日月食の頻度について

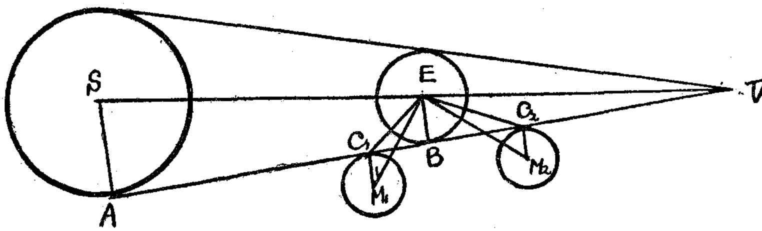
東北帝國大學助教授　理學士
松隈健彦

日月食の限界　日月食がおよそ十八年を週期こしてくりかへすここは遠くカルデヤの昔しより知られて居るここでその週期を Saros こなづける．今日精密なる測定により一サロスは 18年10日7時42分＝658 5,日34 こされて居る．一さろすの間には凡そ 41 回の日食こ 29 回の月食こがあらわれる，今確率の考へを應用してこの一さろす間に日月食のおこる頻度を理論的に考へこれを實際こ比較して見ようこ思ふ．

今　太陽の視半徑＝$H_\odot$　　太陽の視差＝$\pi_\odot$

　　月の視半徑＝$H_☾$　　月の視差＝$\pi_☾$

こし圖に於て S を太陽 E を地球こし，M_1 は將に日食の始まらん（又は終らん）こする時の月の位置，M_2 は將に月食の初らん（又は終らん）こする時の月の位置こする．



しからば　$S\hat{E}A = H_\odot$　　　$B\hat{A}E = \pi_\odot$

　　$C_1\hat{E}M_1 = C_2\hat{E}M_2 = H_☾$　　　$B\hat{C_1}E = B\hat{C_2}E = \pi_☾$

こなるのである．

次に　$M_1ES = D_\odot$，$M_2\hat{E}V = D_☾$　　こして $D_\odot$，$D_☾$ の値を求める．

$\triangle AVE$　において　$A\hat{V}E = A\hat{E}S - B\hat{A}E = H_\odot - \pi_\odot$

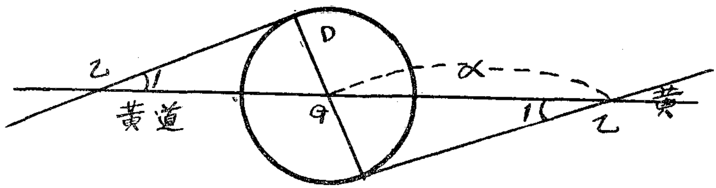
$$\left\{\begin{array}{ll}\triangle C_1EV \text{ において} & C_1\hat{E}S = B\hat{C}_1E + C_1\hat{V}E = \pi_{☾} + (H_{\odot} - \pi_{\odot}) \\ \therefore & D_{\odot} = M_1\widehat{ES} = C_1\hat{E}S + C_1\hat{E}M_1 = (\pi_{☾} + H_{\odot} - \pi_{\odot}) + H_{☾}\end{array}\right.$$

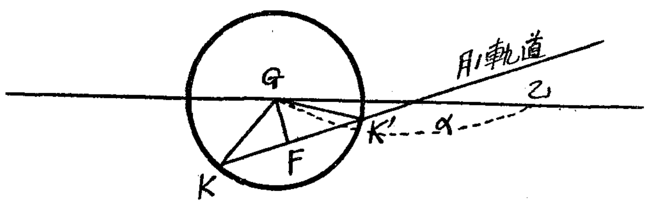
$$\left\{\begin{array}{ll}\triangle C_2EV \text{ において} & C_2\hat{E}V = B\hat{C}_2E - C_2\hat{V}E = \pi_{☾} - (H_{\odot} - \pi_{\odot}) \\ \therefore & D_{☾} = M_2\hat{E}V = C_1\hat{E}V + C_1\hat{E}M_1 = (\pi_{☾} - H_{\odot} + \pi_{\odot}) + H_{☾}\end{array}\right.$$

即ち
$$D_{\odot} = (\pi_{☾} + H_{\odot} - \pi_{\odot}) + H_{☾} = (\pi_{☾} + H_{☾}) + (H_{\odot} - \pi_{\odot})$$
$$D_{☾} = (\pi_{☾} - H_{\odot} + \pi_{\odot}) + H_{☾} = (\pi_{☾} + H_{☾}) - (H_{\odot} - \pi_{\odot})$$

月の中心こ太陽の中心この角距離が $D_{\odot}$ より小なる時は日食を生じその角距離の補角（即ち地球の影の中心こ月の中心この角距離）が $D_{☾}$ より小なる時は月食を生ずる.

さて日食の場合には ES を延長し月食の場合には EV を延長して各天球こ交はる點を G こす，しからば G は言ふまでもなく黄道の上にある，今圖に示すように G を中心こし $D_{\odot}$ 又は $D_{☾}$（以後日月食を區別する必要なき時は簡單に D を用ふる）を半徑こして小圓を考へる，この小圓に接し且つ黄道こ I なる角（I は月の軌道の黄道に對する傾角こす）をなす大





圓が黄道をきる點を L, L′ こするしからば月の軌道の昇交點又は降交點が LL′ の間にある事は食なる現象の起るための必要條件である.

今 GL$=\alpha$ こすれば球面三角の公式

$$\sin\alpha = \sin D \operatorname{cosec} I$$

によつて α を計算するこミができる．

月の運動と常數　月の運動は非常にこみいつて居る，その地球からの距離その軌道の傾角なごたへずかわつて居る，從つて今まで計算に出て來た $\pi_☾$，$H_☾$，D, I, α なごは決して常數ではなく食の起る毎にちがつた値をもつて居る．しかし私は今こゝで問題を簡單にするために．月は地球のまわりに等速圓運動をするものミし，その軌道の傾角も一定であるミ考へる．現在の研究即ち日月食を統計的に研究するミいふ場合に於ては，月の運動を上のように假定する事は大して誤りではない事ミ思はれる．

月の運動を上のように假定するミいふ事は $\pi_☾$，$H_☾$，I にその平均値をミるミいふ事である，吾等は尙その上に，太陽も亦地球のまわりに圓運動をするものミ假定する，即ち $\pi_{\odot}$, $H_{\odot}$ も亦その平均値をミるここにする，しかるミきは

$$\left.\begin{aligned} \pi_☾ &= 57'\ 3'' \\ H_☾ &= 15\ \ 33 \\ \pi_{\odot} &= \ \ \ \ \ \ 9 \\ H_{\odot} &= 16\ \ \ 1 \end{aligned}\right\}\text{（平均値）}$$

	日食	月食
D=	$88'\ 28''$	$56'\ 44''$
α=	$16^\circ 40'.3$	$10^\circ\ 3.'2$

確率P　今月がその軌道を運行する間に食の起る確率 P を考へる，月の軌道の昇交點又は降交點が G より θ ミ $\theta+d\theta$ ミの間にある確率は $\dfrac{d\theta}{2\pi}$ である，次に上の條件が滿足せられたる時に實際食が起る Probability は $\dfrac{KK'}{2\pi}$ である，故に今圖に示すように $GF=\gamma$, $KK'=2\beta$ ミすれば

$$dP=\frac{d\theta}{2\pi}\ \frac{2\beta}{2\pi}$$

從つて P を求めるには是を積分すべきであるがその際昇交點ミ降交點に於て同じ事情が起る事を考へに入れる時は

$$P=2\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2\beta}{2\pi}\ \frac{d\theta}{2\pi}=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\alpha}\beta d\theta$$

こゝに β ハ θ の函數にして次の如き關係によつて與へらるべきものである．

$$\sin\gamma=\sin I\sin\theta \qquad \cos\beta=\frac{\cos D}{\cos\gamma}$$
$$\sin D=\sin I\sin\alpha$$

上の式が示すように P は D と α のみの函數である，その値を求めるには D と α とが小なる事を利用してその無限級數に展開すればよいのである，讀者の煩累を慮つてその結果を最初にあぐれば

$$P=\frac{\sin D\sin\alpha}{2\pi}K$$

$$K=K_0+K_1\sin^2D+K_2\sin^4D+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_0=1+\frac{1}{8}\sin^2\alpha+\frac{3}{64}\sin^4\alpha+\frac{25}{32\times32}\sin^6\alpha+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{24}\sin^2\alpha+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

この計算の要點だけをかゝげる，

$$\cos\beta\cos\gamma=\cos D$$ を自乘すれば

$$(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2\gamma)=1-\sin^2D$$

是より $$\sin^2\beta=\frac{\sin^2D-\sin^2I\sin^2\theta}{1-\sin^2I\sin^2\theta} \qquad \sin\beta=\frac{\sin D\sqrt{1-\dfrac{\sin^2D}{1-\sin^2\alpha}}}{\sqrt{1-\sin^2I\sin^2\theta}}$$ ヲ得

こゝに $\sin\theta=\sin\alpha\sin\phi$ とおいて變數を θ より φ に變ずれば

$$\sin\beta=\sin D\cos\phi\left\{1+\frac{1}{2}\sin^2D\sin^2\phi+\frac{1.3}{2.4}\sin^4D\sin^4\phi+\cdots\cdots\right\}$$

今 $$\beta=\sin\beta+\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\sin^3\beta+\frac{1.3}{2.4}\ \frac{1}{5}\sin^5\beta+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

なる公式の右邊に上の sinβ を代入すれば

$$\beta=\sin D\cos\phi\left\{1+\frac{2}{1}\sin^2D\sin^2\phi+\frac{1.3}{2.4}\sin^4D\sin^4\phi+\cdots\cdots\cdots\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\sin^2D\cos^2\phi\left\{1+\frac{3}{2}\sin^2D\sin^2\phi\cdots\cdots\cdots\right\}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=R\sin D\cos\phi$$

但し　　$R=\left(1+\frac{1}{6}\sin^2 D+\cdots\cdots\right)+\sin^2\phi\left(\frac{1}{3}\sin D+\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots$

又　$\sin\theta=\sin\alpha\sin\phi$　ヨリ　　$d\theta=\frac{\sin\alpha\cos\phi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\phi}}d\phi$

是等の値を P に代入する時は

$$P=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\alpha}\beta d\theta=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin D\cos\phi\frac{\sin\alpha\sin\phi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\phi}}d\phi$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sin D\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R\cos^2\phi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\phi}}d\phi$$

さて

$$\frac{\cos^2\phi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\phi}}=(1-\sin^2\phi)\left\{1+\frac{1}{2}\sin^2\alpha\sin^2\phi+\frac{1.3}{2.4}\sin^4\alpha\sin^4\phi\right.$$
$$\left.+\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\alpha\sin^6\phi+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

R の値は上に與へた通り

$$R=\left(1+\frac{1}{6}\sin^2 D\right)+\frac{1}{3}\sin^2 D\sin^2\phi$$

實際計算をやつて見れば $\sin^4 D$ 以下は全く無視してよろしい事がわかるのである.

この二つをかけ合はして

$$\frac{R\cos^2\phi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\phi}}=a_0-a_2\sin^2\phi-a_4\sin^4\phi-a_6\sin^6\phi-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_8=1\qquad\qquad +\frac{1}{6}\sin^2 D$$

$$a_2=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)\qquad -\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)\sin^2 D$$

$$a_4=\left(\frac{1}{2}\sin^2\alpha-\frac{1.3}{2.4}\sin^4\alpha\right)\qquad +\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\sin^2\alpha\right)\sin^2 D$$

$$a_6=\left(\frac{1.3}{2.4}\sin^4\alpha-\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\alpha\right)\qquad +\frac{1}{6}\sin^2\alpha\sin^2 D$$

故にこれを積分すれば Wallis の公式によつて

$$P=\frac{1}{\pi^2}\sin D\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{a_0-a_2\sin^2\phi-a_4\sin^4\phi-{}_6\sin^6\phi-\cdots\right\}d\phi$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sin D\cos\alpha\times\frac{\pi}{2}\ \frac{K}{2}$$

但し $\frac{K}{2}=a_0-\frac{1}{2}a_2-\frac{1.3}{2.4}a_4-\frac{1.3.5}{2.4.6}a_4-\cdots\cdots\cdots\cdots$

この $\frac{1}{2}K$ を實際計算すれば

$$\frac{1}{3}K=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\sin^2\alpha+\frac{3}{2.64}\sin^4\alpha+\frac{25}{2.32.32}\sin^6\alpha+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{3}{24}+\frac{1}{2.24}\sin^2\alpha+\cdots\cdots\right)\sin^2D$$

故に $P=\frac{\sin D\sin\alpha}{2\pi}K$

$$K=1+\frac{1}{8}\sin^2\alpha+\frac{3}{64}\sin^4\alpha+\frac{25}{32.32}\sin^6\alpha+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{3}{12}+\frac{1}{24}\sin^2\alpha+\cdots\cdots\right)\sin_1D$$

是れ前にあげた結果である．

P の意味 かようにして求められたる P はいかなる意味を有して居るかを考へて見る．今 t なる時間に n 回の食があつたとする，その各食の繼續時間を T_i とすれば

$$P=\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}T_i}{t}$$

となるべき筈である，實際にしらべる場合に於ては t を ∞ にする事はできないが幸ひに前にのべた通り Saros と言ふ週期があるから

$$P=\frac{T_t(\text{さろす間に起る凡ての食の繼續時間の總和})}{t_t(\text{さろすの長さ})}$$

又は $T_s=P\times t_t$

とおいてよいのである．

日月食の頻度 前にのべた通りさろすの間におよそ 41 回の日食と 29 回の月食とがあるがこの數を同じような考へで出して見よう，今

N_s＝求める數卽ちさろすの間における日月食の數

β_0＝前に與へた β の平均値

T_0＝日月食の繼續時間の平均値

n ＝月の平均角速度

とすれば

$$\beta_0=\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\beta d\theta}{2\alpha}=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\beta d\theta.$$

$$T_0=\frac{2\beta_0}{n}=\frac{2}{n\alpha}\int_0^{\alpha}\beta d\theta$$

なる關係がある，次に前と同じく t_s をさろすの長さ T_s をさろすの間における食の繼續時間の總和とすれば

$$T_s=N_sT_0$$

であり又　$T_s=Pt_s$

であらねばならぬ.

故に　$N_sT_0=Pt_s$

$$N_s\times\frac{2}{n\alpha}\int_0^{\alpha}\beta d\theta=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\alpha}\beta d\theta\times t_s$$

即ち　$N_s=\frac{n\alpha t_s}{\pi^2}=\frac{\alpha}{\pi}\ \frac{nt_s}{\pi}$

月は29.5306日の間に地球を一周し又 $t_s=6585.34$日 であるから

$$N_s=\frac{\alpha}{\pi}\times\frac{1}{\pi}\ \frac{2\pi}{29.5306}\times6585.34=\frac{\alpha}{\pi}\ \frac{2\times6585.34}{29.5306}$$

次に α を角の度の數であらはせば

$$N_s=\alpha^\circ\times\frac{2\times6585.34}{180\times29.506}=[0.09408]\alpha^\circ$$

となる，是れ求める日月食の數である．この結果を見れば N_s は α のみに比例することが知られる．

理論の値と實際の値　今計算と實際の値とを比較するにかなりよく合つて居るのである．

〔計算〕

	日　食	月　食
D	88′28″	56′44″
α	16°40′.3	10°36′.2
$\sin\alpha$	0.08231	0.03385
sinD	66	27
K	1.01079	1.00436

logsinD	8.4105	8.2175
logsinα	9.4577	9.2648
logK	0.0047	0.0019
log2π	0.7682	0.7982
logP	7.0747	6.6860
P	0.001188	0.000485
α	16°.67	10°.60
logα	1.2219	1.0253
$\log N_s$	1.6160	1.4194
N_s	4.130	26.27

【實際の値】 1884年3月26日の日食こ1902年 4 月8日の日食こが互に相對應するものこしその間に含まれたる凡ての日月食の繼續時間をいぎりすの Nautical Almanac より取り出だしその總和を求めて T_s/t_s を得る事次の通りである.

	日 食	月 食
T_s	193.時36	79.時20
t_s	157929 時	157928 時
$\frac{T_s}{t_s}$	0.001224	0.000501

上の計算により實際こ計算この値を比較すれば次の通りである.

	日食 實際	日食 計算	月食 實際	月食 計算
P	0,001224	0.001188	0.00501	0.00085
差の百分比	3.0%		3.2%	
N_s	41回	41.3	29回	26.3

古い日月食の統計 上の結果を見ればP計算の値が實際の値よりも凡そ3%だ小さく又 N_s は日食においてはよく一致するが月食にては計算の値がかなり實際の値よりも小さい，しかしかようなる種類の問題こしてはこの兩者はまづ大體に於て一致して居るべきであらう.

この兩者の値の不一致は何より來るかこいへば一つには理論の不完全より來り一つには材料の不足より來るのである.

理論の不完全といふのは前にのべた通り月の運動は非常にこみいつて居り太陽も亦楕圓運動をなして居るにかゝわらずこの兩者はどちらも圓運動をなせるものと假定したゝめである，このこみいつた運動の不整の中その一部分はPを求めるる現在の計算に取り入れることができるけれども（その計算は餘りに專門的になるから省く）その凡ての不整をとりいれることは恐らく不可能であらうと思ふ.

材料の不足と言ふのは前に與へたT_sの値は1884年より1902年までのさろすについてゞある，しかしながらサロスの異なるによつてT_sその他の値が多少異なるは言ふまでもなく現在吾々のえらんだサロスは或はこの問題のためには非常にわるい材料を提供して居るかも知れぬのである，是をさける爲めには非常に長い期間に亙つて調査しそれから材料を得る事が必要である．是を研究するにはOppolezerの Canon der Finsternisse(1897年)の右に出づるものはない，この書物はオツポルツアが畢生の精力を盡し紀元前年1202頃から紀元後2150年頃まで3400年間に亙つて凡ての日月食についてその「食の要素」を計算して表にしたものである，その中には日食が8000回月食が5150回含まれて居る，月食に依てはその繼續時間がそのまゝ要素としてあげられて居るから單にそれを加へ合すればよろしいが日食に於ては繼續時間は直接あげられて居ないと他の要表から計算する必要がある，勿論個々の日食について繼續時間を出すことは大した勞力ではないが8000回に亙つて計算を行ふには相當の時間と忍耐とを要する，私には只今その時間もなく忍耐も持合せがないのでこのまゝこゝに掲げた次第である.

この問題は私がまだ學生時代につゝいたまゝ十年間机の中にしまつてあつたが最近ある機會を得て理論の不完全なる處をなほし又新しき研究を加へてこゝにかゝぐる次第である

（東京物理學校雜誌第384號より）