

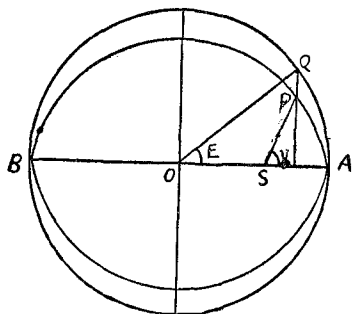
ニュートンが解いたケプラーの方程式

上 田 稷

ケプラーの方程式といふのは、楕圓軌道上に運行してゐる天體例へば彗星などの位置を求めるために是非解かねばならぬ方程式である。普通

$$M = E - e \sin E$$

といふ式で示されるが、 M は平均近日點角であり E は離心近日點角といふ



ものである。而して e は軌道の離心率に外ならない。圖中の楕圓は軌道を表はし S が太陽の位置で P が彗星の本當の位置であるとする。しかし P といふ位置は直接には計算し難いのであるが、次の様な考へから間接にこれを算出するここが出来る。今彗星が近日點を通過した時刻を T としそれから只今まで

に経過した時刻を $t - T$ とすれば、もし彗星が一様な速さでまわつてゐるものなら直ぐにも A 點から幾らの角度動いたといふことが知れる譯でその角度を平均近日點角といふのである。彗星が太陽の周りを動く角度の平均を μ で表はすこ—普通この角度を平均運動と稱してゐるのであるが—
 $\mu \times (t - T) = M$ は平均近日點角に外ならぬものである。さて P 點から AB に垂線を引く時、外側の圓と交はる點を Q とし O と Q を結ぶと AOQ 角が離心近日點角 (E) と稱するものであり、 ASP 角が眞近日點角 (v) と稱へられるものである。そしてこれ等の間に次の様な關係がある。

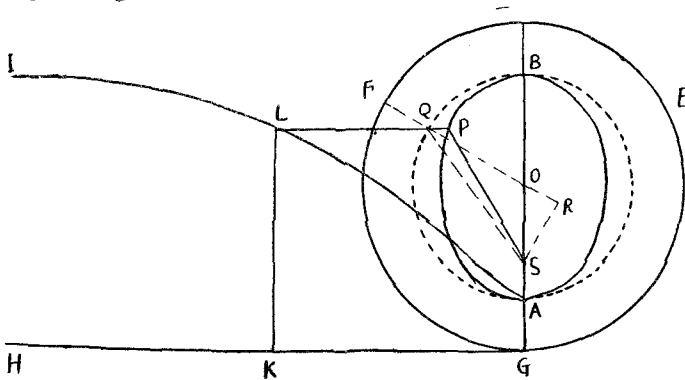
$$M = E - e \sin E$$

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

それで現在の時刻 t がわかると M が知れるから上のケプラーの式さへ解いて E がわかれば、直ぐに實際の位置を與へる v が計算せられるといふものである。従つてケプラーの式を説く考案は色々の人々によつて提出せられたが、その中最初に解いた人は勿論ケプラーであつてその次がわがニュートンである。そしてその方法はニュートンの名著プリンチピアに出てゐるとい

ふ譯である。

プリンチピアの最初の出版は一六八七年であつて其後も澤山の出版があるが一八七一年グラスゴ―出版のものはケルビン卿ミブラックバーンの出したもので、字體が鮮明であるから讀み易く又正誤及び誤植の訂正を施してあるから、今これによつてニュートンの解法を説明するこしよう。尤もラテン語で書いたもので、自分は満足に讀める譯ではないから間違の絶無は請け合ひかねるけれど、推論には間違ひない積りである。Prop. XXXI の XXIII 問題として Corporis in data trajectory elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum がある。



楕圓 APB , A を頂點とし S を焦點として、今 P まで天體が來てゐるとする。 OA を G まで延長して $OG:OA = OA:OS$ と取る。垂線 GH を作り又 O を中心とし OG を半徑として圓 GEF を描く。 GH を定規として GEF をこの軸にそつて回轉するこの圓の内部の點 A はトロコイド ALI を描くのである。

さて GK の長さが全圓周 $GEFG$ に對する比が、天體が A から出て AP を描くに要する時間と楕圓全體を廻るに要する時間との比に等しくする。 KL をこれに垂直に作るこのトロコイドと L 點にて交はるが LP を KG に平行に作るこの楕圓と天體の位置 P にて交はる。

次に O を中心として OA を半徑として半圓周 AQB を作るこ、これは LP と Q にて交はるから SQ , OQ 線を作る。 EF 弧が OQ と F で交はるこして、 OQ に垂線 SR を作る。面積 APS が面積 AQS に對應するものであり その AQS は即ち扇形 OQA と三角形 OQS の差であり、或は

$\frac{1}{2}OQ \times AQ \approx \frac{1}{2}OQ \times SR$ この差であり、そして今 $\frac{1}{2}OQ$ が一定であるから弧 $AQ \approx SR$ この差を見るここが出来るので($SR : \sin \widehat{AQ}$ の比は $OS : OA$ の比に等しく又 $OA : OG$ 及び $AQ : GF$ の比に等しいから $AQ - SR$ の $GF - \sin \widehat{AQ}$ に對する比に等しい譯である) GK が弧 GF と弧 AQ の正弦この差になる。

従つて問題は解けたのである。

大體上の様に書いてあるが、これは少しく古めかしい書き方でもし今様の書き方でするに次の如くなるのである。

$$OG : OA = OA : OS = \frac{1}{e}$$

$$GK = 2\pi \times (\text{AからPまでに要する時間}) / (\text{回轉周期}P)$$

$$= \mu (t-T) = M$$

μ は平均角速度で即ち一様の速さで廻轉してゐるとして彗星の角速度を表はすものである。

$$\text{面積} APS = \text{面積} AQS \times \sqrt{1-e^2}$$

$$\text{面積} AQS = \text{扇面積} OQA - \text{三角形} OQS$$

$$= \frac{1}{2}OQ^2 \times E - \frac{1}{2}OQ \times SR$$

E は離心近日點角 AOQ を表はす。従つて $OQ \times E = \widehat{AQ}$ であるが故に、上の式は $\frac{1}{2}OQ \times (\widehat{AQ} - SR)$ となる。

さてA點からOQ線に垂線を引くを考ふれば、その長さは $OA \sin E$ に等しく、且つSR線と平行となる譯である。
故に

$$\frac{SR}{OA \sin E} = \frac{OS}{OA} = \frac{OA}{OG} = e$$

而して AQ, GF の圓弧は夫々

$$\widehat{AQ} = OA \times E \quad \widehat{GF} = OG \times E$$

で與へられるが故に、上の式はまた $\frac{\widehat{AQ}}{\widehat{GF}}$ に等しい。

$$\frac{SR}{OA \sin E} = e = \frac{\widehat{AQ}}{\widehat{GF}} = \frac{\widehat{AQ} - SR}{\widehat{GF} - OA \sin E} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{面積} ASP = \text{面積} ASQ \times \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}OQ \times (\widehat{AQ} - SR) \times \sqrt{1-e^2}$$

$$\widehat{GF} - OA \sin E = OG(E - \frac{OA}{OG} \sin E) = OG(E - e \sin E)$$

これを(1)式に入れると

$$\widehat{AQ} - SR = e \times OG \quad (E - e \sin E)$$

さてケプラーの第二法則によつて、太陽から彗星に至る線(これを動徑といふ)が彗星の動くにつれて掃いてゆく面積はその時間に比例するといふことから次の関係式を得ることが出来る。

$$M = 2\pi \times (\text{AからPまでに要する時間}) / \text{回轉周期}$$

$$= 2\pi \times (\text{面積ASP}) / \text{全面積}$$

楕圓の全面積は $\pi \overline{OA}^2 \sqrt{1-e^2}$ であるから

$$M = 2\pi \times \frac{1}{2} \overline{OA} \times (\widehat{AQ} - SR) \times \sqrt{1-e^2} \div \pi \overline{OA}^2 \sqrt{1-e^2}$$

$$= \frac{\widehat{AQ} - SR}{\overline{OA}} = \frac{e \times OG(E - e \sin E)}{\overline{OA}}$$

即ち $M = E - e \sin E$ であることが知られる。

従つて、ケプラー方程式の圖式解法としてはトロコイド上に、GKがMに等しくなる様にL點を求め、LからHG線に平行直線を作るにAQB圓と交はる點がQで、QがO點に於てAとなす角AOQを求むればこれがEを與へるのである。トロコイドは機械的に容易に引きうる曲線でありその他は定規とコンパスさへあれば容易にEを求めらるゝところにこの解法の利點がある譯である。

英國に於けるニウトン祭

ニウトンを生んだ英國では、今年ニウトンの第二百年を記念するため、さすがに大きい計畫が謀られてゐる。近着報によれば、ニウトンが初期に學校教育を受けたグラントム(Grantham)では、ヨーク州の數學協會が主催して下の如き集會が開かれるといふ。

プログラム

1927年3月19日

午前10時——グラントム市の King's School 於いて學術講演會 Dr. J. H. Jeans 博士司會

Sir J. J. Thomson タムソン教授(ケンブリヂ大學トリニテイ學院長)演題「物理學上のニウトンの效蹟」

Sir F. W. Dyson ダイソン博士(カリニチ天文臺長)演題「天文學上に於けるニウトンの效蹟」

Dr. Horace Lamb ラム博士(ケンブリヂ大學トリニテイ學院フェロ1)演題「物理學上に於けるニウトンの效蹟」

Prof. G. H. Hardy ハーディ教授(オクスフォード大學新學院フェロ1)演題「純數學上に於けるニウトンの效蹟」

午後2時——ウルスト1プ(Woolsthope)にあるニウトンの生家 Manor House 參觀
其の後 Stoke Rochford で Christopher Turnor 氏の講演「ニウトンの田舎生活」終つて茶菓。

午後7時30分——グラントム市ツヨ1ツ・ホテルに於いて祝賀晚餐會、ケンブリヂ大學の Sir J. J. Thomson 教授が座長となり、オクスフォード大學天文臺長 H. H. Turner タ1ナ1教授、エテンバラ大學の Prof. E. T. Whittaker ホイテ1カ1教授、バミンガム僧正、リンカ1ン僧正等の演説がある筈。

同 三月20日(日曜)

午前11時15分——グラントムのパリーシ教會で記念禮拜、バミンム僧正の説教あり
其の後、一同、學服でギルドホール(Guild Hall)へ行列。



モーアハウス彗星の寫眞.

これは1908年十一月十六日獨乙ハイデルベルグ天文臺長 Max Wolf 教授に依つて撮影されたモーアハウス彗星の寫眞です. 彗星が物理學的に如何なる性質のものかは毎號連載して居る竹田理學士の論文を參照下さい.