学 位 審 査 報 告 書

（ふりがな） 氏　　名	のさか　たけふみ 野坂　武史
学位（専攻分野）	博　士　（　理　学　）
学位記番号	理　博　第　　　号
学位授与の日付	平成　　年　　月　　日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科・専攻	理学研究科　数学・数理解析専攻

（学位論文題目）

4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds
（３次元多様体の４重対称カンドル不変量）

論文調査委員	（主査）　大　槻　知　忠　教　授 山　田　道　夫　教　授 葉　廣　和　夫　准教授

理　学　研　究　科

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（　理学　）	氏名	野坂　武史
論文題目	4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds （３次元多様体の４重対称カンドル不変量）		

（論文内容の要旨）

カンドルとは、群において群演算を忘れて「共役をとる」という操作を演算として残すことによって得られる公理で定められる代数系である。「群の分類空間」の類似として、カンドル X の分類空間 BX が定義される。また、円周の排反和を３次元球面に埋め込んだ像を絡み目という。有向絡み目に対して、「絡み目の補空間の基本群」の類似として、絡み目カンドルが定義される。有向絡み目 L の絡み目カンドルからカンドル X へのカンドル準同型写像のことを L の X 彩色という。X 彩色された有向絡み目 L に対して、BX の２次ホモトピー群π_2(BX)に値をもつ L のカンドルホモトピー不変量が定義される。カンドル X の２次コサイクルを与えるごとに X 彩色された絡み目のカンドルコサイクル不変量と呼ばれる一連の不変量が定義されることが知られているが、カンドルホモトピー不変量はすべてのカンドルコサイクル不変量に対して普遍的であるような強力な不変量である。一方、任意の有向閉３次元多様体はある絡み目で分岐する３次元球面の４重分岐被覆空間として実現できることが知られており、よって、絡み目と４重被覆のモノドロミー写像の対（ラベル付き絡み目と呼ばれる）によって３次元多様体を表示することができる。また、同相な３次元多様体を与える２つのラベル付き絡み目は MI,MII 移動と呼ばれる２つの局所変形を繰り返すことにより互いに移りあうことが知られている。よって、３次元多様体の同相類の集合はラベル付き絡み目の同値類の集合と同一視される。

本論文において申請者は、「４重対称カンドル」というカンドルのクラスを導入してこれを分類し、さらに３次元多様体 M を表示するラベル付き絡み目 L のカンドルホモトピー不変量から M の位相不変量を構成して、この不変量について調べている。この目的のためには向き付けられていないラベル付き絡み目のカンドルホモトピー不変量を定義する必要があるが、そのために「定義された不変量が絡み目の向きによらないこと」と「ラベルと彩色の整合性」を要請する条件を課して定義されるカンドルが４重対称カンドルである。申請者は、４重対称カンドルをそのように定義し、さらに、任意の４重対称カンドルはある群 G とその中心元から定められるカンドルに同型であることを示した（４重対称カンドルの分類）。４重対称カンドル X を用いることにより、ラベル付き絡み目 L のカンドルホモトピー不変量がπ_2(BX)において定義される。さらに、MI,MII 移動に対応する関係式によってπ_2(BX)の商空間をとると、その商空間の元として L のカンドルホモトピー不変量は M の位相不変量を与えることになる。この不変量が本論文の主題である４重対称カンドル不変量である。この不変量の実効性を考える上で、その「π_2(BX)の商空間」が具体的にどのような空間であるのかを同定することが問題になる。申請者は、有限位数の４重対称カンドルの内部自己同型群を決定し、それを用いて、その商空間が有限アーベル群であることを示し、その各元は $2^{12}3^4|G|^{12}|[G,G]|^4$倍で消滅することを示した。また、申請者は、よい条件のもとで問題の不変量は計算可能な不変量に帰着されることを示した。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

３次元多様体の位相不変量について、１９８０年代に低次元トポロジーと数理物理が交流し、この時期に「量子不変量」と呼ばれる大量の不変量が発見された。量子不変量やこれに関連するトピックを研究する研究分野を量子トポロジーという。本論文は量子トポロジーにおいて３次元多様体の新しい不変量を提案するものである。

３次元多様体の量子不変量について、数理物理的にはチャーン-サイモンズ理論の相関関数として量子不変量が与えられ、この相関関数をオペレータ形式で定式化することにより、量子不変量が数学的に構成される。たとえば、絡み目にそって３次元球面を手術することによって３次元多様体を表示すること（手術表示）や、２つのハンドル体を貼り合わせることによって３次元多様体を表示すること（ヒーガード分解）に基づいて、３次元多様体の量子不変量が数学的に構成されることが知られている。いずれの方法にせよ、オペレータ形式にもとづく不変量の構成は、３次元多様体の切り貼りを基礎にしており、これは「量子不変量」そのものが内在している要請であった。一方、３次元球面の分岐被覆空間として３次元多様体が表示されること（被覆表示）も知られているが、被覆表示はオペレータ形式の範疇にない構成であるため、量子トポロジーにおいて被覆表示を用いた不変量の構成は従来はなされていなかった。本論文では被覆表示に基づく３次元多様体の不変量の構成が提案されており、量子トポロジーの新しい発展の方向性を開拓する新規性の高い価値のある研究である。「被覆表示に基づく３次元多様体の位相不変量の構成」に成功したのは、本論文の研究が世界でも初めてであるとおもわれる。

本論文において、３次元多様体の不変量は、絡み目のカンドルホモトピー不変量から構成されており、カンドルホモトピー不変量はすべてのカンドルコサイクル不変量に対して普遍的な不変量である。カンドルコサイクル不変量は１９９０年代から活発に研究されている絡み目の不変量であるが、「絡み目のカンドルコサイクル不変量から３次元多様体の位相不変量を構成すること」はこの分野の専門家にとって懸案の問題であった。本論文の研究はこの課題を初めて達成しているものであり、価値の高い研究である。申請者の挑戦的な高い志しが感じられる。申請者はカンドルのコホモロジー群の計算に関して世界でもトップレベルの実力があり、本論文の研究も申請者のそのような高い技術をもって達成された成果である。カンドルコサイクル不変量は集合論的ヤン-バクスター方程式の解から構成することができるが、一方、通常のヤン-バクスター方程式の解から量子不変量が構成される。すなわち、量子不変量の構成において、その離散的な側面から本論文の不変量が導出されていると見ることもできる。これを数理物理的観点からみると、有限群の主束をもつ３次元多様体のチャーン-サイモンズ理論から導出される不変量はダイグラーフ-ウィッテン不変量であるが、申請者は本論文の研究と関連した研究（申請者と畠中英里氏との共同研究）において、本論文の不変量とダイグラーフ-ウィッテン不変量の関連を調べている。その方向の今後の発展も期待される。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成24年1月6日論文内容とそれに関連した口頭試問を行った。その結果合格と認めた。

要旨公開可能日：　　　　　　年　　　月　　　日以降