

天文學界最近の研究 (荒木俊馬編)

◎太陽

太陽の視差 H. Spencer Jones 及 J. Halm は千九百二十四年の火星の接近に際して、南亞弗利加の希望峰でこつた寫眞板から得た新しい太陽の視差の値を Monthly Notices (千九百二十五年六月)誌上に發表した。大體火星の衝に於ける夕方と朝に撮つた寫眞板を比較して太陽の視差の値として $8''.809$ を得た。公算誤差は $0''.005$ である。

コロナの研究 米國の天文學者 Kunz 及 J. Stebbins は昨年 (一九二五)一月二十五日の日蝕に際して光電光度計を用いて測定した Corona の光度の結果を Astrophysical Journal (一九二五年九月)誌上に發表して居るが其れによれば Corona 光全部の強さは地球の大氣による光の吸収の影響をりのぞけば千九百十八年六月八日の日蝕の場合の結果と大體同じである。即ち千九百十八年には 1.07 燭光米であり昨年では 0.93 燭光米である。此れによれば太陽黒點活動の最大の時期と最少の時期とで Corona の光の變化は無い様である。この結果は千九百八年に Abbot がボロメーターで測定した値及千九百二十二年に Briggs が光電光度計で測つた値と良く一致する。

又日食皆既の場合の空の明るさは太陽附近の平常の空の明るさに比べて千九百十八年には五千三百倍弱くなつたが、昨年の日蝕では五千五百倍丈暗くなつた。

又同じ日の日蝕に際して Stetson と Coblentz が Corona の輻射の測定の結果が同じ雑誌に發表されて居る。これは反射鏡と、特別に作れた熱電堆、ダルトンソープールの電流計及グリセリン、セルを用いてなされたのであるが、今主な結果を掲げれば、Corona から出る輻射は太陽から出る輻射に比して赤外線分量の割合が多いそうである。この結果も又千九百八年の Abbot の測定と一致する。

又 Corona の温度は大體攝氏の三千度位だらうと言ふ。

◎遊星

火星 中米 Jamaica の天文學者 W. H. Pickering は火星の研究の權威者であるが一昨年の火星の接近に際して多くの觀測をなした。近頃 Popular Astronomy 紙上に火星研究に關する自他の報告をまごめて居るが其の結論は仲々面白い。

彼は千八百八十八年及千八百九十年の古い寫眞觀測の材料をも研究して居るが、そのうちの或者では火星表面の著るしい模様は白いヴェールによつて消やされて居るのがある。これは Wright 氏の近頃の寫眞觀測にもあらはれて居て、地球上で普通の寫眞乾板を用ひて撮影すれば眼で觀測して著るしく區別する事が出来るやうなものでも寫らないが、赤色に良く感光する寫眞板を用ひればよく寫る言ふ事實に基因する。又或る寫眞では其の黒い模様が判きり撮れて居る。かくの如きここから考へて見るに、火星の零圍氣には著るしい變化が絶へず起つて居ると考へられる。又 Pickering 氏は Wright 氏と意見を同じくして火星の大氣は今日まで考へられて居たよりも遙かに多量なものであらうと結論した。此の事は又熱電堆による近頃の火星表面の温度觀測と一致するが、温度の觀測によれば火星の表面の温度は氷點よりも高からう言ふ。火星表面の荒廢たる地點では低い温度を示すから、Pickering の意見では、そう言ふ地點は一般に所謂海 (Maria) よりも高いだらう言ふ。で温度の高さによる低下割合を地球の場合と同じだとすればそう言ふ荒廢たる地點は平均約八千呎もあるだらう。

Pickering は又一昨年の火星接近の場合に火星の赤道附近に見えた大きな雲に就いて詳細な記述をなして居るが、そう言ふ雲の或物は千二百哩から五百哩もあり、其の運動の速度は一時間に二十五哩にも達する。

多くの觀測者と意見を一致して Pickering 氏ば火星の表面に植物が存在するのは確かだと言え意見をもつて居、なを、少くとも或る種の動物が存在して居るだらう言つて居る。

◎聯 星

B 型分光聯星 Pearce 氏はカナダの王立天文學會雜誌 (一九二五年) に三個の分光聯星に就いて面白い研究を發表して居る。

それはいづれも白色星で (^m2 Cor. Bor. (光度 5.07 Type Bon) H.D. 25833 (光度 6.61 Type B³) H. D. 216014 (光度 6.83 Type Bon) がそれであるが。週期は夫々約十二・五八五日、二・〇二九日、二・二八八日である。此等の星の質量や大きさや其他の性質を計算して見るに次の如くなる。比較の爲めに太陽を上げる(下表)。

所で此れ等の聯星系の軌道の大きは如何言ふに、太陽から地球まで距離を光が通過するには四百九十八秒かゝるが、此等の聯星の一つの球から他の球まで光が行くのに夫々二千年、二千年、三千四百年を要する。

	太陽	(² Cor. Bor.	H.D. 25833	H.D. 216014
温度(攝氏)	5800 ⁷	12000	15000	20000
質量(光の強い方)	1.0	13.35	4.86	14.23
質量(光の弱い方)		13.06	4.26	12.37
密度(光の強い方)	1.0	0.015	0.10	0.08
體積	1.0	890	49	178
光の量	1.0	1580	330	1000

分光聯星 16 Lacertae 此の星は赤徑二十二時五十一・九分，赤緯北十四度四分(千九百年)にある B₃ 型で五・五四等の星であるが Struve 及 Babrovnikoff. がヤーキー天文臺で撮つた三十一枚の寫眞板の測定から其の分光軌道を計算した(Astrophysical Journal—一九二五年九月)。それに依れば週期は十二・三一〇六日である。又此の星は所謂カルシウム線特異性を示し，重心の視速度は負六・九籽秒はるに比しカルシウムの H 及 K 線の興える視速度は負十八・九籽秒である。此の星の方向に於ける太陽の運動の分速度は正一〇・三籽秒。此外視速度變化の範圍は四十四・四籽秒。離心率 0.110， ω は七・八度，近星點通過の時は J. D. 2424063.894 である。

◎星辰スペクトル

輝線 B 型星のスペクトルの週期的變化 米國の R. H. Curtiss は特種な白色星に関する面白い研究を發表した。(Popular Astronomy 一九二五年)

B 型の星の中には水素の輝線を示すものが可なりあるが，其の輝線 B 型星のうちには其のスペクトルが變化するものが可なりある。 η Persei は其の代表的なものである。Ann Arbor で水素の β 或は γ が二重の輝線になつて居る十七個の B 型星を検べて見た所そのうちの十一個が η Persei と同じ様な性質のものである事がわかつた。これによつて見るに，輝線 B 型星のスペクトルの變化はその主性質の一つであるを考へてもよい。

此の種の星のスペクトルの變化の主な特質は水素輝線の兩 Components の強さ(詳しく言へば其の比)の變化である。Ann Arbor に於ける研究によればこの變化は H. D. 20336, 25 Orionis, κ Draconis, b^2 Cygni 及 ν Cygni に就て，此の變化は確められた。其の變化の曲結は各々の星について異なつて居り一定した形をもつて居ないけれども一つ一つの星ではスペクトル線が異つても似たやうな曲線を示す。唯變化の範圍は波長の長い線の方が一般に大きいやうである。又各々の星に就て言へば強い輝線の方が大きな變化を示す。多分各々の線を出す零圍氣の高さに關係するものだらうを考へられる。吸収線や其の

他の金屬輝線も同様な變化をする。

變化の週期は一般に非常に長い。たゞ例外として φ Persei の百二十六・八日及 ν Sagittarii の百三十八日は短い。其の他の週期の知れて居るものでは皆數年と言ふ程度のもので長いになるに精確な所は判らぬが十五年と言ふものもある。扨て、此等のスペクトル線の變化が視線速度の變化と關連して居るものとするならば、極く温度の高い星即スペクトル型で、 $O_{0.5}$ から B_9 までの星を其の週期によつて四種に分ける事が出来る。第一種は週期が十五日以下。第二種は二十日から五十日迄、第三種は百日から百五十日迄。第四種は約三年半から十五年迄である。以上の四つの週期の範圍内で何某かの種類の變化が常定であるやうに考へられるのではなからうか。

現今知れて居るだけの範圍ではスペクトル線の強さの變化はスペクトル線のズレの變化と關連して居るやうである。多分視線速度の變化が同時に起つて居るのであらうと考へられるが、H. D. 20436 の如き星では視線速度の變化の範圍は毎秒六十キロメートルにも達し、而も其の週期は千六百九十日と言ふのであるから、此の視線速度が軌道運動であつても又振動的運動であつても兎も角もその全運動は範圍は數十億キロメートルと言ふ恐しく大きなものになるのである。

φ ペルセイ型の星九個の星名と週期を上げれば。

H. D. 20336.....	1690 日
X Persei	數年
δ Orionis.....	1875 日
ζ Tauri	15 ± 年
κ Draconis.....	4000 日
b ² Cygni	1373 日
ν Cygni	1800 日
ρ Aquarii	1900 日
π Aquarii	2000 日

此の φ Persei 型の星(多分輝線 B 型星は皆そうであらうが)は恐らく非常に質量の大きな巨星であらう。そしてその質量は輻射壓其他の外向きの壓力と重力とが丁度平衡する位に大きく、外向きの運動によつて過度に大きな輻射壓を調節して週期的な變化を誘因するものであらうと考へられる。

◎星 雲

Hagenの暗黒星雲 Barnard や其他の學者によつて研究された所謂暗黒星雲は銀河の中にある暗黒な天體であるが、數年來 Roma の基督舊教の僧

侶兼天文學者である Hagen は、かくの如き暗黒な天體は銀河の中のみならず天球上の各方面に存在する事を主張し近年羅馬から見える全天球上に於けるかゝる暗黒星雲の厚かんな表を發表した。又 Esthonia の天文學者 Oepik は巴里天文臺で影つた寫眞星圖に於ける幽かな星を數へる事によつて、天球上にハーゲンの言ふ様な暗黒な天體の存在する事を主張して居る。

若しかくの如き暗黒な物質が天球上の各方向に實際存在するならば、これは非常に遠い天體例へば星雲や其他の研究に非常に重大な影響を及ぼすに違いない。米國 Harvard の天文學者 Shapley はこう言ふ見地から新しい研究をした。彼は二十四吋及十六吋の屈折望遠鏡で長い時間かけて撮つた寫眞板を檢査したが、かくの如き寫眞板には巴里天文臺の星圖に出て居る(十四・五等迄)よりももつこ幽かな星まで出て居るがその幽かな星々の研究から次の如き結論に到達した。天空上の或場所に非常に星が缺けて居る事(此れによつて Hagen や Oepik はその場所に暗黒な光を吸収する物質があると言ふが)は十四・五等よりも更に幽かな星については存在しない。故に Hagen の言ふ様な暗黒な物質は存在するのではなくて、十四・五等よりも光の強い星、概して吾々に近い星の分布が空間に一樣になつて居るのではなく著しく不規則になつて居るであらうと考へられる。即ち星々は大規模に集團的な傾向を備へて居ると言ふ事を示す。

かくの如き研究から見るに Hagen の所謂銀河外の暗黒星雲は單に眼に感ずる對比の現象から來るもので實在のものではなからうと考へられる。

◎星辰進化論

巨星倭星説の進歩 米國の天文學者 H. N. Russell が巨星倭星の説を發表してから既に十數年の歳月を経たが其後巨星及倭星に關しては著るしい進歩を來した。特に理論的方面に於ては英國の天文學者兼理論物理學者 Eddington が獨逸の天文學者 Schwarzschild の輻射平衡の理論を展開して以來 Eddington Jeans, Cramer, Von Zeipel, Vogt, Milne 其他の理論天文學者達によつて長足の進歩をなしたが、一昨年暮から昨年始めにかけて、Eddington が發表した星の内部に於ける吸収係數の理論的研究から引いて星の質量と眞光度の關係は巨星倭星説一大進歩を來したと言つてもよい。此の研究によれば、眞光度は主として質量の函數であつて質量の大きなものほど其の眞光度は大きい。これより前から星辰の輻射のエネルギーは萬有引力による機械的エネルギーだけでは追付かず何か星を構成する物質の分子の内部にエネルギーの源を有するものであらうと言ふやうな考や、物質を構成する電子とプロトンの放電即ち物質の消耗によつてエネルギーが出来ると言ふやうな考へが天文學者達によつて

考へられて居たのであるが、Eddington の眞光度と質量の關係によつて此の考へは非常に有力なものとなつたと言へる。即ち星辰は輻射する事によつて其の物質を失ふと言ふ事はかの相對性原理によるエネルギー及質量の同じものである事と相まつて有力なものとなつたのである。

又實驗的方面に於ては白色矮星の發見があり、其他種々の天文學上の事實から在來の巨星矮星の説は少なからず改革せられるの運命に立ち至つた。

Russell は去年中頃の Nature 誌上に於て巨星矮星説に對する進歩的な見界を發表して居る。以下 Russell の考へを茲に紹介する。

在來の理論では原子が段々密集して密度の大きな矮星に進むに従つて内部の温度は低下するものも考へられたが、此の考へは今日では全く拋棄せなければならぬ。そして表面温度が低くなると言ふ事は内部の温度が低下するに基因するのではなく星の内部に於ける不透明度が密度と共に増加する事に因り、即ちこれによつて内部から表面に逃げて行く輻射熱をさえぎる言ふ事は明である。

星の内部の状態及光度の理論は實際の所充分に研究された状態にあると言つて良く、星の平均分子量や不透明度の温度や密度との關係は Eddington や Jeans の近似法に依つて可なり眞理に近いものとなつたやうに思はれる。唯一つ稍不正確と考へられる量は星の内部に於て生産されるエネルギーに關するものであるがこれでも Eddington の研究が示す様に非常にかげ離れた見當のつかないやうなものではない。

問題を解くにも色々な近似法がほごこされて居り、又學者によつて色々意見は異なつて居るけれども其の主なる結果は大體明らかであつて、星の眞光度は質量が増加するに従つて急激に増す。然しその表面温度による影響は比較的少さなもので太陽のスペクトル型を標準にすれば、一光級も違つて來るやうなものは稀れである。

故に新しい理論に依れば星の質量さえ與えられれば其の眞光度は大體定まり、あまりかけはなれた眞光度のものは無い事になるがこれに反して星の直徑や表面温度従つてそのスペクトル型は一定の質量に對してもあらゆる値のものが存在し得る言ふ事になる。此の第一の結論即ち與えられた質量に對して眞光度が大體定まる言ふ事は觀測の方の事實と一致するが、第二の一定の質量に對して色々な直徑や表面温度のものがある言ふ結論は實際の觀測と一致しない。即ち一定の質量即ち大體一定の眞光度の星を觀測の方からひろつて來るにそれ等があらゆる表面温度(スペクトル型)に分布せられて居る言ふ事は決してないのである。

非常に光度の強い星だけに就いて言へば此の第二の結論は正しい。然し太陽の光の十倍以下を出す星の場合にはこの結論は全くあてはまらないで却つて一

定の眞光度に對してスペクトル星の狭い限界が存在する。

以上の見界からすべての星を三つの種類に分つ事が出来る。

一、主系列 此の種に屬する星は赤色の星に進むに従つて急激に其の眞光度を減ずる。在來倭星唱えられて居た星の全部さずつこ温度の高い白色星、スペクトルで A 型、B 型及 O 型までの大部分を占むる。

二、巨星 此の種に屬する星にはすべてのスペクトル型の星を含有し其の眞光度は非常に大きく大體一定である。

三、白色倭星 此の種に屬する星は非常に眞光度が小さい(十等以下)にかゝらず其の表面温度は非常に高くスペクトルで言へば A 型以上である。今日かくの如き星は極く少しゝか知られて居ないが太陽から六パーセックまでの距離以内に三個も在り、K 星及 M 星の倭星を除けば他のスペクトル型の星に比して其の數は多いと見ねばならぬ。

以上の三種の星の分布を説明する爲めには是非とも星の内部の状態を考へねばならぬ。従つて此の問題は星辰エネルギーの源や質量の漸時減少と密接な關係を有する。今日多くの學者の考へる所では若し星の生涯に於て質量が大體一定であるならば前にかゝけた様な星辰進化の道行は出て來ない。然し質量の大部分が輻射となつて消耗されるとすれば問題は非常に都合が好いのである。

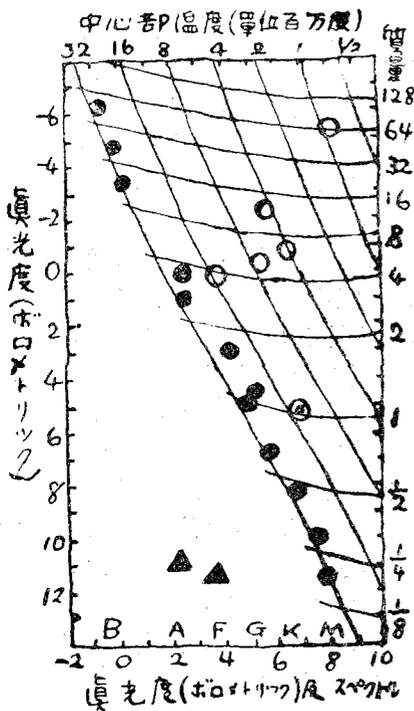
所で先づ考ゆべき事は質量が星の内部に於て熱に變る早さが星の内部の温度や壓力に無關係に一定して居るか否かと言ふ事である。若し物質が熱に變ずる割合が一定して居るならば、表面から逃げて行く輻射のエネルギーが内部に發生するエネルギーと釣合ふ迄星は膨脹するか收縮するかせなければならぬし、若しまた内部に發生するエネルギーが温度や壓力に支配されるものならば、内部に發生するエネルギーが表面から逃げて行く輻射と釣合ふ迄星は膨脹し或は收縮せねばならぬ事となる。

星の内部に於ける熱の蓄積は膨脹を引き起すが若し此れによりて表面から熱の發散の増加がともなわれないならば、内部に於ける熱の發生が一定であるやうな星は到底安定の釣合にある事は出來ないのである。故に物質の消耗による熱の發生は温度や壓力に關係するを考へるが至當であらう。

若し熱の發生が内部に於ける温度によつて變るならば、その變化は温度と共に急激にかわらねばならない。何となれば地球の内部には著るしい熱の發生は見られないからである。かくの如き場合に在つては星の膨脹は内部の温度の低下をうながし従つて熱の發生を弱くする。かくの如くして内部に於ける熱の發生は星の表面から逃げて行くエネルギーと調和する様に自動的に調節されて行くのである。故に物質が熱に變る早さは温度と共に増加すると言ふ事が結論されるのであるが此の結論は熱力學の法則に矛盾するやうに見える。けれども吾々が考へてゐるやうな實驗室の事實を超越した星の内部に於ける現象を考へ

る場合には普通の物質の性質をもつて率すべきものではなく寧ろ天文學上の觀測された事實に基づく方が至當であらうと考へられる。

扨て下圖は Eddington の輻射平衡の理論から表面温度と眞光度を座標軸として星の中心部の温度と星の質量を示す曲線を描いたのであるが（上から斜に右下に走る線は中心部の温度の曲線を示し横に走る線は太陽を單位とした質量を示す曲線）これに眞光度及表面温度の知れた二十個の星を配して見るに、圖中黒丸は主系列の星、白丸は巨星、三角は白色矮星を示す。



此の圖を見るに、主系列の星がすべて殆んど等しい中心温度即約三千萬度を有する事は一見明らかである。然るに巨星はずつと低い中心温度を有し此れに反して白色矮星は非常に高い中心温度を有するらしい。主系列の星が殆んど等しい中心温度を有すると言ふ事は次の如き假設に依りて容易に説明する事が出来る。即ち温度が約三千萬度の所で物質がエネルギーに變化する割合が非常に急激に増加するだらうと。故に若し温度がそれ以上に昇れば其の壓力によりて星は脹膨し膨脹すれば温度は低下し、かくの如くして實際主系列の星の中心部の温度は此の限界を越す事は出来ないであらう。

若し星を構成する總ての物質がかくの如きものであるならば星は其の巨星の時期を非常に急早に通過しなければならぬ。如何になれば、低い

中心温度に在りては熱の發生は釣合に保つだけ充分でないからである。然し巨星時代の星が澤山ある所を見れば實際はそうでないらしい。従つて、星を構成する物質の中には色々の種類のものがあつて巨星時代にも各々相等な割合で物質がエネルギーに變化しその時代の爲めに所謂燃料を供給して居ると考へねばならない。又白色矮星にあつては何か非常に頑強が物質が存在して居ると考へねばならない。

かくの如く考へ來れば、星の生涯に於て、明らかに考へる事の出来る最初の状態は非常に膨大な稀薄な瓦斯球であらう。そして其の直徑は恐らく天王星や

海王星の軌道位もあり其の中心部の温度は數十萬度位の程度のものであらう。それが輻射によつて熱を失ひ、萬有引力によつて非常に急速に收縮するであらう。所が中心部の温度が或る臨界の温度——恐らく百萬度より低いであらうが——に達するに茲に或種の物質の消耗が始まつて、かくして星が生れ出るのである。然る時は此の進化の速さは熱にかわり行く物質の消耗の速さに依るのであるが、此の種の物質が消耗して中心部になくなつて仕舞うに更に其の周圍にある同種の物質の消耗が始まる。斯くの如くして熱の發生を保ちながら或種の物質は消耗し温度は昇る。各々ちがつた臨界の温度を有する幾種かのかうした物質がエネルギーに變じながら巨星時代は成長して行くであらう。

扨て中心部の温度が三千萬度に到達するに、星を構成して居る大部分の物質が消耗し始めそれに相等する熱を周圍の空間に輻射する。そして此の場合には前に述べた様な理由で中心部の温度は大體一定に保たれ、質量がエネルギーに變じて行くにしたがつて星の全體の質量は次第に減少し、内部に於ける不透明度は増加し主系列に沿ふて老い行く。

最後に白色矮星に關しては吾人は星の内部に、仲々エネルギーに變じ難い物質が含まれて居る事を假定せねばならぬ。然し星を構成する重なる物質が消耗して仕舞へば後に残るものは此等の頑強な物質でなくてはならない。而も重なる物質が殆んど無くなつてしまつて居れば、茲にまた萬有引力の法則は急激に其の威を振り、非常に密度の大きな星になり従つて中心部の温度は非常に高いものとなり白色矮星が生ずるわけである。

従來の巨星矮星説では星の進化の道行は大體スペクトル型と眞光度とを座標とすればアラビヤ數字の 7 と言ふ字を裏返しゝたやうな形のものであつたが新しい星辰進化説では羅馬字の Z と言ふ字を裏返しゝたやうな形になる。

巨星の道行を示す線と白色矮星の道行を示す線が主系列のどこから別れ如何なる傾きの線になるかは星を構成して居るエネルギーに變り易さの異なる色々の物質の割合如何によるのであるが、星の質量にも依るもので、例へば質量が比較的小なるものは早く主系列に合するであらうし圖中二重丸にて示した星の如き (α Centauri の伴星) は主系列から大分離して居るやうであるがこれは比較的質量の小さな巨星が將に主系列に入らむとして居るものご考へるべきである。

Russell の新しい説は大體以上の如くであるが、これは近頃非常な長足の進歩をした原子構造論などご相關連して實に天文學上の大問題なるのみならず地球上の限られた實驗室で到底實驗の出來ない状態(温度や壓力等)に於ける物理學上の大問題であるご思ふ。

Sirius の伴星 前に述べた Russell の新説と相前後して白色矮星に關する非常に有力な觀測材料が現れた。それは米國學術翰林院の Proceeding

(一九二五年七月)に發表された、Wilson 山天文臺長 Adams の研究である。以下その概略を紹介する。

千九百二十四年に英國の理論の大家 Eddington が天狼星の伴星に就て論じスペクトル型を Fo、其の有効溫度を八千度とし其の光度と距離とから半徑は一萬三千籽、質量が知れて居るから此の半徑を用ひて其の密度は其れの五萬三千倍と言ふ飛んでもない値になる。所が一般相對性原理の結論から言へばかかる條件に於てはシリウスの伴星のスペクトル線の重力變位は速度に直して毎秒二十キロでなくてはならないと言ふ事を豫言した。

シリウスの伴星のスペクトルに關しては Wilson 山天文臺の新しい觀測によれば、大體 Fo として大して誤ではなく、寧ろさちらかと言へば Fo よりも溫度の高いスペクトル型であるとも低い型ではなからうと言ふ事がわかつて居るのである。

扱て Eddington の豫言を検査する爲めに Adams はシリウスの伴星のスペクトル線のズレを研究したが、シリウスそれ自身の光の反射による影響による補正をほきこして、シリウスと其の伴星とのスペクトル線のズレはこれを速度になをせば次の如き結果となつた。

水素の β 線に就て.....	+26 籽秒
水素の γ 線に就て.....	+21 籽秒
其他の線に就いて	+22 籽秒
平均	+23 籽秒

然るにシリウスと其の伴星との相對速度は軌道の要素が判つて居るので容易に計算する事が出来、+1.7 籽秒となる。故に最後の結果は +21 籽秒、Angstrom 單位で +0.32 となる。此の變位を一般相對性原理による効果と見るに伴星の半徑は一萬八千籽となる。

所で今 Seares の研究によるスペクトル型と表面光度との關係を用ひ、シリウスの伴星のスペクトルを Fo 及 A₅ と別々に假定して、Eddington がしたやうな計筆をするに、次の結果を得る。

スペクトル型	Fo	A ₅
表面光度	-0.88	-1.45
半徑(籽)	24000	18000
密度(單位水)	30000	64000
相對性變位	+0.23 A	+0.32 A

スペクトル型を A₅ とそれは觀測と計算との結果は非常によく合ふ。

此の研究は一つには一般相對性原理の第三の證明の確立であり、同時に白色矮星の異常なる密度に對する證明と見る事が出来る。