（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（情報学）	氏名	多羅間　大輔
論文題目	Classical and Quantum Mechanics, and Complex Algebraic Geometry of Free Rigid Bodies（自由剛体の古典及び量子力学と複素代数幾何学）		

（論文内容の要旨）

本論文は、３次元自由剛体の力学系の拡張を古典力学・量子力学の双方で研究したものと、３次元自由剛体の力学系に付随して現れる楕円ファイバー空間や固有ベクトル写像に関する代数幾何学的研究の結果をまとめたもので、全６章からなる。

第１章は本論文の構成を述べたものである。

第２章は、３次元自由剛体の古典力学の説明に充てられている。自由剛体の古典力学は回転群SO(3)の余接バンドル上のハミルトン力学として定義され、対称性の理由により簡約化されて、運動方程式はリー代数so(3)の双対空間上のポアッソン力学として、余随伴軌道上のオイラー方程式で記述される。また、オイラー方程式は SO(3)上の左不変計量に関する測地線方程式ともみなされる。

第３章は、SO(3)を一般のユニモジュラー群に拡張してその古典力学と量子力学を論じたものである。具体的には、ハミルトン関数の正値性条件を外し、オイラー方程式の双ハミルトン構造に着目して、３次対称行列ごとに対応するユニモジュラーリー代数と、そのリー群を考える。このリー代数の双対空間におけるポアッソン力学が拡張された自由剛体の古典力学となる。普通の自由剛体の場合と同様に、２つの可換な第一積分が存在する。拡張された自由剛体の量子力学は、２つの第一積分に対応する、ユニモジュラーリー群上の２乗可積分関数の空間に作用する微分作用素の同時スペクトル問題として定式化される。この問題の一般的考察をプランシェレルの公式を用いて行った後、具体的なユニモジュラー群として、３次元回転群、３次元ローレンツ群、２次元ユークリッド運動群、２次元ポアンカレー群、ハイゼンベルグ群、３次元実数加法群をとりあげ、それぞれの場合に、リー群に特徴的なハミルトン作用素のスペクトル分解を明示的に与えている。さらに、この量子系が付加的なSO(2)対称性をもつ場合に、同時スペクトルが明示的に与えられている。これらの結果から、もとになった対称行列の符号に依存してスペクトルの構造が大きく異なる様子を一覧表にまとめている。

第４章は、古典力学の自由剛体の解を、複素代数幾何学の視点で研究したものである。オイラー方程式の解は、この観点では一般に楕円曲線とみなされる。一方、可積分系の観点からは、オイラー方程式に同値なマナコフ方程式を考えることは自然である。このマナコフ方程式に付随するスペクトル曲線もまた楕円曲線となる。力学的にはこれらの方程式のパラメータ（慣性テンソルの固有値）を動かすときに見られる分岐現象が興味深い。こうして、複素代数幾何学的には、オイラー方程式の解曲線とマナコフ方程式に付随するスペクトル曲線のそれぞれの族から得られる２つの楕円ファイブレーションが３次元複素射影空間上に構成されることになる。本章では、これらのファイブレーションの代数幾何学的構造を研究し、それらの間の関係付けが与えられている。結果から述べると、ワイエルシュトラス標準形の楕円ファイバー空間の構

成とブローアップの手法等による改変で、オイラー方程式の素朴ファイバー空間とマナコフ方程式のスペクトル曲線族の間に４：１の有理型写像のあることを証明している。これは力学的には、系が自明となるパラメータの周りでの分岐現象の漸近挙動の幾何学的研究とみなされる。

第５章では、マナコフ方程式に付随する固有ベクトル写像を複素代数幾何学的に考察している。この固有ベクトル写像は、オイラー方程式の解曲線とスペクトル曲線の直積（アーベル曲面）から２次元複素射影空間への有理写像である。この写像が２つの２：１の有理写像の合成に分解することが示され、その中間にクンマー曲面が自然に現れる。実際、このクンマー曲面はある６次曲線で分岐する２次元複素射影空間の２重被覆である。さらに、このクンマー曲面の構造を詳細に調べるために、２次元複素射影空間のクレモナ変換が有効に用いられている。主結果の証明の過程では、このクンマー曲面のいくつかの楕円ファイブレーションについても考察されている。ここで現れる楕円ファイブレーションはすべて２次元複素射影空間の曲線の１次元族を用いて記述され、上述のクレモナ変換はこれらの族と密接に関係する。力学系の観点からは、解曲線上の点を固定するごとにできるスペクトル曲線の固有ベクトル写像による像はオイラー方程式に従って２次元複素射影空間のなかで変形されるとみることができる。この変形族は２次曲線の１次系をなすが、クンマー曲面では楕円ファイブレーションを誘導することになる。

第６章は、本論文のまとめである。前章までで得られた結果に対するコメントと将来の展望を述べている。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は、３次元自由剛体の力学系の拡張を古典力学・量子力学の双方で研究したものと、３次元自由剛体の力学系に付随して現れる楕円ファイバー空間や固有ベクトル写像に関する代数幾何学的研究の結果をまとめたものである。３次元自由剛体の力学は、歴史的に見ても幾多の数学的または力学的興味で研究されてきたものであるが、それを一般化した群の表現論や代数幾何学の観点からの研究はまだまだ深化の価値がある。特に、代数幾何学からの研究では先駆的なM. Audin によるものがあるが、本論文はその面で部分的ではあるが先行研究を深化させたものである。

剛体の力学では、剛体を特徴づけるものとして慣性テンソルが取り扱われるが、これは数学的には正値対称行列である。本論文では、これを一般化して単に対称行列とし、それに対応して構成されるユニモジュラーリー代数とそのリー群を考えて、リー代数の双対空間上でのポアッソン力学の形で古典力学を、リー群上の２乗可積分関数の空間において古典系の第一積分に対応する微分作用素を与えるという仕方で量子力学をそれぞれ構成している。このような状況で可能なリー群を具体的に選んで、それらの群の表現論を用いて、それぞれの群に特徴的な微分作用素のスペクトル分解を与えている。特に、対称コマの場合にはその解が具体的に構成できるというよく知られた事実が、本研究のように一般化した状況でも同様に成り立つことが、群論の立場から示されているのは興味深い。

前段で古典力学の２つの第一積分に触れたが、普通の自由剛体ではこれらの積分の定める１次元曲線が解軌道となる。この状況を一気に複素代数幾何学の範囲に広げて解多様体を考えることは、慣性テンソルの変動に伴う自由剛体の解の位相的変化の様子を広い観点から見ることになる。一方で、可積分系の分野で知られたマナコフ方程式とオイラー方程式の同値性は、同じ現象を別の側面から観察するのに役立つ。オイラー方程式の解は楕円曲線とみなされ、マナコフ方程式に付随するスペクトル曲線もまた楕円曲線となる。本論文では代数幾何学の主要な概念であるワイエルシュトラス標準形の楕円ファイバー空間やクンマー曲面、主要な技法であるブローアップやクレモナ変換を駆使して、これらの楕円曲線族とスペクトル曲線族を関係づけている。これは、剛体の力学のパラメータ変動に伴う分岐現象を、その背後にある代数幾何学的現象を解明することにより、なぜそのような分岐が起こるのかを見事に説明するものである。

以上、本論文は剛体力学を一般化して、その量子力学と古典力学を群の表現論と複素代幾何学の観点で研究したものであり、力学系理論の発展に大きく寄与するものである。よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成２４年１月１９日実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。