

# 多相場の解法を用いる流体と柔軟構造物の連成解法

## NUMERICAL METHOD OF FLUID-STRUCTURE INTERACTION FOR FLEXIBLE OBJECT WITH MULTIPHASE APPROACH

黒田 望<sup>1)</sup>, 牛島 省<sup>2)</sup>

Nozomu KURODA and Satoru USHIJIMA

<sup>1)</sup>学生会員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C クラスター)

<sup>2)</sup>正会員 工博 京都大学教授 学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

In this paper, a numerical prediction method is proposed for the interactions between three-dimensional flows and flexible objects. The object is assumed to be a linear elastic body and its deformation and movement are calculated through the stress increments with FEM to deal with its finite deformation. The validity of the prediction methods was confirmed with the basic problems related to the large deflection of a cantilever beam and the reversibility of linear elasticity. In addition, it was demonstrated that the computational method is applicable to the flexible object moving in three-dimensional flows.

**Key Words :** fluid-structure interaction, multiphase modeling, elastic body, large deformation

### 1. はじめに

近年、流体と固体の連成作用に関する研究が数多く行われ、昆虫飛行のモデリング [1] や、血管内の流れ解析 [2] など大きな広がりを見せている。これらの解法のうち、特に 3 次元多相場の解法 (MICS) [3] は既往の研究によって流れと剛体運動の連成作用を適切に計算できることが示されている。また、有限要素法により線形弾性体の微小変形を解析する固体モデルを MICS に導入し、流体と弾性体の連成問題を扱えることを確認している [4]。

本報では、流れの作用を受ける線形弾性体の大変形問題を扱うことを目的として、従来の手法の改良を行う。本報で提案する手法では、弾性体の構成式を速度形で与えることで、大変形を伴う柔軟な構造物と流体の連成問題を扱う。本解法の有効性を確認するために、流れ場に存在する柔軟構造物の大変形連成問題に適用する。

### 2. 数値解析手法

任意形状物体を含む計算領域において、3 次元自由水面流れの計算を行うには、物体に作用する流体力の評価方法が重要となる。本報では、物体を含む流れ場を取り扱うために、多相場の解法である MICS [3] を用いる。この解法では、物体よりも十分小さい Euler 格子によって計算セルが構成されており、サブセル法 [5] により計算セルに含まれる物体体積が求められる。場全体を一流体モデルにより計算し、その結果から物体に作用する流体力を体積積分により算出する。

物体に作用する流体力から、物体の変形や運動を計算する段階では、四面体 2 次要素を用いる有限要素法を利用する。

#### (1) 3 次元自由水面流れの計算法

混ざり合わない複数の非圧縮性流体から構成される場に対する基礎式は、以下の Euler 表記による質量保存則、非圧縮条件、保存形表示された運動方程式の 3 式である [6]。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) &= f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu u_j) \right] & \quad (3) \end{aligned}$$

ここで、 $\rho$ 、 $\mu$ 、 $p$  は順に計算セル内の体積平均操作によって求められる密度、粘性率、圧力である。また、 $u_i$  はセル内の質量平均により算出される  $x_i$  方向の流速成分である。 $t$  と  $x_i$  は時間と 3 次元直交座標系の座標成分で、 $f_i$  は外力の加速度成分を表す。体積平均または質量平均は各流体計算セルごとに定められるが、セル内に物体が占有する体積を求める際には、四面体サブセル法 [5] を用いる。

計算手順は、コロケート格子を用いる非圧縮性流体計算法 [7] と同様で、予測段階、圧力計算段階、修正段階の 3 つの手順からなる MAC 系解法が用いられている。最初に、四面体サブセル法 [5] により、計算セルに含まれる物体体積を算出し、体積平均された物性値等を求める。予測段階では、陰的解法である C-ISMAC 法を使ってセル中心で流速の推定値を求める。圧力計算段階では C-HSMAC 法を利用して、BiCGSTAB 法により圧力変化量の連立 1 次方程式の数値解を求める。

自由水面形状は、式 (1) を数値拡散を抑制する保存形スキームで解いて求める。

## (2) FEM による物体変形の計算法

仮想仕事の原理より導き出される物体運動の基礎式は以下の通りである [8]。

$$M\ddot{\mathbf{d}} + C\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (4)$$

ここで、各節点の 3 次元変位を成分とするベクトルを  $\mathbf{d}$ 、上付のドットは時間微分 (2 つのドットは 2 階微分) を表し、 $M$  は質量マトリックス、 $C$  は減衰マトリックス、 $\mathbf{F}_{ext}$  は流体力などの外力ベクトルである。 $\mathbf{F}_{int}$  は次式で表される内力ベクトルである。

$$\mathbf{F}_{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (5)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$  は応力ベクトル、 $B$  は形状関数で表現されるひずみ変位マトリックスである。質量マトリックス  $M$  の要素は、一般に物体の密度  $\rho_b$  に形状関数を乗じて、これを四面体要素内で積分して得られた行列から構成される。本報では、集中質量を対角要素とする集中質量マトリックスを用いる。式 (4) の減衰マトリックス  $C$  は、質量マトリックスと同様に、減衰係数と形状関数の積を要素内で積分して得られた行列から構成される。本報では、集中質量マトリックスと同様に、対角行列として表される減衰マトリックスを利用する。

次に、大変形の問題に対応するために応力速度と速度を次のように関連づける。

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{(c)} = D\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = DB\dot{\mathbf{d}} \quad (6)$$

ここに、 $\boldsymbol{\epsilon}$  がひずみベクトルを表す。 $D$  は材料特性を示す応力ひずみマトリックスであるが、ここでは線形弾性体を扱うので、ヤング率とポアソン比の二つの材料定数によって構成される。

添字の  $(c)$  は以下の式で表される Cotter-Rivlin 速度 [9] を表す。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(c)} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + L^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot L \quad (7)$$

ここに、 $L$  は速度勾配テンソルである。上式中の細字の応力と応力速度はテンソル形式を意味している。式 (7) の真の応力速度 [9]  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  と現ステップの応力  $\boldsymbol{\sigma}^n$  を用いて、次ステップの応力  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$  は次式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^n + \dot{\boldsymbol{\sigma}} \Delta t \quad (8)$$

なお、固体は四面体要素の集合として表現し、変形の再現性を高めるために 2 次要素モデルを用いている。

## 3. 解法の検証

### (1) はり理論との比較による検証

図-1 に、片持ばりの先端に集中荷重  $P$  が作用した状態を示す。 $l, x_1, z_1$  はそれぞれ変形前のはりの長さ、変

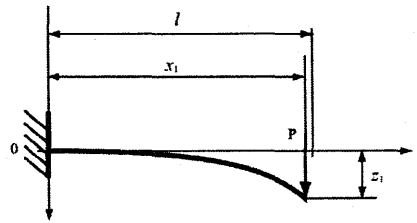


図-1 片持ばり

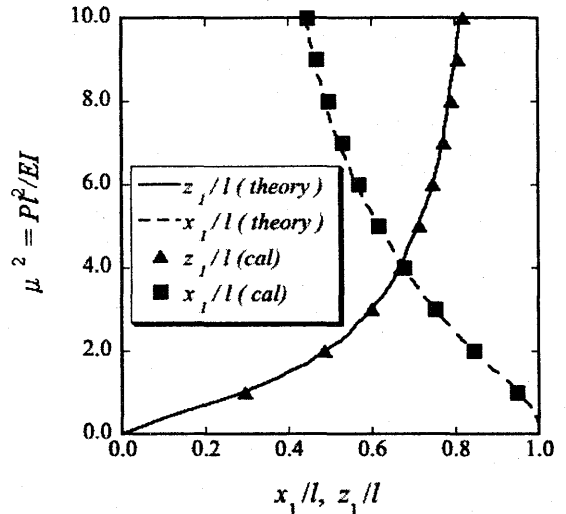


図-2 Bisshop, Drucker の解 [10] との比較

形後のはりの水平方向長さ  $x_1$  とたわみを表す。微小変形の仮定が成り立つ範囲内であれば、荷重  $P$  と荷重載荷位置の鉛直変位  $z_1$  は線形の関係にあり、容易に求まる。一方で、大変形まで考えた場合は図-2 に示す Bisshop, Drucker の理論解 [10] のように、線形でない。ここに、 $E, I$  はそれぞれヤング率と断面二次モーメントを表し、 $\mu^2$  は荷重  $P$  の無次元パラメータである。片持ばりとして、 $l = 10$ 、幅 = 3、厚み = 1、 $E = 1$  の矩形板を対象に、理論解との比較を行った。計算モデルの四面体数と節点数はそれぞれ 181, 441 である。図-2 に本研究で用いた固体モデルの計算結果を示す。この結果は理論解とよく一致しており、大変形を考慮した固体モデルの基本性能が確認された。

### (2) 線形弾性体の可逆性の検証

線形弾性体に力を加えて変形させた後、力を取り除くと変形前の状態に戻る。従来の手法では剛性マトリックスを作成し、変位と内力を関連づけていたために、この形状復元性を容易に捉えられた。しかし、式 (6) に示すような速度形の構成式を用いている本手法では基準配置の情報を陽に含んでいない。そこで、本節では図-3 に示すような 2 平板間せん断流中の長方形線形弾性体を対象として形状復元性を確認した。計算に用いたモデルは節点数 441、四面体数 182 の矩形体で、奥行き方向の速度を 0 とした 3 次元計算によって 2 次元計算を模擬した。計算領域は  $40 \times 10 \times 1$  とした。上端、下端は速度  $U_w$  の移動壁で、右端、左端は固定壁とした。

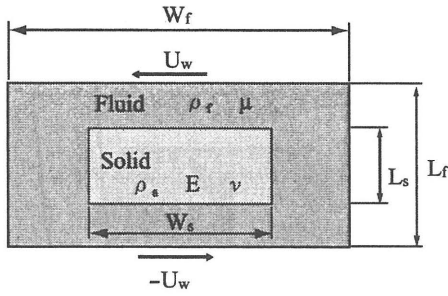


図-3 可逆性の検証

図-4 に移動壁の移動速度と時間の関係を示す。時刻  $t < 0$  では固体および流体は静止し、 $0 \leq t \leq 1$  では上端、下端の壁を速度  $U_w$ 、 $-U_w$  で動かし、流体粘性によるせん断を生じさせ、固体をせん断変形させる。時刻  $t > 1$  では  $U_w = 0$  として、せん断力を解放する。

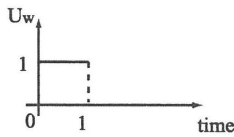


図-4 移動壁

計算条件は表-1 に示すとおりである。

表-1 計算条件

$\rho_s$	1.0	$\rho_f$	1.0
$E$	90.0	$\mu$	1.0
$\nu$	0.5	$U_w$	1.0
$L_s$	0.3	$L_f$	0.5
$W_s$	0.6	$W_f$	2.0

図-5 に初期状態 (a)、最大変形時 (b)、変形復元状態 (c) の計算結果を示す。図-5(c) に示されるように、物体は変形した後、回転した状態で初期の形状に戻る。図-6 に次式で表される変形量の指標  $s$  の時刻歴を示した。

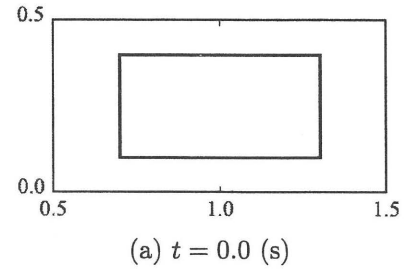
$$s = \frac{\sqrt{\sum l^2}}{W_s} \quad (9)$$

ここで、 $l$  は各節点の初期位置からの変位で、各時間ステップごとに  $s$  が最小となるように重心まわりに回転させて求めた。せん断力を解放した時刻  $t > 1$  で急激に  $s$  が減少し、定常状態になっていることがわかる。これらの結果より、本計算手法に形状復元性があることが確認できた。

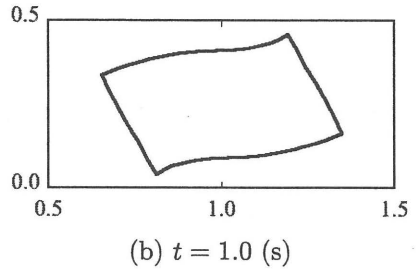
### (3) 複雑形状物体を対象とした連成計算

上記の結果より、基本的な流体・固体連成問題に対する有効性が確認できた。そこで、応用例として、キャビティ内部に樹木形状の線形弾性体が存在する場を対象として計算を行う。

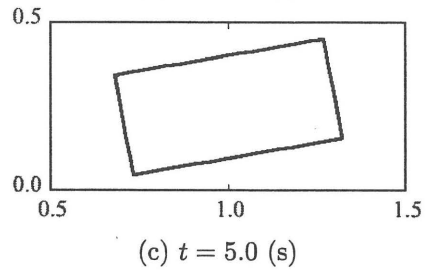
樹木モデルの作成方法を以下に示す。L-system[11] を用いて線分データからなる骨格を生成し、この線分データを熱源とする熱拡散方程式の非定常計算を行い、適



(a)  $t = 0.0$  (s)



(b)  $t = 1.0$  (s)



(c)  $t = 5.0$  (s)

図-5 計算結果

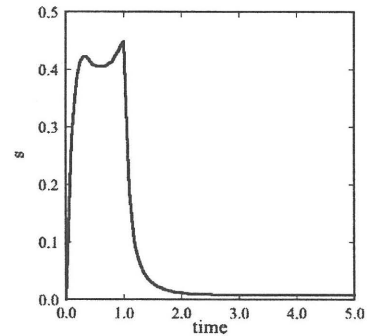


図-6 変形量の時刻歴

当な時刻の温度場を求めた。熱源付近に高い温度が集中しているため、等値面を描くことで擬似的な樹皮面が生成される。三角形ポリゴンで形成された等値面に囲まれたポリウムに対して、内部に四面体要素を生成した。

計算条件は表-2 に示すとおりである。

表-2 計算条件

$\rho_s$	1.0	$\rho_f$	1.0
$E$	$1.0 \times 10^3$	$\mu$	1.0
$\nu$	0.5	$U_w$	1.0

MICS による計算領域は、 $20 \times 20 \times 20$  で、メッシュサイズは各方向に 0.05 とした。時間増分  $\Delta t$  は  $5.0 \times 10^{-5}$  とした。壁面は速度  $U_w$  で水平方向に移動し、 $Re$  数は 1.0 である。

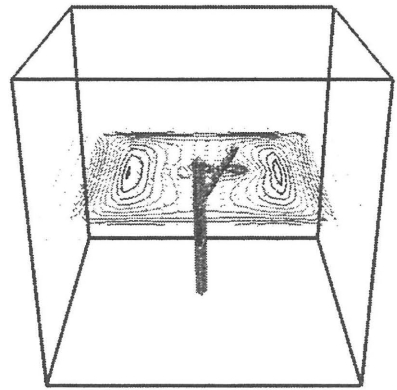
図-7に变形する樹木形状物体の計算結果を示す。流れによって幹が变形し、その後、枝の部分が大きく变形する様子が再現されている。図中の等値線は渦度分布を表す。变形が大きくなると樹木モデルの後方に渦度の高い領域が発生している。

#### 4. おわりに

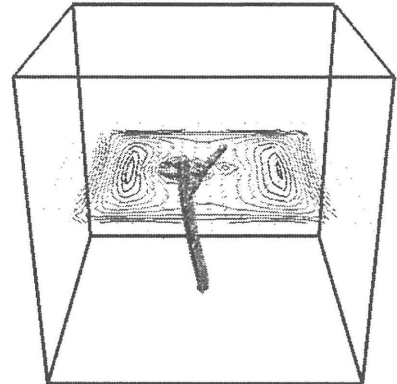
本報では、大变形を考慮して速度形の構成式を用いた四面体2次要素FEMモデルを、多相場の解法であるMICSに導入し、自由水面流れにおける複雑形状弾性体の变形を予測する解法を構築した。この解法を片持ばりの大变形問題および線形弾性体の可逆性を検証する問題に適用し、基本特性の確認を行った。次に、解法を樹木形状の線形弾性体に適用し、流れにより变形する状況を再現できることが示された。

#### 参考文献

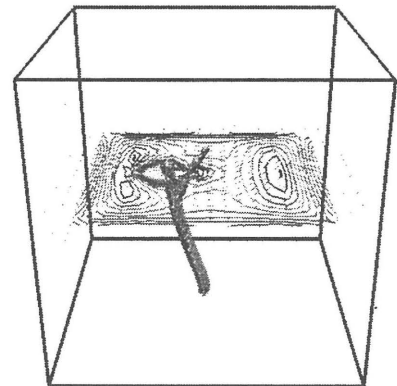
- 1) 石原大輔, 堀江知義. 昆虫飛行の流体構造連成モデリング(第1報, 自動的な翼の回転と揚力発生との2次元数値解析による検討). 日本機械学会論文集B編, Vol. 72, No. 718, pp. 26-33, 2006.
- 2) 福成洋, 大島まり, 鳥井亮, 渡邊浩志, 久田俊明. 脳動脈瘤の流体構造連成シミュレーションにおける非線形血管壁モデルの影響. 日本機械学会(No.05-66)第18回バイオエンジニアリング講演会 講演論文集, pp. 287-288, 2006.
- 3) 牛島省, 福谷彰, 牧野統師. 3次元自由水面流中の接触を伴う任意形状物体運動に対する数値解法. 土木学会論文集, Vol. 64/II-2, pp. 128-138, 2008.
- 4) 黒田望, 牛島省. 自由水面流中の变形を伴う物体に作用する流体力の数値計算. 応用力学論文集, Vol. 11, pp. 799-806, 2008.
- 5) 牛島省, 牧野統師, 禰津家久. 四面体サブセル法を用いる市街地に流入する氾濫流の3次元数値計算. 水工学論文集, Vol. 51, pp. 787-792, 2007.
- 6) 牛島省, 山田修三, 藤岡奨, 禰津家久. 3次元自由水面流れによる物体輸送の数値解法(3D MICS)の提案と適用性の検討. 土木学会論文集, Vol. 810/II-74, pp. 79-89, 2006.
- 7) 牛島省, 竹村雅樹, 禰津家久. コロケート格子配置を用いたMAC系解法の計算スキームに関する考察. 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11-19, 2002.
- 8) S. Okazawa, K. Kasiyama, and Y. Kaneko. Eulerian formulation using stabilized finite element method for large deformation solid dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 72, No. 13, pp. 1544-1559, 2007.
- 9) 久田俊明, 野口裕久. 非線形有限要素法の基礎と応用. 丸善株式会社, 1995.
- 10) K.E.BISSHOPP and D.C.DRUCKER. Large deflection of cantilever beams. *Quart. Appl. Math.*, No. 3, pp. 272-275, 1945.
- 11) Prusinkiewicz P and Lindenmayer A. *The algorithmic beauty of plants*, pp. 272-275. No. 3. 1990.



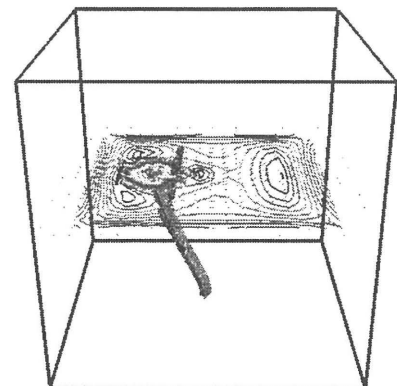
(a)  $t = 0.1$  (s)



(b)  $t = 0.5$  (s)



(c)  $t = 0.9$  (s)



(d)  $t = 1.3$  (s)

図-7 計算結果