新量子力學の發展 (2)

コペンハーゲンに於て ペ・ヨルダン

(Die Naturwissenschaften 誌 1927 第 30 號所載)

1. 理論の基礎

1. 古典的理論と對應原理

量子力學の詳しい考察に入るに先立ちて，Heisenberg の論文の出現以前に於ては如何なる狀態に在つたかを顧みる事は，無駄な事ではあるまい．理論の其の當時の地位に於ける最も重要なる見地は（量子的不連續性の根本觀念は別として）Bohr の對應原理であつた．此の對應原理の意義は之を最も一般的な方法で言ひ表はせば例へば次の如くなる：肉眼的大きさの世界に在りては，非常な正確さを以て古典的な理論が成立する；理論が受けた變化は非常に痛烈なものであつたが，それにも拘らず，吾々が原子の大いさの世界に進むときにも，物理學的諸法則の多くの特質に於て，尙ほ多くの類似點と調和點が見出されると言ふ事は之を固く信ぜねばならない．而も不連續的な狀態の變化と言ふ事實は，すべての古典的な考へ方には，到底和解する事の出來ない對立である．然しながら一つ一つの原子を考へるかわりに多くの同種の原子の集合を考察する事によつて，此の對立は或る程度迄之れを消す事が出來る．卽若し此れ等の原子が色々な相異つた時刻に其の量子飛躍をなすならば，其の結果は大凡此れ等原子の全集團の連續的な狀態の變化を與える事になるのである．そして此の大凡の連續的な狀態變化を法則を作ると，恰も古典的理論に於けると同じ樣な法則を得るに違いない．此の意味に於て，量子力學の後になつてみたされたプログラムは，例へば次の如く言ひ表はす事が出來る：卽ち，量子論的な不連續性を根本的に考慮するに際しても，尙ほ出來るだけ古典的な理論に類似を有するやうな理論を作らねばならない．

Bohr や其他の研究者達——玆にはそれ等一人一人の研究者の名前を擧げる事は省略するが，その事はお赦しを願いたい——が此の方面に於てな

しとげた最も重要な一般的な成績は週期的運動ならびに多週期的週期運動に關係してゐる．玆では簡單な爲めに唯一つの自由度を有するやうな，從つて唯一つの坐標を有するやうな週期運動を考へやう．そうすると此の坐標は時間の一つの週期的函數となる．其の振動は調和解析によつて其のハーモニツシユなコムポーネンテに分解する事が出來る．そして全振動は此れ等の純粹な調和振動(即ち基調振動及び倍調振動)を重ね合はせる事に依つて得られる．而して其の各純粹振動は各々夫々の振幅を有する．扨て古典的理論の立場からすると，若し斯くの如く振動する質點が荷電されてゐるものと考へると——即ち一つの電子であるとすると——其の電子からは電磁的な球波の形で光が四方の空間に出て行くと言ふ事になる．此の光輻射はシステムの振動する電氣的モーメントの振動數と同じ振動數を有し，各振動數の輻射の强さは，其の電氣的モーメントの振動に於けるその光に相等する振動數の振幅の二乘に比例する．

然るに，量子論に從へば，一つの原子が出す光の各振動數は，其の原子の唯一つの狀態や其の狀態に結びついた週期運動に關係してゐるものではなくて，各光の振動數は二つの狀態，或は言ひかえて，此れ等二つの狀態の間に起る超躍的推移に屬するものである．それにも拘はらず，システム(原子)の實際の量子論的振動數と，たゞ近似的にのみ正しい古典理論のモデルの振動數の間には一つの定まつた同格が存在する．即ち，システムの各量子論的振動數はモデルの或る古典的振動數に相等する．故に Bohr は次の如く結論した，即ち非常に澤山の同種の原子に就いて平均した量子論的な平均輻射强度は，それに相等する古典理論の振動數に屬する電氣的モーメントの振幅を古典理論で計算して出した價の二乘に大略比例すると．此の假定は之れを判きりと吟味すると次の樣な考へになる事は明らかである．即ち，正確な量子力學に於ても或る一つの原子の電氣的モーメントの振動に對してはきまつた振幅が存在せねばならない，然しながら此の振幅と言ものはもともと或る狀態に於ける振幅と見てはならないので，却つて或る推移に附すべき振幅と見ねばならない．そして電氣的モーメントの此の正確な量子論的な振幅に依つて，平均の輻射强度は正確に決定されると

言ふのである．これによれば，一方原子内に於ける實驗的に觀測出來る量としては，色々な狀態のエネルギー（其の差を Franck-Hertz の電子衝突の方法で測定する事が出來る）や更にスペクトル線の振動數や最後に原子の電氣的モーメントの振幅（これは光の强さから測定する）を有して居た．そして量子力學の問題を，此れ等の量の間に存在するすべての量的な關係を發見し，それから此れ等の量を理論的に正確に計算する方法を得るやうな工合に作る事が出來た．

すでに Heisenberg の理論の確立以前に，此れ等の正確な量子論的量の間の正確な諸關係の中の幾つかは知られてゐたのであるから，今茲では此の事に關して簡單に考察して見やうと思ふ．これ等の關係のうちで最も簡單なそして最も重要な關係は Bohr の振動數條件である．これはスペクトラムの振動數を狀態のエネルギーから誘出する事を得せしめる所のものである．御存知の通り此の條件には，古典的力學と量子論的力學との深い類似があらはれてゐる．即ち，古典的力學に於ては，電子氣的モーメント（從つて又光のモーメント）の振動數は，エネルギーを『量子數』で微分して，之れを計算する事が出來る．量子論では此の振動數は微分に依つては得られないで，有限な差を作る事に依つて得られるのである．

更に他の重要なる法則は Ladenburg に依つて發見され，Kramers 及び Heisenberg に依つて完成され一般化された．即ち此れ等の研究者達は正確な量子論的な分散（Dispersion）の公式を與えたのである．原子に依る單色光の散亂（Zerstreuung）を古典的理論に從つて作るならば，よく知られて居る分散の公式を得るのであるが，此の公式は，光の振動數が原子の電氣的モーメントの振動數と一致する時には共鳴が起ると言ふ事を示すものである．此れに對應して，若し光の振動數が，丁度原子がなす事が出來るやうな量子飛躍の振動數に等しいならば，ほんとの量子論的な原子による單色光の散亂の場合にも共鳴が起ると言ふ事を期待せねばならないのである．そして問題は，古典論の分散公式と出來るだけ相對應する類似を有し，然かも古典的振動の振動數のかわりに量子論的な振動數が入り來り且つ古典的な振動振幅のかわりに量子論的な振動振幅が入り來るやうな分散

公式を與えるこ言ふ事である．丁度此の問題は上に掲げた研究者達が解決した問題であつたのである．

電磁波が原子に依つて散亂させられる事こ密接な關係にあるものは一つの原子が光の場からエネルギーを吸收する現象である．古典的に言へば光の散亂こ言ふ事は，原子にあたる電磁波が，原子の雙極モーメントの，他から力が作用しない場合の運動に更らにつけ加へた新しい振動を引き起こす事である．例へは $\mathfrak{p}^0$ を他から作用せられない原子の電氣的モーメントこすれば，原子にあたる電磁波によつて亂されたモーメントは $\mathfrak{p}^0+\mathfrak{p}^1$ であり，玆に $\mathfrak{p}^1$ は（あまりに強くない光が原子にあたる場合には）比較的小さな附け加はりの モーモントである．散亂輻射は，亂されないモーメント $\mathfrak{p}^0$ からの突然の輻射こ同じやうな工合に，此の附加モーメントの $\mathfrak{p}^1$ から起るものである．原子に依つて吸收されるエネルギーは外の電磁場によつて原子になされた仕事を決定して之れを計算する事が出來る．故に散亂こ吸收こは，（$\mathfrak{p}_0$ の他に）附加モーメントの $\mathfrak{p}^1$ を計算しさえすれば，直ちに之れ等を知る事が出來る：此の附加モーメントの正確な量子力學的振幅は，量子論的分散公式に在つては $\mathfrak{p}^0$ の量子論的の振動數こ振幅に依つてあらはされる．從つて吸收にこつては，van Vleck が示した樣に，Einstein が量子性を有する原子こ Planck の輻射この間の溫度平衡が存在する爲めに必然的なものこしてみこめた，例の衆知の確率法則（Wahrscheinlichkeitsgesetze）が生じて來る．更に又 Kramers の分散公式こは，Thomas 及び Kuhn 併びに Born に依つて對應原理的考察から結論された正確な量子論の公式が密接な關係に在るのであるが，此の事に關しては後で論ずる．

これ等の一般的關係の他に尙ほ幾つかの特種な量子力學的法則が Heisenberg が量子力學を基礎付ける以前に正確なる形に於て知られて居た．これ等の特種な法則から新理論の展開は刺戟されて出て來たのである．吾々は多重線こ其のゼーマン分線の强さの法則を考へやう；此の事に關してはウトレヒト學派の根本的研究が實驗的基礎を作つた．古典的理論に依れば，純粹に運動學的に考察して，ゼーマン效果は，原子の內部運動が普通だこ

何等變化なく保たれてゐるやうな原子の一様なプレッツエッシオンに外ならない．此の磁場によつて起こる附け加はりの運動の運動學的の特質は，非常に簡單な衆知の方法で常態な古典的理論に依るゼーマン三重線の强さ及びポーラリザチオンの關係となつて現はれて來る．全く此れと對應して，『一様的なプレッツエッシオン』の量子論的運動學は一般的なゼーマン分解圖形の强さ及びポーラリザチオンの關係に於て反映して來るのである（Hönl ; Goudsmit Kronig）．同じ様な方法で多重線の强さは（Hönl 及び Sommerfeld ; Kronig ; Russell）すでに多少複雜な運動型の量子論的運動學に就いて知る所あらしめる．

2　量子力學に對するハイゼンベルグの思想

以上論じた如くすでに原子の內部に於ける運動を支配する正確なる運動學的な又力學的な法則の性質に重要なる見識があつたのであるが，此の時にあたり Heisenberg は，單に古典的理論の何か多少意味のある個々の事實に對して，その量子力學的アナロゴンの正確なる形を探し出そうとするのではなく，運動學及力學の基礎方程式其のものを量子論に飜案せんとする中心問題を摑んだのである．此の目的に導く道を一つの充分に銳い一瞥に一義的に示す爲めには人が知つてゐる所のもので旣に充分足りると言ふのが Heisenberg の見解であつた．

Heisenberg は彼の理論を確立するに當つて，一つの理論の問題は結局は觀測する事の出來る量の間の關係を作る事以外にあり得ないと言ふ認識論の根本法則を應用する事を知つてゐた．古典的な空間及び時間の觀念に從へば，或る一つの質點の『運動』と言ふものは，其の直角座標 $x\,y$ 及び z を時間 t の函數として表はす事に依つて數學的に叙述する事の出來る一つの『軌道』に於てより外には考へられない．然しながら此の考へは（何かアペリオディシユな思考必然性と言ふやうなものではなく却つて）單に長い間のなれきつた經驗の收獲にすぎない．そして此等の經驗は『質點』に關して居るのであつて，其の質點の物質を荷ふ所のものは，吾人はそれを其の軌道に沿ふて見たり測つたり追跡したりする事が出來る位充分に大きいものである．此の『質點』が，『軌道』を見る事も出來なければ又何か

物指で測る事も出來ないやうな原子内に於ける電子であるやうな場合にも，尙ほ此の考へ方が矢張り用ひられると言ふ假定には，何等これを正しいとする所のものはないのである．故に原子の内部の電子の『運動』に關しては，古典的理論の意味に於ては一般に何等言ふ事は出來ない．そして，此の言葉を此處に全くさけやうとも或は又その意味を何か定義的に，原子の内部の出來事に關して――これは實際古典的な『運動』にはいつでも密接な類似性を有するのであるが――利用出來るやうに擴張しやうとも，それは言はゞ單に銘名法の問題に過ぎないのである．原子の内部の出來事に於ける測定する事の出來る量と言ふのは時間的に變化する場所を示す坐標ではなくて，原子の狀態のエネルギーであるとか，振動數であるとか推移の確率と言ふやうな量である．此等の測定する事の出來る量の間に，理論は數量的な關係を作らねばならぬのであつて，此等の關係は勿論數學的に式を作る事に依つて確立する事が出來るものである．此れ等の數學的な數式編成が吾々の古典的理論の習慣にとらはれた見方に直ちに明らかに了解出來ると言ふやうな事は到底望む事は出來ないのであるが，然しながら，吾々の見解はかゝる數學的編成に於て，恰も古典的な理論に於けると同じ位によく慣らされたものである事は疑いない事である．

週期的運動を有する或る體系に關する古典的力學の運動方程式

$$m\ddot{q} = \text{力}$$

は，之を，計算すべき坐標をはじめから時間に關するフリエの級數として置き，その振動數とフリエの係數とを未知數と置くと言うやうなやり方で解かんと試みる事が出來る．そうすると運動方程式は，此れ等の無限に澤山の未知數に對する無限に澤山な方程式の一系を與える．實際に於ては此の方法は簡單な場合にしかなし遂げる事は出來ない．然しながら偶々振動數とフリエ係數に對しては其の量子論的な類推を知つてゐるので，これ等は運動學及び力學の量子論的な一般化に對する自然的な出發點を與えるものである．

此の關係を簡單な例に就いて一層精密に追究する事は，議論を判りやすくするだらうと思ふ．今次の樣な運動方程式を有するアンハルモニツシユ

な振動器を考へて見やう．即ち

$$m\ddot{q}=-q-\lambda q^2 \quad (\lambda \ll 1)$$

扨て，坐標 q を，先づ未知なフリエ係數と未知の週期を有するやうな時間に關するフリエ級數に等しいと置くならば，加速度の $\ddot{q}$ に對しても必然的に一つの週期的な函數を得る．而もその函數は q のフリエ係數から直ちに誘導する事が出來るやうなフエリ係數を有してゐる．q^2 も又同樣に時間の週期的函數となるが，これも直ちに q の係數から計算出來るハルモニッシユなコムポネンテンを有してゐる．吾々の運動方程式は斯くの如くしてフリエ級數等しい事の零と言ふやうな形を得る，そして此の方程式は未知の振動數と未知のフリエ係數に對する無限に澤山の方程式にわかれる．實際零に等しいフリエ級數 $m\ddot{q}+q+\lambda q^2=0$ に於ては各個の係數は零に等しくなければならぬからである．

量子力學では吾人は前に述べた事に依つて坐標 q のかわりに量子力學的な振動振幅の一系を有する．q と振動する電子の電荷 e とを乘ずると，吾人は eq に於て正にシステムの振動する電氣的モーメントを得る．

原子の量子狀態を何か或る順序に從つて 0, 1, 2, 3……と言ふ風に番號づけると，此の狀態の各一對 n, m に對して或る推移の振幅（Übergangsamplitude）が存在する．そうすると吾人は q に屬する量子力學的振動の全體系を次の樣な平方的な法式（quadratisches Schema）に依つて表はす事が出來る．即ち

$$q=\left\{\begin{matrix} q(00) & q(01)e^{2\pi i\nu(01)t} & q(02)e^{2\pi i\nu(02)t} & \cdots\cdots \\ q(10)e^{2\pi i\nu(10)t} & q(11) & q(12)e^{2\pi i\nu(12)t} & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\}$$

數學者の通用語に從ふとかかる法式は『マトリツクス』(Matrix) と名づけられる所のものである．玆に於て $\nu(nm)$ と言ふ量は量子力學的の振動數で，從つて Bohr の振動數條件に從つて $h\nu(nm)=W_n-W_m$ に依つて與えられる．虛數の指數函數は此れ等の振動數の純粹な調和振動である事を示す．各振動に一つの振幅 q(nm) が屬する．而も此の振幅は狀態 n 及び

m の間をあちこちこ飛び渡る量子飛躍に屬する所のものである．又振幅 q(mn) も同様此の量子飛躍に屬する．q(nm) こ q(mn) こは互に共軛な複素數であるこ假定せねばならない．卽ち此の事は，直ちに了解出來るやうに，システムの坐標は時間の實函數であるこ言ふ古典的理論に於ける自明な假定の自然的な量子力學的一般化である．最後にマトリックスの要素 q(00) q(11)……に關しては，此れ等はシステムの推移こ結び付いたものでない事は明らかで，寧ろ一つ一つの狀態こ關連したものである．卽ち，q(nn) はシステムが第 n 番目の狀態に在るこ言ふ樣な場合に對する電氣的モーメントの時間的な平均値を意味する．

扨て今や，加速度 $\ddot{q}$ の量子論的な調和コムポーネンテンを如何にして q の調和コムポーネンテンから得るかこ言ふ事を論ぜねばならないが，勿論之は全く簡單に時間に關して微分する事に依て得られる．此の事を説明するには一次の微分係數 $\dot{q}$ を考察すれば充分である．$\dot{q}$ のマトリックス要素は

$$2\pi i\nu(nm)q(nm)e^{2\pi i\nu(nm}$$

に依つて與えられる．然しながら最後にぶつつかる問題は如何なるマトリックスで古典的な量 q^2 が量子力學的に類推されるかこ言ふ事である．q のマトリックス要素から q^2 のマトリックス要素を計算する法則は，勿論玆處でも又，吾々が古典的な運動學に於て坐標の二乘 q^2 のフリエ係數を q のフリエ係數から決定する法則こ出來るだけ密接な對應的な類似を有するやうにしなければならない．玆に於て正しい量子論的な一般化は如何なるものであるかを Heisenberg は知つてゐた：卽ち q^2 は q から數學者によく知られてゐるマトリックスの乘法に從つて作られる．此のマトリック乘法は量子力學に於ては全く一般的に普通の乘法の古典的理論に於ける役目を演ずる．（而も玆に注意すべきは Heisenberg は，それがマトリックスの乘法こ一致するこ言ふ事を知らずに量子力學的な量の乘法の法則を與えたのであつた．而も此の兩乘法が一致して居るこ言ふ事が q の調和コムポーネンテンの平方的法式をちぢめてマトリックスこして示すやうに到らしめたのである）．

以上得た決定によつて實際，運動方程式 $m\ddot{q}+q+\lambda q^2=0$ は量子力學に

飜案する事が出來るに到つた．三つの項の和を與えるマトリツクスは勿論三ツのマトリツクスの相對應する要素を相加え合せる事に依つて得られる．そして斯くの加くして作られたマトリツクスが零に等しいこ言ふ事は其の要素の各々が零にならねばならぬこ言ふ事を意味する．勿論，かくの如くして作つた運動方程式は q を一義的に決定するには充分ではない．Heisenberg は更に力學的な基礎方程式こして前に述べた Thomas 及び Kuhn の公式を關與せしめた．Heisenberg が此れらの見地からして研究した二三の簡單なる例に於て，彼は此れ等の數學的編成は實際合理的な結果に導く，即ちエネルギー法則及び振動數條件の妥當性及び Kramers の分散論に關連した公式この一致に導くこ言ふ事を或る場合には證明し，又或る場合には確からしくした．

3. 量子力學のマトリツクス論

Heisenberg に依つて略述された根據に基く系統立つた理論の展開及び，此の理論がエネルギー法則こ Bohr の振動數條件この一般的妥當性並びに Kramers の分散論（及びそれに關連した諸公式）に導くこ言ふ事の證明は Born 及び Jordan, Dirac, Born 及び Heisenberg 及び Jordan の研究によつてなし遂げられた．

先づ前こ同樣唯一つの自由度を有するシステムを考へる．其の坐標 q は——古典的理論で言ふこ——時間の週期的函數であるが，量子論では一つのマトリツクスに依つて表はされる．

運動方程式は量子力學的に引き移す爲めには所謂カノニツシユな形に書かねばならない：即ち

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q};$$

q に共軛な力積 p は勿論同樣にマトリツクスこして表はされる．エネルギー函數 H=H(p,q) は p こ q この積や和に依つて表はされるのであるが此の際乘積は Heisenberg の根本乘法則に依つて定義される事は言ふ迄もない．然しながら此の表徵的な乘法には普通の數の乘法の場合に全く反省もして見ない程使い古されて居る所謂『コムミユニカーチーフの法則』(Kommunikatives Gesetz) 即ち $pq-qp=0$ は最早あてはまらない．何

回も述べ來りたる Thomas-Kuhn の法則は正に，pq−qp なるマトリックスの對角線にあたる項（卽ち指數 n 及 m が同じい値を取るやうな項）が $\frac{h}{2\pi i}$ に等しいこ言ふ事を言ひ表はすものであるが，此の言ひ表はしが，理論の第二段の基礎方程式をなすものである．尙ほ運動方程式から此の關係を判きりせしめる事が出來る：卽ち，『交換規則』(Vertauschungsregel)

$$pq-qp=\frac{h}{2\pi i}I,$$

が成立する．玆に於て I は所謂單位マトリックス (Einheitsmatrix) を意味するもので，其の對角線に當る要素は皆 1 になつて居り，其の他の要素は悉く零になつてゐるやうなものである．

所謂『衰種した』(entartet) システムは之れを考へない；衰種したシステムこ言ふのは，其のシステムの多くの狀態が相等しいエネルギーを有する，故に $n\neq m$ であるやうな或る振動數 $\nu(nm)$ が零になるこ言ふやうなシステムであるが，かかる衰種システムを論外こすれば，或る一つのマトリックス a 卽ち

$$a=(a(nm)e^{2\pi i\nu(nm)t})$$

の時間に依る導來函數が零であるこ言ふ事，卽ち $\dot{a}=o$ こ言ふ事は，a が一つの『對角線マトリックス』(Diagonalmatrix) 卽ち對角線にあたる要素のみが零でないこ言ふ樣なマトリックスであるこ言ふ事こ全く同意義である．

扨て運動方程式こ量子力學的交換規則こから $\dot{H}=o$ になる事が證明出來る．故にエネルギー法則

$$H=\text{常數}=\text{對角線マトリックス}$$

が成立する．又 Bohr の振動數條件は必然的に

$$h\nu(nm)=H(nn)-H(mm)$$

こなる．

多くの自由度を有するシステムに移る場合には交換規則の一般化の問題が起つて來る．今 f 個の自由度を有するシステムの力積こ坐標こを夫々 p_k, q_k $(k=1,2,\ldots\ldots f)$ こするならば，此等の量のうちの各二つ每に或る交換規則が成立する．それを次の樣に言ひあらはす事が出來る：卽ち二つの異な

つた自由度に屬する二つのカノニツシユな量（坐標と力積）は常に『交換する事が出來る』（卽ち，それ等の乘積は其の因子の順序に無關係である）．各一つ一つの自由度に對してやはり

$$p_k q_k - q_k p_k = \frac{h}{2\pi i} I$$

なる關係が成立する．

多くの自由度を有するシステムの最も簡單なる種類は，各々一つの自由度を有する樣な澤山な互に結びつけられてゐない（ungekoppelt）システムを簡單に一緒にして考へる事に依つて得られる．かくの如きシステムに對しては（かかるシステムを取扱ふには一つの自由度を有するシステムの理論で充分であるが）實際此の『カノニツシユな交換規則』があてはまる事を容易に見る事が出來る．故に，異つた自由度の間に何か結合連鎖（Koppelung）と言ふやうなものが存在する場合にも尙ほ此の交換規則が成り立つと言ふ事は，此等の結合連鎖にもかかわらず，一つ一つの自由度の間には或意味に於て獨立性が保證されてゐると言ふ事を意味するものである．Kramers に依つて注意された事情は此の事と關係を有する：卽ち，非常に高振動數の光が散亂する場合には原子の電子は，一見明らかなる如く，實際的に恰も自由な結合連鎖してゐない電子の如く振舞はねばならぬと言ふのである．Kramers 及び Heisenberg の分散公式をすでにあたえられたものと假定するならば，カノニツシユな交換規則は正に，電子共が實際かかる性質を示すと言ふ事に對する必要にして充分なる條件を表はすものである．

かくの如くして，多くの自由度を有する場合にも，エネルギー則及び振動數條件は運動方程式と交換規則から誘出する事が出來る．然しながら證明は之れを逆にする事が出來る：卽ち，交換規則と H＝ 對角線マトリツクスと言ふ要求から運動方程式は其の結果として生ずる．然しながら此の事からは更に他の結果を引き出す事が出來るのである：卽ち，坐標 q_k とそれに屬する力積 p_k のかわりに，矢張り交換規則を滿足するやうな新しい坐標及び力積 Q_k, P_k を導入するならば，此の新しい Q_k, P_k に對しても又カノニツシユな運動方程式があてはまる．故に古典的理論の使用語にア

ナロギーをこつて言へば，q_k, p_k に對しても Q_k, P_k に對してもカノニツシユな交換規則があてはまるやうな轉換 $q_k, p_k \rightarrow Q_k, P_k$ をカノニツシユな轉換（Kanonische Transoformation）こ名づけるのである．かくの如きカノニツシユな轉換は，若し

$$Q_k = Tq_kT^{-1},\ P_k = Tp_kT^{-1}$$

こ置けば常に得られる；玆に T は何でもよいあるマトリツクスであり，T^{-1} は T に『逆數的』（reziproke）なマトリツクスを意味する：即ち $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ なる關係を有する．此の要旨は理論の展開に對して益々根本的な意味のものであるこ言ふ事が後になつて明らかになつた．

カノニツシユな轉換の第一の應用は擾亂論(Störungstheorie)であつた．此の理論こ言ふのは，極く弱い擾亂力が，亂されない場合の運動がすでに知られて居る樣な一つのシステムに及ぼす影響を研究するものである．此の擾亂論——その方法こ言ふのは原子力學の諸問題を征伐するには必要缺くべからざるものであるが——も又，Kramers の分散公式や更に此れこ關連して，すでに一般量子力學が生れる以前に對應原理的議論に依つて得られた諸公式——特に前に說明したBornの公式——やが事實上量子力學の特別な場合の結論に過ぎないこ言ふ事に對する證明に導き來つたのである．最後に理論的に重要な所のものは，カノニツシユな轉換の上記の數式に關連した量子力學的運動方程式の積分理論こ，數學者に依つて詳細に研究されてゐる所謂無限に澤山の變數からなる二次のフオルメン(quadrasische Formen——もつこ正確に言へばエルミツトの——Hermit——フオルメンの主軸轉換(Hauptachsentransformation)この關係である．此の關係は，量子力學のより深い問題には入るのであるが，後で展開する Schrödinger の理論こ幾重にも接觸點を與えるものである．勿論此の純粹に數學的關係を敍述する事は吾々の此の論文の範圍外である．（荒木俊馬譯）