天界 第十一號(第一卷) 大正十年十月號

二次曲線の話(下)

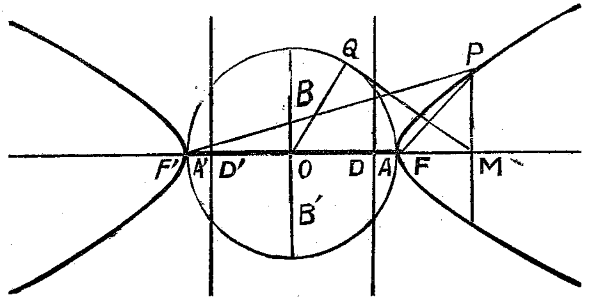
京都帝國大學助教授理學士 松本敏三

既に楕圓に關して、可なり精しく御話したから、此から向ふは大變容易である。私は類似の個所の證明は簡單にやつゝける。說明及び證明の不足には前の條を參酌せられたい。

双曲線

九、中心O.半經aたる圓と、AA'及び夫れに垂直なる直徑とを畫く(第四圖)。圓上の任意の一點Qより、$\measuredangle OQM$が直角なる如く直線QMを引く、Mは直經AA'の延長上にあり。(QMは點Qに於ける圓の接線である。第一條の作圖に於ては$\measuredangle OMQ$が直角であつた。)今MよりAA'に垂直に、$PM:QM=$一定$=b:a$なる如く點Pを取る。今Q點を圓周上に一週りさせると、P點は圖の如き両外側に灣曲した曲線を得。此の曲線を双曲線と云ふ。双曲線も亦前記の二直經及び中心Oに關し對稱である。次ぎに直經AA'に垂直なる直經上に$OB=OB'=b$なる長さを切る。而して點Oを双曲線の中心、AA'を交軸、BB'を共軛軸と云ふ。又A.A'を頂點、圓を補助圓と云ふも前の如し。若し$a=b$.卽ち此の値が一なる時は等邊(或は等角)双曲線と云ふ。

次ぎに$\sqrt{a^2+b^2}=c$と書く、然る時はcはaより大である(第二條參照)。今中心Oより交軸上に



第四圖

$$OF=OF'=c$$

なる如く二點F、F'を畫く、此二點を焦點と云ふ。次ぎに$c:a=e$と書き、此を双曲線の離心率と云ふ。此の際離心率eは一より大なり。今中心Oより交軸上に

$$OD=OD'=\frac{a}{e}$$

なる如き二點D D'に於て垂線を引く、之即ち準線なり。eは一より大なる故DはOとAとの中間に來る、D'亦同じ。次ぎに双曲線上の任意の一點Pより、準線に垂線PEを下し、其れと焦點への距離PFとの比を求めると、前と同様に、

$$PE=OM-\frac{a}{e},\quad PF=e.OM-a$$

$$\therefore\ PF:PE=e\ldots\ldots 一定>1.$$

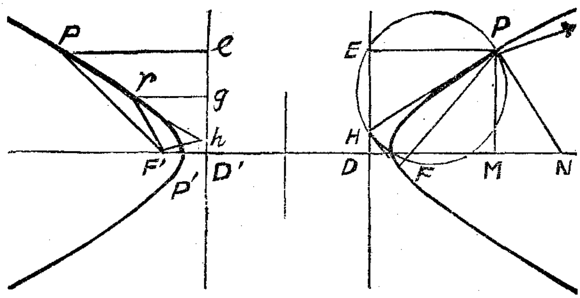
即ち定點と定直線へ至る距離の比が一定にして、其値が一より大なるが如き點の軌跡は双曲線なり。定點は焦點、定直線は準線にして、比は離心率に相當す。扨て前節に於て

$$PF=e.OM-a$$

を知れり、之と同様にして

$$PF'=e.OM+a\quad\therefore\ PF'-PF=2a.$$

即ち二定點に至る距離の差が一定なるが如き點の軌跡は双曲線なり。定點は焦點、距離の差は交軸の長さに相當す。(第二條參照)。此の定理に依つて、機



第五圖

械的に容易に双曲線を畫く事を得。

一〇、第五圖は第二圖と全く同樣なる考へより畫れてある。同圖左はhF'が$\measuredangle pF'r$の外角の二等分線なる事を示し、同圖右はHFがPFに垂直にして焦點を通る弦PP'の兩端に於ける接線の交點Hの軌跡は準線なることを示す。（第四條參照）證明は同樣につき畧す。第六條も亦容易に證明出來る。卽ち一點Pに於ける双曲線への法線PNはPHを直徑とする圓の接線で且つ

$$NF:NF'=PF:PF'$$

となる、故にPNは$\measuredangle FPF'$の外角の二等分線である、卽ち焦點より出た光線は双曲線に反射して、反射光線の延長が他の焦點を通る樣に進む（第五、六條參照）

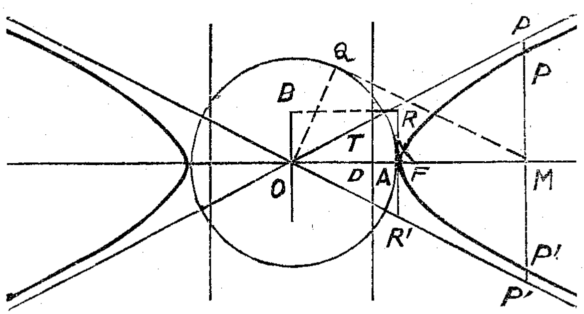
一一、頂點Aに於て交軸に垂線を引き、其上に

$$AR=AR'=b$$

なる點を取り、其等の點と中心を通る二直線を畫く（第六圖）。此を漸近線と云ふ。（楕圓にこんな直線はない）弦PMP'を延長して漸近線とp, p'で交らせる。然る時は

$$\frac{pM}{OM}=\frac{RA}{OA}=\frac{b}{a}=\frac{PM}{QM}$$

$$\therefore\ \frac{PM}{QM}=\frac{PM}{OM}$$



第六圖

明に$QM^2=OM^2-OQ^2=OM^2-a^2$となる、上の比例式

より

$$PM^2 = pM^2\left(1-\frac{a^2}{OM^2}\right)$$

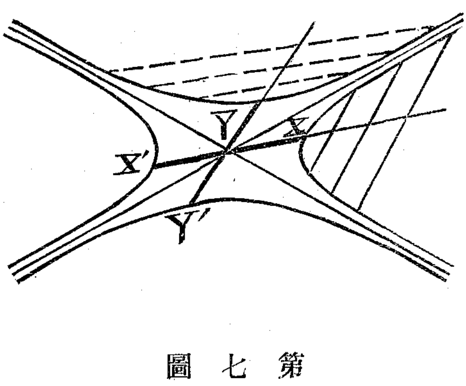
故に初めの比例式を用ひて上式より

$$pM^2 - PM^2 = a^2\frac{pM^2}{OM^2} = a^2\frac{b^2}{a^2} = b^2$$

$$\therefore\ b^2 = (pM-PM)(pM+PM) = Pp.Pp'$$

何んとなれば圖は交軸の直線に關し對稱なる故、$Pp=P'p'$となるからである。bは一定であつて、然もPが遠方へ行くと、Pp'は限りなく大になる。故にPpは無限に小になる。卽ち漸近線は無限に双曲線に接近する。漸近線の名稱は適當だ。（漸近線と準線とは補助圓上で交ることは、容易に證明出來る、夫れより其交點を焦點に結んで直線に漸近線は垂直なることが證明出きる。故に第十條より漸近線は双曲線の無限の遠方の點に於ける接線である事がわかる）。

一三、双曲線に於ても、楕圓の時の樣に、共軛經がある。併し今回は影に依つて其性質を證明するのでない。其代りに楕圓にない漸近線と云ふものがある、此の直線を使うのである。證明の方法は違うが、其の性質は全く同一である。卽ち並行弦の中點の軌跡が一つの共軛經である。尙ほ一方の共軛經は其等の並行弦に並行に、中心を通つて引いた線分である。此の直線は、楕圓の時と違つて、も早や双曲線



第七圖

に交らない。併し乍ら此の双曲線の交軸を共軛軸とし、共軛軸を交軸とする第二の双曲線を考へると、共軛經の一方は其双曲線と交る樣になる。此の第二の

双曲線を**共軛双曲線**と云ふ。此等の事柄は、もう之以上證明せずに唯圖だけを書いておく、第七圖が卽ち其れである。本圖の上下に畫いてあるのが共軛双曲線である。楕圓の時と同樣に、交軸と共軛軸とは互に直角をなす唯一の共軛經である。

拋　物　線

一三、楕圓を定義するに、第一圖に於て、$\measuredangle OMQ$を直角に取つた。双曲線を定義するに、第四圖に於て、$\measuredangle OQM$を直角に取つた。今此の二角を同時に直角にする爲めには、補助圓の中心Oを無限の遠方にやつて、從つてOM, OQを並行にせば宜しい。其時補助圓は直線に成つてしまう。數式に於ては補助圓の半經aを無限大にする事と同一である。其際楕圓がごるなるかを考へる。$2a$は長軸の値であるから、長軸を無限大にせねばららぬ。從つて短軸の長さも變化をうける。焦點を通つて長軸に直角な弦を**通經**と云ふ。其長さは$2(b^2 \div a)$である。其れを求むる爲めに第一圖に於てMがFに合したと考へる。然る$2PF$が通經である。第二條に依り

$\frac{PF}{PE}=e$, 但し $OF=e$, $OD=\frac{a}{e}$, $PE=OD-OF$

此等の關係から容易に出る。(双曲線の時も通經は同樣である)、で今$b^2 \div a=2m$とおき、兩方の軸は無限大にするが、通經從つて$2m$は變化させないものとする。扨てaを無限大にする時b^2をaで除したものは或數である$(2m)$、故b^2でなくしてbをaで除したものは零になるでしよう。一方に於て

$$FD=OD-OF=\frac{a}{e}-e=\frac{a^2-(a^2-b^2)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\frac{b^2}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

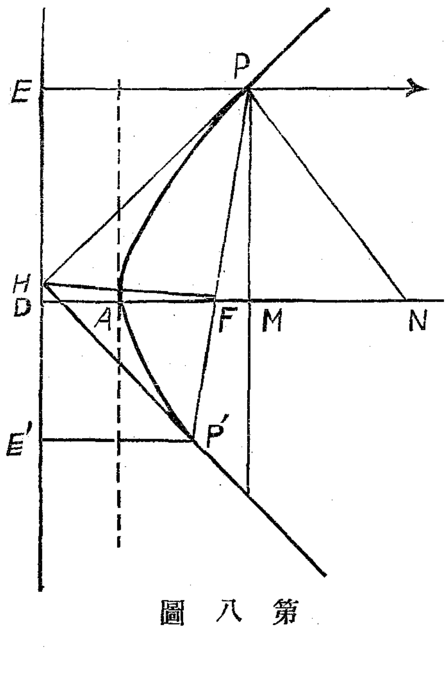
と書く事が出來る。aを無限にすると、分子は$2m$分母は一になる、故に$FD=2m$となる。又離心率

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

と書く事が出來るから、aを無限大とすると、eは一になる。故に吾々の目的に適する**曲線上に任意**

の點より、焦點及び準線に至る距離の比が一と云ふ事になる。其んな曲線を抛物線と云ふ。以上の結果は楕圓の代りに双曲線を以てしても容易に導くことが出來る。即ち抛物線は楕圓や双曲線の通經を變へることなく其軸の長さを無限大にした極限圖形である。焦點及び準線に至る距離の比が一より小ならば楕圓、一より大ならば双曲線、一に等しき時は抛物線である。

一四、更に進んで(第一圖)頂點Aは曲線上の一點なる故 $AF:AD=e$.然るに抛物線に於てはeが一であるから、頂點AはFDの中點に位する（第八圖）即ち$AF=AD=m$。通經の長さは$4m$となる。頂點Aと焦點とを連結する直線を軸と云ふ。次ぎに、抛物線上の任意の一點Pに於ける接線が準線とHで交ると、HFはPFに垂直で、法線PNは$PEHF$に外接する圓に接線であり且つ弦PFP'の両端に於ける接線の交點Hが準線上にある等の性質は楕圓や双曲線の時と同様に證明できる。亦焦點Fから出た光線は皆軸に並行に行くこともわかる。(もう一つの焦點が軸上無限の遠方にあるから、光線が其點に行くには軸に平行



第八圖

でなければならぬとも見らる)。楕圓や双曲線が抛物線になる時中心は軸上無限の遠方に行くから、並行弦の中點の軌跡即ち經は、其點を通る可く軸に並行である。(嚴肅な證明を與へるにはHがEE'の中點で

あることから進むのである)。抛物線の話は是でやめる。

解析幾何學に依れば以上見る様な曲線間の差別が一層うすらぐのであつて、一つの曲線の性質を他の曲線に宛てはめる事は大變容易になるのである。

一五、 結論として尚ほ少しく御話する。楕圓（第一圖）に於て $OM=x$, $PM=y$ と書くと

$$\frac{y}{QM}=\frac{b}{a},\quad QM^2=a^2-x^2,$$

より

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

なる關係を得。此結果は双曲線の時は（$OM=x$, $PM=y$）

$$\frac{x^2}{a_2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots(2)$$

となる。更に抛物線に於て $AM=x$, $PM=y$ とかくと

$$y^2=4mx \qquad \cdots\quad(3)$$

なる關係を得る。如何となれば

$$PF=PE=DM=DA+AM=m+x,$$

$$PM^2=PF^2-FM^2=(m+x)^2-(x-m)^2=4mx=y^2$$

扨て點Oより（抛物線の時はA）右にx尺、其れより上にy尺行けば點Pが確定する。即ち點は(x,y)の一對の數値を以て表す事が出來る。然るに楕圓上の點に對する(x,y)は(1)式を滿足する。即ち(1)式を滿足する總ての(x,y)を點として畫けば楕圓が出來るのである。依つて式(1)を楕圓の方程式と云ふ。同樣に(2)は双曲線、(3)は抛物線の方程式である。斯の考へを擴張せば、曲線の議論を代數式で爲すことが出來る。之の方法に依る幾何學を解析幾何學と云ふ。誠に有力な數學であることは言を俟たぬ。解析幾何學に依ると、一般なる二次方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+1=0$$

は楕圓か双曲線か抛物線かの何れかであることがわかる。それで此の三つの曲線を二次曲線と呼ぶの

である。例へば金星の軌道は先づ楕圓であるから上の如き式であたへられる。其精しい形を知ろうと思へば此の方程式の五個の係數を確定せねばならぬ。其の爲には$(x\,y)$に五組の値を取らせて五つの聯立方程式を立てたらよい。$(x\,y)$に五組の値を取らせるとは、遊星の五つの異つた位置を知る事である。其れに依つて軌道が定るのである。拋物線の時には或る條件の爲めに四個の點を知ればよい。

終（十年七月）

行水の後に

炒りつける様なひるまの苦熱を、行水に洗ひ落して人は皆、樂しい夕涼みに餘念もございません。工博のサーチライトが涼しい光をなげつけて居ります。

　やうやく怠つた病の身を東の窓近くよこたえて、私はなくなつた子供の事等を思ひつゝぼんやりと空を眺めて居りました。

　つと、目をかすめて森の木のすぐ上のところを、青白い球が尾を引いて北から南に飛びました。人魂？

　然しそれは珍らしく大きな流星でございました。時は八月十一日午後十時二十分場所はペガススと白鳥座の中ほどから鷲座の方向へ――

　尾は五秒位で消えました。

　六七歳の頃田舍家の廣い庭へ大きな涼み臺を持ち出して、祖父母や弟達と、天火をみた私をなつかしくしのびました。

　天火とは天にすむ人が、大きな吊りランプをさげて通るのであろう。その人は雷さんの様でもあり、もう少し地上の子供にとつてはおぢさん位のしたしみのある人の樣にも思つて居りました。（英子）