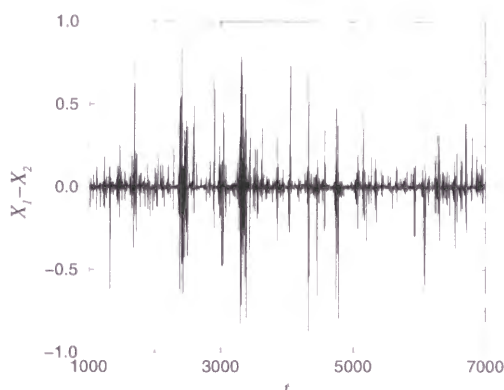


図 95: 同じ状況だが、中央の素子と 8 つ離れた素子 ($\Delta x = 2^{-7}$) の変数の実部の差。同様な間欠性を示すが、バーストの頻度が大きくなっている。

た結合されていないカオス素子を研究しており、素子間の状態差の分布などを論じており、それは我々の系の挙動と深い関わりがある。

我々の系においては、ノイジーなオンオフ間欠性は非常に重要である。というのは、我々が観測しているパラメータの広範囲においては、素子の局所リアプノフ指数は正負にゆらぎうるが、まだ平均的には負でカオティックではないからである。我々の系においては素子の間に常に存在する微小な外場のずれが種となって、ノイジーなオンオフ間欠性が生じ、さらにはそれがべき的な空間相関の原因となっている。

8.3 我々の系におけるオンオフ間欠性

では、実際に我々の系におけるノイジーなオンオフ間欠性と差の確率分布関数のべき則を見ていこう。

8.3.1 非局所結合複素ギンツブルクランダム方程式

まず、非局所結合 CGL 系について考える。結合長 γ^{-1} より内側にあるふたつの素子に注目し、その変数を $W_1(t)$ と $W_2(t)$ としよう。 $W_1(t)$, $W_2(t)$ は複素数なので、ふたつの素子の状態差を実部 $X(t) := \text{Re}W(t)$ の差 $X_1(t) - X_2(t)$ を使って観測することにする。虚部の差や、振幅の差をとっても同様な結果が得られる。

図 94 に、中央の素子とそのひとつとなりの素子の変数の実部の差 $X_1 - X_2$ の典型的な時間発展を示した。 $N = 1024$ 個の素子を使ったので、ひとつとなりの素子までの距離は $\Delta x = 1/1024$ である。予想通り時系列は間欠的であり、ふたつの素子の変数がほとんど等しい (内部場の微小なずれによるノイズレベルまで) ラミナー状態が時折の大きなバーストによって中断されている。

図 95 には、全く同じ状況において、中央の素子と 8 つ離れた、つまり間隔を $\Delta x = 8/1024$ 隔てたふたつの素子の変数の実部の差 $X_1 - X_2$ の時間発展を示した。図 94 と同様な間欠性を示しているが、素子間の距離が大きいため素子の感じる内部場のずれが大きく、ラミナー時のノイズレベルが大きい。また、対応してバーストが起こる回数も多い。

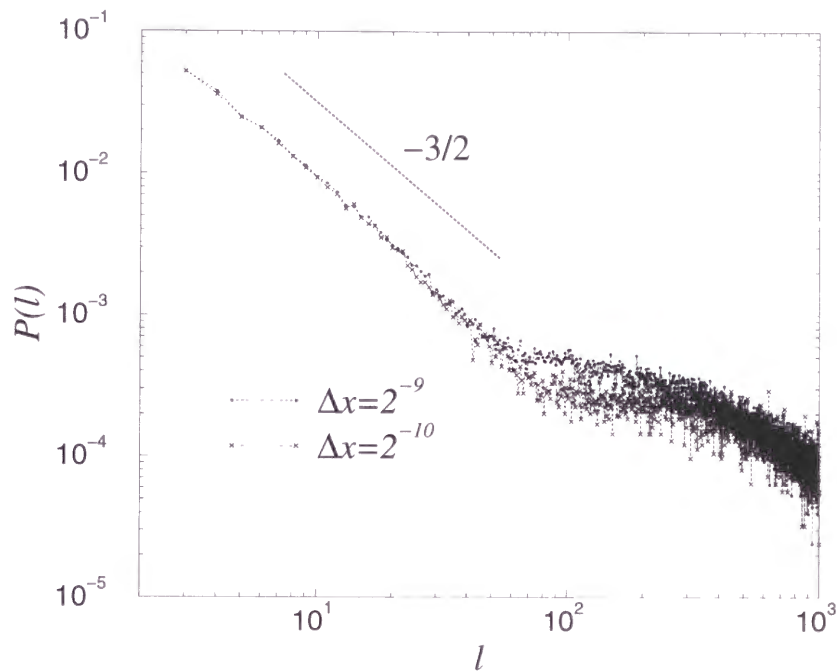


図 96: ラミナー長分布の両対数プロット。素子間の距離が $\Delta x = 2^{-9}$ の場合と 2^{-10} の場合について重ねて表示した。べき的な部分の傾きは $-3/2$ に近い。

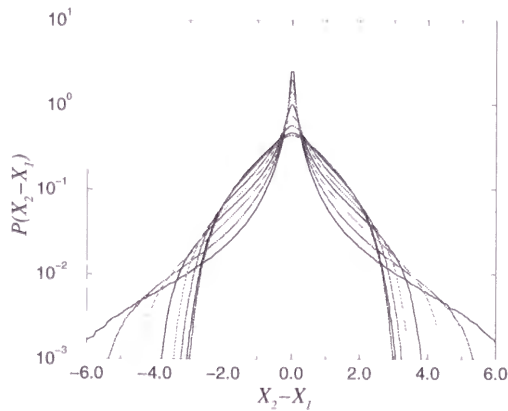


図 97: 変数の差 $X_2 - X_1$ の確率分布関数。平均と標準偏差で規格化してある。一番尖っているものが $\Delta x = 2^{-8}$, 以下 $2^{-7}, 2^{-6}, \dots, 2^{-1}$ 。スケールが小さいほど間欠性が強い。

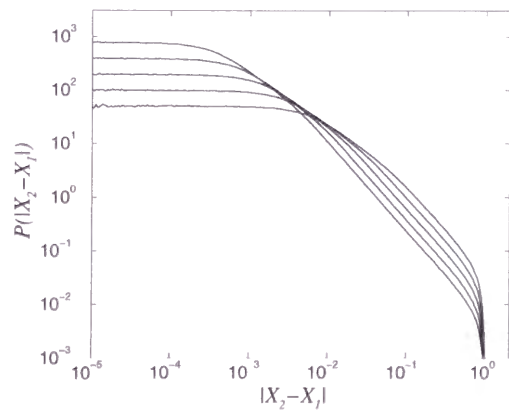


図 98: 変数の差 $X_2 - X_1$ の確率分布関数の両対数プロット。左右対称なので元の分布関数の右半分だけ示した。平らな部分が一番短いのが $\Delta x = 2^{-12}$, 以下 $2^{-11}, 2^{-10}, 2^{-9}, 2^{-8}$ 。べき的な部分の指数はどれも同じ。

この時系列のラミナーの持続時間 l の分布 $P(l)$ を測定したものを、図 96 に示す。オンオフ間欠性に特徴的な [39]、傾き $-3/2$ のベキ則が確認できるだろう。なお、図はラミナー長 l が 3 以上のデータだけが示してある。それ以下の持続時間のデータは CGL 振動子自体が回転するタイムスケールと重なってくるため、ベキ則から外れる。また、 l が大きいところでもベキ則から外れているが、これはノイジーなオンオフ間欠性に特徴的な形で、加法ノイズの効果によるものである。詳しい議論は C enys ら [32] などによってなされているが、ベキ則が破れる位置は加法ノイズが小さいほど原点から遠くなる。図には素子間の距離が $\Delta x = 2^{-9}$ のデータと $\Delta x = 2^{-10}$ のデータが重ねて表示してある。 $\Delta x = 2^{-10}$ の場合の方が素子間の非局所平均場のずれが小さいため、ベキ則の成り立っている領域が若干広い。

ふたつの素子間の距離が大きくなるにつれて、ふたつの素子が感じる非局所平均場のずれは大きくなり、やがて間欠性はこのノイズによって見えなくなる。このオンオフ間欠性が見えなくなる距離は、非局所結合距離と同程度と見積もることができる。このことは、変数の差 $y := X_2 - X_1$ の確率分布関数 $P(y)$ の素子間の距離に対する依存性を見ればわかりやすい。図 97 に素子間の距離をいろいろ変えて測定した分布関数 $P(y)$ を標準偏差で規格化したものを片対数プロットした。この種のプロットは流体乱流などで変数の非ガウス性を強調したい場合によく使われるものである。素子間の距離が十分離れているときは $P(y)$ は放物的で、 y がガウス分布に近いことを意味しているが、素子間の距離が小さくなり、非局所平均場の結合距離より内側では分布のテイルの落ち方がガウスの場合より遅く、大きな偏差を持った値の出現する頻度が高いこと、すなわち間欠性を意味している。

図 98 には、素子間の距離をいろいろ変えて測定した分布関数 $P(y)$ の右半分 (明らかに左右対称だが) を両対数プロットした。各分布関数は予想された通りベキ的な減衰領域を持ち、また y が小さいところでは非局所平均場のずれからくるノイズの効果による、ベキ則の成り立っていない平らな部分を持つ。さらに、図 94 と図 95 から予想されるように、この平らな部分の長さは素子間の距離とともに (比例して) 伸び、空間相関関数のベキ則の原因となっている。

8.3.2 ランダムな長波長外場を与えたロジスティック写像

もうひとつの例として、ランダムな長波長外場を与えたロジスティック写像を扱っておこう。後ほどより詳しい解析がなされるので、ここでは簡単に述べるにとどめる。

図 99 には隣り合う素子の変数の差の典型的な時間発展を示した。やはり非局所結合 CGL の場合と同様な間欠性が見られる。図 100 にはラミナー長分布を示した。傾き $-3/2$ のベキ則と、外場の効果によるベキ則が破れる領域があること、外場のずれが小さいとベキ領域が延びること等、非局所結合 CGL の場合と全く同じである。

変数の差の分布関数についても同様な結果が得られるが、後でこの系のマルチスケーリング性を解析するときに詳しく調べるので、ここでは示さない。

8.3.3 その他の系

以上述べたように、我々の系の特異的な時空カオス状態においては、近傍の任意のふたつの素子の間にノイジーなオンオフ間欠性が起こっており、時空オンオフ間欠性とでも呼べるような状況になっている。ここではふたつの系だけを扱ったが、振幅場の差分のモーメントのベキ則が観測されるような特異的な時空カオス状態あるいは時空乱流状態では、どの系においてもここで述べたような時空オンオフ間欠性が起こっているはずである。

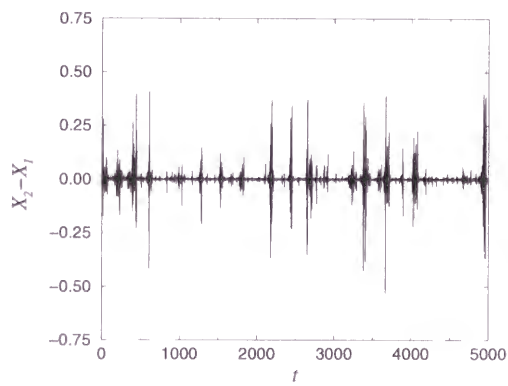


図 99: ランダム長波長外場を与えたロジスティック写像系の中央の素子とひとつとなりの素子 ($\Delta x = 2^{-9}$) の変数の実部の差。素子の個数は $N = 512$ で、パラメータは $c = 3.7$, $K = 0.2$

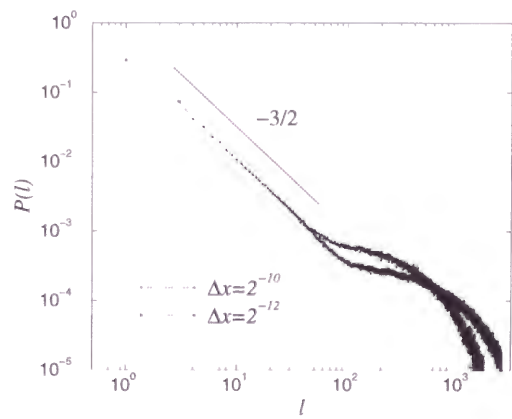


図 100: ラミナー長分布の両対数プロット。素子間の距離が $\Delta x = 2^{-10}$ の場合と 2^{-12} の場合について重ねて表示した。べき的な部分の傾きは $-3/2$ に近い。

9 確率分布関数と局所リアプノフ指数

既に述べたように、我々の扱っている時空カオス／時空乱流的状态は、弱い加法ノイズを加えたランダム乗法過程としてうまくモデルされる。そのような確率過程においては、かなり一般的に、確率変数の定常分布関数がべき的な減衰領域を持つことが知られている。そして、第8章の図98でも示したように、我々の系においても、実際にべき的な分布が確認されている。

ランダム乗法過程モデルの解析結果によると、我々の系における空間相関およびその他の場の差分のモーメントの短距離でのべき則は、弱い加法ノイズの強さに対する確率変数のモーメントのべき則であり、その指数は乗法ノイズ、すなわち素子の局所リアプノフ指数のゆらぎの統計的性質によって決まる。この乗法ノイズの性質によって確率変数の分布関数のべき的な減衰部分の指数が決定され、その指数により確率変数のモーメントの指数が決まるのである。

この章では、実際に我々の系においてべき的な分布関数が観測され、そのべき的な部分の指数は素子の局所リアプノフ指数と関係し、さらにそれが空間相関のべき則の指数と関係していることを、いくつかの具体的な系についての数値計算結果を挙げて説明することにしよう。

まず、乗法確率モデルによる結果を再度述べておこう：

1. 距離 x 離れた素子間の振幅場の高さの差 $y(x)$ の分布関数 $P(y; x)$ は、原点付近の x に比例する長さの平らな領域と、 $P \propto y^{-1+\beta}$ のようなべき的な減衰領域を持ち、その指数 $-1 + \beta$ は素子の局所リアプノフ指数のゆらぎの性質で決まる。特にガウス分布の時には、その平均と分散を λ_0 と D_λ として、

$$\beta = \frac{\lambda_0}{D_\lambda}. \quad (157)$$

2. 振幅場のフラクタル次元 D_f や空間相関関数の原点でのべき則の指数 α は、分布関数のべき指数 β で以下のように決まる：

$$D_f = \begin{cases} 1 & (\beta < -1), \\ 2 - |\beta| & (-1 < \beta < 0), \\ 2 & (0 < \beta), \end{cases} \quad (158)$$

$$\alpha = \begin{cases} 2 & (\beta < -2), \\ |\beta| & (-2 < \beta < 0), \\ \beta & (0 < \beta), \end{cases} \quad (159)$$

$\beta = 0$ は臨界点であり、 $\beta > 0$ では空間相関の原点に有限のギャップが現れ、場の連続性の破れを意味する。指数の転移点近傍ではべき則が成立する領域はごく狭い。

9.1 ランダム長波長外場を与えた非対称テント写像系

では、最初の例としてランダム長波長外場を与えた非対称テント写像系についての結果を示そう。素子のパラメータは $p = 0.75$ に固定する。 $N = 2^{12}$ 個の素子を使用したので長さの最小単位は 2^{-12} である。

図101に、結合強度が $K = 0.5$ である場合において、素子間の距離 x を 1, 2, 3, 4, 5, $7(\times 2^{-12})$ と変化させて測定した振幅場の高さの差 $y(x) := |X(x) - X(0)|$ の分布関数 $P(y; x)$ を示す。予想通り、原点付近には平らな領域があり、その幅は距離 x を大きくするとともに大きくなる。また、それに続くべき的な領域の指数は x によらずほぼ一定である。

図 102 には、素子間の距離 x を 2^{-12} に固定し、結合強度 K を 0.45, 0.475, 0.5, 0.525, 0.55 と変化させて測定した分布関数 $P(y; x)$ を示す。原点付近の平らな領域の長さは K によらずほぼ一定だが、その後のべき則の指数は K とともに変化する。

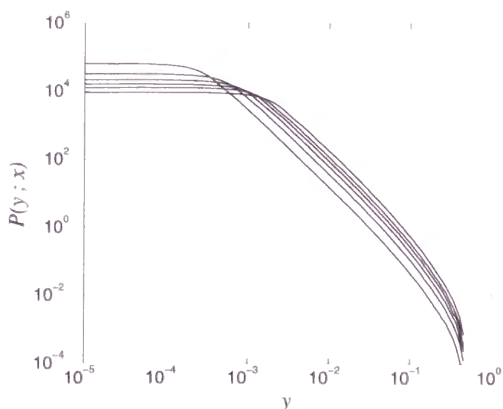


図 101: 非対称テント写像系の振幅差 $y(x)$ の分布関数 $P(y; x)$ 。 $K = 0.5$ で、上から $x = 1, 2, 3, 4, 5, 7 (\times 2^{-12})$ 。

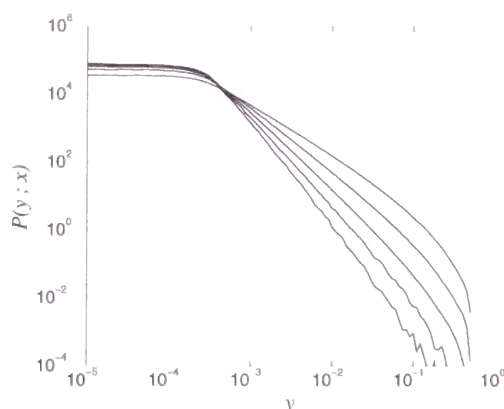


図 102: 非対称テント写像系の振幅差 $y(x)$ の分布関数 $P(y; x)$ 。 $x = 2^{-12}$ で、傾きのゆるいものから $K = 0.45, 0.475, 0.5, 0.525, 0.55$ 。

図 103 に、各分布関数のべき的な減衰部分から読み取った指数 β を、結合強度 K に対してプロットした。 K が大きいところでは β は負だが、 K の減少とともに β は増加し、 $K \simeq 0.425$ 以下では正になる。この β が負から正に変わる K の値は、前述の理論によると近傍の任意のふたつの素子がプロウアウト分岐を起こす値に対応しており、そこで空間相関関数の指数 α は 0 となり、原点に有限のギャップが現れるようになるはずである。第 7 章の図 86 を見ると、たしかにこの値で指数 α は 0 にはなっていないが極小になっており (前述した対数的な発散のためべき則によるフィットが正確ではない)、ギャップが生じはじめています。

しかし、分布関数の指数 β から予想される空間相関関数のべき則の指数 α と、実際に測定された α の一致はそうよくはない。図 104 からわかるように、大体の傾向はあっているが、転移点付近の非べき的な遷移領域はかなり広く、その間の指数の一致を妨げている。同様に、分布関数の指数 β から予想されるパターンのフラクタル次元 D_f と直接測定された D_f も定量的によい一致をしているとは言えない。なお、非べき的な遷移領域は振幅差を測定する素子間の距離を短くすればするほど狭くなるので、より大きな N を使って数値計算すれば多少はましな一致を得ることができる。第 11 章の振幅場のマルチアフィン性の議論を参照せよ。

では、次に局所リアプノフ指数のゆらぎと分布関数の指数 β の関係を調べよう。もし局所リアプノフ指数のゆらぎが白色ガウスノイズと見なせるなら、前に述べたように $\beta = \lambda_0 / D_\lambda$ の関係がある。しかし、通常のカオス素子の局所リアプノフ指数のゆらぎは色つきで非ガウスである。

まず、非対称テント写像の局所リアプノフ指数 $\lambda_n := \log |(1 - K)f'(X_n)|$ の典型的な時間発展 (中央にある素子) の様子を図 106 に示す。振幅 X は多くの場合非対称テントの頂点の左側にあり、局所リアプノフ指数は負だが、たまに軌道が頂点の右側に入り、局所リアプノフ指数が正となる。局所リアプノフ指数 λ_n の平均と分散:

$$\lambda_0 := \frac{1}{T} \sum_n \lambda_n, \quad D_\lambda := \frac{1}{2T} \sum_n (\lambda_n - \lambda_0)^2, \quad (160)$$

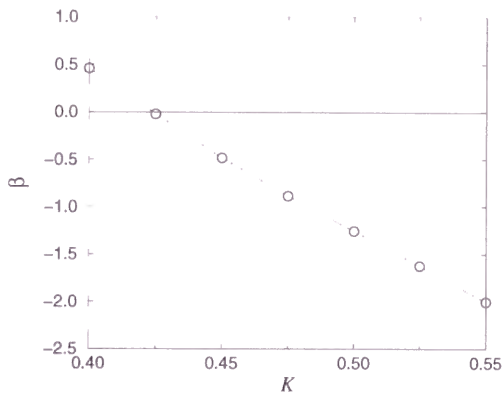


図 103: 分布関数のべき的な減衰部分の指数から読み取った β 対結合強度 K 。

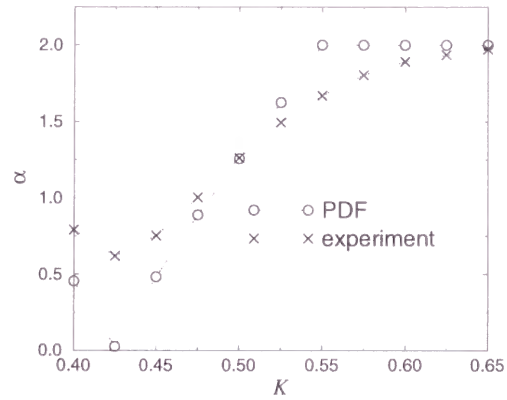


図 104: 分布関数から得た β より計算した空間相関のべき則の指数 α と、直接空間相関の数値計算により得られた α の比較。

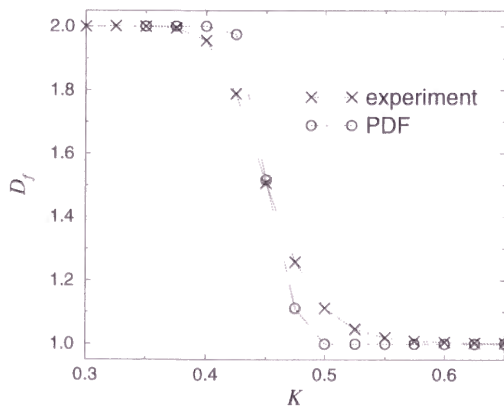


図 105: 分布関数から得た β より計算したパターンのフラクタル次元 D_f と、直接数値計算により得られた D_f の比較。

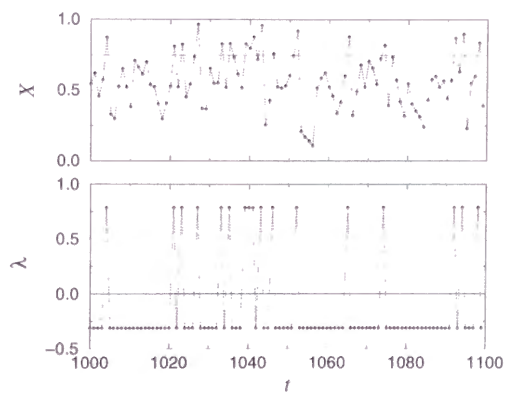


図 106: $K = 0.45$ での中央の素子のダイナミクス (上) と局所リアプノフ指数 (下)。

の結合強度 K に対する変化を図 107 に示す。 λ_0 は K の減少とともに増加し、前述したブrouアウト分岐点 $K \simeq 0.425$ で正に転じている。ゆらぎ D_λ は比較的小さく、あまり変化しない。分布が白色ガウスである場合、もしくは β が小さいときに有効な理論式 $\beta = \lambda_0/D_\lambda$ を使ってこれらの局所リアプノフ数の平均と分散より計算した β と、分布関数のベキの指数より得られた β を図 108 にプロットした。ふたつの β は比較的よい一致を示している。しかし、非対称テント写像では、局所リアプノフ指数は比較的白色かも知れないが、明らかに 2 値ノイズなのでガウス分布からは程遠く、これは偶然である。なお、同じ計算を例えばロジスティック写像に対して行くと、ふたつの β は粗い比例関係にはあるがその大きさがかなり異なるものとなる。

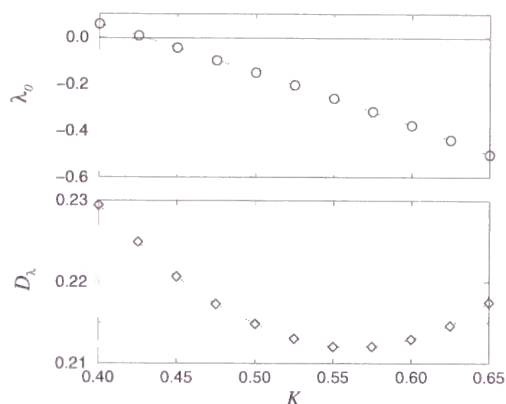


図 107: 結合強度 K に対する局所リアプノフ指数の平均と分散の依存性。

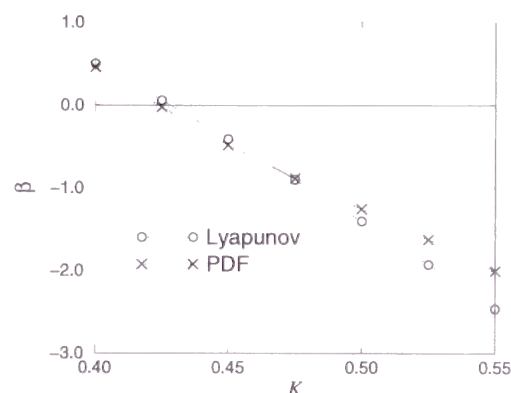


図 108: 分布関数から得た β と、局所リアプノフ指数より計算した β の比較。

9.2 非局所結合複素ギンツブルクランダウ振動子系

では次に、非局所結合 CGL 系についての結果を簡単に示しておこう。図 109 は、結合強度を $K = 0.85$ に固定して、素子間の距離 x を 1, 2, 4, 8, 16 ($\times 2^{-12}$) と変化させて測定した変数 $X(x)$ の高さの差 $y(x) := |X(x) - X(0)|$ の分布関数 $P(y; x)$ を示す。やはり、原点付近には平らな領域があり、その幅は距離 x を大きくするとともに大きくなる。また、それに続くベキ的な領域の指数は x によらずほぼ一定である。

図 110 には、素子間の距離 x を 2^{-12} に固定し、結合強度 K を 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95 と変化させて測定した分布関数 $P(y; x)$ を示す。原点付近の平らな領域の長さは K によらずほぼ一定だが、その後のベキ則の指数は K とともに変化する。

図 111 には、分布関数のベキ的な減衰部分の指数から読み取った β の結合強度 K に対する依存性をプロットした。 K が減少すると共に β は増加し、 $K \simeq 0.75$ 以下では正の値を取るようになる。この K の値は指数 α が極小をとる値とほぼ一致している。ところが、図 24 と図 25 を見ると、非局所結合 CGL 系においては空間相関の原点でのギャップが発生する位置はこの K の値よりも大きい側にある。つまり、指数 α の極小位置とギャップの発生位置は一致していない。これは理論の予想とは異なっており、非局所結合 CGL 系には理論にとりいれられなかった何らかの要因が存在するものと思われる。例えば、CGL 系においてはクラスタリングが起こりやすいことと関係あるかも知れない。なお、ロジスティック写像系においてもこのようなずれがある。図 112 には、この β から予想される空間相関のベキの指数 α を実測値と比較した。挙動は定性的には一致している。

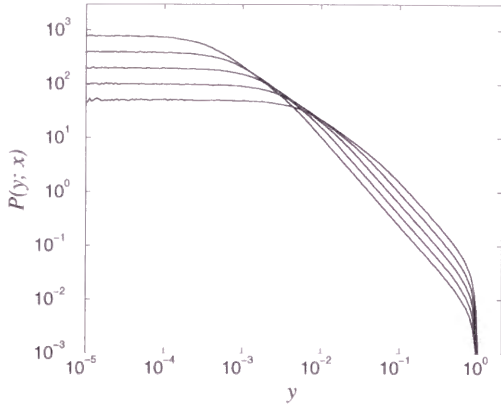


図 109: 非局所結合 CGL 系の振幅差 $y(x)$ の分布関数 $P(y; x)$ 。 $K = 0.85$ で、上から $x = 1, 2, 4, 8, 16 (\times 2^{-12})$ 。

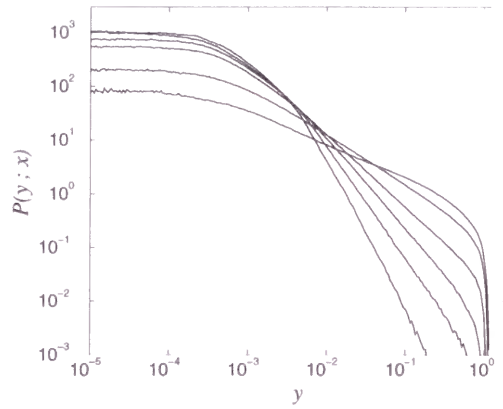


図 110: 非局所結合 CGL 系の振幅差 $y(x)$ の分布関数 $P(y; x)$ 。 $x = 2^{-12}$ で、傾きのゆるいものから $K = 0.70, 0.75, 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$ 。

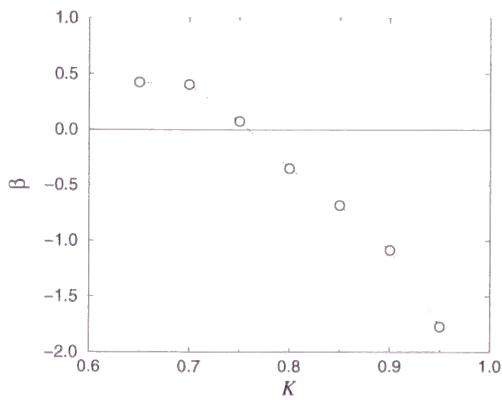


図 111: 分布関数のべき的な減衰部分の指数から読み取った β 対結合強度 K 。

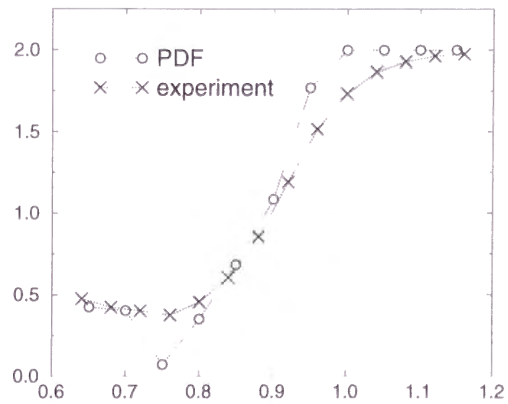


図 112: 分布関数から得た β より計算した空間相関のべき則の指数 α と、直接空間相関の数値計算により得られた α の比較。

図 113 に、中央の素子の振幅 $|W|$ と軌道拡大率 λ (以下で述べるように、局所リアプノフ指数とは少し違う) の典型的な時間発展を示した。やはり正負にゆらいでおり、オンオフ間欠性の原因となっていることがわかる。素子が 2 つの内部自由度を持っているため、振幅 $|W|$ と λ の対応はそれほど明確ではない。なお、ここで示した軌道拡大率は、以下のようにして測定した。ある適当な瞬間に系の中央の素子の変数 X と Y に微小な摂動 $\Delta X(0)$ と $\Delta Y(0)$ を与え、適当な時間 Δt だけ発展させる。そして、発展した摂動 $\Delta X(\Delta t)$, $\Delta Y(\Delta t)$ からこの間の軌道拡大率 λ を、

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t} \log \frac{\sqrt{\Delta X(\Delta t)^2 + \Delta Y(\Delta t)^2}}{\sqrt{\Delta X(0)^2 + \Delta Y(0)^2}}, \quad (161)$$

と定義するのである。なお、図には $\Delta t = 20$ として測定したデータを示したが、 $\Delta t > \sim 10$ 程度にとれば、平均値 λ_0 は大体同じ値に収束した。 $\Delta t \rightarrow \infty$ の極限では、この量は最大リアプノフ指数 (今の場合ふたつしかないので大きな方) に近づくが、ここで使うような平均時間では最大リアプノフ指数に対応する成分以外からの寄与もあるため、局所リアプノフ指数とは微妙に違うものである。が、いずれにせよ軌道拡大率 λ が正負にゆらくことに違いはなく、現象の本質を見るにはこれで十分であろう。

最後に図 114 に、結合強度 K に対する平均リアプノフ指数 λ_0 の依存性を示す。やはり K を小さくして行くとある点で λ_0 は負から正に転じ、そのときの K の値は分布関数のべき的な減衰の指数が -1 ($\beta = 0$) となる値に対応している。が、前出の公式 $\beta = \lambda_0 / D_\lambda$ により求めた β の値は図 111 とはかなり大きさが異なり、ノイズの色つき非ガウス性の効果が顕著に現れる。

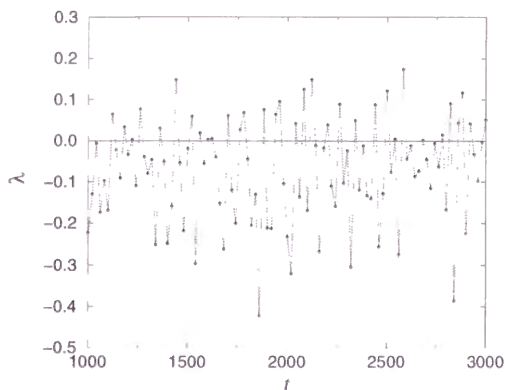


図 113: $K = 0.85$ での中央の素子の局所リアプノフ指数の時間発展

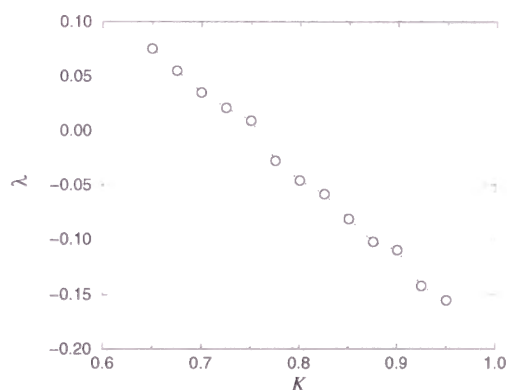


図 114: 平均リアプノフ指数 λ_0 vs. 結合強度 K

以上、確率分布関数の形、べき的な減衰部分の指数とフラクタル次元や空間相関のべき則の関係、および素子の局所リアプノフ指数の統計的性質と確率分布関数のべき則の指数の関係など、理論的に予想されていたことが実際の系においても成立していることを見た。以下の章では、振幅場と、新たに導入する振幅の差分場のスケーリング則、およびそれらの確率分布関数について、より詳しい議論をする。

10 空間的な間欠性

我々の扱っている系は、時間と空間の両方の意味において間欠的である。時間的には、近傍にある任意のふたつの素子間にノイジーなオンオフ間欠性が生じていることを述べた。空間の各所でそのような間欠性が起こっているため、空間パターンも必然的に間欠的である。この章では、我々の系における空間的な間欠性について述べる。

まず、我々の系において観測される空間的な間欠性を事例をあげて示す。次に、前の章で述べた確率過程モデルでの議論に従い、これまでパターンのフラクタル性、空間相関の短距離でのベキ則などと個別に扱ってきたことを、場の差分の q 次モーメントのベキ則としてまとめて一般化し、そのスケーリング指数のスペクトル $\zeta(q)$ を導入する。この量は場の間欠性を特徴づけるのに有用であり、振幅場はマルチアフィン性と呼ばれる特徴を持つことが明らかになる。また、空間パターンの間欠性をより詳しく見るため、振幅場の差分で定義した差分場を導入し、その間欠性を特徴づけるために適当に定義した場の測度の一般化次元 $D(q)$ を導入する。その結果、差分場はマルチフラクタル的であることが明らかになる。これらのマルチアフィン性とマルチフラクタル性は、次の第 11 章でランダム長波長外場を与えた素子系について、詳細に解析する。

10.1 空間パターンの間欠性

空間パターンの間欠性は、振幅場そのものからも示唆されるが、振幅の差分で定義した差分場を見ると一見して明らかである。このことを、非局所結合 CGL 系について示しておこう。その他の系でも同様な結果が得られるが、特にランダム長波長外場を与えたロジスティック写像と非対称テント写像の系については、後ほど詳しい解析を行う。

図 115 に、非局所結合 CGL 系 (パラメータは前と同じで $c_1 = -2.0$, $c = 2.0$, $\gamma = 8$, $K = 0.85$) の変数の実部 $X(x)$ とその差分 $Z(x) := X(x + \Delta x) - X(x)$ の絶対値をプロットした。ここで、 Δx は差分をとる距離で、以下では系の最小スケールとする。すなわち長さ 1 の系に N 個の素子を並べたときには、 $\Delta x = N^{-1}$ である。振幅場 $X(x)$ はこれまでと同じく比較的連続な部分と激しく乱れた部分が共存しているという意味において間欠的である。一方、その差分場 $|Z(x)|$ を見ると間欠性はより著しく、ちょうどオンオフ間欠性の時系列を空間に置き換えたように見える。

ここで、発達した流体乱流における間欠性を思い出すと面白いだろう [45]。図 115 の上側の振幅場のパターンは、流体の速度場のパターンに、下側の差分場のパターンは、速度場の微分を 2 乗したエネルギー散逸場のパターンによく似ている⁹。実際、後ほどの解析で、我々の系の場のパターンも流体乱流の速度場とエネルギー散逸場のパターンと同様、マルチスケーリング性を示すということが明らかになる。

10.1.1 振幅場のマルチアフィン性

非局所結合素子系や、長波長ランダム外場を与えた素子系などが示すこのような空間間欠性を定量的に特徴づけるための統計量をここで導入しておこう。

まず、振幅場を特徴づけるための統計量を、流体乱流やラフな表面についての解析法に習って導入しよう。これは前の章までに調べてきた、最小スケール x で測定した高低差の総和 $S(x)$ や、空間相関関数 $C(x)$ を一般化したものになっていることがわかる。

⁹ 視覚的にである。統計量まで踏み込むと当然違うものである

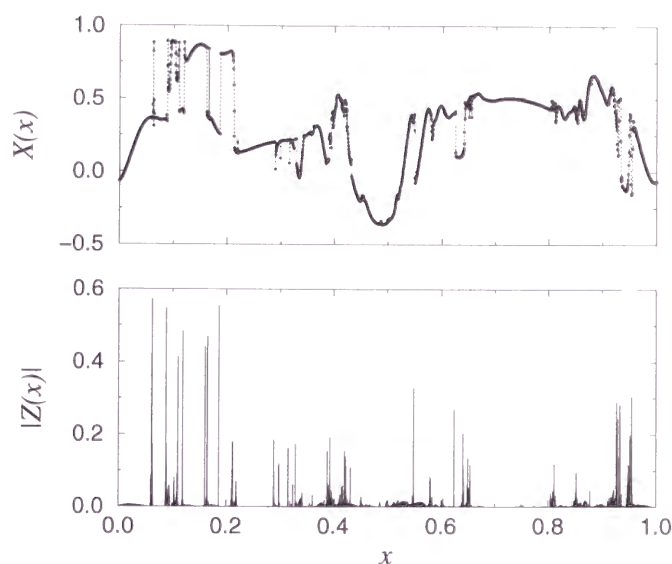


図 115: 変数の実部 $X(x)$ (上) とその差分の絶対値 $|Z(x)|$ (下) の典型的なスナップ。

乗法確率過程モデルの議論から示唆されたように、我々の系においては、場の高低差の総和や空間相関関数だけでなく、距離 x 離れた振幅場の高さの差 $y(x) := |X(x) - X(0)|$ の一般の q 次のモーメントが x に対しべき的に振る舞う。すなわち、

$$\langle y(x)^q \rangle \simeq C_0 + C_1 x^{H(q)}, \quad (162)$$

ここで、 C_0, C_1 は定数で、 $H(q)$ は q に依存するスケーリング指数である。定数 C_0 は素子のリアプノフ指数が平均的に負なら消える。最小測定距離 x で図った高低差の総和 $S(x)$ との関係は、次のように式変形すればわかる:

$$\begin{aligned} \langle y(x) \rangle &= \langle |X(x) - X(0)| \rangle \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L dy |X(y+x) - X(y)| \\ &\simeq \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |X(\frac{L}{N}j+x) - X(\frac{L}{N}j)| \\ &\simeq \frac{L}{x} \sum_{j=0}^{L/x-1} |X((j+1)x) - X(jx)| \\ &= \frac{L}{x} S(x), \end{aligned} \quad (163)$$

つまり、高低差の総和 $S(x)$ は、 $y(x)$ の 1 次のモーメントと $S(x) \sim x \langle y(x) \rangle$ の関係がある。ここで、便宜的に系の長さを L と書き、 x が小さいものとして、 $L/N = x$ となるような N 個の和に積分を分割した。また、簡単のため時間平均は書かなかった。空間相関関数 $C(x)$ との関係は、以下の通りである:

$$\langle y(x)^2 \rangle = \langle |X(x) - X(0)|^2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= 2(\langle X(0)^2 \rangle - \langle X(x)X(0) \rangle) \\
&= 2(C_0 - C(x)), \tag{164}
\end{aligned}$$

ここで、 $C_0 := \langle X(0)^2 \rangle$ は定数である。つまり、空間相関関数 $C(x)$ は、 $y(x)$ の 2 次のモーメントと $C(x) \sim C_0 - \langle y(x)^2 \rangle / 2$ の関係がある。

今後は、 $S(x)$ や $C(x)$ を使うよりも、むしろこの一般化された量、 $\langle y(x)^q \rangle$ を使って振幅場のなすパターンを特徴づけてゆくことにしよう。この量は、流体乱流では $y(x)$ を距離 x 離れた 2 点間の速度差として「 $(q$ 次の) 構造関数」、またラフな表面の解析の時には $y(x)$ を距離 x 離れた 2 点間の表面の高さの差として「 $(q$ 次の) 高さ-高さ相関関数」などと呼ばれるものであり、やはりそれらの場のパターンの間欠性を調べるために導入されたものである。

指数 $H(q)$ は、 $q = 1$ の時にはパターンのフラクタル次元と対応し、 $q = 2$ の時には空間相関関数の原点付近でのベキ則の指数や、パワースペクトルのベキ則の指数と対応していたが、上のような量を考えると、一般の q に対する $H(q)$ の振る舞いを考えることができるようになる。後で説明するが、もし $H(q)$ が q に対し線形に振る舞うならば、パターンは比較的単純なシングルアフィンであることがわかる。一方、もし $H(q)$ が q に対し非線形に振る舞うならば、パターンはより複雑な、マルチアフィン性を持つと呼ばれる。後で述べるが、マルチアフィン性は系の間欠性と深く関わっている。

この振幅の差の q 次モーメント $\langle y(x)^q \rangle$ を、図 115 と同じパラメータの非局所結合 CGL について測定した例を図 116 に示す。予想されたとおり、素子間の距離 x がごく小さいところで各次モーメントは x に対しベキ的に振る舞っており、その指数 $H(q)$ は q とともに変化する。この指数 $H(q)$ を q に対してプロットしたのが図 117 である。 $H(q)$ は q が小さいときは q とともに線形に増加するが、 q がある値に達すると、それ以降はほぼ一定値に飽和する。これは第 6 章の式 (102) でランダム乗法過程モデルの解析示唆されたことであり、そこで予想された理論直線も示した。非局所結合 CGL 系の特異的な時空カオス状態における振幅パターンはマルチアフィン性を持つことがわかる。

10.1.2 差分場のマルチフラクタル性

では、次により間欠性が顕著な差分場をどのように特徴づければよいかについて考えよう。最初に思いつくのは、時間方向のオンオフ間欠性の時系列との類似性から、ラミナー長の分布を測定することだろう。しかし、実際にはこの方法はあまりよい結果を与えない。というのは、たしかにラミナー長の分布はベキ的になり、指数を読み取ることができるのだが、その指数がラミナー（もしくはバースト）を定義するスレッシュホールドの高さに依存するのである。（通常の間欠性の時系列の場合には、ラミナー長分布はスレッシュホールドの高さがある範囲にあればそのベキの指数 $-3/2$ は不変であることが知られている。）空間方向の間欠性はオンオフ間欠性の時系列のように簡単には特徴づけられない。

そこで、カオティックなアトラクターや、流体乱流のエネルギー散逸場を特徴づけるためによく使われる一般化次元を導入することにしよう [47]。具体的には、系を幅 x の箱で覆い、 i 番目の箱の中の測度（面積） $\mu_i(x)$ を、

$$\mu_i(x) := \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx' y(x'), \tag{165}$$

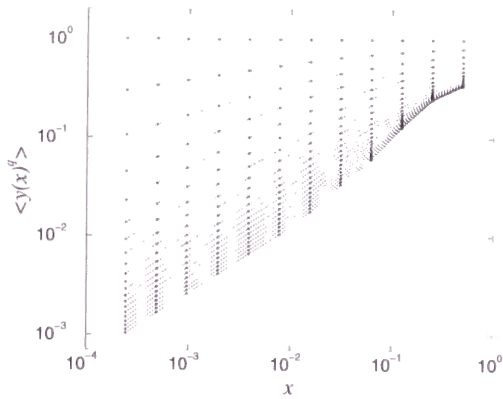


図 116: 非局所結合 CGL の振幅差 $y(x) := X(x) - X(0)$ のモーメント $\langle y(x)^q \rangle$ 。一番上の水平な線が $q = 0$ 、一番下が $q = 4.0$ で、間隔は 0.2。パラメータ $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $\gamma = 8.0$ で、結合強度は $K = 0.85$ 。

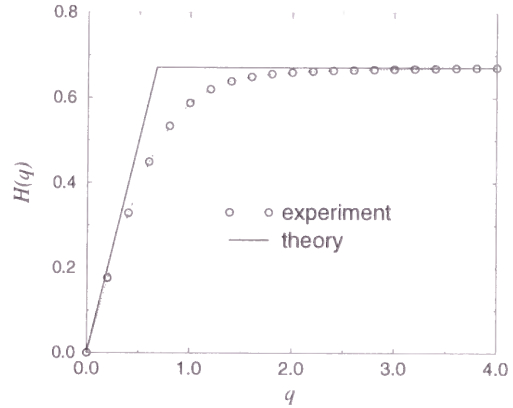


図 117: 左の図から読み取ったスケーリング指数 $H(q)$ 。理論から予想される直線も示してある。

と定義し、その分配関数を考える:

$$Z(q; x) := \sum_{i=1}^{N(x)} \mu_i(x)^q, \quad (166)$$

ここで $N(x)$ は幅 x の箱の個数。もし測度の分布がマルチフラクタルならば、この分配関数は、

$$Z(q; x) \sim x^{\tau(q)}, \quad (167)$$

のようにべき的に振る舞うことが期待される。そこで、このべき則から、一般化次元 $D(q) \equiv (q - 1)\tau(q)$ を、

$$D(q) = \frac{1}{1-q} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q; x)}{\ln(1/x)}, \quad (168)$$

と定義する。 $q \rightarrow 0$ の極限では、分配関数は単に中の測度が 0 ではない箱の総数 $\tilde{N}(x)$ になるので、通常のボックスカウンティングフラクタル次元:

$$D(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tilde{N}(x)}{\ln(1/x)}, \quad (169)$$

になり、また $q \rightarrow 1$ では情報次元

$$D(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(x) \ln \mu_i(x)}{\ln x}, \quad (170)$$

に帰着する。後で分配関数 $Z(q; x)$ は $\langle y(x)^q \rangle$ に対応する量であることが明らかになるであろう。

では、前とおなじ状況の非局所結合 CGL 系について、一般化次元を測定してみよう。まず、 $Z(q; x)$ を測定したものを図 118 に示す。各 q について、 $Z(q; x)$ は x に対してべき的に振る舞っており、その指数 $\tau(q) \equiv (q - 1)D(q)$ は、 q とともに変化している。この図から計算した一般化次元 $D(q)$ を図 119 に示す。 $D(q)$ は q に対して定数ではなく、差分場の測度のマルチフラクタル性を示している。 $D(q)$ は、小さな q の領域では q とともに線形に減少し、その後ある q 以上で定数に飽和して

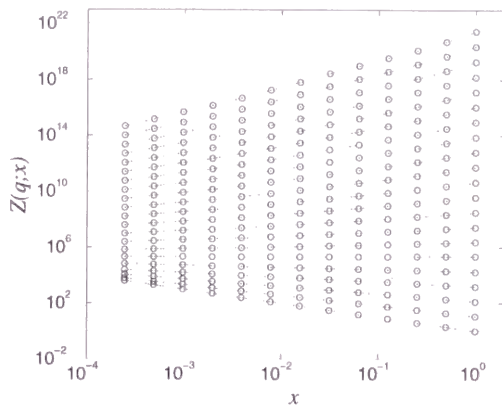


図 118: 非局所結合 CGL 系の差分場の測度 $\mu_i(x)$ の分配関数 $Z(q; x)$ 。一番下の線が $q = 0$ 、一番上が $q = 4.0$ で、間隔は 0.2 。パラメータ $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $\gamma = 8.0$ で、結合強度は $K = 0.85$ 。

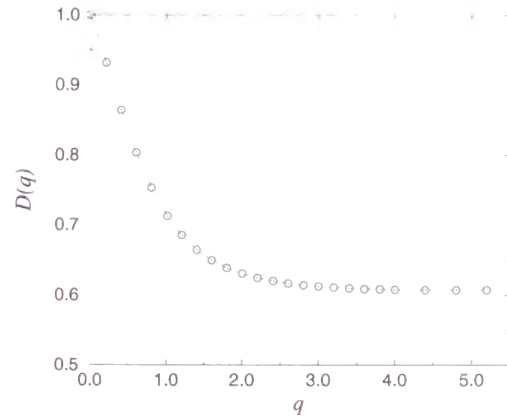


図 119: 左の図から読み取った一般化次元 $D(q)$ 。

いるように見える。このことに関する理論はまだないが、後で解析する別の系でもこのような挙動が見られることから、特異的な時空カオス／乱流的状态に共有される性質ではないかと思われる。

以上のように、非局所結合 CGL 系の特異的な時空カオス状態において、その空間パターンは間欠的であり、振幅場はマルチアフィン性、差分場はマルチフラクタル性を示す。この状況は、たとえば流体乱流の速度場とエネルギー散逸場の状況に類似しており、興味深い。また、これらの性質は非局所結合 CGL 系に限らず、他の系でも観測される。次の章で、我々の系のマルチスケーリング則についてのより詳しい解析を行う。

10.2 補足 - シングルスケーリングとマルチスケーリング

1次元ブラウン運動の軌跡 $x(t)$ は、大域的に $b^{-1/2}x(bt)$ とスケール変換しても統計的に不変である。これをセルフアフィン性といい、スケール指数 $1/2$ を Hurst 指数とか Hölder 指数などと呼ぶ。また、空間に測度分布があるとして、半径 ϵ の球内には $\mu(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha$ の測度があるとする。 $\mu(\epsilon)$ は大域的に $b^{-\alpha}\mu(b\epsilon)$ とスケール変換しても不変である。これがフラクタル性であり、スケール指数 α はフラクタル次元と呼ばれる。

マルチスケーリングとは、このような単一の的大域的なスケール変換に対しては不変ではないより複雑なスケール測のことを言う。この複雑なスケール測則を、ルジャンドル変換を使って変数変換し、空間の各点で場はそれぞれ異なる指数を持ったシングルスケーリング則に従い、そのスケール指数が空間にフラクタル状に分布しているものと見なす定式化が、マルチフラクタル定式化と呼ばれるものである。マルチスケーリングのうち、最も頻繁に使われるのが、上のふたつのスケールを一般化したマルチアフィン性およびマルチフラクタル性である。次の章で詳しい解析に移る前に、ここでシングルスケーリングとマルチスケーリングの例を挙げておく。

10.2.1 セルフアフィン性

例えば空間 1 次元のブラウン運動を考えよう。時刻 t での粒子の位置を $x(t)$ とし、粒子は以下のランジュバン方程式に従うものとする:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \xi(t), \quad (171)$$

ここで、 $\xi(t)$ は平均 0, 分散 D の白色 Gauss ノイズである:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t'). \quad (172)$$

このランジュバン方程式は、粒子のアンサンブルを考え、その分布関数を $P(x, t)$ とおけば、以下の拡散方程式に等価である:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}. \quad (173)$$

時刻 0 に原点に集中していた粒子は、時刻 t とともに以下のように発展する:

$$P(x; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (174)$$

粒子の軌跡を考えよう。良く知られているように、原点からの変位の 2 乗平均は、経過時刻に比例する:

$$\langle |x(t) - x(0)|^2 \rangle = 2Dt. \quad (175)$$

この式からすぐわかるように、時間を $t \rightarrow bt$ とスケールしたとき、変位を $x \rightarrow b^{1/2}x$ とスケールすれば、このスケール則は不変に保たれる。また、変位の分布関数そのものもこのスケール変換によって相似性を保たれる。

上のスケール変換に現れる指数 $1/2$ を使ってリスケールした変数 $\bar{x} := x/t^{1/2}$ を導入すると、 x の分布関数 $\bar{P}(\bar{x}; t)$ は、

$$\bar{P}(\bar{x}; t) = P(x; t) \frac{dx}{d\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{4D}\right), \quad (176)$$

と、 t によらない形になる。

このことからわかるように、変位の 2 次のモーメントだけでなく、一般の q 次のモーメントもこのスケール変換によって不変に保たれる。実際、変位の q 次のモーメントは以下のように計算される:

$$\langle |x(t) - x(0)|^q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^q P(x; t) dx = t^{q/2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\bar{x}; t) d\bar{x}. \quad (177)$$

最後の積分の項は t によらないので、

$$\langle |x(t) - x(0)|^q \rangle = \text{const.} \times t^{q/2}, \quad (178)$$

となり、明らかに $t \rightarrow bt$, $x \rightarrow b^{1/2}x$ という変換に対し不変である。スケール指数は q に対し線型に振る舞い、その傾きは先に出てきた指数 $1/2$ である。スケール指数が q に対し線型であることは、リスケールした分布関数 $\bar{P}(\bar{x}; t)$ が t によらないことから来る。

これは、ブラウン運動の軌跡はどのような時間スケールで見ても適当に変位のスケールを変えれば同じように見え、その特徴は $1/2$ というただひとつの指数によって特徴づけられるということの意味する。このような状況をセルフアフィン性と呼ぶ。

10.2.2 フラクタル性

(シングル)フラクタルも全く同様な概念である。ある系の中の適当な場所に注目し、そこで大きさ ϵ の箱の中の測度が $\mu(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha$ のように振る舞うとしよう。測っているのが通常の3次元の物体の体積なら当然 $\alpha = 3$ であり、フラクタルなものなら α は非整数値をとるだろう。つまり、このスケーリング指数 α は (その箱のある点での) フラクタル次元と解釈することができる。この測度のスケーリング則は、 $\epsilon \rightarrow b\epsilon$, $\mu \rightarrow b^\alpha \mu$ とスケール変換しても不変に保たれる。

もし系が大域的にこの単一の指数 α によるスケール変換に対して不変なら、指数 α を使ってリスケールした変数 $\bar{\mu} := \mu/\epsilon^\alpha$ を導入すると、 $\bar{\mu}$ の分布関数 $\bar{Q}(\bar{\mu}; \epsilon)$:

$$\bar{Q}(\bar{\mu}; \epsilon) = Q(\mu; \epsilon) \frac{d\mu}{d\bar{\mu}}, \quad (179)$$

は、もはや ϵ によらない形になるはずであり、この分布関数に対して測定した μ の q 次のモーメントは、

$$\langle \mu^q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^q Q(\mu; \epsilon) d\mu = \epsilon^{q\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mu}^q \bar{Q}(\bar{\mu}; \epsilon) d\bar{\mu}. \quad (180)$$

と、その指数が q に線形になるはずである。

10.2.3 マルチアフィン性

例 1. 流体乱流 発達した流体乱流においては、有名なコルモゴロフの法則が成り立っている。ナビエストークス方程式から、速度差 $\delta v(r) := v(x+r) - v(x)$ に対し、以下の厳密な関係式が導ける:

$$\langle \delta v(r)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \langle \epsilon \rangle r + 6\nu \langle \delta v(r)^2 \rangle, \quad (181)$$

ここで $\langle \epsilon \rangle$ は平均のエネルギー散逸率、 ν は粘性定数であり、発達乱流の慣性領域においては右辺第2項は無視できることから、速度差 $\delta v(r)$ に対し、以下のスケーリング則が期待される:

$$\langle \delta v(r)^3 \rangle \sim r. \quad (182)$$

もし先ほどのブラウン運動の場合と同様に、速度場がセルフアフィンならば、この式から得られる指数 $1/3$ によって速度差の一般の q 次のモーメントも特徴づけられるはずである:

$$\langle \delta v(r)^q \rangle \sim r^{q/3}. \quad (183)$$

また、速度差の分布関数も、リスケール $\delta \bar{v}(r) := \delta v(r)/r^{1/3}$ により r によらない普遍な形になることが期待される。すると、 $\langle \delta v(r)^2 \rangle \sim r^{2/3}$ であるから、これを波数 k について書き換えると、良く知られたエネルギースペクトルのべき則、 $E(k) \propto k^{-5/3}$ が得られる。

が、実際には速度差の q 次のモーメントのべきの指数は q に非線形に依存する:

$$\langle \delta v(r)^q \rangle \propto r^{\zeta(q)}, \quad (184)$$

ここで $\zeta(q)$ は q の非線形な関数。これは発達乱流中の速度差は自己アフィンな単純なものではなく、より複雑なものであり、単一のスケーリング指数では特徴づけられないということを意味している。

Parisi と Frisch[43] は、この $\zeta(q)$ の非線形性を、空間の各点で場はそれぞれ異なる指数をもったシングルスケーリング則 $\delta v(r) \sim r^h(x)$ に従い、そのスケーリング指数 $h(x)$ が空間にフラクタル状に分布しているもの (マルチアフィン性) として熱力学的な定式化により説明した。

例 2. 表面 ラフな表面成長においては、その粗さ (roughness) をブラウン運動の場合と同じように、2 次のモーメントのスケーリング則で特徴づける:

$$\langle |h(x+r) - h(x)|^2 \rangle \sim r^{2\alpha}, \quad (185)$$

ここで α は “roughness exponent” と呼ばれ、先ほどのブラウン運動の例では $1/2$ である。表面が自己アフィンならば、先ほどと同様この α によって特徴づけられるが、実験や理論モデルの数値計算から、やはり表面においても q 次のモーメントの指数が q に非線形に依存し、単一のスケーリング指数では特徴づけられない場合があることが知られている [50]。

10.2.4 マルチフラクタル性

例 1. カオティックアトラクター いくつかのカオティックなアトラクターの不変測度は、単純なフラクタルではなく、空間に各点で局所的にフラクタルな集合がフラクタル的に埋め込まれているというマルチフラクタルな状況にあることが知られている [48, 47]。

例 2. 流体乱流 上述したように、流体乱流における速度差の高次モーメントのコルモゴロフ則からのずれを、Parisi と Frisch はマルチアフィンとして説明した。一方、Meneveau と Sreenivasan はこれをエネルギー散逸率の間欠性として捉えた [44]。

つまり、空間の各点でエネルギー散逸率はそれぞれ異なるスケーリング $\epsilon(r) \sim r^{\alpha(x)}$ に従っており、 $\alpha(x)$ がある値 α を持つような点がフラクタル次元 $f(\alpha)$ の集合上に分布しているものと考えた。次の章でも述べるが、先ほど調べた一般化次元 $D(q)$ と $f(\alpha)$ は、やはりマルチフラクタル定式化によって互いにルジャンドル変換の関係にある。

さらに流体乱流の場合、エネルギー散逸率の間欠性は、コルモゴロフの拡張された自己相似性仮説、すなわち空間の各点で速度差とエネルギー散逸率の間に、

$$\epsilon(r; x) \sim \frac{(\delta v(r; x))^3}{r}, \quad (186)$$

という関係があるという仮定により、速度差の間欠性と結び付けられる。

11 マルチスケーリング性

これまでも少し触れてきたが、特異的な時空カオス状態あるいは時空乱流的状态においては、振幅の場の空間パターンがマルチアフィン性を示す。また、振幅場の差分場を適当に定義すると、その空間パターンはマルチフラクタル性を示す。

この章では、これらのマルチスケーリング性についてのより詳しい解析の結果を述べる。マルチアフィン性については公表論文 [4] で最初に示唆された。この章の内容は、1998 年 12 月 17 日の時点ではまだ投稿中の論文 [7] をほぼそのまま日本語に翻訳したものである。これまでと記号が異なる部分が多々あると思われるが、ご容赦願いたい。

11.1 ランダムな長波長外場を与えた素子系におけるマルチスケーリング性

11.1.1 モデル

特異的な時空乱流状態を示す最も簡単な系として、ここでは再び長波長のランダム外場によって駆動されるカオス素子系を用いる：

$$X_i(t+1) = (1-K)F(X_i(t)) + K G_i(t). \quad (187)$$

ここで $F(z)$ は個々の素子の写像、 $X_i(t)$ は i 番目の素子の時刻 t における振幅、 $G_i(t)$ は外場、 K は外場の強さを表わす。

素子の写像 $F(z)$ としては、以下の 2 種類のことを考える。ひとつめは非対称テント写像である：

$$F(z) = \frac{z}{p} \quad (0 \leq z \leq p), \quad \frac{1-z}{1-p} \quad (p \leq z \leq 1), \quad (188)$$

ここで、 p はテント写像の頂点の位置を表わすパラメータである。この写像は異なる傾きを持ったふたつの直線から成り、その局所リアプノフ指数はふたつの値をとりうる。以下、この写像を使った系をモデル A と呼ぼう。

ふたつめの系は、素子の写像として通常のロジスティック写像を用いる：

$$F(z) = cz(1-z) \quad (0 \leq z \leq 1), \quad (189)$$

ここで、 c は分岐パラメータである。このモデルをモデル B と呼ぶことにする。我々の系におけるマルチスケーリング則は、このモデルにおいて最初に発見された [4]。

長波長のランダム外場 $G_i(t)$ としては、モデル A と B に共通に、以下のものを使用する：

$$G_i(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \sin 2\pi \left(\frac{i+j(t)}{N} \right) \right], \quad (190)$$

ここで、 $j(t)$ は $[0, N-1]$ からランダムに選ばれる整数である。この外場は系の最も長波長の成分にランダムな位相で同じ振幅の外力を与える。

何度も述べてきたように、素子の写像 $F(z)$ とランダムな外場 $G_i(t)$ の具体的な形は重要ではない。特異的な時空乱流的状态は、以前述べた条件を満たしさえすれば観測される。

11.1.2 間欠的な振る舞い

モデル A と B の振幅場 X_i と、差分場 $Y_i := N|X_{i+1} - X_i|$ の典型的なスナップショットを図 120, 121 に示す。振幅場は比較的なめらかな部分と何度も折り畳まれたように見える部分から成り、それを反映して差分場は間欠的に見える。以下、この間欠性をマルチスケーリング解析してゆこう。

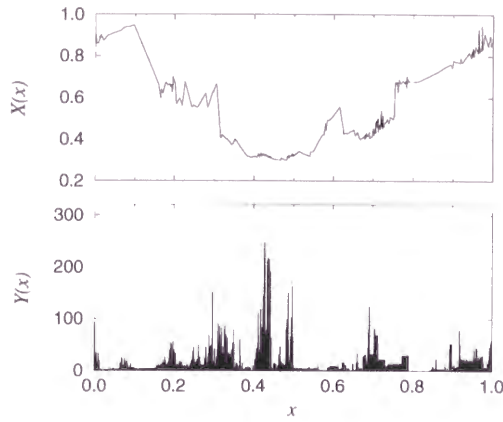


図 120: モデル A の振幅場 $X(x)$ (上) とその差分場 $Y(x)$ (下) の典型的なスナップショット。

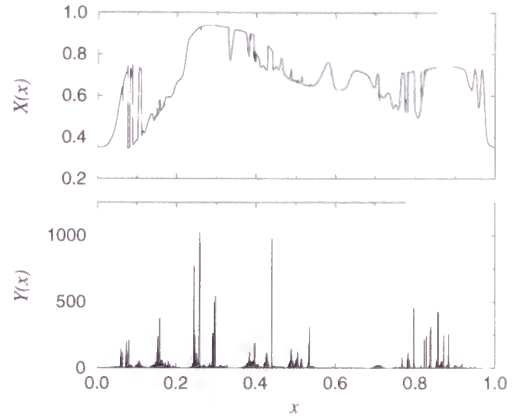


図 121: モデル B の振幅場 $X(x)$ (上) とその差分場 $Y(x)$ (下) の典型的なスナップショット。

11.1.3 測度

以下、系の大きさを 1 に固定し、そこに N 個の素子を配置した状況を考える。格子間隔を $\delta := 1/N$ と書き、素子の位置を $x := i\delta$ を表わすことにしよう。

差分場 Y を次のように定義しよう:

$$Y(x) := \frac{X(x+\delta) - X(x)}{\delta}. \quad (191)$$

もし $X(x)$ が通常のなめらかな場なら、 $Y(x)$ は $\delta \rightarrow 0$ の極限で通常の微分になる。が、我々の系においてはこの微分可能性は明らかではないので、 δ は十分小さいが有限であるとする。

さて、我々の系の間欠性を特徴づけるのに適当と考えられる測度を導入しよう。振幅場 $X(x)$ に対しては、点 x での測度 $h(x, l)$ を次のように定義する:

$$h(x, l) := |X(x + \frac{l}{2}) - X(x - \frac{l}{2})| \quad \left(\simeq \left| \int_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} Y(x') dx' \right| \right). \quad (192)$$

すなわち、 $h(l)$ は距離 l 離れた 2 点間の振幅の差である。一方、差分場 $Y(x)$ に対しては、点 x での測度 $m(x, l)$ を次のように定義する:

$$m(x, l) := \sum_{j=-l/2\delta}^{l/2\delta-1} |Y(x+j\delta)| \delta \quad \left(\simeq \int_{x-\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} |Y(x')| dx' \right). \quad (193)$$

すなわち、 $m(l)$ は長さ l の区間で積分した $Y(x)$ の面積を与える。

11.1.4 分配関数

上で定義した測度を使って、分配関数はそれぞれ次のように定義される:

$$\begin{aligned} Z_h^q(l) &:= \langle h(l)^q \rangle \simeq \left\langle \frac{1}{N(l)} \sum_{j=0}^{N(l)-1} h(x_j, l)^q \right\rangle, \\ Z_m^q(l) &:= N(l) \langle m(l)^q \rangle \simeq \left\langle \sum_{j=0}^{N(l)-1} m(x_j, l)^q \right\rangle, \end{aligned} \quad (194)$$

ここで $\langle \dots \rangle$ は統計平均を意味し、 $N(l)$ は幅 l の箱の個数、すなわち $N(l) = l^{-1}$ 、また $x_j = (j + \frac{1}{2})l$ は j 番目の箱の位置である。

流体乱流の文脈では、分配関数 $Z_h^q(l)$ は構造関数 (structure function)[42, 45] と呼ばれる。一方、フラクタルな表面成長の文脈では高さ-高さ相関 (height-height correlation)[50] と呼ばれる。なお、 $q = 2$ のとき、この量は空間相関関数 $\langle X(x)X(x+l) \rangle$ と直接関係づけられることは既に述べた。一方、 $Z_m^q(l)$ は差分場 $Y(x)$ の空間相関に関する量である。

もし場 X, Y がマルチスケール性を示すなら、これらの分配関数は次のようにスケールすることが期待される:

$$Z_h^q(l) \sim l^{\zeta(q)}, \quad Z_m^q(l) \sim l^{\tau(q)}, \quad (195)$$

ここで $\zeta(q)$ と $\tau(q)$ は q に依存するスケール指数である。 $\tau(q)$ は通常の一般化次元 $D(q)$ と関係式 $\tau(q) = (q-1)D(q)$ で結ばれている。

前述したように、これら $\zeta(q)$ と $\tau(q)$ の q 依存性が非線形であるとき、対応する場 X と Y はそれぞれマルチアフィン、マルチフラクタルと呼ばれる。

マルチフラクタル定式化に従って、局所的な測度が l とともに次のようにスケールするものとしよう:

$$h(x, l) \sim l^{\beta(x)}, \quad m(x, l) \sim l^{\alpha(x)}, \quad (196)$$

同時に、局所スケール指数が β および α であるような点の集合を覆うのに必要な幅 l の箱の数が次のように振る舞うとしよう:

$$N_\beta(l) \sim l^{-g(\beta)}, \quad N_\alpha(l) \sim l^{-f(\alpha)}. \quad (197)$$

この $g(\beta)$ と $f(\alpha)$ はそのような集合のフラクタル次元を表わすので、次元スペクトルと呼ばれる。

これらの量を使って、分配関数は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} Z_h^q(l) &\sim N(l)^{-1} \int d\beta l^{-g(\beta)} l^{\beta q} \sim l^{\beta^*(q)q - g(\beta^*(q)) + 1}, \\ Z_m^q(l) &\sim \int d\alpha l^{-f(\alpha)} l^{\alpha q} \sim l^{\alpha^*(q)q - f(\alpha^*(q))}. \end{aligned} \quad (198)$$

ここで、steepest descent method を使った。 $\beta^*(q)$ と $\alpha^*(q)$ はそれぞれ指数 $\beta q - g(\beta) + 1$ と $\alpha q - f(\alpha)$ を最小化する α と β の値である。スケール指数 $\zeta(q)$ と $\tau(q)$ は次元スペクトル $g(\beta)$ と $f(\alpha)$ にルジャンドル変換で結びつけられる:

$$\begin{aligned} \zeta(q) &= \min_\beta [\beta q - g(\beta) + 1], \quad \tau(q) = \min_\alpha [\alpha q - f(\alpha)], \\ g(\beta) &= \min_q [\beta q - \zeta(q) + 1], \quad f(\alpha) = \min_q [\alpha q - \tau(q)]. \end{aligned} \quad (199)$$

$\tau(q)$ や $\zeta(q)$ の非線形性は、次元スペクトル $g(\beta)$ と $f(\alpha)$ の特定の形に帰着される。

11.1.5 数値計算

数値計算には、 $N = 2^{14} \sim 2^{15}$ 個の素子を使用した。この数は、 N が大きい極限での状況を推測するのに十分であると考えられる。モデル A と B について、定性的には同じ結果が得られた。

まず、振幅場 X のマルチアフィン性について議論する。モデル A について、いくつかの q の値に対して数値的に得られた分配関数 $Z_h^q(l) = \langle h(l)^q \rangle$ を図 11.1.5 に両対数スケールで示した。それぞれの曲線は小さな l に対して明らかにべき的な依存性を示し、その指数 $\zeta(q)$ は q とともに増加する。モデル B についても定性的に同じ結果が得られる。

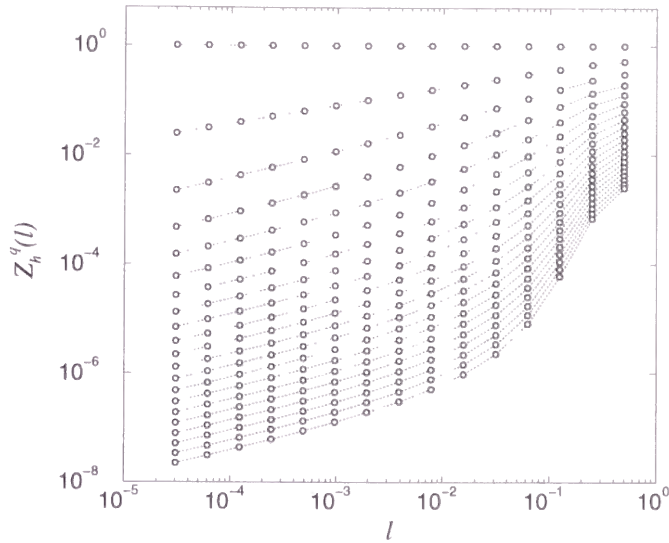


図 122: モデル A について得られた分配関数 $Z_h^q(l)$ 。水平な線は $q = 0$ に対応し、一番下の線は $q = 10$ に対応する。計算ステップは 0.5 である。

図 123 に、モデル A および B の指数 $\zeta(q)$ の q 依存性を、前述の理論により $N \rightarrow \infty$ の極限で正しいと予想される理論曲線:

$$\zeta(q) = q \quad (0 < q < \eta), \quad \eta \quad (\eta < q), \quad (200)$$

とともに示した。理論曲線は実験値によく合うことがわかる。実験値は移り変わり点近傍で理論曲線からずれているが、このずれは N の増加とともに小さくなり、極限的には鋭い変化が期待される。このような指数の挙動は「バイフラクタル性」(bifractality) と呼ばれ、例えばランダムに外力を加えられたバーガーズ方程式において知られている [45]。より一般に、指数やその微分の q に対する不連続な変化を q -相転移という。

図 124 には、指数 $\zeta(q)$ より得られた次元スペクトル $g(\beta)$ を示した。理論的には $g(\beta)$ はふたつの点のみからなるはずだが、数値的に得られた結果は連続な曲線を与える。

次に、差分場 Y のマルチフラクタル性について議論しよう。図 125 に、モデル A について数値的に得られた分配関数 $Z_m^q(l) = N(l)\langle m(l)^q \rangle$ を両対数スケールでプロットした。各 q に対応する曲線はやはり距離 l に対してべき的に振る舞い、その指数は q とともに増加することがわかる。スケーリングが見られる領域は、振幅場 X の場合より少し広い。モデル A, B について得られた指数 $\tau(q)$ を図 126 に示した。曲線は $\zeta(q)$ の場合ほど鋭くは曲がらないが、やはり q に非線形に依存し、差分場 Y のマルチフラクタル性を示唆する。測度 $m(l)$ が空間を埋め尽くすことと、全面積 $l^{-1}m(l)$ が測定スケール l によらないことから、どちらの曲線も、 $\tau(0) = 1$, $\tau(1) = 0$ を満たしている。 $\tau(q)$ は大きな q に対して漸近的に線形に振る舞うように見える。

これらの $\tau(q)$ より計算された一般化次元 $D(q)$ を図 127 に示す。小さな q に対しては、 $D(q)$ は q に線形に減少する。いわゆる対数正規理論は $D(q)$ のこのような依存性を与えることに注意せよ。 $\tau(q)$ の漸近的な線形性に対応して、 $D(q)$ は大きな q に対して定数に漸近する。さらに我々の数値計算は、ある q_c に対し、 $q > q_c$ であるような q に対して $D(q)$ が定数となる、すなわち $D(q) \equiv D(\infty)$ となることを示唆している。 N を増加させて δ を小さくするとともに、 q_c での転移はより鋭くな

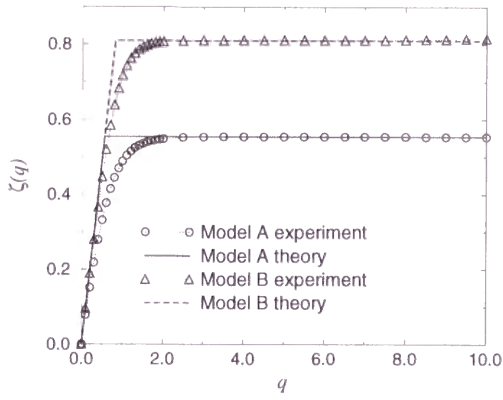


図 123: モデル A と B のスケーリング指数 $\zeta(q)$ の q 依存性。理論曲線も重ねて示した。

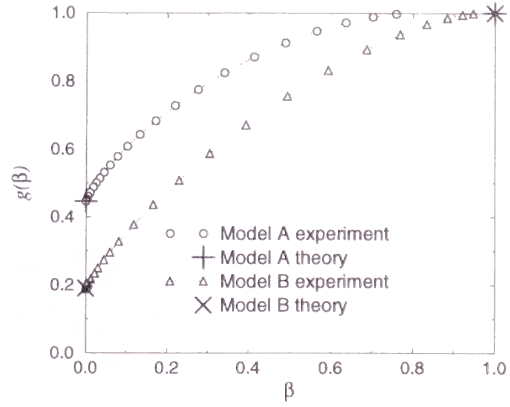


図 124: モデル A と B の次元スペクトル $g(\beta)$ 。理論的な値も重ねて示した。

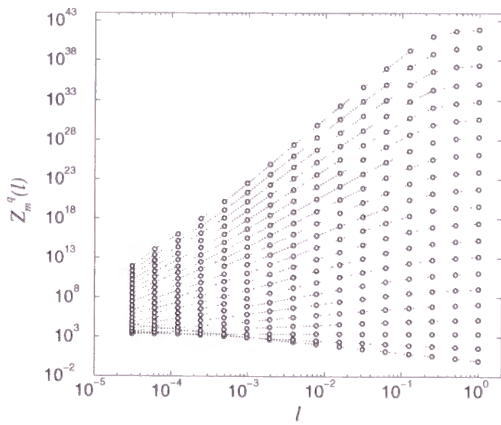


図 125: モデル A について得られた分配関数 $Z_m^q(l)$ 。水平な線は $q=0$ に対応し、一番下の線は $q=10$ に対応する。計算ステップは 0.5 である。

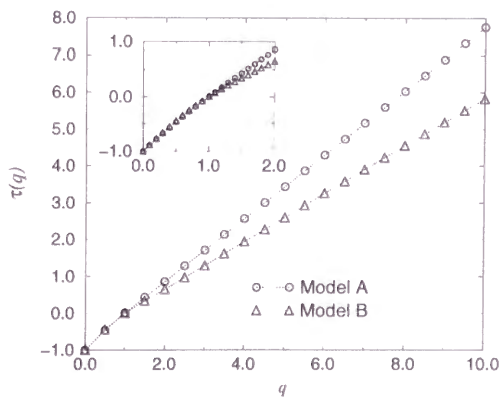


図 126: モデル A と B のスケーリング指数 $\tau(q)$ の q 依存性。挿入図は小さい q の領域の拡大。

るため、再び $\delta \rightarrow 0$ の極限で q -相転移があることが予想される。

図 128 に、 $\tau(q)$ より計算された $f(\alpha)$ を示す。通常どおり、 $f(\alpha)$ は直線 $f(\alpha) = \alpha$ に接している。また、 $f(\alpha)$ は直線 $f(\alpha) = 1$ にも接しており、これは先に述べた測度 $m(l)$ が空間を埋め尽くすこと、つまり $m(l)$ の測度論的サポートが埋め込まれている空間と同一であることを意味する。上に述べた $D(q)$ 曲線の鋭い変化に対応して、 $f(\alpha)$ は $\alpha = D(\infty)$ に端点を持ち、それより小さな特異性は存在しないように見受けられる。

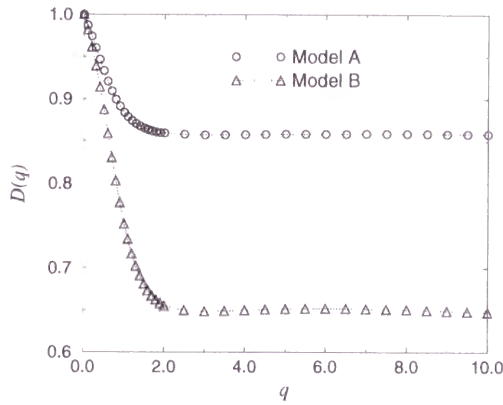


図 127: モデル A と B について得られた一般化次元 $D(q)$ 。

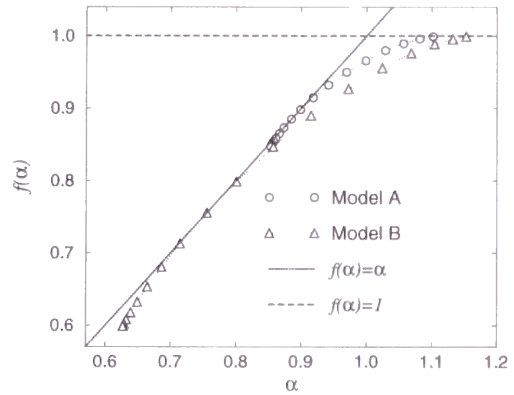


図 128: モデル A と B について得られた特異指数スペクトル $f(\alpha)$ 。

以上述べてきたように、振幅場 X と差分場 Y はそれぞれマルチアフィン性、マルチフラクタル性を示す。我々は $\zeta(q)$, $\tau(q)$ を正の q に対してのみ計算したので、対応する $g(\beta)$, $f(\alpha)$ も左半分だけ求められた。負の q に対するモーメントは場の微少な違いを反映するが、それらの指数は計算が難しいだけでなく、系の詳細、例えば与えた外場の具体的な形に依存するため、普遍性を持たず、あまり重要ではないと思われる。

11.2 マルチスケーリングの起源

以上のように我々の簡単なモデルはマルチスケーリング性を示すが、その起源は定性的には簡単に理解できる。簡単のため、モデル A を例にとる。我々が使用したパラメータでは、各素子はカオティックではなく安定な固定点を持つ。そのため、もし外場が与えられなければ素子はすぐに固定点に落ち込み、場 X と Y は一様になる。ランダムにゆらぐ外場中では、ある割合の素子が固定点からはじかれ、再び固定点に落ち込む前にカオティックな遷移を示す。このとき場の引き延ばしと折り畳みが起こり、間欠的な空間パターンを生成する。素子の局所リアプノフ指数が負である限り、空間パターンは複雑ではあっても統計的には連続性を保っている。つまり、素子は外場に引き込まれており、それは無限小の間隔を隔てた素子同士も同期していることを意味する。

この状況を図 129 に模式的に示す。ごくミクロな領域を考えて、外場は空間的には定数であるとみなした。我々のモデルのダイナミクスは素子に対するふたつの操作、すなわち写像の適用と外場の適用に分解できる。写像の適用は、振幅 X が p 以上であるような素子の振幅を引き延ばして折り畳み、 p 以下であるような素子の振幅は単に縮める。外場の適用は、このスケールでは単に全素子の振幅を一様にシフトする。このシフトは、長いスケールでは系に非一様性を導入するが、一方短いスケールでは素子間に相関を導入する。素子のカオティックな遷移による不安定性とこの外場

の効果の微妙なつりあいにより、振幅場 X の特異な空間相関が生成される。振幅場 X に対応する差分場 Y の発展も同じ図に重ねて示した。場 Y は場 X の傾きなので、場 Y は非対称テント写像のふたつの勾配に対応するふたつの乗数のどちらかをランダムに掛けられる。振幅場 X の空間相関により、近傍の素子には同じ乗数が掛けられがちだが、その区間の長さは場 X のフラクタル化と共に短くなってゆく。この過程は、例えばマンデルブロの weighted curdling モデルにも似たある種のランダム乗法カスケード (random multiplicative cascade) プロセスであり、差分場 Y のマルチフラクタル性はこのプロセスにより生成されるものと考えられる。

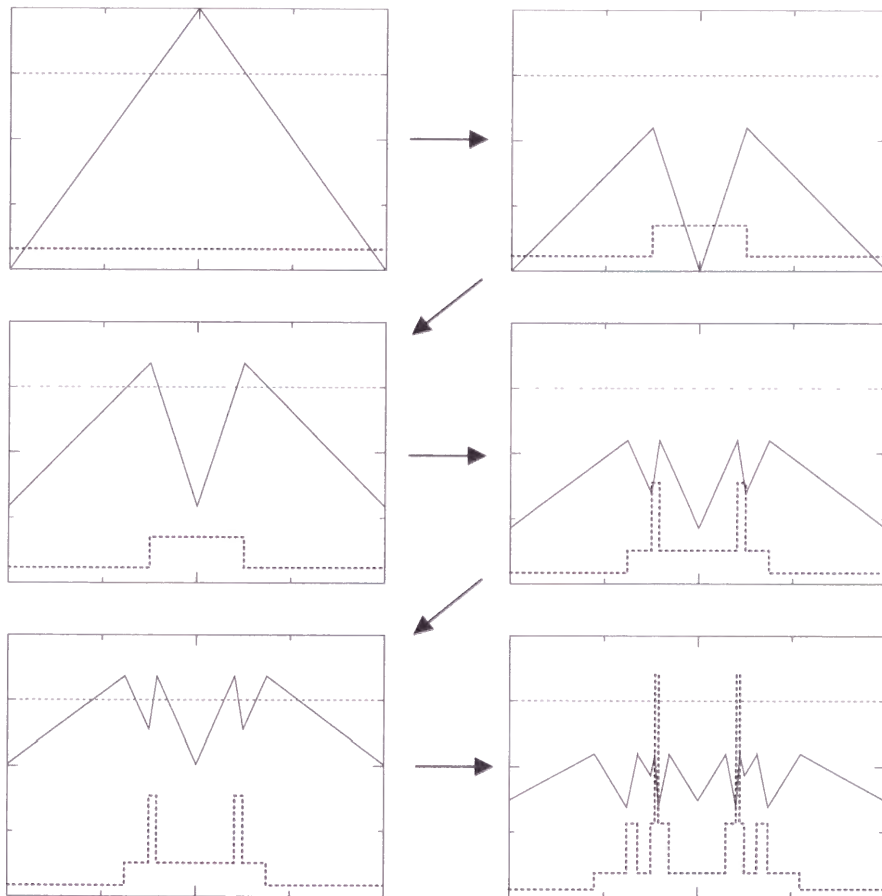


図 129: モデル A における振幅場 X と差分場 Y の時間発展。右矢印は写像の適用による引き延ばしと折り畳み、左下矢印は外場の適用によるシフトを示す。

モデル B に関しては、モデル A の場合より状況は多少複雑である。というのは、素子の局所リアップノフ指数が連続値を取り得るからである。が、やはり基本的なメカニズムは同じであるものと考えられる。

11.3 分布関数による記述

上に定性的に述べたカスケードプロセスをより定量的に捉えるために、測度 $h(l)$ と $m(l)$ に対する分布関数 (以下 PDF) $P(h;l)$ および $Q(h;l)$ を考えよう。同時に、後の便利のために、リスケールした測度 $\bar{h}(l) := h(l)/l$, $\bar{m}(l) := m(l)/l$ と、それらの PDF、 $\bar{P}(\bar{h};l) := (dh/d\bar{h})P(h;l)$,

$\bar{Q}(\bar{m}; l) := (dm/d\bar{m})Q(m; l)$ を導入しておこう。

これらの分布関数により、測度の分配関数は次のように表わされる：

$$\begin{aligned} Z_h^q(l) &= \langle h(l)^q \rangle = \int_0^\infty h^q P(h; l) dh \\ &= l^q \int_0^\infty \bar{h}^q \bar{P}(\bar{h}; l) d\bar{h} = l^q \langle \bar{h}(l)^q \rangle, \\ Z_m^q(l) &= N(l) \langle m(l)^q \rangle = N(l) \int_0^\infty m^q Q(m; l) dm \\ &= l^{q-1} \int_0^\infty \bar{m}^q \bar{Q}(\bar{m}; l) d\bar{m} = l^{q-1} \langle \bar{m}(l)^q \rangle. \end{aligned} \quad (201)$$

場のマルチスケーリング則はこれらの分布関数によって完全に決定される。

まず、振幅場 X についての PDF を調べよう。図 130 に、モデル A において得られた $P(h; l)$ をいくつかの異なる l に対して示す。各 PDF は明らかに非ガウスのであり、振幅場 X の強い間欠性を反映している。各 PDF はある程度の大きさの h まではほぼ定数で、その後べき的に減衰し、ある大きさの h 以降急激に減衰する (カットオフ)。定数領域は l と共に増加するが、べき的な減衰部分の傾きと、カットオフの位置はほぼ同一である。対応するリスケールした PDF を図 131 に示す。今度はカットオフの位置は l の増加と共に左側へ移動するようになるが、定数領域とべき的な減衰領域はほぼ重なる。このリスケールした PDF の減衰部分は、次の指数的なカットオフを掛けたべき則によってよく近似できることがわかる：

$$\bar{P}(\bar{h}; l) \sim \bar{h}^{-1-\eta} \exp\left(-\frac{\bar{h}}{\bar{h}_0(l)}\right) \quad (\bar{h} \gg 1). \quad (202)$$

ここで η は正の定数であり、 $\bar{h}_0(l)$ は l に依存するカットオフ位置を決めるパラメータである。図 131 の挿入図にこのフィッティングを $l = 2^{-13}$ の場合について示した。

以後の議論で、このパラメータ η が前述したバイフラクタルな指数の式 (200) に出てきたものと等しいことが明らかになるであろう。カットオフ位置が l に対し $\bar{h}_0(l) \propto l^{-1}$ のように依存することは明らかである。というのは、もともと同じ位置にあったカットオフ位置を l で割ってリスケールしたからである。このことは、 l を小さくすれば PDF のべき的な部分がいくらでも延びることを意味する。あとでわかるように、このことは指数 $\zeta(q)$ の q -相転移について本質的である。モデル B についても定性的にはほぼ同じ結果が得られた。

では、次に差分場 Y についての PDF の解析に移ろう。図 132 に、モデル A についていくつかの l に対して得られた $Q(m; l)$ を示す。 $Q(m; l)$ は一見 $P(h; l)$ に似ている。実際、各グラフは m のある程度の値まではそこそこ平らで、その後べき的に減衰し、ある大きさの m 以上で急激に減衰する (カットオフ)。

しかし、実際には $Q(m; l)$ と $P(h; l)$ の間にはいくつかの重要な違いがある。まず、 $Q(m; l)$ の小さな m についての部分は実は平らではない。 $l > \delta$ であるような $Q(m; l)$ はある m 以下でゆっくり減衰する。次に、大きな m でのカットオフ位置は、 l に依存する。

図 133 に、リスケールした PDF、 $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ を示す。やはり小さな \bar{m} の比較的平らな部分の長さは l によらずほぼ一定になり、カットオフ位置は l を大きくするとともに左側へ移動するようになる。もとの $Q(m; l)$ のカットオフ位置の l 依存性を反映して、 $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ のカットオフ位置の移動量は $\bar{P}(\bar{h}; l)$ の場合より小さい。

リスケールされた PDF の小さな \bar{m} での振る舞いは、振幅場 X の場合に比べてより強く l に依存する。以後の議論で、この $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ の依存性を対数正規分布で近似することを試みる。興味深いことに、挿入図、および図 136 に示したように、大きな \bar{m} に対する $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ (すなわちべき的な減

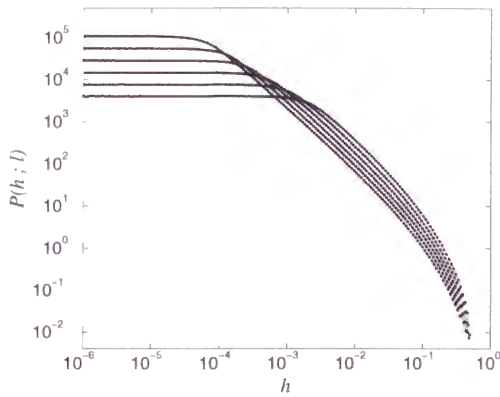


図 130: モデル A での高さの差 $h(l)$ の PDF。 $l = 2^{-15}$ (最も定数部分の高さが高いもの), 2^{-14} , 2^{-13} , 2^{-12} , 2^{-11} , 2^{-10} (最も低いもの)。

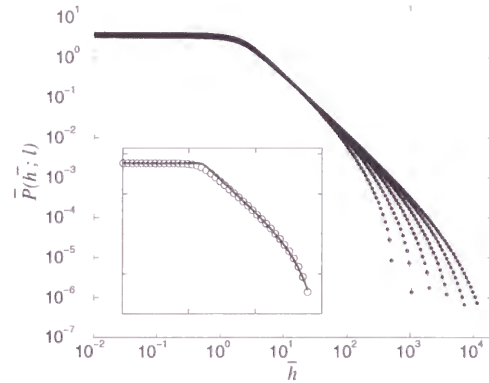


図 131: モデル A のリスケールされた高さの差 $\bar{h}(l)$ に対する PDF。 $l = 2^{-15}$ (最も減衰の遅いもの), 2^{-14} , 2^{-13} , 2^{-12} , 2^{-11} , 2^{-10} (最も速いもの)。挿入図に指数を掛けたベキ則によるフィッティングを $l = 2^{-13}$ の場合について示した。パラメータは $\eta = 0.55$ および $\bar{h}_0 = 1150$ 。

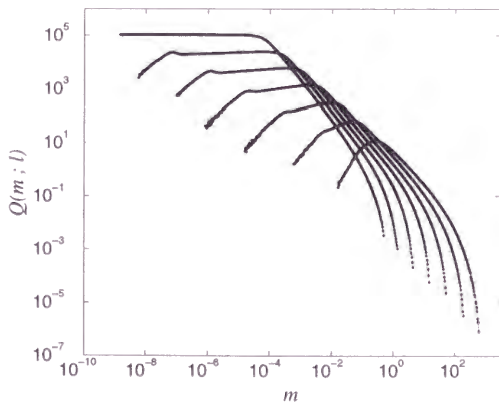


図 132: モデル A での面積 $m(l)$ の PDF。最も定数部分の高さが高いものが $l = 2^{-15}$ に対応し、以下 2^{-14} , 2^{-13} , 2^{-12} , 2^{-11} , 2^{-10} (最も低いもの)。

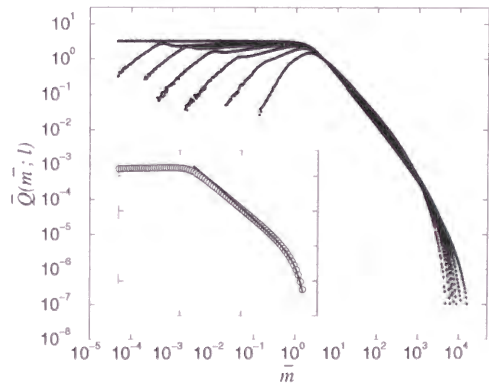


図 133: モデル A のリスケールされた面積 $\bar{m}(l)$ の PDF。最も減衰の遅いものが $l = 2^{-15}$ に対応し、以下 2^{-14} , 2^{-13} , 2^{-12} , 2^{-11} , 2^{-10} (最も速いもの。) 挿入図に指数を掛けたベキ則によるフィッティングを $l = 2^{-13}$ の場合について示した。パラメータは $\eta = 0.55$ および $\bar{h}_0 = 1150$ 。

衰部分とカットオフ)は、次の引き延ばされた指数 (stretched exponential) を掛けられたべき則によってうまく近似できる:

$$\bar{Q}(\bar{m}; l) \sim \bar{m}^{-1-\eta} \exp \left[- \left(\frac{m}{m_0(l)} \right)^{\gamma(l)} \right] \quad (\bar{m} \gg 1). \quad (203)$$

ここで、 η は正の定数で、 $\bar{m}_0(l)$ と $\gamma(l)$ は l に依存するパラメータである。定義より $h(\delta) \equiv m(\delta)$ 、 $\bar{P}(\bar{h}; \delta) \equiv \bar{Q}(\bar{m}; \delta)$ なので、この η は前の $\bar{P}(\bar{h}; \delta)$ の近似に使ったものと同一である。

$\bar{P}(\bar{h}; \delta)$ のカットオフ位置 $\bar{h}_0(l)$ は単に l^{-1} に比例していたが、 $\bar{Q}(\bar{m}; \delta)$ のカットオフ位置 $m_0(l)$ はそうではない。しかし、一応 l に対し系統的にべき的な依存性を示すように見受けられる。すなわち、図 138 からわかるように、 $\bar{m}_0(l) \propto l^{-\nu}$ が成立しているように見える。ここで ν は後で見るように間欠性を特徴づけるパラメータで、 $\nu \simeq 0.15$ である。一方、図 136 の挿入図には指数 $\gamma(l)$ の l 依存性が示されている。 $\gamma(l)$ は弱く l に依存するが、その値は 1 と 2 の間にある。

モデル B についても、ほぼ同様の $Q(m; l)$ が得られる。ただしこの場合、図 137 からわかるように、大きな \bar{m} に対する $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ は引き延ばされた指数ではなく、むしろ単なる指数を掛けたべき則によってうまくフィットできるようなのである。そこで、モデル B については上の近似式で $\gamma \equiv 1$ と置くことにする。図 138 からわかるように、モデル B についてもカットオフ位置の l へのべき的な依存性、 $\bar{m}_0(l) \propto l^{-\nu}$ が成立しているように見える。今度はパラメータ ν は $\nu \simeq 0.3$ と見積られる。

これらの l に対する $\bar{m}_0(l)$ のべき的な依存性は、前の $\bar{P}(\bar{h}; l)$ の場合と同様に、PDF のべき的な減衰部分が l を小さくすればいくらかでも延びることを意味し、後でわかるように $D(q)$ の鋭い転移にとって本質的である。

11.4 振幅場 X のマルチアフィン性の理論

振幅場 X のマルチアフィン性については、バイフラクタルな $\zeta(q)$ 曲線の起源について、既に PDF に基づく理論があることを述べた。ここではその理論を実験結果により近づくように少しだけ変更して述べ、以降の差分場 Y のマルチフラクタル性の議論への準備としよう。

11.4.1 分布関数からのスケーリング指数の計算

上の述べたように、リスケールされた PDF、 $\bar{P}(\bar{h}; l)$ は次のように近似される:

$$\bar{P}(\bar{h}; l) = \begin{cases} \bar{P}_0(l) & (0 < \bar{h} < 1), \\ \bar{P}_1(l) \bar{h}^{-1-\eta} \exp \left(-\frac{\bar{h}}{\bar{h}_0(l)} \right) & (1 < \bar{h}). \end{cases} \quad (204)$$

ここで、定数領域からべき的な減衰領域への転移点が $\bar{h} = 1$ になるように変数をリスケールした。カットオフ位置の l への依存性、 $\bar{h}_0(l) \propto l^{-1}$ は変化しない。 $\bar{P}_0(l)$ と $\bar{P}_1(l)$ は l 依存の定数であり、PDF の連続性と規格化の条件から決まる。

この近似的な PDF を使うと、 $\bar{h}(l)$ のモーメントは

$$\langle \bar{h}(l)^q \rangle = \frac{\frac{1}{1+q} + \bar{h}_0(l)^{q-\eta} \Gamma(q-\eta, \frac{1}{\bar{h}_0(l)}) \exp(\frac{1}{\bar{h}_0(l)})}{1 + \bar{h}_0(l)^{-\eta} \Gamma(-\eta, \frac{1}{\bar{h}_0(l)}) \exp(\frac{1}{\bar{h}_0(l)})}, \quad (205)$$

と計算される。ここで、 $\Gamma(z, p)$ は $\Gamma(z, p) := \int_p^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ で定義される不完全ガンマ関数である。

十分小さな l については、この式はかなり単純化される。 $\bar{h}_0(l)^{-1}$ が $O(l)$ であることに注意すると、ガンマ関数と指数関数はほぼ l に依存しないとして良い。モーメントの l 依存性は主として $\bar{h}_0(l)^{q-\eta}$ と $\bar{h}_0(l)^{-\eta}$ から来るので、

$$\langle \bar{h}(l)^q \rangle \simeq \frac{a_q + b_q l^{\eta-q}}{a_0 + b_0 l^\eta} \simeq \frac{a_q}{a_0} + \frac{b_q}{a_0} l^{\eta-q}, \quad (206)$$

が得られる。ここで、 a_q と b_q は q 依存の定数である。これより、

$$\langle \bar{h}(l)^q \rangle \simeq \frac{a_q}{a_0} \quad (\eta - q > 0), \quad \frac{b_q}{a_0} l^{\eta-q} \quad (\eta - q < 0), \quad (207)$$

であり、分配関数 $Z_h^q(l) = l^q \langle \bar{h}(l)^q \rangle$ は

$$Z_h^q(l) \simeq \frac{a_q}{a_0} l^q \quad (\eta - q > 0), \quad \frac{b_q}{a_0} l^\eta \quad (\eta - q < 0). \quad (208)$$

と計算される。このように、我々はスケーリング形:

$$Z_h^q(l) \sim l^{\zeta(q)}, \quad (209)$$

と、バイフラクタルな指数:

$$\zeta(q) = q \quad (0 < q < \eta), \quad \eta \quad (\eta < q). \quad (210)$$

を得る。

11.4.2 PDF の微視的なモデル

我々は、高さの差 $h(l)$ のダイナミクスを考えることにより、上で仮定した PDF の形に対するある程度の説明も与えることができる。

今後しばらく、絶対値のつかない単なる高さの差を時間依存性を含めて $h(t; l)$ と書こう。前に述べたように、 $h(t; l)$ は素子のカオティックな運動から来るリアプノフ指数のゆらぎにより乗法的に駆動され、またランダムにゆらぐ長波長の外場により、素子間の距離 l に比例する程度のアディティブな駆動も受けている。この状況を連続時間モデルで記述すると、次のようになる:

$$\frac{dh(t; l)}{dt} = \lambda(t) h(t; l) + l \xi(t). \quad (211)$$

ここで $\lambda(t)$ と $\xi(t)$ はランダムな数であり、 $\lambda(t)$ は素子の局所リアプノフ指数に、 $l \xi(t)$ は外場のゆらぎの効果に対応する。前にも述べたように、素子の局所リアプノフ指数のゆらぎは Gauss 分布でもホワイトノイズでもない。が、ここでは取り扱いやすさのため、 $\lambda(t)$ を平均 λ_0 、分散 D_λ の白色 Gauss ノイズとする。

この方程式の解析については、前に述べた通りである。我々は実際に定数部分とべき的な部分からなる分布関数を得て、それをリスケールすることにより、

$$\bar{P}(\bar{h}; l) = \begin{cases} \bar{P}_0 & (0 < \bar{h} < 1), \\ \bar{P}_1 \bar{h}^{-1-\eta} & (1 < \bar{h} < l^{-1}), \\ 0 & (l^{-1} < \bar{h}). \end{cases} \quad (212)$$

のようにモーメントの計算の際に仮定されたもの (204) と定性的にはほぼ同じ PDF を得る。

ところで、この PDF はある \bar{h} 以上で突然 0 になっている点が数値計算の結果とは異なる。これを再現するためには、高さの差が大きくなったときに効くはずである素子の非線形効果を次のように取り入れれば良からう：

$$\frac{dh(t;l)}{dt} = \lambda(t) h(t;l) - h(t;l)^2 + l \xi(t). \quad (213)$$

このランジュバン方程式から得られる定常 PDF は、べき的な減衰部分と、さらに指数的なカットオフを示す。なお、ここでの議論は定性的なものなので、実際には必要になる非線形項の前の係数を無視した。

以上述べたように、我々はいくつかの簡単で妥当だと思われる仮定に基づき、マルチアフィン性の「微視的」な説明に定性的には成功した。

11.5 差分場 Y のマルチフラクタル性について

次の問題はマルチフラクタルな差分場 Y に対するスケーリング指数 $\tau(q)$ を説明することである。しかしながら、差分場 Y についての PDF は振幅場 X についてのものほど単純ではなく、簡単には近似できない。また、その微視的な説明を与えるのも難しそうに見える。

そこで、我々はまずふたつの漸近領域において、実験的な PDF から近似的に指数を求めることを試みる。すでに示したように、PDF は中央部に $\bar{m}^{-1-\eta}$ のようにべき的に減衰する部分を持つ。この部分を領域 II とし、PDF の 3 つの部分を実から I, II, III と呼ぶことにすると、 η より小さい次数 q のモーメントは主に領域 I で決まり、一方 η より大きい次数 q のモーメントは領域 III か、領域 II と III の境界近傍によって決まるであろう。このことから、先に述べた $D(q)$ の転移点 q_c は、 $\zeta(q)$ の場合と同様、 η に近いことが予想される。また、先に述べた通り領域 II は l を小さくすればいくらかでも延ばすことができ、これによって $D(q)$ の $q \simeq q_c$ 近傍での転移はより鋭くなるものと考えられる。

その後で、なぜ PDF の微視的な説明が難しいのかを説明し、その第一歩として乗数分布による記述の可能性について調べてみる。

11.5.1 低次のモーメントに対する対数正規近似

$\bar{m}(l)$ の低次のモーメントは PDF の領域 I によって決まることを先に述べたが、 $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ はこの領域で定数だと仮定することはできないので、 $\bar{P}(\bar{h}; l)$ の場合のように簡単にはいかない。ところで、 $D(q)$ の小さな q での線形な挙動は、乱流の最も簡単な間欠性理論である対数正規理論の結果と一致する。そこで、ここでは対数正規理論がどの程度まで我々の系に適用可能であるかについて議論することにしよう。図 134 は、モデル A の $\ln \bar{m}$ の PDF が l とともにどう変化するかを示している。差分場 Y の間欠性を反映して、 l が小さくなるとともに PDF の幅は増加し、ピークは左へ移動する。もしこの PDF を何らかの解析的な形で系統的に近似できれば、我々はモーメントのスケーリング指数をあらわに計算することができる。このとき、 $l^{-1} \langle m(l) \rangle \equiv \langle \bar{m}(l) \rangle$ が l によらないこと、つまり全面積が測定スケールによらないことを取り入れねばならない。そこで、最も簡単な方法として、観測された PDF と 1 次と 2 次のモーメントが等しい対数正規分布で近似してみよう。

対数正規分布は次のように表わされる：

$$\bar{Q}(\bar{m}; l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v(l)} \bar{m}} \exp \left[-\frac{(\ln \bar{m} - c(l))^2}{2v(l)} \right], \quad (214)$$

ここで、 $c(l)$ と $v(l)$ は $\ln \bar{m}$ の平均と分散である。さらに、対数正規理論は $c(l)$ と $v(l)$ が以下の形を取ることを仮定する:

$$c(l) = \ln \langle \bar{m}(l) \rangle + \frac{\mu}{2} \ln l, \quad v(l) = -\mu \ln l, \quad (215)$$

ここで μ はいわゆる間欠性指数である。 $\langle \bar{m}(l) \rangle$ が l によらないという条件はこれらの $c(l)$ と $v(l)$ では自動的に満たされている。

これらの仮定より、 $\bar{m}(l)$ の q 次のモーメントは

$$\langle \bar{m}(l)^q \rangle = \langle \bar{m}(l) \rangle^q l^{-\frac{\mu}{2}q(q-1)}, \quad (216)$$

と計算され、分配関数は

$$Z_m^q(l) = N(l) \langle \bar{m}(l)^q \rangle = \langle \bar{m}(l) \rangle^q l^{q-1-\frac{\mu}{2}q(q-1)}. \quad (217)$$

と表わされるので、指数 $\tau(q)$ と一般化次元 $D(q)$ は

$$\tau(q) = (1 - \frac{\mu}{2}q)(q-1), \quad D(q) = 1 - \frac{\mu}{2}q. \quad (218)$$

と求められる。

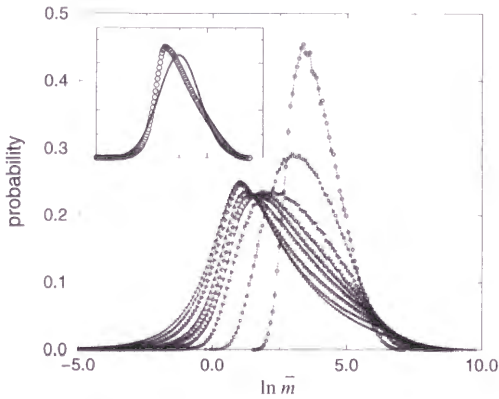


図 134: モデル A での $\ln \bar{m}$ の PDF。最もピークが左にあるものが $l = 2^{-15}$, 以下 $l = 2^{-10}$, $l = 2^{-7}$, $l = 2^{-5}$, $l = 2^{-4}$, $l = 2^{-3}$, $l = 2^{-2}$, $l = 2^{-1}$ (最も右)。 $l = 2^{-5}$ に対する対数正規フィットを挿入図に示した。

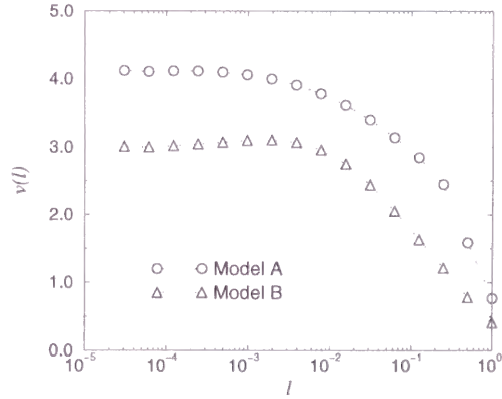


図 135: $\ln \bar{m}$ の PDF の分布 $v(l)$ 。

図 139 に、モデル A の場合について数値的に得られた $\tau(q)$ と $\mu = 0.3$ での対数正規理論による $\tau(q)$ の比較を示した。 $q < 2$ の場合にはよく一致しており、低次モーメントに対して対数正規理論は正しいように見える。

しかしながら、対数正規分布は実際の PDF からはかなりずれており、上に仮定された $c(l)$ と $v(l)$ の $\ln l$ 依存性は成り立っていないように見受けられる。図 134 の挿入図に、 $l = 2^{-5}$ の $Q(m; l)$ に対する対数正規フィットを示した。同一の平均と分散を使ったにも関わらず、実際の PDF はかなり非対称で、対称な対数正規分布からかなりはずれていることがわかる。

図 135 にフィッティングのパラメータ $v(l)$ の $\ln l$ に対する依存性を示した。もし先ほどの仮定が正しければ、データは直線に乗り、その傾きが間欠性指数 μ を与えるはずである。しかしながら、

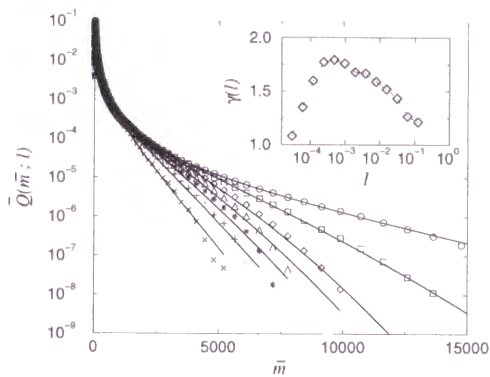


図 136: モデル A のリスケールされた PDF のテイル部分。傾きがもっとも小さいのが $l = 2^{-15}$, 以下もっとも大きい $l = 2^{-3}$ まで 2^{-2} 刻み。挿入図は引き延ばされた指数関数の指数 $\gamma(l)$ 。

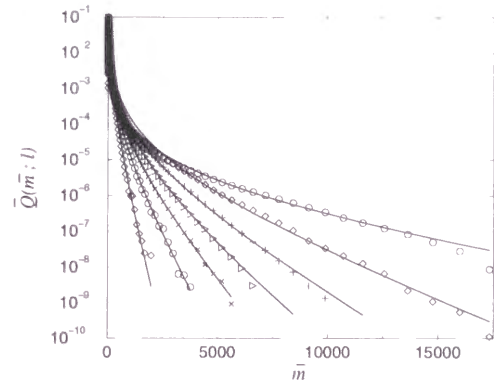


図 137: モデル B のリスケールされた PDF のテイル部分。傾きがもっとも小さいのが $l = 2^{-15}$, 以下もっとも大きい $l = 2^{-3}$ まで 2^{-2} 刻み。

確かに $v(l)$ は $\ln l$ とともに減衰してはいるが、全く線形には見えず、その傾きをまともに読むことはできない。

モデル B に対する PDF、 $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ は、大きな l に対してはモデル A に対するものに比べ対称であり、対数正規性が多少はよく成り立っているように見える。我々は、図 135 の大きな l に対するデータから $\mu \sim 0.6$ 程度の値を得ることができ、これは図 127 から得られる $D(q)$ の小さな q での傾き ~ 0.3 にごく粗くだが一致する。が、再び l が小さくなると共に、実際の PDF の非対称性は強くなり、対数正規分布による近似は悪化する。

小さな l に対しては、 $c(l)$ と $v(l)$ の変化はごく小さいので、観測されたスケールリング則は主にこれらの l 依存性よりは PDF の非対称性の増加から来ると考えられる。故に、対称な対数正規分布による近似は小さなスケールでは観測された PDF のよい近似ではなく、対数正規理論による指数の式は数値的な PDF からは正当化できない。

11.5.2 PDF の引き延ばされた指数分布テイルと高次のモーメント

高次のモーメントは PDF のテイル (前述の領域 II と III) によって決まる。我々の PDF は引き延ばされた指数を掛けたベキ則によってよく近似されることを述べたが、そのカットオフ位置 $m_0(l)$ の l に対するベキ的な依存性は、自然にスケールリング指数 $\tau(q)$ の q に対する線形な依存性へと導く。

前の我々の観測にしたがって、リスケールされた PDF、 $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ を次のように近似しよう:

$$\bar{Q}(\bar{m}; l) = \begin{cases} \bar{Q}_0(\bar{m}; l) & (\bar{m} < 1), \\ \bar{Q}_1(l) \bar{m}^{-1-\eta} \exp \left[- \left(\frac{\bar{m}}{m_0(l)} \right)^{\gamma(l)} \right] & (\bar{m} > 1), \end{cases} \quad (219)$$

ここで、 $\bar{Q}_0(\bar{m}; l)$ は小さな \bar{m} での PDF を表す未知の関数であり、 $\bar{Q}_1(l)$ は定数である。このふたつの量の l 依存性は、PDF の連続性と規格化を満たすように決めねばならない。なお、ここで再び \bar{m} をふたつの領域の境界点が $\bar{m} = 1$ に来るようにリスケールした。

この PDF により、 q 次のモーメント $\langle \bar{m}(l)^q \rangle$ は次のように計算される:

$$\langle \bar{m}(l)^q \rangle = \frac{\int_0^1 \bar{m}^q \bar{Q}_0(\bar{m}; l) d\bar{m} + \bar{Q}_1(l) \frac{1}{\gamma(l)} \bar{m}_0(l)^{q-\eta} \Gamma\left(\frac{q-\eta}{\gamma(l)}, \frac{1}{\bar{m}_0(l)^{\gamma(l)}}\right)}{\int_0^1 \bar{Q}_0(\bar{m}; l) d\bar{m} + \bar{Q}_1(l) \frac{1}{\gamma(l)} \bar{m}_0(l)^{-\eta} \Gamma\left(\frac{-\eta}{\gamma(l)}, \frac{1}{\bar{m}_0(l)^{\gamma(l)}}\right)}. \quad (220)$$

$\langle \bar{m}(l)^q \rangle$ の小さな l に対する漸近形はベキ則であり、その指数を決めるのに、先に述べた $m_0(l)$ の l に対する $\bar{m}_0(l) \propto l^{-\nu}$ という関係を用いる。ここで ν は正の定数である。 $q \gg q_c \simeq \eta > 0$ かつ $l \ll 1$ という条件下で、 $\bar{m}_0(l)$ は非常に大きくなるので、各ガンマ関数はほぼ l によらないものと見なせる。故に、分子の第 2 項と分母の第 1 項が重要となり ($\nu > 0$ に注意)、その他の項を無視することにより、

$$\langle \bar{m}(l)^q \rangle \sim \frac{\bar{Q}_1(l) \frac{1}{\gamma(l)} \Gamma\left(\frac{q-\eta}{\gamma(l)}, \frac{1}{\bar{m}_0(l)^{\gamma(l)}}\right)}{\int_0^1 \bar{Q}_0(\bar{m}; l) d\bar{m}} \bar{m}_0(l)^{q-\eta} \sim u(l) l^{-\nu(q-\eta)}, \quad (221)$$

が得られる。ここで $u(l)$ は l の未知の関数であり、先ほど仮定した未知の $\bar{Q}_0(\bar{m}; l)$ と $\bar{Q}_1(l)$ に関係している。分配関数 $Z_m^q(l)$ は

$$Z_m^q(l) = N(l) \langle m(l)^q \rangle = l^{q-1} \langle \bar{m}(l)^q \rangle \sim u(l) l^{q-1-\nu(q-\eta)} \quad (222)$$

と計算される。指数 $\tau(q)$ は $u(l)$ が未知なので完全には決められないが、その q 依存性だけは次のように得られる:

$$\tau(q) = (1-\nu)q + \text{const.}, \quad (223)$$

これより、 $D(\infty) = 1-\nu$ が得られる。一方、図 127 で示したように、数値的に得られた $D(q)$ はこの領域ではほぼ定数、つまり、ある $q_c \simeq \eta$ より大きな q に対し、 $D(q) \equiv D(\infty)$ である。この事実から、上式の定数は $\nu-1$ に近いこと、つまり

$$\tau(q) = (1-\nu)(q-1), \quad D(q) = 1-\nu \quad (224)$$

という関係式が $q \gg q_c \simeq \eta$ に対して予想される。

モデル A に対して、上の $\tau(q)$ の形を図 138 において数値的に得られた $\nu \simeq 0.15$ という値を使って実験値と比較したものを図 139 に示す。予期されたように、実験で得られた $\tau(q)$ は $q > 2$ の場合についてよくフィットされる。この結果の妥当性は、図 127 において $D(q)$ の飽和する値が大体 $1-\nu \simeq 0.85$ で与えられることから確認できる。モデル B についても、 $D(q)$ の飽和する値 $\simeq 0.65$ はカットオフ位置のデータから得られた値 $\nu \simeq 0.3$ に近い。

このように、高次モーメントの指数の q に対する線形な依存性は、引き延ばされた指数のカットオフ位置 $\bar{m}_0(l)$ の l に対するベキ的な依存性から来ている。

11.5.3 PDF の微視的なモデルの難しさ

振幅場 X についての PDF、 $\bar{P}(\bar{h}; l)$ については、前に示したように微視的な確率過程による説明をすることができたが、差分場 Y についてはどうであろうか。もし $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ が似たような簡単な過程に基づく確率過程で説明することができれば便利である。

\bar{m} の大きな領域のことを考えよう。引き延ばされた指数関数を掛けたベキ則は、次の乗法的なランジュバン方程式に対応するフォッカープランク方程式の解として得られる:

$$\frac{d\bar{m}(t; l)}{dt} = \lambda(t) \bar{m}(t; l) - A(l) \bar{m}(t; l)^{p(l)}. \quad (225)$$

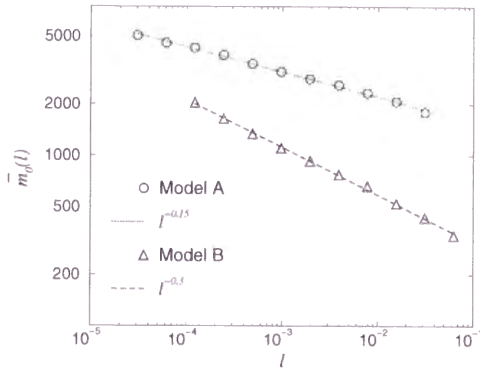


図 138: カットオフ位置 $\bar{m}_0(l)$ の l 依存性。

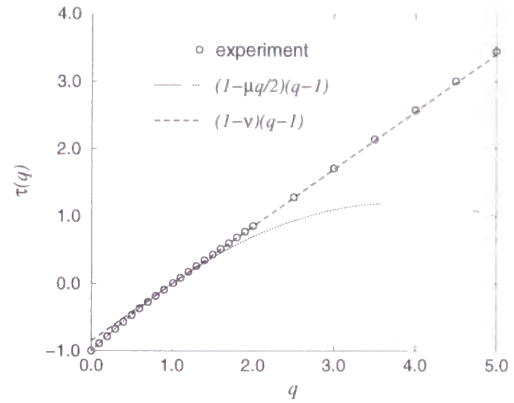


図 139: $\tau(q)$ の実験値と理論の比較。

ここで $A(l)$ と $p(l)$ は l に依存する定数で、PDF の異なる領域の境界の位置と引き延ばされた指数関数の指数を決める。乗法的なノイズ $\lambda(t)$ は前と同じ性質のものと仮定しよう。長波長外場のゆらぎの効果を、 $\bar{P}(\bar{h}; l)$ の時に導入した加法的なノイズの代わりに、ここでは $\bar{m} = 1$ に反射壁を置くことによって表わそう。すると、定常 PDF は

$$\bar{Q}(\bar{m}; l) \propto \bar{m}^{-1-\eta} \exp\left(-\frac{A(l)\bar{m}^{p(l)-1}}{D_\lambda(p(l)-1)}\right), \quad (226)$$

のように得られ、これは我々が欲しかった形である。

しかし、この確率方程式、特に $Z_m^q(l)$ のスケーリング挙動に重要な非線形緩和項 $\bar{m}(t; l)^{p(l)}$ とその係数 $A(l)$ は、以前の $h(t; l)^2$ の場合のように簡単には正当化できない。 $A(l)\bar{m}(t; l)^{p(l)}$ と、 $\tau(q)$ の線形な振る舞いを導き出すのに必要な付加的な仮定 $A(l) \propto l^\nu$ は、なんらかのよりミクロなダイナミクスを平均的に表現したものと見ることができる可能性はある。

この差分場 Y の説明の難しさは、測度 $m(l)$ もしくは $\bar{m}(l)$ が、高さの差の空間相関を複雑な形で含んだ量であることから来る。近傍の素子の局所リアプノフ指数の間には強い相関があるが、完全に同一ではない。そのため、スケール l の局所的なグループに属する素子はあるときは同期して動き、またあるときは同期を失ってばらばらな挙動をする。 $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ のべき的な領域は、同じ乗法的なノイズによる $\bar{m}(l)$ のまとまった挙動として見ることができよう。しかし、スケーリングに重要な $\bar{Q}(\bar{m}; l)$ の急激なカットオフは、局所リアプノフ指数間の微妙な相関の結果として起こるように思われる。同様に小さな $\bar{m}(l)$ についての PDF の定数ではない挙動の説明も難しい。

このように、今のところ $m(l)$ については $h(l)$ の場合のように簡単な仮定に基づくもってもらしい議論を与えることができない。局所リアプノフ指数間の相関が重要そうなので、以下でそのような相関をより自然に取り入れることのできるような描像へと変えてみよう。

11.5.4 乗数の分布

差分場 Y のダイナミクスへの別のアプローチとして、場の間欠性をスケール不変な乗数分布によるバイナリーカスケードモデルで記述してみよう。前に述べたように、我々の系における実際のカスケード過程は複雑である。同一の乗数が掛けられる素子の位置と区間は、各時刻ごとに変化する。

保存的なバイナリーカスケードモデルは、局所リアプノフ指数の相関を取り入れるのに最も簡単

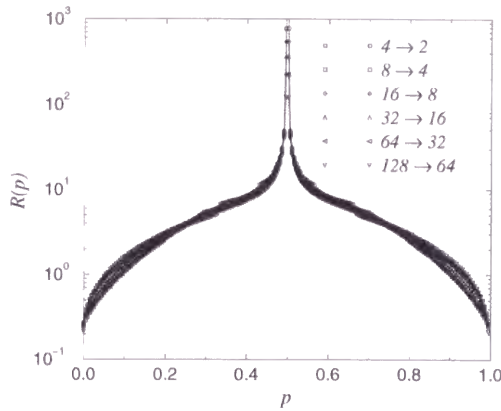


図 140: モデル A について得られた乗数分布 $R(p)$ 。

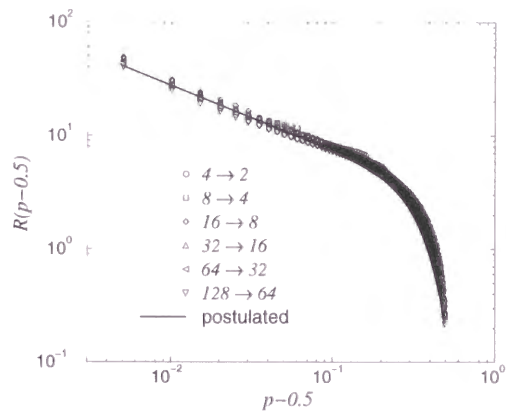


図 141: モデル A について得られた乗数分布 $R(p-0.5)$ 対 $p-0.5$ の両対数プロット。

な方法であろう。実際に乗数の分布を計算することにより、このモデルがどの程度まで我々の系に適用可能かを調べてみることにする。バイナリーカスケードモデルにおいては、ある区間上の測度が、その半分の長さの区間に 2 分割され、そのときにスケールに依存しない乗数分布 $R(p)$ から独立に拾ってきたランダムな乗数 p が掛けられる。 $R(p)$ は $p = 0.5$ に対して対称であること、すなわち $R(p) = R(1-p)$ が仮定される。

スケーリング指数 $\tau(q)$ とこの $R(p)$ は以下のように関連づけられる [45]。最初の測度を 1 に規格化しておく。 n ステップ目の分割で、各区間の長さは $l = 1/2^n$ となり、その区間上の測度 $m(l)$ は $m(l) = p_1 p_2 \dots p_n$ と与えられる。ここで p_i は $R(p)$ からランダムに取ってきたランダムな乗数である。 $m(l)$ の q 次のモーメントは $\langle m(l)^q \rangle = \langle (p_1 p_2 \dots p_n)^q \rangle = \langle p^q \rangle^n$ と計算される。ここで $\langle \dots \rangle$ は $R(p)$ に対するアンサンブル平均である。分配関数 $Z_m^q(l)$ は

$$Z_m^q(l) = N(l) \langle m(l)^q \rangle = l^{-1} \langle p^q \rangle^n \sim l^{\tau(q)}, \quad (227)$$

となり、スケーリング指数 $\tau(q)$ は

$$\tau(q) = \frac{\ln(l^{-1} \langle p^q \rangle^n)}{\ln l} = \frac{n \ln \langle p^q \rangle}{\ln(1/2^n)} - 1 = -\frac{\ln \langle p^q \rangle}{\ln 2} - 1. \quad (228)$$

で与えられる。

さて、 $N = 2^{15}$ 個の素子を使って実際の乗数分布を計算してみよう。モデル A についていくつかの n に対する計算結果を図 140 に示す。各 $R(p)$ は $p = 0.5$ にピークを持ち、一本のスケール不変な線上に重なっているように見える。 $2^8 (\times 2^{-15})$ 以上のスケールの $R(p)$ はこの線には重ならなかった。図 141 に、この分布の右半分、 $R(p)$ 対 $p-0.5$ を ($p > 0.5$) について両対数スケールで示す。近似的にスケール不変な曲線は、小さな $p-0.5$ に対しべき的で、大きな $p-0.5$ では急激に減少する。同じ図に示されているように、このカーブは引き延ばされた指数関数を掛けたべき則で良く近似される。

しかしながら、図 142 に示したように、ここで仮定した $R(p)$ の解析形から計算した $\tau(q)$ は、実験的な $\tau(q)$ と低次のモーメントについてしか一致しない。このことは、バイナリーカスケードモデルにおいて無視された全測度のゆらぎやスケール間の $R(p)$ の相関が高次のモーメントに重要であることを意味する。また、スケール不変だとした曲線のテイルの方の微少なずれも効いているかも知れない。流体乱流の文脈においては、このような問題点は早くから指摘されていた。

さらに、図 143 に示すように、モデル B での乗数分布はスケール不変でさえない。各々の分布は $p = 0.5$ にピークは持つが、 l の減少とともに、各分布は細くなり、同じ曲線に重なる様子は見られない。

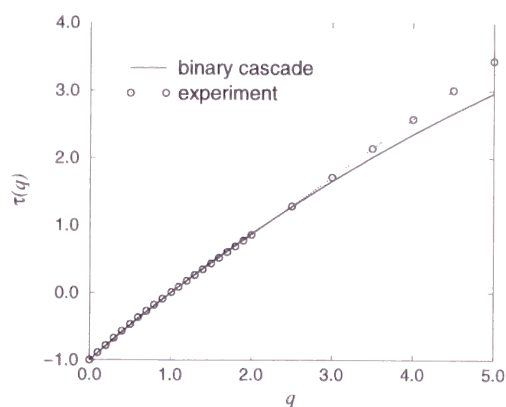


図 142: 仮定された $R(p)$ から計算された $\tau(q)$ と、実験的に得られた $\tau(q)$ の比較。

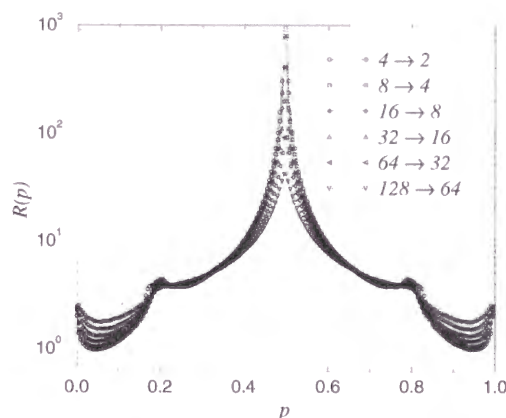


図 143: モデル B について得られた乗数分布 $R(p)$ 。

11.6 議論

11.6.1 平均の取り方

前に述べたように、我々の結果は平均の取り方に依存するので、ここでそのことについて議論しよう。我々がこの章で使ってきた平均は、単純な時空平均である。つまり、各ステップごとに $h(x, l)^q$ や $m(x, l)^q$ を空間的に足しあげ、これを長時間続けたあと最後に適当な数で割って平均とする。Halsey[53] はこのタイプの平均をアニール平均と読んだ。というのは、これは式 (195) から $\ln(\hat{Z}_{h,m}^q(l))$ を使って指数を計算することに相当するからである。ここで $\hat{Z}_{h,m}^q(l)$ は各ステップごとの分配関数である。このタイプの平均は、例えば乱流実験から得た長時間データの解析に使われている。

さて、他の平均の方法と結果について少し触れよう。いわゆるクエンチ平均においては、式 (195) から $\langle \ln \hat{Z}_{h,m}^q(l) \rangle$ を使って指数を計算する。つまり、各ステップごとにモーメントの和の対数を取り、それを時間平均するのである。このタイプの平均は、例えば DLA クラスタのマルチフラクタル解析に用いられている。

論文 [4] において、我々はさらに別の平均の仕方を用いた。それは上述のアニール平均だが、大きな違いは各ステップで全測度を 1 に規格化したことである。これは、全測度の時間ゆらぎを無視したことに相当する。

最初の方法は、測度の全時空系列をひとつの大きなサンプルと見ることになるが、他の方法は各時刻での測度をひとつのサンプルと見て、そのアンサンブル平均をとっている。後のふたつの方法は、どちらも全測度の時間ゆらぎを無視する傾向があるが、これは大きな違いをもたらす。なぜなら、我々の系においては全測度のゆらぎは中心極限定理に従わず、 $N \rightarrow \infty$ の極限で発散するからである。

図 11.6.1 はモデル A について上述の異なる平均の方法によって得られた一般化次元 $D(q)$ を示

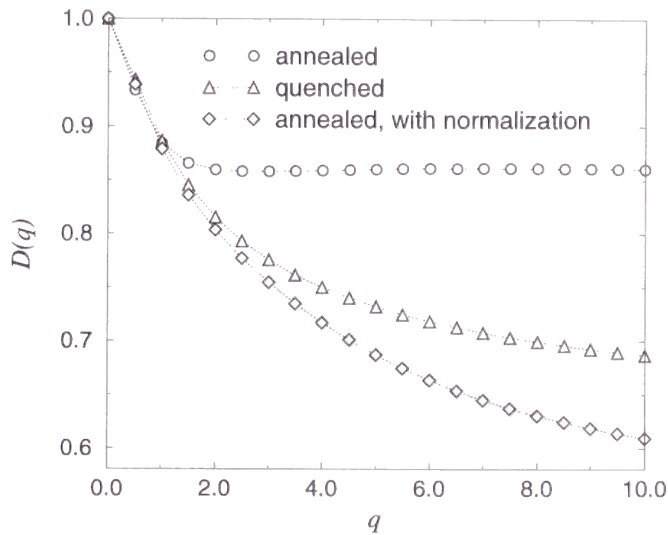


図 144: モデル A について異なる平均の方法で得られた一般化次元 $D(q)$ 。

している。興味深いことに、後のふたつの方法によって得られたスケーリング指数は q とともになめらかに変化し、最初の方法で得た $D(q)$ のような鋭い転移を示さない。このことから、全測度のゆらぎが q -相転移にとって重要であることがわかる。あとのふたつの方法で求められた $D(q)$ 曲線は、最初の方法で得られるのとは違ったなんらかの漸近領域におけるスケーリング則を反映しているものと思われる。

11.6.2 流体乱流との類似性および非類似性

以上述べてきたように、我々の簡単なモデルはマルチスケーリング、すなわち振幅場のマルチアフィン性と差分場のマルチフラクタル性を示す。我々は随所で流体乱流との類似性を強調してきたが、もちろんたくさんの重要な違いがある。

最初に述べたように、流体乱流においては、コルモゴロフの拡張された相似性仮説という速度差とエネルギー散逸率を関係づける有用な関係が信じられており、速度差のマルチアフィン性はエネルギー散逸場のマルチフラクタル性と簡単な関係で結ばれている。これにより、流体乱流での間欠性は基本的にはエネルギー散逸場の間欠性によるものとの解釈が可能である。一方、我々の系においては、振幅場と差分場を結ぶそのような簡単な関係はなく、問題をどちらか一方の場のダイナミクスに還元できない。そのような関係がないのは、系に保存則がないためと思われる。

また、我々の系には粘性を表わすような項がないため、最小スケールが存在しない。このことは、観測された q -相転移にとって重要であった。例えば我々のモデルに拡散的な項を導入すれば系に最小スケールを導入することができるが、そのときには系は転移点近傍で明確なスケーリングを示さなくなるであろう。

11.6.3 差分場 Y のマルチフラクタル性の理解へ向けて

振幅場 X のマルチアフィン性は比較的単純で、簡単な確率過程モデルによりそれを定性的に説明することができた。一方、差分場 Y のマルチフラクタル性はそう簡単には説明できず、実験的に得られた PDF から現象論的なモデルにより指数を計算することができただけであった。低次のモーメントに関しては対数正規モデルを適用し、指数はそれなりの一致をみたが、対数正規近似そのものの正当化はできなかった。これは乱流についても同じで、対数正規モデルはやはり低次のモーメントに対する粗い近似にすぎない。高次のモーメントに関しては、分布関数のテイルが引き延ばされた指数関数を掛けたベキ則という簡単な関数形で近似できることと、そのカットオフ位置の測定スケールへのベキ的な依存性から、指数の q に対する線形な依存性を導くことができた。引き延ばされた指数関数は、この系だけでなく流体乱流 [55] やフラクタルな表面成長 [51]、また経済学のデータ [68] などについても発見されており、なんらかの共通の動力学的過程があるのではないかと予想される。論文 [56] はこの方向への研究として興味深い。

我々是对数正規モデルにおいて間欠性を表す指数 μ を導入した。一方、引き延ばされた指数関数近似においては、カットオフ位置のスケールへの依存性を表わす指数 ν を導入した。これらの指数はどちらも間欠性の効果を表わしているが、互いの関係は明らかではない。

上で用いたバイナリーカスケードモデルは、離散的な空間スケールとスケール不変な乗数分布に基づいているが、近年連続的な空間スケールとスケールに依存する乗数分布に基づくより洗練されたカスケードモデルが提案されている。例えば測定スケールの変化に対する PDF の変化をフォックカーブランク方程式や非ガウスノイズに駆動されたランジュバン方程式で記述するものである。そのようなアイデアを我々の系に適用することもまた興味深いであろう。

最後に、差分場 Y のマルチフラクタル性、特にその特徴的な $D(q)$ 曲線の形は、今のところ数値実験の結果しかないが、我々が扱っている時空乱流的な状態において広く共有される普遍的なものと思われる。例えば、第 10 章で、非局所結合 CGL 系においても、同様な性質が観測されていることの述べた。今後、ミクロな方程式より差分場のゆらぎの空間相関を説明することのできる理論を發展させ、このことを明らかにしてゆかねばならない。

12 その他のトピック

この先には、まだきちんと確立しておらず、公表論文にもなっていない様々な事柄を簡単に記しておく。

12.1 空間2次元の系

今までは空間1次元の系のみを扱ってきた。実際、特異的な時空カオス状態を観測するにはそれで十分であったし、種々の量を測定するのも空間1次元だと数値計算が速くて好都合であった。また、特異的な時空カオス状態に関する我々の理論によると、空間の次元はそれほど重要ではないことが予想される。しかし、空間2次元で数値計算することにより、実際にこのことが確認され、また空間パターンの特異的な様子がよくわかる、ここでは空間2次元の非局所結合 CGL 系とロジスティック写像系を数値計算し、空間相関関数を測定してみよう。

非局所平均場は、素子の変数にある重み関数を掛けて積分した畳み込みであり、これは波数空間では単にフーリエモード同士の掛け算の総和なので、FFT と組み合わせることにより素早く数値計算できる。重み関数としては、1次元で使った指数関数的に減衰するものではなく、むしろ最初の章で述べた拡散減衰方程式の2次元でのカーネルであるベッセル型のものを用いることにしよう。(重み関数の詳細な形があまり重要でないこともすでに明らかだが。)

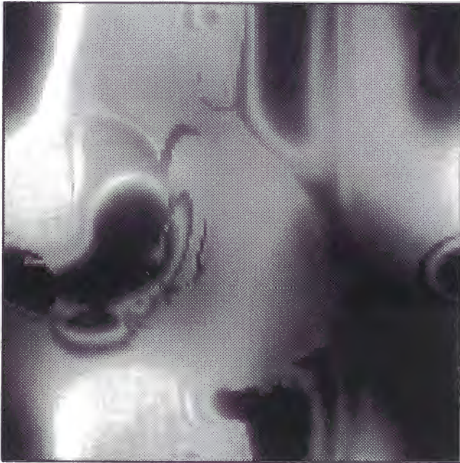


図 145: 空間2次元の非局所結合 CGL の振幅 $|W(x, y)|$ の典型的なスナップショット。パラメータは $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $\gamma = 8.0$ で、結合強度は $K = 1.0$ 。

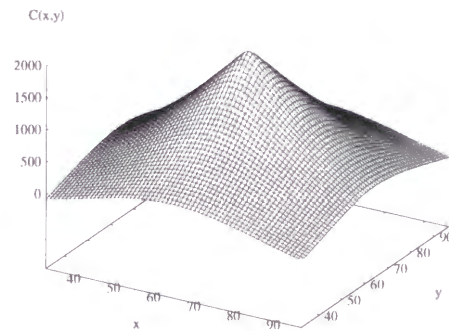


図 146: 左図と同じパラメータでの空間相関関数 $C(x, t)$ 。

図 145, 147, 149 に、非局所結合 CGL 系の振幅の典型的なスナップショットを示す。結合強度を弱めると共にパターンがフラクタル化するのは1次元の場合と同様である。図 146, 148, 150 には、それぞれ左図に対応するパラメータでの空間相関関数:

$$C(x, y) := \langle W(0, 0)W^*(x, y) \rangle, \quad (229)$$

を示す。原点付近(中央部分)がパターンのフラクタル化とともに尖ってくる。ここでは示さない

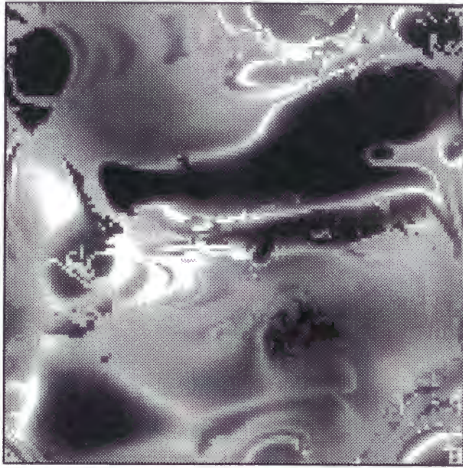


図 147: 空間 2 次元の非局所結合 CGL の振幅 $|W(x, y)|$ の典型的なスナップショット。結合強度は $K = 0.9$ 。

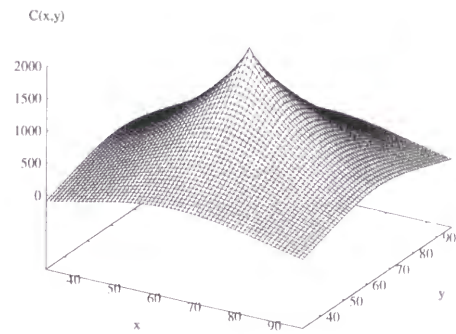


図 148: 左図と同じパラメータでの空間相関数 $C(x, t)$ 。

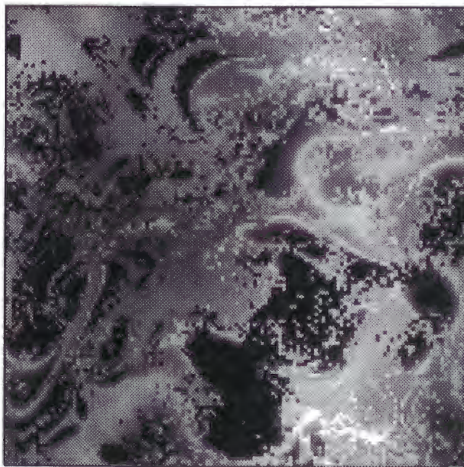


図 149: 空間 2 次元の非局所結合 CGL の振幅 $|W(x, y)|$ の典型的なスナップショット。結合強度は $K = 0.8$ 。

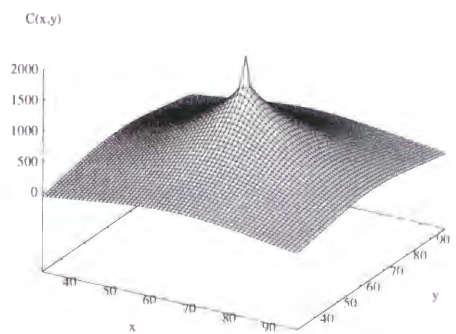


図 150: 左図と同じパラメータでの空間相関数 $C(x, t)$ 。

が、空間の回転対称性を仮定して平均した動径方向の空間相関関数:

$$\tilde{C}(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(r \cos \theta, y \sin \theta) d\theta, \quad (230)$$

は、やはりベキ則 $C(r) \simeq C_0 - C_1 r^\alpha$ に従うことも確認される。

ロジスティック写像系でのスナップショットと対応する空間相関関数を、図 151, 152 と 153 に示しておく。同じパラメータでも、特異的な時空カオス状態は見る瞬間によってかなり異なるパターンを示すことがわかる。実際、図 151 のように細かく乱れた状態の中のいくつかの比較的コヒーレントな部分がかんたん成長して図 152 のような空間全体が比較的コヒーレントな状態にまで発展し、やがてまた細かい乱れが成長して図 151 のような状態へ戻る、ということを系は繰り返す。このようなことはどの非局所結合系でもある程度は見られるが (外場を与えた系では見られない) 特にロジスティック写像系では顕著である。これは、大域結合の極限においてクラスタリング状態を示し得るような、素子間の状態差が強く抑制される部分を持っていることと関係があると思われる。

我々が短距離の空間相関として特徴づけたのは、このような大きなスケールでのダイナミクスではなく、むしろ細かいスケールでの素子の状態差のゆらぎであった。ベキ的な空間相関の原因となっていた時空オンオフ間欠性が、そのような大きなスケールでのダイナミクスにどのようにフィードバックされるかは興味深い。

例えば、最近大域結合ロジスティック写像系の無数のクラスタリング状態間の移り変わりはオンオフ間欠性のようなダイナミクスによるものであることが主張されているが、この系のダイナミクスとも関連して、興味を持たれる。

12.2 自由度

非局所結合素子系を大自由度力学系として見てみよう。結合強度が大きく系のパターンが長波長でなめらかな時には、系は少数自由度のカオスである。一方、結合強度が 0 の極限では独立な N 個の素子が理想気体的にばらばらに振る舞っているので、系の自由度は N に素子の自由度を掛けたものになるだろう。では、その中間にある特異的な時空カオス状態において、系の自由度はどうなっているのだろうか。また、それは空間パターンの特徴とどのように関係しているのであろうか。

系の自由度を測るのにはいくつか方法があるだろうが、ここではリアプノフ指数を使うことにしよう。ここで言うリアプノフ指数は、これまで使ってきた局所的なものではなく、 N 個の素子系全体をひとつの力学系として見たときのものである。

非局所結合 CGL 系のリアプノフ指数は、既に修士論文において測定してあるのでそのときの図を転載することにしよう。系のパラメータは $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $\gamma = 8$ にとり、素子数 N と結合強度 K を変化させてみることにする。まず図 154 に、 N を変化させて測定した $K = 0.7$ のときのリアプノフ指数を示す。正のリアプノフ指数が存在し、その個数が N と共に増加することから、系は実際に大自由度カオス状態であることがわかる。

図 155 に、いくつかの N に対して、 K を変化させて測定した正のリアプノフ指数の個数を示す。 K が大きいときには正のリアプノフ指数の個数は N によらず、系は少数自由度カオス状態だが、特異的な時空カオスが現れるような K の範囲で、正のリアプノフ指数の個数は N に比例するようになり、系が大自由度カオスに転移したことがわかる。その後 K が減少するとともに、正のリアプノフ指数は飽和して増加しなくなり、 K が大体 0.5 以下になると、突然 0 にジャンプする。ここは各素子がほぼ振幅方向の自由度を失って位相振動子的になる値に相当する。

なお、ここで使っている大自由度/少数自由度カオスの意味は、拡散結合系の文脈で使われるものではないので注意しておこう。拡散結合系のカオスの文脈では、系に本当にいくつかのモードし

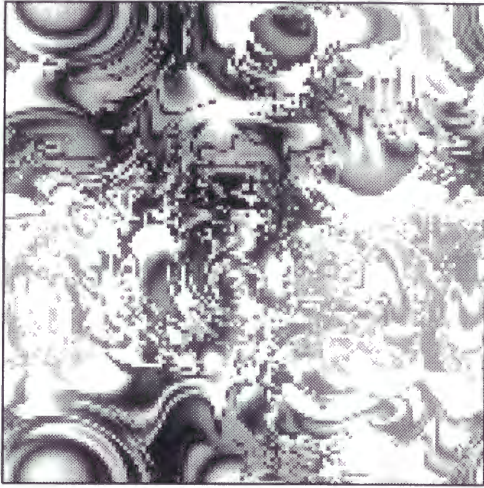


図 151: 空間 2 次元の非局所結合ロジスティック写像振幅 $|X(x, y)|$ の典型的なスナップショット。パラメータは $c = 3.7$, $\gamma = 8$ で、結合強度は $K = 0.25$ 。

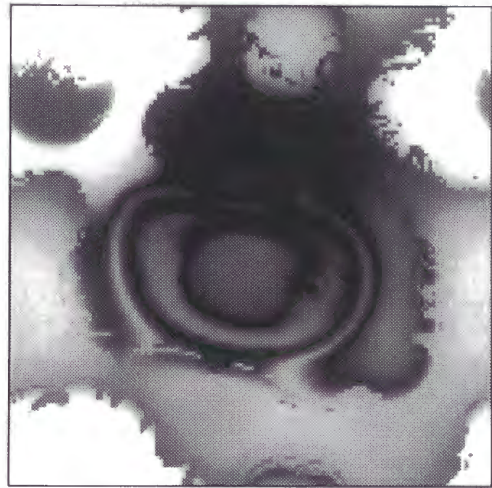


図 152: 左図と全く同じパラメータの系で、異なる時刻でのスナップショット。

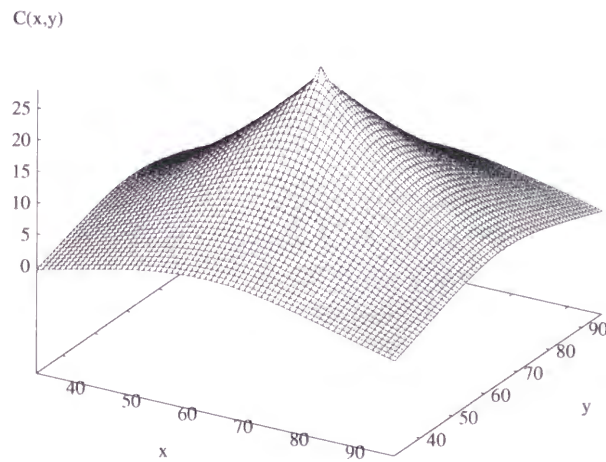


図 153: 同じパラメータでの空間相関数 $C(x, t)$ 。

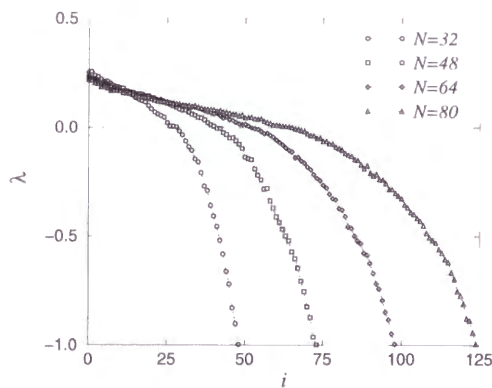


図 154: 非局所結合 CGL のリアプノフ指数を大きい順にプロットした。パラメータは $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $\gamma = 8.0$, $K = 0.7$ で、 N を 32, 48, 64, 80 と変化させた。小さい方の値はカットしてある。

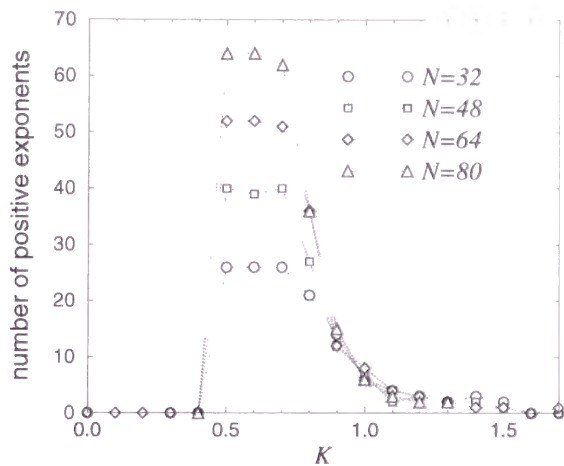


図 155: 正のリアプノフ指数の個数 vs. 結合強度 K

が存在していないときを少数自由度カオスと呼び、系の相関長程度の領域がそれぞれカオティックで、系のサイズを大きくしてゆくと系の自由度が増加してゆくとき、大自由度カオスと呼ぶ。一方、ここでは系のサイズ自体を変えることは考えておらず、系を構成する素子数 N に自由度がよらないときに少数自由度、 N に自由度が比例するときに大自由度と呼んでいる。なお、ここでは自由度を議論するのに正のリアプノフ指数の個数を使ったが、もちろん Kaplan-Yorke 次元を使う方がより適当かもしれない。が、本質的には同じ情報が得られる。

以上のことは系が連続性を保っているか否かと関係している。では、自由度と系のパターンの特徴にはどのように関係しているのでしょうか。パラメータ K に対する正のリアプノフ指数の個数の依存性と、前に得たパターンのフラクタル次元 (図 28) や局所リアプノフ指数の依存性 (図 114) を比べてみるのは面白い。

まず、正のリアプノフ指数の個数が飽和する点 ($K \sim 0.75$) は、フラクタル次元 D_f がほぼ 2 に飽和し、局所リアプノフ指数が負から正になる点とはほぼ同じ位置にある。つまり、素子間にブローアウト分岐が起こり、パターンの次元は 2 になると系の自由度も N に対して一定の比率のある値に飽和する。その後、正のリアプノフ指数の個数とフラクタル次元はともに減少するが、正のリアプノフ指数の個数が N に依存しなくなる点 ($K \sim 1.0$) は、フラクタル次元がほぼ 1 になる点とやはり重なっている。自由度が素子数 N に依存しなくなるということは、数値計算に使う素数に系のパターンが依らないこと、つまりパターンが連続的になったということであり、これはやはりコンシステントな結果である。

以上のような結果は非局所結合ロジスティック写像系についても得られる。パターンのフラクタル次元と系を大自由度力学系としてみたときの自由度が対応していることは自明ではなく、これは面白い結果である。正のリアプノフ指数が飽和する点は素子間にブローアウト分岐が起こる点と対応していることは感覚的に理解できなくもないが、リアプノフ指数が N によらなくなる点とフラクタル次元が 1 になる点が一致していることを、前に述べた局所的なランダム乗法過程モデルからは理解しづらい。これを明らかにするのは今後の課題である。

12.3 再び極限へ

非局所結合素子系における特異的な時空カオスの性質は、これまでの研究でかなりわかってきた。それは、多くの素子系の広いパラメータ領域で観測され、この種の結合系におけるひとつの普遍的な運動形態であると言えよう。

一方で、もともとこのような系を考える動機にもなった、ふたつの極限的な系、すなわち拡散結合系と大域結合系の時空カオスや大自由度カオスと、この非局所結合系の特異的な時空カオス状態がどのようにつながるのか、あるいはつながらないのかを考えないわけにはいかない。

このつながりは、ある意味では明らかである。例えば図 156 に拡散結合 CGL 系の振幅場の典型的な時間発展を、図 157 には結合距離を短くしてそれに似るようなパラメータを選んで作った非局所結合 CGL 系の振幅場の時間発展を示す。両者の見かけ上の違いを指摘するのは難しい。この状態から、例えば非局所結合 CGL 系の結合強度を徐々に弱めてゆくと、系は拡散結合 CGL 系とよく似た皺状のパターンを保ったまま、局所的に連続性を失い始める。前に述べた通り、連続性を失うのは振幅 $|W|$ が小さく素子間の軌道拡大率が正になる領域であり、この時空パターンでは色が白い部分に相当する。こには示さないが、例えば非局所結合系において不完全な野崎-戸次ホールのようなものを作ることでもでき、そこで結合強度が十分でないときホールの位置からパターンのフラクタル化がカスケード的に起こったりもする。

では、大域結合の方はどうであろうか。図 158, 159 に大域結合 CGL 系の振幅パターンと複素平面でのスナップショットを、図 160, 161 にはそれに似るように結合距離を長くして作った非局所結合 CGL 系の振幅パターンと複素平面でのスナップショットを示す。大域結合系は不完全なクラスタリングが起こったような状態であり、分布は比較的まとまった部分と、それについていけないばらばらな部分からなる。一方、非局所結合系においてはさらにその状態に長波長の変調が加わったような分布をしており、すでに特異的な時空カオス状態のある種の特徴を持ってもいる。両者はやはり見かけ上非常によく似ている。

これまでの結果から、拡散結合系が少し崩れた状態、大域結合系が少し崩れた状態と、そこでなにが起こっているかを感覚的に理解するのは、それほど難しいことではない。しかし、問題はこれをどんな量にしてみれば系が今どの状態にいるのかを定量化できるかである。例えば系がどの程度大域的性質、拡散的性質を持っているのかを表わすことのできるようなオーダーパラメータの導入は可能だろうか。また、上の例では結合長を変えたが、結合長を一定に保ったまま結合強度を変化させると、一般に結合が強いとパターンはなめらかで拡散結合系的であり、結合が弱いとパターンはばらばらで大域結合系的である。そのようなオーダーパラメータの導入により、結合長-結合強度の 2 次元のパラメータ空間上に、系の相図を描くことができるだろうか。今後の課題である。

12.4 カスケードプロセスとウェーブレット

コルモゴロフ、あるいはリチャードソンの渦が崩れて行く乱流描像以来、スケーリング則を示す系についてすぐに持たれる問いは、そのスケーリングの生成は何らかのカスケード過程によるものか、ということである。さて、我々の扱っている特異的な時空カオス状態は、スケーリング則を示す。では、系に何らかのカスケードプロセスが存在するだろうか？我々の系に保存量はなく、エネルギーなどが流れているわけではない。しかし、一様状態からの系の時間発展を見てみると、まず長波長の不安定性が生じ、それが徐々に細くなってゆき、素子がばらばらになってゆく。これを、系の大きなスケールから小さなスケールへの何らか情報の流れだと見ることもできるかもしれない。

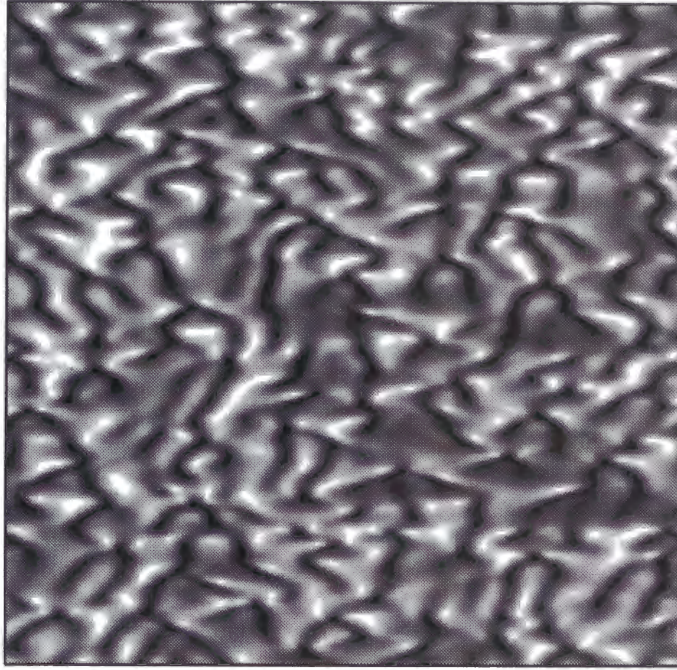


図 156: 拡散結合 CGL の振幅場 $|W(x)|$ の時間発展。パラメータは $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $D = 8.0$, 系のサイズは 256。

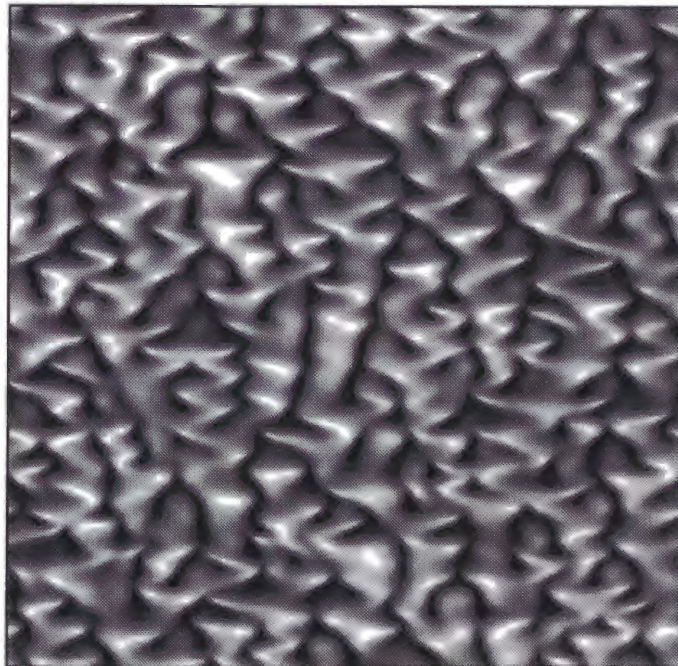


図 157: 非局所結合 CGL の振幅場 $|W(x)|$ の時間発展。パラメータは $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $\gamma = 128$, $K = 2.5$ 。256 個の素子を使った。

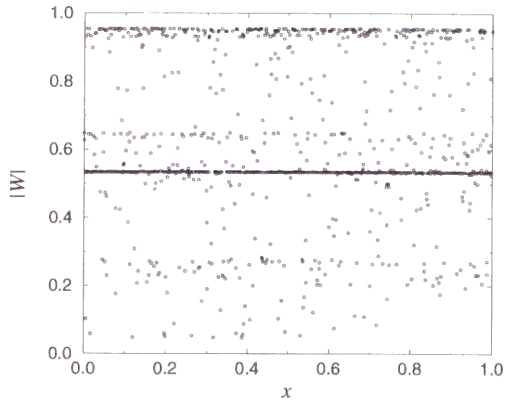


図 158: 大域結合 CGL の振幅 $|W(x)|$ のスナップショット。パラメータは $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $K = 0.7$, 素子数は 1024。

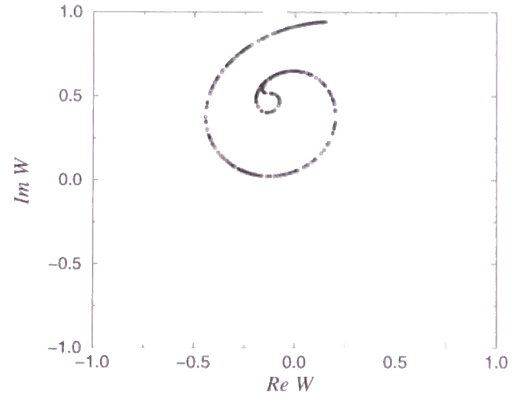


図 159: 大域結合 CGL の複素平面でのスナップショット。

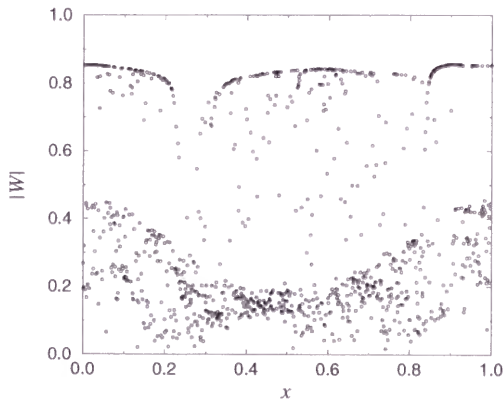


図 160: 非局所結合 CGL の振幅のスナップショット。パラメータは $c_1 = -2.0$, $c_2 = 2.0$, $\gamma = 1$, $K = 0.7$, 素子数は 1024。

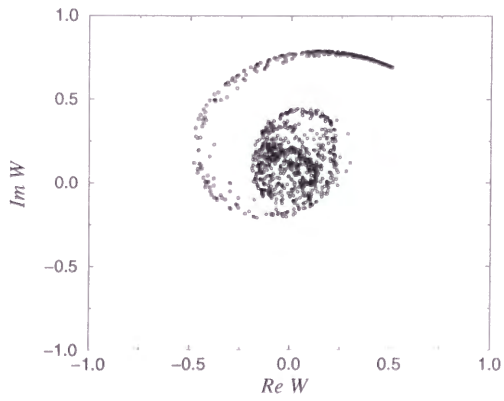


図 161: 非局所結合 CGL の複素平面でのスナップショット。

流体乱流で、そのようなカスケードプロセスを可視化するのによく使われる道具がウェーブレットである。ウェーブレットは実空間と波数空間の両方で適度に局在した波束で、量子力学のコヒーレント状態に似ている。マザーウェーブレットと呼ばれるひとつのウェーブレットから、スケール変換と並進の組み合わせでそのような波束の群れが作られ、適当に作ればそれらは完全系をなすことが知られている。ある信号を、適当なウェーブレット波束に射影したウェーブレット係数により、その信号がある範囲の位置および波数成分をどれだけ持っているかを知ることができる。

山田と大木谷は、乱流データからそのようなカスケードを取り出すために、各スケールでのウェーブレット係数間の相関を測定した。籐も2次元乱流に対し同様な解析を行い、エントロピーおよびエンストロフィーのスケール間の時間相関のずれから、カスケードの特徴的な時間を見積もった。図162に、山田と大木谷が使った Meyer のウェーブレットのパワースペクトルを示す。このウェーブレットは、実空間で連続で完全規格直行系をなしており便利である。図163に、実空間でのマザーウェーブレットとその子ウェーブレットを示した。

同様な解析が、我々の系についても可能かもしれないと考えるのは当然である。図164に、非局所結合 CGL の振幅場のスナップのウェーブレット分解を示す。図の左の数字 n はスケールで、 2^{-n} のスケールのウェーブレットに射影して得た係数、という意味である。ウェーブレット分解は振幅場を様々なスケールでの事象に分解できていることがわかる。

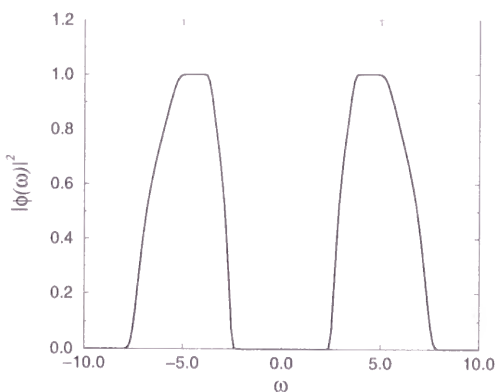


図 162: Meyer のウェーブレットのパワースペクトル

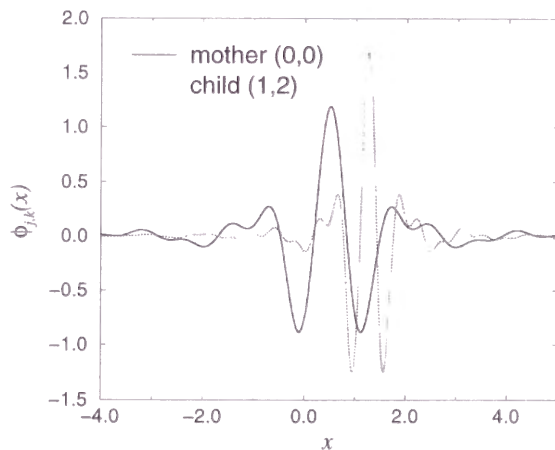


図 163: Meyer の母ウェーブレットと子ウェーブレット

しかし、ここでは示さないが、こうして得たウェーブレット係数間の時間相関を測定した予備的な計算からは、流体乱流に関する論文にあるような、スケール間の少しづつずれた時間相関は得られなかった。確かに長波長ではわずかながらそのような傾向が見られたが、我々がベキ則を測定しているようなスケール、つまり結合長より内側では、ウェーブレット係数間の相関は同時刻で最も強かった。つまり、このウェーブレットの方法で見た我々の系におけるカスケードは、何らかのコヒーレントな構造が徐々に崩れながら小さなスケールに向かうようなものではなく、ある瞬間に突然系の最小スケールまで一度に伝わるようなものであった。これはある意味では当然の結果である。我々の系において、十分小さなスケールでは各素子は単にほぼ一様な内部場にそれぞれ独立に駆動されているような状況にある。場の不連続性は各素子が内部場に同期できなくなったときに各素子で独立に生じ、場のコヒーレントなゆらぎ小さくなりつつ系の最小スケールまで伝わっていったわけではないからである。

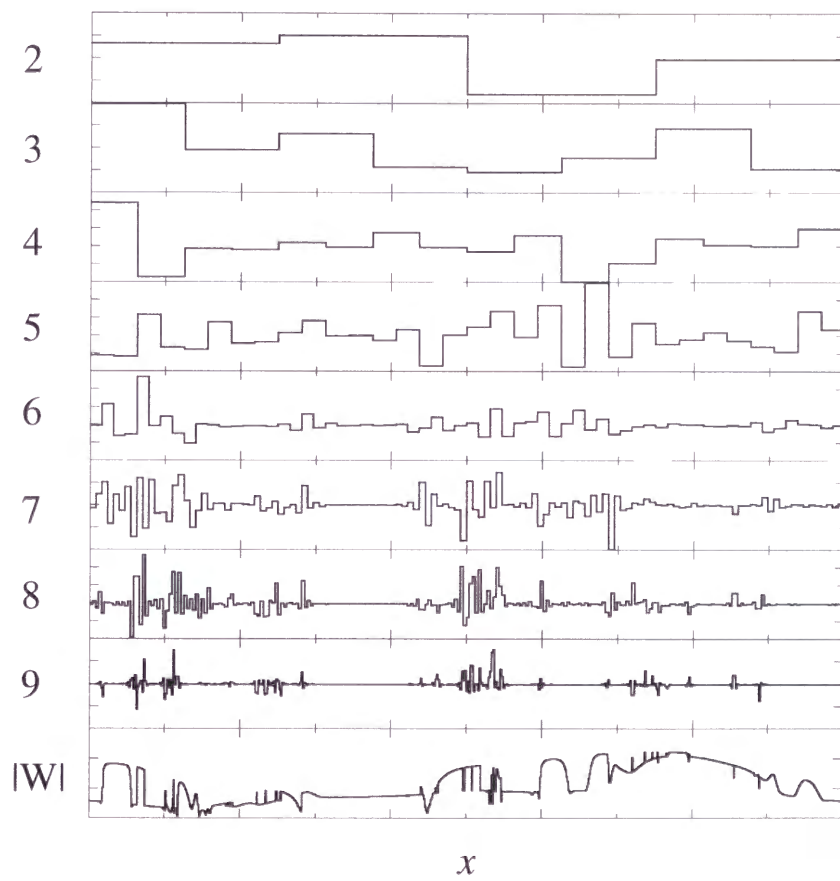


図 164: 振幅のスナップショットのウェーブレット分解

以上述べたように、今のところ流体乱流のようなカスケードプロセスの可視化はうまく行っていないが、最近(すくなくともエネルギーという保存量は存在しない)株価のデータに対し同様な解析をして情報カスケードを得た、という論文もあり、我々の系においても他の適当な量を定義することによりそのような可視化が可能かも知れない。またウェーブレットそのものは、第11章で述べたような場のマルチスケール性を精密に測定するなど、他にも有用な応用があるので、今後さらに研究するのは面白いだろう。

12.5 速い拡散場により結合した系

この論文の最初の方で非局所結合を導入するとき、素子間の相互作用を媒介する拡散的な場のタイムスケールが素子のそれに比べて十分短いとして断熱消去を行った。一方、相互作用を媒介する拡散的な場のタイムスケールがそれほど短くない場合にはどのようなことが起こるのか、という興味が生じるのは当然である。

この方向への最初の研究として、最近の論文 [6] において、ブラッセレータの集団に拡散場を結合した方程式が断熱消去せずに直接数値計算された:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X(x,t)}{\partial t} &= A - (B+1)X + X^2Y + K_X S, \\ \frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} &= (B+K_Y)X - X^2Y + K_Y S, \\ \varepsilon \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} &= -S + D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + X,\end{aligned}\tag{231}$$

ここで X, Y は通常のブラッセレータの変数であり、 S が減衰しつつ拡散する場、 ε はブラッセレータとのタイムスケールの比を表わす。

その結果、 ε がある程度小さいときには非局所結合とよく似た時空カオスが見られ、そこでの場の差分の各次モーメントのスケール則などの特徴もほぼ同様であった。また、 ε がある程度大きくなったところで、スケール則が破れている可能性も示唆された。

この論文により、我々の系の特異的な時空カオス状態が、非局所結合という特異的な極限によるものではないこと、つまり場のスケール則の発生が相互作用の伝達速度が無限大であることによるものではないことが実証された。一方、より興味が持たれるのは素子と拡散場のタイムスケールが同程度の場合である。実際の細胞集団などにおいては、そのような状況もあり得るだろう。スケール則の破れは示唆されたが、そのとき場はどのような時空カオス状態になっているのかを調べ、それを特徴づけるのは今後の課題であろう。

12.6 実験系の可能性

論文 [6] においては、振幅場のスケール則をともなう時空乱流の状態を実験的に観測する可能性についても議論された。実際の系において、我々が研究してきたような非局所結合がそのまま存在するとは考えにくい。それは実際の系のモデルというよりは、むしろその特徴を一つの可能なクラスとして抽出したものである。

一方、振幅場のスケール則はランダムな外力を与えた素子系においても見られ、こちらの方は実験的に実現できる可能性がある。そのような(比較的)現実的なモデルとして、論文では次の

ようなものが提案された:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} &= \varepsilon^{-1}(U - U^3 - V) + D\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K \sin[\omega t + x + \psi(t)], \\ \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} &= aU + b.\end{aligned}\tag{232}$$

これは興奮性神経素子の FitzHugh-南雲モデルに位相 $\psi(t)$ がランダムに変化する時空周期的な外場を与えたもので、 $\psi(t)$ は Ornstein-Uhlenbeck プロセスで運動させる:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = v, \quad \frac{dv(t)}{dt} = -\gamma v + f(t),\tag{233}$$

ここで $f(t)$ はノイズ項である。

この系がすでに述べてきたような振幅場のスケーリング則を示すのは振幅場の差分のダイナミクスを考えてみればほぼ明らかであり、実際の数値計算でも確認された。論文では、例えば Belousov-Zhabotinsky 反応にランダムに揺らぐ一様ではない光を与えて化学反応生成物の濃度をゆらがせることにより、スケーリング則を示す時空カオスが発見されるのではないかと提案している。

13 まとめ

非局所結合系および長波長のランダム外場を与えた系の示す特異的な時空カオスおよび乱流的状态は、素子の詳細な性質によらず広く一般的に見られる現象であり、振幅場の空間パターンのフラクタル性や空間相関のベキ則、さらにはより一般の振幅場の差分の各次モーメントのベキ則によって特徴づけられる。これらのベキ則の起源は、素子のカオティックな挙動と内部場や長波長外場の効果による素子間の状態差の特徴的なダイナミクスにある。このことを明らかにするために、弱い加法ノイズを含む乗法確率過程モデルを導入して解析した結果、確率変数の任意次数モーメントの加法ノイズ強度に対する漸近的なベキ則として、これらのベキ則を統一的に説明することができ、その指数を素子の局所リアプノフ指数のゆらぎの性質と関係づけることができた。我々の導入したモデルは、実はノイジーなオンオフ間欠性などを記述するためのモデルと同種のものであり、そのようなモデルは、確率変数の時系列が著しい間欠性を示すことや、確率変数の定常分布関数がベキ的なテイルを持つことなどを予言する。このことを念頭においた数値計算により、我々の系でもノイジーなオンオフ間欠性や分布関数のベキ的なテイル、指数と局所リアプノフ指数の関係などが実際に確かめられた。我々の系においては空間パターンも強い間欠性を示す。解析の結果、我々の系は、発達した流体乱流やフラクタルな表面成長において多大な興味を持たれて来たのと同様な、マルチスケーリング性を示すことがわかった。この性質を詳しく調べるために、ランダム長波長外場を与えた写像系の時空乱流的状态について大規模かつ詳細な数値計算を行った結果、我々の系には実際にある種のランダム乗法カスケード過程が存在し、それが場のマルチスケーリング性の原因となっていることや、さらにスケーリング指数の非自明な q -相転移が観測されることなどが明らかになった。当初複雑すぎて手のつけようが無いようにすら思えた非局所結合素子系の特異的な時空カオス状態であったが、ここまでの研究により、一応中で何が起こっているのかを想像できる程度には我々の理解は進んだものと思われる。非局所結合系にはまだいくつもの重要で難しい問題や興味をそそるような問題が残っており、今後も研究を続けていく必要があるだろう。その幾つかについては最後の章に述べた。

参考文献

- [1] Y. Kuramoto, “Scaling behavior of turbulent oscillators with non-local interaction”, *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995), 321.
- [2] Yoshiki Kuramoto and Hiroya Nakao, “Power-law spatial correlations and the onset of individual motions in self-oscillatory media with non-local coupling”, *Physica D* **103** (1997) 294.
- [3] Yoshiki Kuramoto and Hiroya Nakao, “Origin of Power-Law Spatial Correlations in Distributed Oscillators and Maps with Nonlocal Coupling”, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 4352.
- [4] Yoshiki Kuramoto and Hiroya Nakao, “Scaling Properties in Large Assemblies of Simple Dynamical Units Driven by Long-Wave Random Forcing” *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 4039.
- [5] Hiroya Nakao, “Asymptotic power law of moments in random multiplicative process with weak additive noise”, *Phys. Rev. E* **58** (1998) 1591.
- [6] Yoshiki Kuramoto, Battogtokh Dojrusen, and Hiroya Nakao, “Multiaffine Chemical Turbulence”, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 3543.
- [7] Hiroya Nakao and Yoshiki Kuramoto, “Multi-affinity and multi-fractality in systems of chaotic elements with long-wave forcing”, *Euro. Phys. J. B*, submitted.
- [8] H. Haken, “Synergetics - An Introduction”, Springer, Berlin, 1977.
- [9] J. C. エクルズ 著, 大村裕, 小野武年 訳, “脳 - その構造と働き -”, 共立全書, 1977.
- [10] G. ニコリス, I. プリゴジン 著, 小島陽之助, 相沢洋二 訳, “散逸構造”, 岩波書店, 1979.
- [11] A. T. Winfree, “The Geometry of Biological Time”, Springer, New York, 1980.
- [12] Y. Kuramoto, “Chemical oscillations, waves, and turbulence”, Springer, Berlin, 1984.
- [13] 巖左庸, “数理生物学入門”, HBJ 出版局, 1990.
- [14] 蔵本由紀, 川崎恭治, 山田道夫, 甲斐昌一, 篠本滋, “パターン形成”, 朝倉書店, 1991.
- [15] 森肇, 蔵本由紀, “散逸構造とカオス”, 岩波書店, 1994.
- [16] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, “Theory of dynamic critical phenomena”, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435.
- [17] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, “Pattern formation outside of equilibrium”, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851.
- [18] 金子邦彦, 津田一郎, “複雑系のカオスのシナリオ”, 朝倉書店, 1996.
- [19] T. Bohr, M. H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani, “Dynamical systems approach to turbulence”, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

- [20] B. I. Shraiman, A. Pumir, W. van Saarloos, P. C. Hohenberg, H. Chaté, and M. Holen, “Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation”, *Physica D*, **57** (1992) 241.
- [21] V. Hakim and W.-J. Rappel, “Dynamics of the globally coupled complex Ginzburg-Landau equation”, *Phys. Rev. A* **46** (1992), 7347.
- [22] N. Nakagawa and Y. Kuramoto, “Collective chaos in a population of globally coupled oscillators”, *Prog. Theor. Phys.* **89** (1993), 313.
- [23] K. C. Rose, D. Battogtokh, A. Mikhailov, R. Imbihl, W. Engel, and A. M. Bradshaw, “Cellular structures in catalytic reactions with global coupling”, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 3582.
- [24] F. Mertens, R. Imbihl, and A. Mikhailov, “Breakdown of global coupling in oscillatory chemical reactions”, *J. Chem. Phys.* **99** (1993), 8668.
- [25] H. Fujisaka and T. Yamada, *Prog. Theor. Phys.* **74** (1985), 918.
- [26] T. Yamada and H. Fujisaka, *Phys. Lett. A* **124** (1987), 421.
- [27] A. S. Pikovsky, *Phys. Lett. A* **165** (1992), 33.
- [28] N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), 4134.
- [29] N. Platt, S. M. Hammel, and J. F. Heagy, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994), 3498.
- [30] E. Ott, J. C. Sommerer, *Phys. Lett. A* **188** (1994), 39.
- [31] S. C. Venkataramani, T. M. Antonsen Jr., E. Ott, and J. C. Sommerer, *Physica D* **96** (1996), 66.
- [32] A. Čenys, A. N. Anagnostopoulos, and G. L. Bleris, *Phys. Lett. A* **224** (1997), 346; A. Čenys and H. Lustfeld, *J. Phys. A* **29** (1996), 11.
- [33] R. Graham, M. Höhnerbach, and A. Schenzle, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982), 1396; A. Schenzle and H. Brand, *Phys. Rev. A* **20** (1979), 1628.
- [34] M. Levy and S. Solomon, *Int. J. Mod. Phys. C* **7** (1996), 595.
- [35] H. Takayasu, A.-H. Sato, and M. Takayasu, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997), 966.
- [36] M. Turelli, *Theor. Pop. Biol.* **12** (1977), 140.
- [37] J. M. Deutsch, *Physica A* **208** (1994), 445; *Physica A* **208** (1994), 433.
- [38] T. Mishiro, in preparation.
- [39] 藤坂博一, 福島和洋, 井上政義, 山田知司, *日本物理学会誌* **51** (1996), 813.
- [40] P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart, *Phys. Lett. A* **193** (1994), 126.
- [41] B. R. Hunt and E. Ott, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 2254.

- [42] A. S. Monin and A. M. Yaglom ; edited by J. L. Lumley, “Statistical Fluid Mechanics vol. 2”, MIT Press, Cambridge, Mass., 1975.
- [43] G. Parisi and U. Frisch, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, edited by M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi (North-Holland, Amsterdam, 1985), p. 84.
- [44] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **2**, 49 (1987) ; J. Fluid. Mech. **224**, 429 (1991).
- [45] U. Frisch, “Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov”, Cambridge University Press, 1995.
- [46] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Shraiman, Phys. Rev. A **33** (1986), 1141.
- [47] E. Ott, “Chaos in Dynamical Systems”, Cambridge University Press, 1993.
- [48] C. Beck and F. Schlögl, “Thermodynamics of Chaotic Systems”, Cambridge University Press, 1993.
- [49] A. -L. Barabási and T. Vicsek, Phys. Rev. A **44** (1991), 2730.
- [50] A. -L. Barabási and H. E. Stanley, “Fractal Concepts in Surface Growth”, Cambridge University Press, 1995.
- [51] J. Krug, Phys. Rev. Lett. **72** (1994), 2907.
- [52] C. Dasgupta, J. M. Kim, M. Dutta, and S. Das Sarma, Phys. Rev. E **55** (1997), 2235.
- [53] T. C. Halsey, K. Honda, and B. Duplantier, J. Stat. Phys. **85** (1996), 681.
- [54] R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin, A. Vulpiani, and M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), 2299.
- [55] P. Kailasnath, K. R. Sreenivasan, and G. Stolovitzky, Phys. Rev. Lett. **68** (1992), 2766.
- [56] U. Frisch and D. Sornette, J. Phys. I France **7** (1997), 1155.
- [57] A. Bershadskii, Physica A **234** (1997), 611.
- [58] E. A. Novikov, Phys. Fluids A **2** (1990), 814.
- [59] A. B. Chhabra and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **68** (1992), 2762.
- [60] K. R. Sreenivasan and G. Stolovitzky, J. Stat. Phys. **78** (1995), 311.
- [61] G. Pedrizzetti, E. A. Novikov, and A. A. Praskovskiy, Phys. Rev. E **53** (1996), 475.
- [62] M. Nelkin and G. Stolovitzky, Phys. Rev. E **54** (1996), 5100.
- [63] I. Hosokawa, Proc. R. Soc. Lond. A **453** (1997), 691.
- [64] R. Benzi, L. Biferale, A. Crisanti, G. Paladin, M. Vergasolla, and A. Vulpiani, Physica D **65** (1993), 352.

- [65] A. Naert, R. Friedrich, and J. Peinke, *Phys. Rev. E.* **56** (1997), 6719; *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997), 863.
- [66] P. Marcq and A. Naert, *Physica D* (to be published).
- [67] D. Sornette, *Physica A* **250** (1998), 295.
- [68] J. Laherrère and D. Sornette, *Eur. Phys. J. B* **2** (1998), 525.
- [69] T. Koga and K. Kawasaki, *Physica A* **196** (1993), 389.
- [70] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 1804.
- [71] L. Brunnet, H. Chaté, and P. Maneville, *Physica D.* **78** (1994), 141.