1-1

電磁界内に於ける導体の諸作用

特にその遮蔽効果に関する理論的研究

電氣試験所技師

茂木 晃

THEORETICAL RESEARCHES ON SOME EFFECTS OF A CONDUCTING BODY IN THE ELECTROMAGNETIC-FIELD WITH SPECIAL REFERENCE TO ITS SHIELDING-EFFECT

Summary

In this report the author has made some theoretical researches about the shielding effects of a shielding conductor in a electromagnetic field as one of the means to prevent the inductive interferences. There are many means, of course, to prevent these inductive interferences, and these means must be different as the natures of interferences are different. But, common to these, one of the most prominent features is the increase of frequencies to be considered.

Fromerly, in the problems of inductive interference the frequencies concerned are mainly from 50 to 100 cycles. For instance, the frequency of inductive power lines to the neibouring telephone and telegraph lines is 50 or 60 cycles, and to prevent these interferences we use the following means, namely, at the side of power lines:

1) to transpose the transmission line,
2) to cut off the fault line by a quick response relay as the zero phase currents flowing through the fault point give a serious interference,
3) to separate both power and communication lines as wide as possible,

and at the side of communication lines:

1) to equip arresters or cut out fuses,
2) to neutralise the disturbing waves by some devices.
3) to improve the balacing of communication lines, or include them in a cable to screening off the external disturbing fields.

After that, as the D.C. sources of electrochemical industries the mercury arc rectifiers of large capacities are established in many places of this country. By the reaction of these rectifiers, a sequence of high harmonics currents flows backward to the power lines feeding to the rectifiers, and these harmonic currents have made serious disturbances to the neibouring carrier current telephone lines. The frequency range of their inductions are about 250-2,000 cycles. The sensitivity of humann ears is very large in this range, and accordingly the degree of interferences are naturally very serious.

After War, rectifier of large capacities for industrial use are replaced by them for the electric railway use. On the other hand, the development of the television has made to necessary to transmit the signals of wide frequency ranges without any distortions. And, for this purpose coaxial cables or other new transmission modes have become to use. In future, inductive interference of these cir-

cuits must become the subject of research. For the treatment of these problems we can not use the old "circuit theory" and must start from Maxwell's fundamental field equations directly. Indeed in this report the author has taken these equations as the starting point.

In this report we assume the following suppositions; i.e.

1) We neglect the displacement currents in conductors or in space.
2) The wave equations must be separable with respect to its variables.

This report are composed of ten chapters.

In Chapter I, the author states the outlines of the researches about the problems of inductive interference made formerly, and points out the problems which must be investigated, and also outlined the author's researches briefly.

In Chapter II and III the theory of interaction of a linear current source and the thin cylindrical conductor parallel to it are given. Fundamental field equations in cylindrical coordinates and solutions for these in-or outside of shielding conductor due to the two or four parallel electric or magnetic current filaments of infinite length are given. On this basis the actual electric and magnetic lines of forces inside the perfect conducting hollow cylinders are drawn. (Fig. 2.7-2.27).

In Chapter III the effects of small deformation of the shape of a shielding conductor from the circular cylinder are discussed. The author employed the elliptic cylinder coordinates and solved the wave equations in this coordinates. To attain the result it was found necessary to solve the Mathieu equations, which is not yet throughly tabulated for permitting the numerical calculations. The author has calculated the necessary tables new, and discussed the effects of deformation throughly.

In Chapter IV, the various effects of a shell of spherical, prolate spheroidal and oblate spheroidal form in the electromagnetic field produced by a loop current coil are investigated. In practice, this problem is correspond to the effects of screening box in the electromagnetic field. The author has calculated the spherical functions of pure imaginary argument and has worked out the calculations of the field concretely. The solutions of wave equations in spheroidal coordinates are also given.

Chapter V is concerned to the treatment of the multiplex shielding from the circuit theoretical point of view. The analogy between these two methods are remarkable by using the potential and stream functions in the field theory, and comparing these to the voltages and currents of transmission lines.

The following two chapters contains investigations of the electromagnetic reactions of thin cylindrical or plane conductors in the field produced by the currents in a loop coil.

Chapter VIII dealts with the fields due to the current in twisted wires. The effects of twisting are considered by use of vector and scalar potentials. Asymptotic expansions of modified Bessel functions are obtained by using the method of steepest descent. By using these approximate expressions the calculations must be made very simple.

Finally, in chapter IX, the effects of a slit or slits in a thin cylindrical conductor are considered by using the method of conformal representation, and the effects of a plate of finite breadth are also considered. The source of field is a linear dipole (Dipollinie). The effects of slits are formulated by using the elliptic functions. Comparing the results to these for the case of uniform field obtained by H. Buchholz the correspondence between them are very interesting.

In above nine chapters the form of a conductor is limited to the one which enables us to solve the fundamental field equations. Thus the results obtained are concrete and quantitative. Almost all practically important cases are not beyond this scope. But unfortunately the most simple and important exceptional case, namely the case of screening box of hexahedral shape can not solved by the method of boundary value problems. For this and for general conductors of more complex shape, the experimental data of various effects are hoped.

The author expresses his grateful thanks to Dr. M. Gotô, who has read the manuscript and has given many useful criticisms and suggestions. Mr. T. Suzuki, one of my colleagues, has given every assistance with the drawings and many other works.

The author also expresses his sincere thanks.

A. Mogi.

Electrotechnical Laboratory,
MOC.

May 20, 1948

1-1

電磁界内に於ける導体の諸作用

特にその遮蔽効果に関する理論的研究

電気試験所
茂木 晃

目次

第一章 序説

第一節 誘導問題に関する従来の研究の概要

本報告は誘導障害防止対策への一寄与としての遮蔽体の遮蔽効果に関する理論的研究である。障害防止対策としては勿論色々の方法が考へられるのであつて遮蔽導体のみがその唯一の対策でないことは云ふ迄もない。一体一口に誘導障害と云ふがその障害の本質は決して簡単なものではないのであつて、それぞれの異なつた障害作用に対しては異なつた防止対策を講ずるのが妥当であらう。長年に亘つて問題となつて来た誘導障害の問題の内容に於て最も顕著な変化は考察の対象となる現象の周波数領域の上昇であると思ふ。

従来誘導障害と云ふと大地雷サージによるもの、商用電力線から波及の電信又は電話回線への誘導作用、或は電気鉄道の給電線に起る過渡的擾乱に基く附近の保安用通信線等への誘導作用が殆んどその大部分であつた。これらはその現象の周波数から云ふと過渡振動の周波数等は除外して直流から数百サイクル以下の商用周波数領域である。これらに対する対策としては電力線側では

(1)電力線の撚架を充分にすること

(2)電力線中の残留零相電流又は故障時に発生する地絡零相電流の及ぼす妨害が特に著るしいのにかんがみて継電器によつて速かに故障回路を遮断する。

(3)特に通信線に近接してゐる部分をなるべく引きはなす

等であり、通信側の対策としては

(1)雷サージに対しては避雷器、ヒューズ其他を設ける。

(2)妨害波を中和する装置を設ける

(3)通信回路の平衡度を高め、或は之をケーブル中に収容する事

等が考へられてゐる。

これらと共に理論的な方面に於ては零相電流の大地に於ける分布等が問題になつた。そして無限に拡がつた平らな表面をもつ一様導電性の大地の上方にこれと並行に架せられた極めて細い導線による電磁界の問題が解かれた。我国では上述の如き大地帰路を有する単一導線の誘導作用の算定に、大地に対する導線の影像を用いて大地を代表させる方法が行はれた。この場合大地が完全導体でないため大地面に対する影像をとらないでそれより数百米下方に設定した仮想の大地面に対する影像をとつたのである。この仮想大地面を相当大地面と称した。相当大地面の深さは現象の周波数、大地の導電率等によつて影響されるのであつて、各地に於ける多くの実測値を参考にして実験的に定めた相当大地面の深さを用いて、導線の配置によつて誘導電圧を算定する線図を作り之をK-Mチャートと名付けてゐる。

其後電気化学工業に用ひられる直流電源として大容量の水銀整流器が相ついで設置せらるるに及んで、整流器の整流作用の反作用として整流器の相数に関係のある特定の高調波の一連が整流

器に電力を供給してゐる送電線に逆流し特に系統の固有振動数が逆流高調波の一つと一致すると近傍の通信線路に非常な妨害を与へると云ふ事実が問題となつた。発生高調波の周波数が250～2000サイクル位であるので搬送電話回路の被害は大きく特に1,000サイクル附近の波は受話器で聴いた場合其の聴覚感度が最大であるので量は少なくとも与へる妨害度は極めて大きいと云はねばならない。

戦後上記の如き工業用電源としての大容量整流器の使用は減少したが、これは国鉄の電化に伴つて電鉄用水銀整流器の使用による鉄道保安電話線及び路線に並行する搬送通信線への妨害の問題として再燃してゐる現状である。

一方通信回路の方から云ふとテレビジョンの研究の進展と共に周波数の極めて広い範囲に亘る信号の伝送が問題となり、中空導体又は同軸導体等の新らしい回路が実用される情勢にある。我國では同軸ケーブルによる多重通信は未だ實験の域を出てゐないが将来はこの方面の開拓に全力が傾けられねばならない。同軸ケーブルの対又は群或は同軸ケーブルを中心とし外側を高周波ケーブルで囲んだ複合ケーブルの使用は必然的にこれらの回路間の誘導妨害問題(漏話)を惹起するであらう。製造技術の方面より原因する同軸ケーブルの偏心による外部妨害電磁界による漏話等も問題となるであらう。これらの問題に対しては使用周波数は10^5～10^8サイクル位に及び、従来の所謂〝誘導の理論〟或は〝漏話の理論〟は再検討されねばならない。そして基礎電磁方程式と立脚した新らしい誘導理論が樹てられねばならない。

最近導波管・同軸ケーブル等に関してかゝる問題が次第にとり上げられる様になつたが、誘導又は漏話を主題としたかゝる研究は余り発表されたのを知らない。本報告はかゝる工学的の重要問題解決への理論的方面よりの一寄与である。

第二節　本研究の目的及び内容

筆者が誘導障害防止対策について調査研究を始めたのは昭和14年(1939)であつた。当時漸く水銀整流器に依る誘導問題がやかましく、一方配電線の電圧を3,300Vより6,600Vに引あげるための誘導の増加等の問題が論ぜられてゐた。筆者はこれらの問題を処理するのに従来の相当大地面の理論等は再検討の余地がある事を認め、周波数の広い範囲に亘つて適用される様な計算法を樹立したいと思つてゐた。一方当時大地に電流、主として直流又は低周波の電流であるが、これを流して地下埋設資源を探査する所謂電気探鉱法が漸く実施される様になり、地電流の分布の問題が注目されるに到つた。筆者はこれらの問題を考慮しつつ電磁界の境界値問題について考へて来た。殊に誘導問題に対しては従来のものは所謂回路網としての考方に基くのが大多数で

あつて実際電磁界が如何に分布してゐるかを論じたものは殆んどないことは最も不滿に思ふ所である。更に同軸回路の如きに到ってはこれを從來の回路網理論で論ずる事は妥当でない。同じ回路網理論で論ぜられるとしてもそれはMaxwellの基礎方程式によつてその正当な事を裏づけられてゐなければならない。

筆者は導波管理論、空中線理論等に於ける最近の考方等に刺戟され、誘導の理論殊に導体による電磁界の遮蔽の問題を詳細に考察した。やゝ一般的な取扱ひ方をしたがこれは実際問題としては鉛被の遮蔽作用、高周波装置の遮蔽箱、同軸ケーブルによる漏話、遮蔽板其他に直接関係してゐる。そして遮蔽体の形状の影響、遮蔽体の一部にある間隙の漏洩作用、始原界の影響、遮蔽体中に於ける渦流損失等を論じ尚場の実際の分布を明瞭ならしめるために努めて力線の分布図を計算した。尚理論を具体化するためにいくつかの函数をも新らしく計算した。実際結果が如何に形式的に優雅な形に表現されてゐてもこれが具体的な数値迄導き得ないでは工学的に全く意味がないからである。

第三節 本報告で使用する主なる仮定

ここで報告せんとする主題は前述せる如く電磁界中に於ける導体又は導体系の諸作用殊にその遮蔽作用なのであるが、その考察に当つては二、三の仮定を一貫して用ひてゐる。ここにその主なる仮定を挙げておく。其の他の仮定については個々の場合について説明する。

(1) 変位電流を無視する。或は等価的に電界及び磁界は瞬間的に伝播すると云つてよい。この仮定は考察せんとする導体又は導体系の主要寸法に比して現象の波長が充分長いと見做し得る様な場合にはその誤差は無視し得るものである。我々は上の仮定が成立する様な周波数範囲の現象について考察する。※ 特にケーブルの如き長い導体に於ても我々の考察の対象はその軸長の方向ではなくて軸に直角な断面内で、導体の近傍に於ける電磁界である。從つて導体の断面の主要寸法が波長に比して無視出来る位の周波数範囲の現象を取扱ふ事にする限り上の仮定は矢張り正しいと云へる。特に導体中では導電電流に比して変位電流は相当の高周波域まで無視し得るのであつて、導体中の伝播定数 $k=\sqrt{(\omega^2\epsilon\mu+i\omega\mu\sigma)}$ は充分の正確さで $\sqrt{(i\omega\mu\sigma)}$ と置いて差支ない。

※ 尤もある場合には必要上から変位電流を考慮した部分もある。例へば第三章或は波の伝播現象を伝送回路理論と対比して論じた第五章の如くである。

(2) 考察の対象とした導体或は導体系の形状は波動の方程式或はラプラス方程式が座標の変数について分離可能なものに限つた。これは結果を数値に迄導く必要から生じた事で從つて

種類としては円柱、球、楕円柱、長球及び扁球及びこれの退化したものに限った。実際問題として重要なのは円柱及び球の場合であってこれについては詳細に論じたつもりである。他のものは上の2つが形状に於て多少の変歪を生じた場合その変歪による影響を知るためにのみ必要である。そしてこれらの問題を徹底的に論ずるならば一般の形状の場合も或る程度それより類推し得るであらう。遮蔽体は別として始源場を作るべき直線状、ループコイル状及びラセン状の電流(磁流)路の導体の断面は極めて小さいとし導体間の近接効果は考へてゐない。そして導体断面上に一様に電流(磁流)が分布してゐるものと考へる。その他すべて二次場によって始源電流(磁流)はその分布に影響をうけぬものとする。

第四節　本報告に於ける慣用記号の説明

本報告に於て一貫して使用する慣用記号の意味を以下に表示してある。ここに表示してないものは本文に於て必要に応じて使用してある。

本研究は筆者が電気試験所で後藤以紀博士の指導を受けて行ったものであるので、発表に際しても原稿を読んで戴いた。同氏の有益なる批判と教示と共に感謝に堪へない。尚原稿の調整図面の作製等に関しては鈴木正、渡辺源治の両君に多大の援助をして戴いた。両君の労苦に対し深い敬意と感謝を捧げるものである。

慣用記号表

(註1)

A, A_i	ベクトルポテンシャル及びその i-座標分値	[V·s/m]
B, B_i	磁気誘導及びその i-座標分値	[V·s/m²]
C, C_i	任意のベクトル及びその i-座標分値	
C	電気容量[F]，オイレル定数(=0.57722)	
c	真空中の光速 (=3×10^8)	[m/s]
ce	マシウ函数，WW 404 (註5)	
Ci	余弦積分　JE-78 (註5)	
cn	ヤコビの楕円函数，JE-158 (註5)	
D, D_i	電気誘導及びその i-座標分	[A·s/m²]
D	直径	[m]
$\mathfrak{D}$	双極線状電流源	
dn	ヤコビの楕円函数，JE-158	
ds	曲線sの微小部分で曲線の切線方向を向くベクトル	[m]
E	第二種完全楕円積分，JE-145	
E, E_i	電界の強さ及びその i座標分	[V/m]
Ei	指数積分　JE-78	
F	超幾何級数　WW-281	

$\mathbf{F}, F_i$	任意のベクトルとその i-座標分	
f	周波数($\omega/2\pi$) [1/s] ，　半焦点距離 [m]	
G	グリーン函数	
$\mathbf{H}, H_i$	磁界の強さ及びその i-座標分	[A/m]
$\mathbf{H}_\nu$	スツルブの函数　W-328	
H_ν	第三種円柱函数(ハンケル函数)　JE-192	
h	伝播定数	[1/m]
$h_\nu^{(1)(2)}(z)$	$=\sqrt{\pi/2z}\cdot H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)(2)}(z)$	
h_i	直交曲線座標系の測度係数	
$\mathbf{I}, I_i$	ベクトル電流及びその i 座標分値	[A]
$\mathbf{I}$—, $\mathbf{I}m$—	——の虚数部分	
I_ν	変形されたベッセル函数　W-77	
$\mathbf{i}_i$	i 方向の単位ベクトル	
i	虚数単位　($=\sqrt{-1}$	
$\mathbf{J}, J_i$	電流密度及びその i-分値	[A/m²]
J_ν	第一種円柱函数(ベッセル函数)，JE-92	
$j_\nu(z)$	$=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\cdot J_{\nu+\frac{1}{2}}(z)$	
$\mathbf{K}, K_i$	面電流密度及びその i-分値	[A/m]
K	第一種完全楕円積分　JE-145	
K_ν	変形された円柱函数　W-77	
k	伝播定数，波数($=\sqrt{\omega^2\epsilon\mu+i\omega\mu\sigma}$)	[1/m]
L	自己インダクタンス	[H]
li	対数積分　JE-79	
M	相互インダクタンス [H]，　磁気能率($=SI$)	[A·m²]
$\mathbf{N}$	ポインチングベクトル	[W/m²]
N_ν	第二種円柱函数(ノイマン函数)，JE-192	
$n_\nu(z)$	$=\sqrt{\pi/2z}\cdot N_{\nu+\frac{1}{2}}(z)$	
$\mathbf{n}$	法線ベクトル	
$P, \bar{P}$	電力及び平均電力	[W]
P_n^m	ルヂャンドル函数　JE-173	
Q, q	電荷	[A·s]
Q_n^m	第二種球函数，　JE-175	
R	抵抗	[Ω]
$R, \mathcal{R}$	反射係数	
$\mathbf{R}$—, $\mathbf{Re}$—	——の実数部分	
S	面積	[m²]
$S, \mathfrak{S}$	遮蔽率	
S_n^m	球面調和函数	
s	面比抵抗	[Ω]
se	マシウ函数　WW-404	
si	正弦積分 ($=Si-\pi/2$)，　JE-78	

sn	ヤコビの楕円函数, JE-158	
T, t	時間	[S]
t	薄板の厚み	[m]
u_1, u_2, u_3	直交曲線座標分	
V	電圧, ポテンシャル	[V]
v	媒質中の電磁波の速度 $\{= c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}\}$	[m/s]
v	容積	[m^3]
W	複素函数 $(= U + iV)$	
w	複素数 $(= u + iv)$	
Y	アドミッタンス	[S]
Z, Z_i	ヘルツベクトル及びその i-座標分	[V·m]
Z	インピーダンス	[Ω]
Z_0	空間の固有インピーダンス $(= \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \fallingdotseq 376.7[\Omega])$	
z	複素数 $(= x + iy)$	
α, β	$h = \alpha + i\beta$ 位相定数及び減衰定数	[1/m]
Γ	ガンマ函数 WW-235	
γ	伝播定数 [1/m], $e^C = 1.781070$	
Δ, Δ_{mn}	行列式及びその mn 要素で交る行及び列を除いて出来る小行列式	
δ	浸透深さ。表皮深さ $(= \sqrt{2/\omega\mu\sigma})$	[m]
δ	$= (\omega\mu\sigma t)^{-1}$	[m]
ϵ	誘電率 $(= \epsilon_0 \epsilon_r)$	[F/m = S/(Ωm)]
	ϵ_0は 8.854×10^{-12}[F/m] $\fallingdotseq \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$[F/m], ϵ_rは比誘電率	
Z	$(= Z_n = \Theta'/\Theta)$ ゼータ函数 WW-518	
ζ	複素数 $(= \xi + i\eta)$	
H	イータ函数, WW-479	
Θ, ϑ	テータ函数 WW-462, 479	
Λ	定数	
λ	波長	[m]
μ	誘磁率 $(= \mu_0 \mu_r)$	[H/m = Ωs/m]
	μ_rは比誘磁率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.257 \times 10^{-6}$ [H/m]	
Ξ	角函数	
π	$\fallingdotseq 3.1416$	
ρ	円柱座標分	
σ	導電率	[S/m]
τ	楕円函数の複素周期 $(= iK'/K)$	
Φ	磁束	[V·s]
ϕ	円柱座標分, ポテンシャル	
Ψ, ψ	流れの函数, ポテンシャル	
ω	角周波数 $(= 2\pi f)$	[1/s]
$\bar{z}$	z の共軛複素数 $(= x - iy)$	
C^*, c^*	電気的の量 C, C に対応する磁気的な量, 例へば I^*は磁流, Φ^*は磁気ポテンシャル等々.	

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$　ベクトル$\mathbf{A},\mathbf{B}$のベクトル積
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$　ベクトル$\mathbf{A},\mathbf{B}$のスカラー積
∇　ベクトル演算子 $\left(=\mathbf{i}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{i}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)$
$\nabla^2=\Delta$　ラプラス演算子

註1) 矩形の括弧で囲った記号は単位を表はすものとする。ここに A＝Ampere，Ω＝Ohm，s＝Second，m＝meter，V＝Volt＝A·Ω，S＝Siemens＝1/Ω，F＝Farad＝A·s/V＝S·s，H＝Henry＝Ω·s etc.
註2) 肉太文字は大部分空間ベクトルを表はす。時間因数として $\mathbf{Re}\,\exp(-i\omega t)$ 又は $\mathbf{Im}\,\exp(-i\omega t)$ を用ひるため一般にこれらのベクトル量は複素量である。故にこれらを含む最後の結果に於てその実部又は虚部をとつて始めてその物理的な意味を持つ。而し特に必要でない限りこの称なことはしない。
註3) 時間因数として $\exp(i\omega t)$ の代りに $\exp(-i\omega t)$ を用ひたのは全く便宜上の事である。我々は時間の変化よりも寧ろ場の諸量の時間的の変化を問題としてるから斯くする方が便利の事が多い。かゝる記法ではインピーダンスの複素表示は $R+jX$ でなくて $R-jX$ である。
註4) 本報告では一貫して有理実用単位系(M.K.S.単位系)を用ひてある。
註5) WW-405 は次の意味である。
E.T.Whittaker and G.N.Watson: A Course of Modern Analysis (1920) P.405
同様に
E-78, E.Jahnke und F.Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven (1933), S.78
W-77, G.N.Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions (1922), P.77
等の略符号を用ひた。

第二章　筒状導体による遮蔽作用

第一節　基礎方程式とその解

(1)　ここでは無限に長い線状導体に流れる電流によつて生ずる場をやはり無限長の筒状中空遮蔽体で遮蔽する時の問題につき考へてみる。線状導体系も遮蔽体の断面の形状及びそれの配置に関聯する場の考察の範囲に対して現象の波長が非常に長いものと仮定すると現象を2次元の問題として取扱ふことが出来る。即ち場の諸量の導体軸方向の変化を考慮の外においてもよいことになる。かゝる仮定のもとに於ては Maxwell の基礎方程式は次の2群に分れる。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2H_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1H_1)\right\}=\frac{\partial D_z}{\partial t} \\ &\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3E_z)=-\frac{\partial B_1}{\partial t}, \quad -\frac{1}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3E_z)=-\frac{\partial B_2}{\partial t} \end{aligned}\right\}(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2E_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1E_1)\right\}=-\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ &\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3H_z)=\frac{\partial D_1}{\partial t}, \quad -\frac{1}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3H_z)=\frac{\partial D_2}{\partial t} \end{aligned}\right\}(\mathrm{II})$$

ここに E_i, H_i, D_i 及び B_i は場ベクトルの成分であり u_i は直交曲線座標分, h_i はその測度係数である。($i=1,2,3$)。電磁方程式は漏話の問題として普通取扱はれるのは(I)の場合である。現象の伝送方向は z 軸方向であつてこの方向に磁界分値を欠いてゐる(I)の場合を Schelkunoff は横の磁気波と名付けてゐる。同様に(II)は伝送方向に電界分値の無い波であるから横の電気波と云ふ。

先づ(I)の場合について考へる。場の諸量は時間について $\exp(-i\omega t)$ に従つて変化するとし，$D=\epsilon E$ 及び $B=\mu H$ とおき第2第3式の H_1, H_2 を第1式に代入して E_z を求め得る。座標系は (u_1, u_2, z) で $h_3=1$ である。E_z の代りに E とおきこれを次の様におく

$$E=A_1f_1(u_1,u_2)e^{-i\omega t} \qquad (1)$$

f に対する式は次の如くなる

$$\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)\right\}+k^2f_1=0 \quad \cdots(2)$$

$$k^2=\omega^2\epsilon\mu$$

E が求まれば之より H_1, H_2 は次の如く与へられる

$$H_1=\frac{A_1}{i\omega\mu}\cdot\frac{1}{h_2}\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\cdot e^{-i\omega t}, \quad H_2=-\frac{A_1}{i\omega\mu}\cdot\frac{1}{h_1}\frac{\partial f_1}{\partial u_1}e^{-i\omega t} \quad \cdots(3)$$

次に伝送方向と直角な2つの座標方向のインピーダンスを $Z_1^{(m)}$ 及び $Z_2^{(m)}$ とし之を次の如く定義する

$$\left.\begin{aligned} \frac{E}{H_1} &\equiv Z_2^{(m)} = i\omega h_2 \mu f_1 \Big/ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{E}{H_2} &\equiv -Z_1^{(m)} = -i\omega\mu h_1 f_1 \Big/ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

これらは遮蔽作用の考察に当つては重要なる量である。

(II)の場合は名称は妥当ではないが普通静電誘導と呼ばれてゐる現象を記述してゐる方程式であつて(I)と殆んど同じ様に取扱ふ事が出来る。即ち伝送方向の磁界をHとすると

$$H = A_2 \cdot f_2(u_1, u_2) \cdot e^{-i\omega t} \qquad (5)$$

でありf_2は次式を満足する

$$\frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)\right\} + k^2 f_2 = 0 \;,\; k^2 = \omega^2 \epsilon\mu \quad \cdots(6)$$

これより電界E_1及E_2は次の如くなる。

$$E_1 = -\frac{A_2}{i\omega\epsilon}\cdot\frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\cdot e^{-i\omega t} \;,\; E_2 = \frac{A_2}{i\omega\epsilon}\cdot\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\cdot e^{-i\omega t} \quad \cdots(7)$$

又(4)に対応するインピーダンスは次の如くである。

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_1}{H} &= -Z_2^{(e)} = -\frac{1}{i\omega\epsilon}\cdot\frac{1}{h_2 f_2}\frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{E_2}{H} &= Z_1^{(e)} = \frac{1}{i\omega\epsilon}\frac{1}{h_1 f_2}\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

(2)と(6)は同じ微分方程式であつてf_1とf_2は区別して書いたが同じものであるとすると(4)と(8)より次の重要な関係式が得られる。

$$Z_1^{(e)} Z_1^{(m)} = Z_2^{(e)} Z_2^{(m)} = \mu/\epsilon = Z_0^2 \qquad (9)$$

Z_0は電気的性質がμ, ϵなる空間の固有インピーダンスであつて真空中では大体377[Ω]である。(9)式は横の電気波に対するインピーダンスと横の磁気波に対するインピーダンスとの積が1及び2なる座標軸方向に於て相等しく共に空間の固有インピーダンスの自乗に等しいことを示してゐる。

第2・1図

前項の結果を楕円壔座標系に適用して見る。

例1. 扁楕円壔座標系(第2・1図)

z軸に垂直な平面内に於て直角座標(x, y)を次の関係によつて$u_1 =$一定, $u_2 =$一定なる2つの直交曲線群に移す。

$$x + iy = f_1 \sinh(u_1 + iu_2)$$

更に

$$\cos u_2 = \xi \quad,\quad \sinh u_1 = \zeta$$

によつて(ξ, ζ)に変換すると

$$y = f_1 \cosh u_1 \cdot \sin u_2 = f_1\sqrt{(1+\zeta^2)(1-\xi^2)}$$
$$x = f_1 \sinh u_1 \cdot \cos u_2 = f_1 \cdot \xi \cdot \zeta$$

であつて

$$\frac{y^2}{f_1^2(1+\zeta^2)} + \frac{x^2}{f_1^2 \zeta^2} = 1 \quad \text{及び} \quad \frac{y^2}{f_1^2(1-\xi^2)} - \frac{x^2}{f_1^2 \xi^2} = 1$$

が成立する。変数の変化範囲*は

*場合によつては $0 \leq \xi \leq 1$, $-\infty < \zeta < \infty$ とる事もある。これに対応しu_1, u_2の変化範囲は $-\infty \leq u_1 \leq \infty$, $-\pi/2 \leq u_2 \leq \pi/2$ である。

$$-1 \leq \xi \leq +1, \quad 0 \leq \zeta < \infty \quad \text{即ち}\ 0 \leq u_1 < \infty,\ 0 \leq u_2 < 2\pi$$

である。測度係数は次の如くである。

$$h_\xi = f_1 \left(\frac{\xi^2+\zeta^2}{1-\xi^2} \right)^{1/2}, \quad h_\zeta = f_1 \left(\frac{\xi^2+\zeta^2}{1+\zeta^2} \right)^{1/2}, \ h_z = 1$$

場の諸量がZ座標分に無関係だとするとMaxwellの基礎式は

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\zeta H_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi H_\xi) \right\} = J_z + \frac{\partial}{\partial t} D_z \\ & \frac{1}{h_\zeta} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \zeta} + \frac{\partial B_\xi}{\partial t} = 0 , \quad - \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{\partial B_\zeta}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} (\mathrm{I})$$

及び

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\zeta E_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi E_\xi) \right\} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ & \frac{1}{h_\zeta} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \zeta} - \frac{\partial D_\xi}{\partial t} = J_\xi , \quad - \frac{1}{h_\xi} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \xi} - \frac{\partial D_\zeta}{\partial t} = J_\zeta \end{aligned} \right\} (\mathrm{II})$$

なる二群に分れる。

(I)に於てEzが $E_1(\xi) \cdot E_2(\zeta)$ に分离できると仮定すると E_1 及び E_2 は次式を満足すべきことが分る。

$$\left. \begin{aligned} & (1-\xi^2) \frac{\partial^2 E_1}{\partial \xi^2} - \xi \frac{\partial E_1}{\partial \xi} + (k^2 f_1^2 \xi^2 - C) E_1 = 0 \\ & (1+\zeta^2) \frac{\partial^2 E_2}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial E_2}{\partial \zeta} + (k^2 f_1^2 \zeta^2 + C) E_2 = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

第2.2図 例2、長楕円壔座標系 (第2.2図)

直角座標系 (x, y, z) より変換

$$x + iy = f_2 \cosh(u_1 + i u_2)$$

$$\cos u_2 = \xi, \quad \cosh u_1 = \eta$$

の関係より長楕円壔座標系 (ξ, η, z) が得られる。これは

$$\frac{x^2}{f_2^2 \eta^2} + \frac{y^2}{f_2^2(\eta^2-1)} = 1$$

$$\frac{x^2}{f_2^2 \xi^2} - \frac{y^2}{f_2^2(1-\xi^2)} = 1$$

なる楕円及び共焦双曲線の群及びZによって作られる。x, y と ξ, η の関係は

$$y = f_2 \sqrt{(\eta^2-1)(1-\xi^2)}$$

$$x = f_2 \cdot \eta \cdot \xi$$

である。ξ, η の変化範囲は*

$$-1 \leq \xi \leq 1, \quad 1 \leq \eta < \infty$$

であり、計量係数は

$$h_\xi = f_2 \left(\frac{\eta^2-\xi^2}{1-\xi^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad h_\eta = f_2 \left(\frac{\eta^2-\xi^2}{\eta^2-1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad h_z = 1$$

である。場の諸量がすべてZ座標分に無関係なMaxwellの基本式(I)(II)の系の内(I)をとって考へる。Ezが $E_1(\xi) \cdot E_2(\eta)$ に分离出来るとすると E_1 及び E_2 は次式を満足すべきである。

* $0 \leq u_2 \leq 2\pi, \quad 0 \leq u_1 < \infty$

$$\left.\begin{aligned}(1-\xi^2)\frac{\partial^2 E_1}{\partial \xi^2}-\xi\frac{\partial E_1}{\partial \xi}+(-k^2 f_2^2\xi^2+c)E_1=0\\(\eta^2-1)\frac{\partial^2 E_2}{\partial \eta^2}+\eta\frac{\partial E_2}{\partial \eta}+(k^2 f_2^2\eta^2-c)E_2=0\end{aligned}\right\}\quad(11)^*$$

この二式は全く同一のものである。

第二節　平行往復線状電流の場合

2.1.　前節に述べた事柄を平行往復線状電流源について具体的に述べる。2本の平行導体が中心線間距離 $2a$ を以て無限に長く張設されてゐるとする。線状導体の断面は極めて小さいとし、それに流れる電流を I とする。ほほ往復線の近接効果は考へないものとする。2導体を結ぶ線の中心に円柱座標の原点を置く。前節の(1)に対応して

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi)-\frac{\partial}{\partial \phi}H_r\right\}=\frac{k^2}{i\omega\mu}E$$

$$H_r=\frac{1}{i\omega\mu r}\frac{\partial E}{\partial \varphi}\quad,\quad H_\phi=-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E}{\partial r}\quad,\quad k^2=\omega^2\varepsilon\mu$$

が得られるが之を解いて伝送方向の電界は

$$E=A\cdot H_1^{(1)}(kr)\cdot\cos\varphi\cdot e^{-i\omega t}$$

となる。

ここで $r\gg a$ 且つ $kr\ll 1$ なる時は第1種ハンケル函数 $H_1^{(1)}(kr)$ は大体 $-\frac{2i}{\pi kr}$ に等しい。一方双極線状電流による電界はベクトルポテンシャル $A_z=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}\cong\frac{\mu I}{2\pi}\cdot\frac{2a\cos\varphi}{r}$ より

$$E_z=-\frac{\partial A_z}{\partial t}=\frac{i\omega\mu a I}{\pi r}\cdot\cos\varphi\cdot e^{-i\omega t}$$

であるから これと比較して上の定数 A を定めると

$$A=-\frac{1}{2}\omega\mu a\,k\cdot I$$

となる。従って結果(電磁界は)次の如くなる。但し時間の係数 $e^{-i\omega t}$ は省略する。

$$E=-\frac{1}{2}\omega\mu k\cdot aI\cdot H_1^{(1)}(kr)\cos\varphi$$

$$H_r=-\frac{ik}{2}\cdot\frac{aI}{r}\cdot H_1^{(1)}(kr)\cdot\sin\varphi$$

$$H_\phi=\frac{ik}{2}\cdot\frac{aI}{r}\cdot\{H_1^{(1)}(kr)-kr\cdot H_0^{(1)}(kr)\}\cos\varphi$$

そして r 方向の空間インピーダンスを $Z_r^{(m)}$ とすると $Z_r^{(m)}=-E/H_\phi$ であつて

$$Z_r^{(m)}=-i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\Big/\frac{d}{dx}\{\ln H_1^{(1)}(x)\}\quad,\quad x=kr$$

である。或は

---

* これらの式は $\xi=\cos u_2$, $\eta=\cosh u_1$ の関係より u_1, u_2 を変数とする式に直すと $\frac{d^2E_1}{du_2^2}+(b-f_2^2k^2\cos^2u_2)E_1=0$, $\frac{d^2E_2}{du_1^2}+(f_2^2k^2\cosh^2u_1-b)E_2=0$ となる。

$$\frac{Z_r^{(m)}}{Z_0} = (-i)\cdot\left\{\frac{1}{kr} - \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(kr)}\right\}^{-1}$$

となる。 $kr \ll 1$ の時には

$$Z_r^{(m)} \cong -i\cdot Z_0\, kr = -i\omega\mu r$$

第2.3図 である。 Z_r/Z_0 を図示したのが第2.3図である。

2.2. 前項では二次元の場を論じたがZ軸方向の場が問題となる如き場合も波動を導く壁の導電率が非常に高ければ矢張り、$H_z=0$ によって特徴づけられる磁気的横波及び $E_z=0$ によって特徴づけられる電気的横波に分けて、各々を独立に論ずることが出来る。これらについては既に Carson*, Barrow†, Brillouin‡ 及び Schelkunoff§ の諸氏によって論ぜられてゐるが、特に Schelkunoff はスカラポテンシャル及び流れの函数を夫々伝送回路網理論に於ける節路電圧及び電流に対応せしめて電磁現象に対する伝送方程式を作り、方向性を持ったインピーダンスの概念を導入しつつ現象を回路網的に説明することに成功してゐる。

筆者は後に導管輻射の問題を伝送網的に取扱はんとするので、その準備的説明として電気的横波、及び磁気的横波の平面波、円柱波及び球面波について簡単に述べようと思ふ。

例を円柱波にとると先づ磁気的横波では $H_z=0$ であって Maxwell の基本式群は

$$-\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = (\sigma - i\omega\epsilon)E_r \quad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = i\omega\mu H_r \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} = (\sigma - i\omega\epsilon)E_\phi \quad \cdots(2) \qquad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = i\omega\mu H_\phi \quad (5)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} = (\sigma - i\omega\epsilon)E_z \quad \cdots(3) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \phi} = 0 \quad \cdots(6)$$

である。 $H_z=0$ であるから伝送軸に直角な平面内では磁気流れの函数 A 及び電気ポテンシャル函数 V を定義することが出来て磁界及び電界は夫々

$$rH_r = \frac{\partial A}{\partial \phi}, \qquad H_\phi = -\frac{\partial A}{\partial r}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \qquad rE_\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

とかける。これを上の基礎方程式に代入すると(1)及び(2)より

---

* J.R. Carson, S.P. Mead, and S.A. Schelkunoff: B.S.T.J. **15** pp 310-333 (1936)

† W.L. Barrow: Proc. I.R.E., **24**, pp. 1298-1328 (1936)

‡ L. Brillouin: R.G.E., **40**, pp. 227-239 (1936)

§ S.A. Schelkunoff: Proc. I.R.E., **25** pp. 1457-1492 (1937)

______ : B.S.T.J., **17**, pp. 17-40 (1938)

______ : Trans. A.I.E.E., **57**, pp. 744-750 (1938)

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -Y \cdot V \qquad Y = \sigma - i\omega\epsilon \qquad (7)$$

(4)及び(5)より $\quad E_z = i\omega\mu A - \frac{\partial V}{\partial z}$

が得られ又(3)より $\quad -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} = (\sigma - i\omega\epsilon)E_z \quad \cdots (8)'$

が得られるがこれと上式より

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 A = 0 \qquad (8)$$

これより $\quad A = C_n(\sqrt{k^2-h^2}\cdot r)\, e^{in\phi}\, e^{\pm ihz}\, e^{-i\omega t} \qquad (9.1)$

又は $\quad A = C_n(\chi r)\cdot e^{in\phi}\, e^{\pm\sqrt{\chi^2-k^2}\cdot z}\, e^{-i\omega t} \qquad (9.2)$

が得られる。ここにC_nはn次の円柱函数である。n, h又はn, χはパラメーターである。(9.1)をとるか又は(9.2)をとるかは与へられた問題の性質によって便利な方をえらぶのであるが、導波管理論等では普通(9.1)をとる。扨(8)と(8)'とより

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 A = (\sigma - i\omega\epsilon)E_z$$

即ち $\quad E_z = \frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon}(k^2 - h^2)A$

これと $\quad E_z = i\omega\mu A - \partial V/\partial z \quad$ の関係から

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{h^2}{\sigma - i\omega\epsilon}A \qquad (10.1)$$

又は(9.2)を用いると:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = i\omega\mu A - \frac{\chi^2}{\sigma - i\omega\epsilon}A \qquad (10.2)$$

即ち磁気的横波$(H_z=0)$の円柱波に対する伝送方程式として

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -Y\cdot V, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -ZA$$

$$Y = \sigma - i\omega\epsilon, \qquad Z = -i\omega\mu + \frac{\chi^2}{\sigma - i\omega\epsilon}$$

が得られる。同様にして電気的横波の場合には電気に対する流れの函数Ψ及磁気スカラポテンシャルCを用ひて記述できる。そして伝送方程式は

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -Z\Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -YC$$

$$Z = -i\omega\mu, \qquad Y = (\sigma - i\omega\epsilon) - \frac{\chi^2}{i\omega\mu}$$

となる。

平面波の場合はSchelkunoffによつて与へられてゐる。そして磁気的横波$(H_z=0)$の場合は同じ波の円柱波に対するものと全く同じである。又電気的横波の平面波$(E_z=0)$の場合は同じ電気的横波の円柱波の場合と全く同じ表現を有する。

又之、球面波の時は上の~~場合~~同じく分布定数の伝送方程式で表はし得るが、その所謂分布定数が伝送方向の座標分rの函数

になるのであつて、磁気的横波の時は磁気流れの函数をA, 電気スカラポテンシャルの函数をVとすると

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -ZA \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial r} = -YV$$

$$Z = -i\omega\mu + \frac{\chi^2}{(\sigma - i\omega\varepsilon)r^2} \quad , \quad Y = \sigma - i\omega\varepsilon$$

となり電気的横波の場合には電気の流れの函数をΨ, 磁気スカラポテンシャルをCとすると

$$\frac{\partial C}{\partial r} = -Z\Psi \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -YC$$

$$Z = -i\omega\mu \quad , \quad Y = (\sigma - i\omega\varepsilon) - \frac{\chi^2}{i\omega\mu r^2}$$

となる。

第三節　平行往復線上の振動電荷による電磁界と薄い中空円柱導体によるその遮蔽

この場合は先に述べた平行往復線上の電流による場即ち横の磁気的波動に対して横の電気的波動を与へるのであつて所謂静電誘導現象として説明されてる所のものである。第一節の式(四)より次の関係を得る

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rE_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}E_r\right\} = i\omega\mu H$$

$$E_r = \frac{i\omega\mu}{k^2}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial \phi} \quad ; \quad E_\phi = -\frac{i\omega\mu}{k^2}\frac{\partial H}{\partial r} \quad , \quad k^2 = \omega\varepsilon\mu$$

先の横磁波に対する場合と殆んど同様に取扱へるから詳細は略するが結果を示すと次の如くなる。往復線上の振動電荷を$+q$, $-q$とし線間距離$2a$は極めて小さいものとし、空気中に於ける電磁界は時間係数$\exp(-i\omega t)$を省略し

$$H = -\frac{\omega k}{2}\cdot aq\cdot H_1^{(1)}(kr)\cdot\cos\varphi$$

第24図

$$E_r = \frac{1}{i\omega\varepsilon}\cdot\frac{\omega k}{2}\cdot\frac{aq}{r}\cdot H_1^{(1)}(kr)\cdot\sin\varphi$$

$$E_\phi = -\frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{\omega k}{2}\cdot aq\frac{\partial}{\partial r}H_1^{(1)}(kr)\cos\varphi$$

$$= \frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{\omega k}{2}\cdot\frac{aq}{r}\left\{H_1^{(1)}(kr) - krH_0^{(1)}(kr)\right\}\cos\varphi$$

そしてr方向の空間インピーダンスを$Z_r^{(e)}$とすると

$$Z_r^{(e)} = E_\phi/H = \frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}H_1^{(1)}(kr)\Big/H_1^{(1)}(kr)$$

$$故に\ Z_r^{(e)}/Z_0 = i\left\{1/kr - H_0^{(1)}(kr)/H_1^{(1)}(kr)\right\}$$

先の$Z_r^{(m)}/Z_0$と共に次の関係を得る

$$Z_r^{(m)}\cdot Z_r^{(e)} = Z_0^2$$

尚$kr \ll 1$の時は　$Z_r^{(e)} \cong \dfrac{-1}{i\omega\varepsilon r}$　なることを附言する。

扨かくの如き電磁界を中空の薄肉円柱で遮蔽した場合電磁界

は如何になるかを考察する。双極子は座標の中心におかれるものとする。空気中では kr は非常に小と考へてよいが、導体中では $k^2 \doteqdot i\omega\mu\sigma$ であつて $|kr|$ は非常に大きい。従ひ各領域に於て Hankel の函数に夫々近似値*を代用し各領域の界を与へることが出来る。$r=c$ 及び $r=b$ に於ける境界条件により各領域に附加すべき二次電磁界が決定される。

今 $-\frac{1}{i\omega\epsilon c} = Z_{I}$, $-\frac{1}{i\omega\epsilon b} = Z_{III}$ 及び $-\frac{ik}{\sigma} = Z_{II}$

とおく $k=\sqrt{(i\omega\mu\sigma)}$ である。これらは夫々各領域に於ける径方向のインピーダンスで電気的横波に対するものである。実際の数値を用ひて検討すればすぐ分る様に Z_{II} は比較的に小さく Z_{I}, Z_{III} は反之、非常に大きい。そしてこのことは現象の周波数が相当高くなつても正しい。従ひ II 及び III の領域では電磁界は事実上存在しないと云つても大して誤りではない。従つて電気的横波の場合では電気力線の分布は静電場の場合と殆んど等しく、境界面 $r=c$ で導体壁に垂直である。そして I の部分の電磁界のみが問題となり得る。しかもこの領域では遮蔽壁による反作用が強いので電界分布は遮蔽体の存在せぬ場合に対して相当変化する。この事は遮蔽壁の附近に於て顕著である。

I の領域の場は下の如くなる。

$$E_r \doteqdot \frac{aq}{\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{c^2}\right)\sin\theta\cdot\cos\omega t$$

$$E_\phi \doteqdot \frac{aq}{\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos\theta\cdot\cos\omega t$$

及び
$$H \doteqdot -\omega\epsilon r\cdot\frac{aq}{\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cos\theta\cdot\sin\omega t$$
第2.5図

扨 H は係数は別として電界 E_r, 及び E_ϕ に対する流れの函数を与へるものであつて、これを以て電気力線の分布を求める事が出来る。即ち上式を少し書換へて

$$H = -\omega\epsilon\cdot\frac{aq}{\pi\epsilon c}\cdot\frac{r}{c}\left\{1+\left(\frac{c}{r}\right)^2\right\}\cos\theta\cdot\sin\omega t$$

で第2.5図に $\Psi = \frac{r}{c}\left\{1+\left(\frac{c}{r}\right)^2\right\}\cos\theta = $ 一定 の曲線を示してある。

第四節　クワッドによる場と遮蔽体の問題

4.1. 前節と殆んど同様の取扱が出来るから次の四本の導体系即ちクワッドが円柱型遮蔽体の内部におかれた場合の場の模様を考へよう。第2.6図の如き配置を考へる。 第2.6図

往復導体たるクワッドの電流によるベクトルポテンシャルは

$$A_z = \frac{\mu I}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2 + \ln r_3 - \ln r_4) \quad \left[\frac{Vs}{m}\right]$$

である。こゝに r_i は i 導線の中心軸より考察点 P 迄の距離である。

* $|z|\ll1$ なる時は $H_1^{(1)}(z) \approx iN_1(z) \approx -\frac{2i}{\pi z}$ であり逆に $|z|\gg1$ の時は $H_1^{(1)}(z) \sim e^{iz}/\sqrt{z}$ である。

回路は重信構成として電流の符号を図の如く選んだ。電界E_z，磁界H_ϕ及びH_rはA_zを用いて容易に求められる。遮蔽体の存在に基く円筒空洞内の場の歪変は遮蔽体が完全に導電性の場合に最大であるからこの様に仮定して空洞内の場を求めて見る。

場の算定は他の境界値問題で屡々用いた方法と同様であるから途中の計算は省略して，数値的電界，或はこの場合磁界に対する流れの函数でもあるが これをΨとおくと次の如く与へられる。

$$\Psi = E_z\Big/\left(\frac{-i\omega\mu}{2}\cdot\frac{M}{2\pi d^2}\right) = \frac{d^2(r^2\cos2\theta-2rd\cos\theta+d^2)}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^2} + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\frac{d}{a}\right)^n\frac{Z_{II}+Z_I^+}{Z_{II}-Z_I^+}\cos n\theta, \quad M\equiv Il^2, \quad r\leq a$$

ここに$Z_I^+ = i\omega\mu a/n$ 及び $Z_{II} = -ik/\sigma$ は領域Iの$r=a$なる点及び領域IIの径方向のインピーダンスである。但し$k^2=i\omega\mu\sigma$とする。

上式では領域IIの導電率が有限であるとしたがもし$\sigma\to\infty$ならば$Z_{II}=0$となり$(Z_{II}+Z_I^+)/(Z_{II}-Z_I^+)=-1$となる。従って$\Psi$は次の如くなる。

$$\Psi = \frac{d^2(r^2\cos2\theta-2rd\cos\theta+d^2)}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{d}{a}\right)^n\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n\theta, \quad r\leq a$$

4.2　以上は所謂磁気的横波の場合について考へたのであるが電気的横波の場合即ちクワッド導体上の振動電荷による場の場合も同様にして取扱ふことが出来る。導体上の電荷の振動を等価な線状電流$-I_z^*$ [V] で置換しクワッド系の(電気)ベクトルポテンシャルをA_z^*とすると

$$A_z^* = \frac{\epsilon I^*}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2 + \ln r_3 - \ln r_4) \qquad \left[\frac{A\cdot S}{m}\right]$$

前の磁気的横波の場合と殆んど同様にして数値的磁界或は電界に対する流れの函数Ψ^*は

$$\Psi^* = H_z\Big/\left(-\frac{i\omega\epsilon}{2}\cdot\frac{M^*}{2\pi d^2}\right) = \frac{d^2(r^2\cos2\theta-2rd\cos\theta+d^2)}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^2} + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{d}{a}\right)^n\left(\frac{r}{a}\right)^n\frac{Z_I^++Z_{II}}{Z_I^+-Z_{II}}\cos n\theta$$

となり領域IIの導電率が∞になると

$$\Psi^* = \frac{d^2(r^2\cos2\theta-2rd\cos\theta+d^2)}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^2} + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{d}{a}\right)^n\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n\theta, \quad r\leq a$$

となる。ここに$M^* = I^*l^2$なり。第一項は勿論始源場に関するものであり，第二項の級数項が遮蔽壁の反作用を表はしてゐるのである。

以上の如くにして往復線電流，往復線磁流，クワッド電流及び磁流に関する流れの函数が求められると，これらを用いてこれらの往復線及びクワッドが幾つか共存する系の流れの函数は容

易に求められ、之を用いてその様な系による場の模様即ち流線を描くことが出来る。第2.17図～第2.27図はかくして求められた場の模様である。 第2.17～第2.27図

第五節 円筒遮蔽の問題

中空円筒による遮蔽問題に関しては既に論じた処である*。然しこの問題はケーブル導体の外部妨害の算定等の工学的に重要な問題に直接関係してゐるので前論文との多少の重複をいとはずにその大要を述べ且二・三の問題を補足するつもりである。

最も簡単な場合として、一様な外部磁界中に置かれた中空の導電筒導体の内部に於てその外部妨害磁界が如何なる程度に減殺されるかと云ふ問題は既に Buchholz[†], Whitehead[‡] 及び King[§] の諸氏の研究がある。

円筒外部の磁界は円筒内でも形態を変へることなくただその強さのみ S 倍となつてゐる。この S を遮蔽率と云ふが、これは

$$S = 2\cdot(ka)^{-2}\{I_0(kb)K_2(ka) - I_2(ka)K_0(kb)\}^{-1} \qquad k^2 = i\omega\mu\sigma$$

で与へられる。ここに $2a$ 及 $2b$ は夫々円筒の内径及外径である。I_n 及 K_n は純虚数を変数とする変形ベッセル函数である。円筒は又その反作用として外部に双極場の如きものを作る。従って一様外部磁界は円筒近傍で少しく形が乱されるわけである。

次に円筒内の中心附近に往復線状電流源をおくと事情は逆で、円筒内に反作用として一様な二次磁界が附加され、一方円筒外の場は S の割合で減殺されるが、形状はやはりそのまゝ双極線状電流の作る双極場である。(第2.8図)

双極線状電流源のある位置が円筒の中心からはずれてゐる場合には量的には小さい多数の高次調波分の場の群が上述の場に加はる。各成分に対してその遮蔽率及び反作用は少しく異なる。

対導体の代りに星型重心信回線を中空円筒の中心におくと外部に及ぼす妨害作用は対導体の場合よりは非常に少ないことは先の考察より明らかである。この点、線路としては非常に有利であつて高周波域で使用する同軸線路と匹敵する。而も外部からの妨害に対しても同軸ケーブルよりは有利である。

尚、同軸ケーブルの製造技術より由来する中心導体と外部中空帰路の偏心構造に基く妨害電圧の周波数特性及び銅帯遮蔽体附加による妨害電圧の減少に関しては Buchholz[‖] の研究がある。

---

* 茂木：円筒遮蔽の理論、電気試験所研究報告 第464号 (昭17-10)
† H. Buchholz : Arch. f. Elek., 22, P. 360 (1929)
‡ Whitehead : Phil. Mag., [7], 11, P. 897 (1931)
§ L. V. King : ――― [7], 15, P. 201 (1933)
‖ H. Buchholz : E. N. T., 13, S. 310 (1936)

第三章　中空楕円壔による遮蔽

前章では一般の壔状導体による遮蔽作用について論じ、特に円柱の場合について詳論した。ここでは楕円柱の場合につき考察する。直角座標で次の二つの方程式

$$\frac{x^2}{\eta^2}+\frac{y^2}{\eta^2-1}=f^2,\quad \frac{x^2}{\xi^2}-\frac{y^2}{1-\xi^2}=f^2,\quad \eta\geq 1,\ -1\leq\xi\leq 1$$

は楕円及び共焦双曲線を示すが*、ξ, η 及び z の三つの座標分によって楕円柱の座標系が出来る。この座標系 (ξ,η,z) と直角座標系 (x,y,z) との関係は

$$x=f\xi\eta,\quad y=\sqrt{(\eta^2-1)(1-\xi^2)},\quad z=z$$

である。次に $\xi=\cos v$, $\eta=\cosh u$ なる変換をすると計量係数 h は

$$h_u=h_v=f\sqrt{(\sinh^2 u+\sin^2 v)}=f\sqrt{(\cosh^2 u-\cos^2 v)}\equiv h,\quad h_z=1$$

である。Maxwellの基礎方程式は場の諸量が z に無関係の時には第二章1.1で述べた様に[時間係数を $\exp(-i\omega t)$ として]

第3.1図

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{h}\frac{\partial E_z}{\partial v}&=i\omega\mu H_u\\ -\frac{1}{h}\frac{\partial E_z}{\partial u}&=i\omega\mu H_v\\ \frac{1}{h^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(hH_v)-\frac{\partial}{\partial v}(hH_u)\right\}&=(\sigma-i\omega\epsilon)E_z\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{h}\frac{\partial H_z}{\partial v}&=(\sigma-i\omega\epsilon)E_u\\ -\frac{1}{h}\frac{\partial H_z}{\partial u}&=(\sigma-i\omega\epsilon)E_v\\ \frac{1}{h^2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(hE_v)-\frac{\partial}{\partial v}(hE_u)\right\}&=i\omega\mu H_z\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{II})$$

なる二つの互に独立な電磁場に分離する。

(I)の場合について考へる。これは横の磁気波であって H_u, H_v 及び E_z を分値とする。以下電界は z 分値のみであってまぎれることがないから添字を略して単に E と書く。

三つの式より H_u, H_v を消去すると

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}+k^2f^2(\cosh^2 u-\cos^2 v)E=0$$

但し $k^2=\omega^2\epsilon\mu+i\omega\mu\sigma$ であり $2f$ は焦点間の距離である。

普通行はれる様に $E=E_1(u)\cdot E_2(v)$ と仮定して上式に代入すると次の如くなる。

$$\frac{d^2E_1}{du^2}+(f^2k^2\cosh u+B)E_1=0\qquad(1)$$

$$\frac{d^2E_2}{dv^2}-(B+f^2k^2\cos^2 v)E_2=0\qquad(2)$$

---

* 第2.2図参照

ここにBは分離常数である。

第一節　直線状電流源による電磁界 3

上に得た(1),(2)式はMathieuの方程式であつて、その解はMathieu函数と云はれてゐるものである。ここで $k \to 0$ の場合についてまづ考へよう。この場合は簡単で n を正の整数とすると電磁界は

$$E=(Ae^{nu}+Be^{-nu})(C\cos nv+D\sin nv)$$
$$H_u=\frac{-n}{i\omega\mu h}(Ae^{nu}+Be^{-nu})(C\sin nv\mp D\cos nv)$$
$$H_v=\frac{-n}{i\omega\mu h}(Ae^{nu}-Be^{-nu})(C\cos nv+D\sin nv)$$

となる。楕円座標で (u_0, v_0) の点を貫く直線状電流源 I があるとしこれを

$$K=\Sigma(M\cos nv+N\sin nv) \qquad [A/m]$$

であらはす。M, Nは三角函数の直交性を用ひて定め得る。即ち上式の両辺に $h\cos nv$ をかけて v について0から 2π まで積分すると $\int_0^{2\pi}K\cos nv\cdot h\,dv=I\cdot\cos nv_0=(h)_{u_0}M\pi$

となり
$$M=\frac{I\cdot\cos nv_0}{\pi(h)_{u_0}}$$

が得られる。$(h)_{u_0}$ は $u=u_0$ における計量係数であつて v には関係する。又Nも同様にして定まるがこれはMの式で $\cos nv_0$ の代りに $\sin nv_0$ を用ひれば得られる。斯くして $u=u_0$ なる楕円面上の面電流は次の如くなる

$$K=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I}{\pi(h)_{u_0}}\cos n(v-v_0)$$

次に電流の存在する点を通る楕円面の内外の電界を次の様に仮定する。

$$E_i=Ae^{nu}\cos n(v-v_0)$$
$$E_e=Be^{-nu}\cos n(v-v_0)$$

従つて磁界は次の如くなる。

内部：
$$\begin{cases}H_{ui}=-\dfrac{n}{i\omega\mu h}Ae^{nu}\sin n(v-v_0)\\ H_{vi}=-\dfrac{n}{i\omega\mu h}Ae^{nu}\cos n(v-v_0)\end{cases}$$

外部：
$$\begin{cases}H_{ue}=-\dfrac{n}{i\omega\mu h}Be^{-nu}\sin n(v-v_0)\\ H_{ve}=\dfrac{n}{i\omega\mu h}Be^{-nu}\cos n(v-v_0)\end{cases}$$

扨 $u=u_0$ に於て $E_e=E_i$ であり $H_{ve}-H_{vi}=K$ であるから

$$Ae^{nu_0}-Be^{-nu_0}=0$$
$$Ae^{nu_0}+Be^{-nu_0}=\frac{i\omega\mu}{n\pi}I$$

これよりA, Bは次の如く定まる。

$$A=\frac{i\omega\mu I}{2\pi n}e^{-nu_0},\qquad B=\frac{i\omega\mu I}{2\pi n}e^{nu_0}$$

斯くして(u_0, v_0)なる点を通る直線状電流による電磁界は次の如くなる。

$$E=\sum_n\frac{i\omega\mu I}{2\pi n}\cdot\begin{matrix}e^{n(u_0-u)}\\e^{n(u-u_0)}\end{matrix}\cdot\cos n(v-v_0),\quad u\gtrless u_0$$

$$H_u=-\sum_n\frac{I}{2\pi h}\cdot\begin{matrix}e^{n(u_0-u)}\\e^{n(u-u_0)}\end{matrix}\cdot\sin n(v-v_0),\quad u\gtrless u_0$$

$$H_v=\pm\sum_n\frac{1}{2\pi h}\cdot\begin{matrix}e^{n(u_0-u)}\\e^{n(u-u_0)}\end{matrix}\cdot\cos n(v-v_0),\quad u\gtrless u_0$$

第二節　中空楕円柱による低周波遮蔽作用

極めて薄い厚みを持った中空の楕円柱殻を$u=u_1$とし その外側の(u_0, v_0)なる点に直線状の電流源があった場合の問題を考へる。前節の所論を用いると殻内外の電磁界は次の様になる。但しn-分値のみを考へる。簡単のために$(i\omega\mu I/2\pi n)\,e^{-nu_0}\equiv A_n$とすると

$$\text{外部}\begin{cases}E_o=A_n e^{nu}\cos n(v-v_0)+B e^{-nu}\cos n(v-v_0)\\ H_{ve}=-\dfrac{n}{i\omega\mu h}A_n e^{nu}\cos n(v-v_0)+\dfrac{n}{i\omega\mu h}B e^{-nu}\cos n(v-v_0)\end{cases}\qquad 1)$$

$$\text{内部}\begin{cases}E_i=A e^{nu}\cos n(v-v_0)\\ H_{vi}=-\dfrac{n}{i\omega\mu h}A e^{nu}\cos n(v-v_0)\end{cases}\qquad 2)$$

殻の位置$u=u_1$に於ける境界条件はsを殻の面比抵抗として

$$E_i=E_e\,(=E),\qquad H_{ve}-H_{vi}=E/s$$

であるが、今面比抵抗sが楕円殻に沿って次の関係（Σは常数とす）

$$s=\sqrt{(\cosh^2 u_1-\cos^2 v)}\cdot\Sigma\qquad[\Omega]\qquad\cdots\cdots(3)$$

で変化しておるものと仮定すると$(h)_{u_1}=f\sqrt{\cosh^2 u_1-\cos^2 v}$なることを考慮して上の条件より

$$A_n e^{nu_1}+Be^{-nu_1}=Ae^{nu_1}$$

$$-A_n e^{nu_1}+Be^{-nu_1}=A\left(\frac{i\omega\mu}{n}\cdot\frac{f}{\Sigma}-1\right)\cdot e^{nu_1}$$

が得られる。これよりA, Bは夫々次の如く定まる。

$$A=\frac{2n\Sigma}{2n\Sigma-i\omega\mu f}\cdot A_n,\qquad B=\frac{i\omega\mu f}{2n\Sigma-i\omega\mu f}\cdot A_n e^{2nu_1}\qquad(4)$$

かくて殻内外の電界の第n分値は次の様になる。

$$E_i^{(n)} = \frac{i\omega\mu I}{2n\pi}\cdot\frac{2n\Sigma}{2n\Sigma - i\omega\mu f}\cdot\left(\frac{e^{u}}{e^{u_0}}\right)^n \cos n(v-v_0)$$ 3-2

$$E_e^{(n)} = \frac{i\omega\mu I}{2n\pi}\left(\frac{e^{u}}{e^{u_0}}\right)^n \cos n(v-v_0) +$$
$$+\frac{i\omega\mu I}{2n\pi}\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_0}}\right)^n\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u}}\right)^n\frac{i\omega\mu f}{2n\Sigma - i\omega\mu f}\cos n(v-v_0) \qquad \cdots\cdots(5)$$

もし u_1 が極めて大きくなり又 f が小さくなり、$f\cosh u \to r$ となると円柱の場合への変換が行はれ上式に対応して

$$\left.\begin{aligned} E_i^{(n)} &= \frac{i\omega\mu I}{2n\pi}\cdot\frac{2ns}{2ns - i\omega\mu r_1}\cdot\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta-\theta_0) \\ E_e^{(n)} &= \frac{i\omega\mu I}{2n\pi}\cdot\left\{\left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \frac{i\omega\mu r_1}{2ns - i\omega\mu r_1}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n}\right\}\cos n(\theta-\theta_0) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

なる結果が得られる。

$$\frac{2ns}{2ns - i\omega\mu r_1} = \mathfrak{S}, \quad \frac{2\ i\omega\mu r_1}{2ns - i\omega\mu r_1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n = \mathfrak{R} \qquad (7)$$

を円柱殻の場合の遮蔽率、反作用率とするに対し、楕円柱殻の場合のそれは夫々

$$\frac{2n\Sigma}{2n\Sigma - i\omega\mu f} = \mathfrak{S}, \quad \frac{i\omega\mu f}{2n\Sigma - i\omega\mu f}\cdot\left(\frac{e^{u_1}}{e^{u_0}}\right)^{2n} = \mathfrak{R} \qquad (8)$$

である。

ここで注意すべきは(5)の仮定であつて考へる楕円殻の、円よりの差が小さい場合は u_1 は比較的大きく、従つて v の全変域は $-1 \le v \le +1$ に亘つてなほ S を大体一定と見做し得る。斯る場合は本節の所論はそのまゝ実用価値があるが、極めて扁平な楕円殻の場合には面比抵抗にかゝる仮定をせざる限り、境界条件は極めて複雑化し本節の如き方法は用い得ない。このことはある次数の調波により遮蔽体の内外に他の次数の多種の調波の発生することを意味する。而して本節の如き場合に限つてある次数の調波がそのまゝの形に於てある割合で遮蔽体により減衰せしめられるのである。そして遮蔽体としては斯かる如き場合が望ましいと思はれる。

第三節　完全導電性楕円柱とその外部の直線電流

$u = u_1$ で与へられる表面をもつ完全導電性の楕円柱があるとする。(u_0, v_0) にある直線状電流源による電磁界はこの楕円柱導体による反作用を考慮して前節(1)より

$$E_e = A_n e^{nu}\cos n(v-v_0) + B e^{-nu}\cos n(v-v_0)$$
$$H_{ve} = -\frac{n}{i\omega\mu h}A_n e^{nu}\cos n(v-v_0) + \frac{n}{i\omega\mu h}B e^{-nu}\cos n(v-v_0)$$

である。楕円導体は完全導体であるから、その表面で電界の切線分は消失する故に

$$A_n e^{nu_1} = -B e^{-nu_1} \quad 即ち \quad B = -A_n e^{2nu_1}$$

故に $H_{ve} = -\frac{n}{i\omega\mu h}\cdot A_n \cos n(v-v_0)\cdot(e^{nu}+e^{2nu_0-nu})$

$$h = f\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}$$

従って楕円導体表面の磁界は次の如くなる。これは又 z 方向に表面を流れる面電流である。

$$(H_v)_{u_1} = K(v)_{u_1} = -\frac{I}{\pi f}\cdot e^{-nu_0}\cosh u_1 n\cdot\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u_1 - \cos^2 v}}$$

楕円導体がその極限の形態をとった場合を考へる即ち $u_1 = 0$ とすると楕円導体は巾 $2f$ の薄板になるであらう。この場合には

$$(H_v)_0 = K(v)_0 = -\frac{I}{\pi f} e^{-nu_0}\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 v}}$$

であって薄板の両縁に於ては磁界(面電流)は極めて大きくなる。これらの事情については第九章で再述するであらう。

第四節 楕円柱の径インピーダンス

第二節に述べたことから直ぐ楕円柱に対する径インピーダンスを得る。即ち発散波に対しては $-Z_u^{(m)} = E_z/H_v = -i\omega\mu n h$ $(k\to 0)$ である。~~即ち茲に~~ $h = f\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}$ であって f が極めて小さくなり u が大きくなって $h \fallingdotseq f\cosh u \to r$ となると円柱の場合の式 $-Z_r^{(m)} = -i\omega\mu n r$ となって第二章第二節の結果と一致する。楕円柱の場合には $Z_u^{(m)}$ は u のみならず角変数 v にも関係する事に注意を要する。

$k \neq 0$ なる場合を次に考へる。その為に最初の一般式(1)(2)を再び次に書く。

$$\frac{d^2E_1}{du^2} + (\chi^2\cosh^2 u + B)E_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2E_2}{dv^2} - \left(\frac{\chi^2}{2}\cos 2v + B + \frac{\chi^2}{2}\right)E_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\chi = kf$$

(2)はMathieuの微分方程式であり(1)はその変形である。(2)について考へるとBが適当な値をとった時には解は v について周期函数となり、その解を v について偶函数なるものと奇函数なるものとに分れ夫々

$$ce_m(\chi, v) \qquad se_m(\chi, v)$$

と書く。更に $v = \pm\pi/2$ なる点に関して対称なるや否やにより次の様に分れる。

$$ce_{2s}(\chi, v) = \frac{1}{2}\alpha_0^{2s} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{2s}\cos 2nv \qquad \text{(対称)}$$

$$ce_{2s+1}(\chi, v) = \sum_{n=0}\beta_n^{2s+1}\cos(2n+1)v \qquad \text{(逆対称)}$$

$$se_{2s+1}(\chi, v) = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^{2s+1}\sin(2n+1)v \qquad \text{(対称)}$$

$$se_{2s}(\chi, v) = \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n^{2s}\sin 2nv \qquad \text{(逆対称)}$$

これらは $\chi\to 0$ に於て夫々 $\cos 2s v$, $\cos(2s+1)v$ 及び $\sin(2s+1)v$, $\sin 2sv$ となるものである。E_1 は同じ分離常数 B に対して上式の v の代りに iu を用ひたもの即ち

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cosh 2nu\ ,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\cosh(2n+1)u\ ,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\sinh(2n+1)u\ ,$$
及び
$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\sinh(2n)u\ ,$$

で与へられるが u が大きいときには双曲線函数の代りにベッセル函数を用ひた表現の方が便利である。何れにせよこの解を $Cem(\chi,u)$ 及び $Sem(\chi,u)$ と表はす。* 之を陪マシウ函数（associated Mathieu function）と云ふ。なほ(2)式には $ce(\chi,v)$ $se(\chi,v)$ の外にもう一つの解があるがこれは v につき周期的でない。解は位置の一価函数でなければならぬと云ふ物理条件がある時にはこれは用ひることは出来ない。この非周期的解に対応する(1)の非周期的解がある。Ince は之を $Ins(\chi,u)$ 及び $Jns(\chi,u)$ とかいてゐるが未だ標準的な記法となってゐない。これらは夫々 u の奇函数及び偶函数である。

斯くて(I)式の電界 E は次の組合せとして与へられる。

$$E(\chi;u,v)=\begin{Bmatrix}Ce_s(\chi,u)\\ Se_s(\chi,u)\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}ce_s(\chi,v)\\ se_s(\chi,v)\end{Bmatrix}$$

これは v について周期的な解であるが u について非周期的な解は Ces, Ses の代りに Jns, Ins を用ひる。これらを總括して $U(\chi,u)$ で代表することにする。

扨，u 方向の空間インピーダンスは

$$\frac{E}{H_v}=-Z_u^{(m)}=-i\omega\mu h U\Big/\frac{dU}{du}$$

即ち

$$\boxed{Z_u^{(m)}=i\omega\mu f\sqrt{\cosh^2 u-\cos^2 v}\cdot U(\chi,u)\Big/\left(\frac{dU}{du}\right)}$$

U の周期解即ち内方に向ふ定在波に関するもの）を $U^-(\chi,u)$ とするとこれに関する表現は色々あるが

例へば $ce_{2s}(\chi,v)$ に対応して

$$U^-(\chi,u)=\frac{1}{2}\alpha_0 J_0(\chi\cosh hu)+\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n J_{2n}(\chi\cosh u)$$

又外向の発散波に対するものを $U^+(\chi,u)$ とするとこれは

---

* $Cem(\chi,u)=cem(\chi,iu)$, $Sem(\chi,u)=sem(\chi,iu)$

† (2)の非周期解 $in_s(\chi,v)=v\cdot ce_s(\chi,v)+$ odd function ,
$jn_s(\chi,v)=v\, se(\chi,v)+$ even function に夫々対応して
$i\,In_s(\chi,u)=in_s(\chi,iu)$ 及び $Jn_s(\chi,u)=jn_s(\chi,iu)$
が(1)の非周期解である。

$$\Pi^{+}(\mathcal{K},u)=\frac{1}{2}\alpha_0 H_0^{(1)}(\mathcal{K}\cosh u)+\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\alpha_n H_{2n}^{(1)}(\mathcal{K}\cosh u)$$ 3-3

係数 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\cdots\cdots$ は $ce_{2s}(\mathcal{K},v)$ のフーリエ級数表示に於ける係数であって、これらは分離常数Bの決定と関係して求めることが出来る。これについては第六節で再論する。

扨 u が大きい時には、例へば ce_0 に関する $\Pi^{+}(\mathcal{K},u)$ はその第一項で大体近似し得る。(但し $\mathcal{K}$ も充分小なるを要す。) 斯かる場合には

$$Z_{u,c}^{(m)}\cong i\omega\mu f\cosh u\cdot\frac{H_0^{(1)}(\mathcal{K}\cosh u)}{\mathcal{K}\sinh u H_0^{(1)\prime}(\mathcal{K}\cosh u)}$$

$$=\frac{i\omega\mu}{k_0}\frac{H_0^{(1)}(\mathcal{K}\cosh u)}{H_0^{(1)\prime}(\mathcal{K}\cosh u)}$$

で与へられる。同様に ce_s に関するものは $\mathcal{K}$ を小さいとして次の如くなる

$$Z_{u,s}^{(m)}\cong\frac{i\omega\mu}{k_0}\cdot\frac{H_s^{(1)}(\mathcal{K}\cosh u)}{H_s^{(1)\prime}(\mathcal{K}\cdot\cosh u)}$$

これは $\mathcal{K}\cosh u\rightarrow k_0 r$ とすると円柱波の場合に帰着する。

第五節 楕円柱空洞中の高周波電磁界

第一節に於ては考察せる現象の波長が極めて長く、従って $k=\omega/v=2\pi/\lambda$ が非常に小さいと考へられる場合について論じたのであるが、周波数が相当高くなるともはや k を0と考へ得ない様な状態になり、数的取扱が労い困難さを加へる。

而し空気中での k を無視し得ない程の高い周波数域に於ては、導体中の k 即ち $(i\omega\mu\sigma)^{1/2}$ は極めて大きく、従って »侵透の深さ« は極めて浅くなり相当に薄い遮蔽体といへども尚完全遮蔽体と考へることが出来ることになり、中空楕円柱外部の電磁界は(源が中空楕円柱の内部にあるものとして)もはや興味の対称とはならなくなる。

之に反し楕円柱状空洞中の電磁界はかなり複雑なものとなる。楕円柱空洞中の波動伝播については Chu* 等によって論ぜられたが、源と~~そ~~の関聯に於て解いたものは未だ発表されてゐない。 Mathieu 函数に関する研究の現状では数値計算を行ふのに充分な数表が発表されてゐない。*

---

* Chu : J. App. Phys. 9, 583 (1938)

* P. M. Morse により相当広範囲に計算されプリントになってゐるさうであるが未だ雑誌には発表されてゐない様である。上の Chu の計算も之によってなされたものである。尚数表としては Goldstein が Trans. Cambridge Phil. Soc., 23, No 11, pp. 303 ~ 336 (1927) 中に於て ce_0, se_1, se_2, ce_2 のフーリエ係数及それらの固有函数を与へてゐるのであるが、我々の場合にはこの程度では未だ不充分である。

5.1. 楕円形の柱状空洞中の往復電流源

楕円柱形空洞の往復線状電流源がある場合の空洞中の電磁界は第二章第二節に述べた様に円柱座標で表はして

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= -\frac{1}{2}\cdot\omega\mu k\cdot aI\cdot H_1^{(1)}(kr)\cdot\cos\varphi \\ H_{0r} &= \frac{1}{i\omega\mu r}\frac{\partial E}{\partial\varphi}, \quad H_{0\varphi} = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E}{\partial r} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

第3.2図

である。但し $k^2=\omega^2\epsilon\mu$ とする。上式は勿論 $\nabla^2E+k^2E=0$ の解であるからこれを楕円座標系であらはすと

$$\frac{\partial^2E}{\partial u^2}+\frac{\partial^2E}{\partial v^2}+k^2f^2(\cosh^2u-\cos^2v)E=0 \quad (2)$$

の解となる。扨簡単の為に上のEを次の如く置く添字0は源に関する量であることを示す。

$$E_0=A\cdot H_1^{(1)}(kr)\cdot\cos\varphi \qquad A\equiv-\frac{1}{2}\omega\mu k\cdot aI \quad (3)$$

扨

$$r=f\sqrt{\cosh^2u-\sin^2v}=\frac{f}{2}\sqrt{e^{2u}+2\cos2v+e^{-2u}}$$

であるから

$$H_1^{(1)}(kr)=H_1^{(1)}\left(\frac{fk}{2}\sqrt{e^{2u}+2\cos2v+e^{-2u}}\right)$$

である。一方*

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+2ab\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}&H_1^{(1)}\{(a^2+b^2+2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\}\\ &=2\Gamma(1)\cdot(ab)^{-1}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(m+1)H_{m+1}^{(1)}(a)J_{m+1}(b)\\ &\qquad\times C_m^1(\cos\theta)\end{aligned} \quad (4)$$

$$C_m^1(\cos\theta)=\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}$$

であるから

$$H_1^{(1)}(kr)\cos\varphi=\frac{H_1^{(1)}(kr)}{kr}\cdot kr\cdot\cos\varphi=\frac{H_1^{(1)}(kr)}{kr}\cdot k\cdot x$$

$$=2\left(\frac{\kappa^2}{4}\right)^{-1}\cdot\kappa\cosh u\cdot\cos v\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(m+1)H_{m+1}^{(1)}\left(\frac{\kappa}{2}e^{+u}\right)\times J_{m+1}\left(\frac{\kappa}{2}e^{-u}\right)\frac{\sin2(m+1)v}{\sin2v}$$

従って

$$E_0(u,v)=\frac{8}{\kappa}\cdot A\cdot\cosh u\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(m+1)H_{m+1}^{(1)}\left(\frac{\kappa}{2}e^{+u}\right)\times J_{m+1}\left(\frac{\kappa}{2}e^{-u}\right)\frac{\sin2(m+1)v}{2\sin v} \quad \cdots(5)$$

$$\kappa\equiv kf$$

扨 $E_0(u,v)$ を次の如く楕円柱の函数に展開したとする

$$E_0(u,v)=\sum_n U_n(u)\{A_n\, ce_n(v)+B_n\, se_n(v)\}$$

$E_0(u,v)$ は(2)の解であるから $U_n(u)$ は当然

---

* G. N. Watson, Bessel Functions (1922) p. 365 (4)

$$\frac{d^2U}{du^2}+(K^2\cosh^2 u+B_s)U=0 \qquad (6)$$

の解である。そしてこは

$$A_n\cdot N_{ce,n}U_n(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E_0(u,v)\,ce_n(v)\,dv$$
$$B_n\cdot N_{se,n}U_n(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E_0(u,v)\,se_n(v)\,dv \qquad (7)$$

によって与へられる。Nは$ce_n(v)$及び$se_n(v)$の正規化因数である。

扨
$$\frac{\sin(2m+2)v}{2\sin v}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{i(2m+2)v}-e^{-i(2m+2)v}}{e^{iv}-e^{-iv}}$$
$$=\cos(2m+1)v+\cos(2m-1)v+\cos(2m-3)v+\cdots\cdots+\cos v$$

故に
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E_0(u,v)\,ce_n(v)\,dv=\frac{8}{K}\Lambda\cosh u\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(m+1)\times$$
$$\times H^{(1)}_{m+1}\left(\frac{K}{2}e^{+u}\right)J_{m+1}\left(\frac{K}{2}e^{-u}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2m+2)}{2\sin v}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\times\cos(2n+1)v\right\}dv$$
$$=\frac{8}{K}\Lambda\cosh u\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^m}{2}(m+1)(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_m)H^{(1)}_{m+1}\left(\frac{K}{2}e^{+u}\right)\times J_{m+1}\left(\frac{K}{2}e^{-u}\right) \qquad \cdots\cdots(8)$$

となる。ce_nの内でnが偶数のものは積分によって0となるから用いる必要がない。

同様にして
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E_0(u,v)\,se_n(v)\,dv=0$$
である。何となれば
$$\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx=0$$
だからである。斯くしてUn(u)は次の如くなる。

$$A_n\,U_n(u)=\frac{1}{N_{ce,n}}\cdot\frac{4}{K}\cdot\Lambda\cdot\cosh u\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(m+1)\times(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_m)H^{(1)}_{m+1}\left(\frac{K}{2}e^{u}\right)J_{m+1}\left(\frac{K}{2}e^{-u}\right)$$

即ち
$$\cosh u\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(m+1)(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_m)H^{(1)}_{m+1}\left(\frac{K}{2}e^{u}\right)J_{m+1}\left(\frac{K}{2}e^{-u}\right)$$
は
$$\frac{d^2U}{du^2}+(K^2\cosh^2u+B_s)U=0$$
の非週期解であって、これを$\Xi e_n^+(K,u)$と書くことにすると
$$A_n\cdot U_n(u)=\frac{1}{N_{ce,n}}\frac{4\Lambda}{K}\Xi e_n^+(K,u)$$

故に
$$E_0(u,v)=\frac{4\Lambda}{K}\sum_{n=odd}^{\infty}\frac{1}{N_{ce,n}}\cdot\Xi e_n^+(K,u)\,ce_n(v) \qquad \cdots(9)$$

但し

3-

$$(10)\begin{cases} ce_{2s+1}(v) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_p^{2s+1} \cos(2p+1)v \\ \Xi e^{+}_{2s+1}(u) = \cosh u \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (-)^p (p+1)(\beta_0^{2s+1} + \cdots\cdots + \beta_p^{2s+1}) H^{(1)}_{p+1}(\frac{K}{2}e^{u}) \times J_{p+1}(\frac{K}{2}e^{-u}) \\ N_{ce,2s+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{ce_{2s+1}(v)\}^2 dv = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}(\beta_p^{2s+1})^2 \end{cases}$$

である。

叔上の(9)によつて始源電界が与へられたから楕円柱空洞内の總合電界は次の如く與へ得る。

$$E(u,v) = \frac{4A}{K}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{N_{ce,2s+1}}\Xi e^{+}_{2s+1}(u) + C_{2s+1}\Xi e^{-}_{2s+1}(u)\right\} \times ce_{2s+1}(v) \quad \cdots\cdots(11)$$

但し $\Xi e^{-}_{2s+1}(u) = \cosh u \sum_{p=0}^{\infty}(-)^p(p+1)(\beta_0^{2s+1} + \cdots\cdots + \beta_p^{2s+1})$

$$\times \quad J_{p+1}(\frac{K}{2}e^{u})\, J_{p+1}(\frac{K}{2}e^{-u}) \quad \cdots\cdots(12)$$

空洞壁が完全導電性の場合には $u=u_1$ で電界が消失するとして

$$C_{2s+1}\Xi e^{-}_{2s+1}(u_1) = -\frac{1}{N_{ce,2s+1}}\Xi e^{+}_{2s+1}(u_1).$$

斯くして

$$\boxed{E(u,v) = \frac{4A}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{N_{ce,2s+1}}\left\{\Xi e^{+}_{2s+1}(u) - \frac{\Xi e^{+}_{2s+1}(u_1)}{\Xi e^{-}_{2s+1}(u_1)}\cdot\Xi e^{-}_{2s+1}(u)\right\} ce_{2s+1}(v)}$$

$\cdots\cdots(13)$

5.2 前節で双極絲状電流モーメントがx軸方向を向いてゐる場合には始源電界 E_{z0} は次の如く定る。

$$E_0 = -\frac{1}{2}\omega\mu k \cdot aI \cdot H^{(1)}_1(kr)\cdot\sin\varphi$$

一方 $H^{(1)}_1(kr)\sin\varphi = \frac{H^{(1)}_1(kr)}{kr}\cdot kr\sin\varphi = \frac{H^{(1)}_1(kr)}{kr}\cdot kf\sinh u\sin v$

$$= 2K\sinh u\sin v\,(\frac{K^2}{4})^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^m(m+1)H^{(1)}_{m+1}(\frac{K}{2}e^{u})J_{m+1}(\frac{K}{2}e^{-u}) \times C'_m(\cos 2v)$$

故に

$$E_0 = \frac{8}{K}A\cdot\sinh u\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(m+1)H^{(1)}_{m+1}(\frac{K}{2}e^{u})J_{m+1}(\frac{K}{2}e^{-u}) \times \frac{\sin 2(m+1)v}{2\cos v} \quad (1)$$

但し $K = kf$

斯くして前節と同様にして上式を楕円柱の函数に展開すると

$$E_0(u,v) = \sum D_n(u)\{A_n ce_n(v) + B_n se_n(v)\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} A_n\cdot D_n(u) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{N_{ce,n}}\int_0^{2\pi}E_0(u,v)\,ce_n(v)\,dv \\ B_n\cdot D_n(u) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{N_{se,n}}\int_0^{2\pi}E_0(u,v)\,se_n(v)\,dv \end{aligned}\right\}(2.1)$$

となる。叔.

$$\frac{\sin 2(m+1)v}{2\cos v} = \frac{1}{2i}\,\frac{e^{i(2m+2)v} - e^{-i(2m+2)v}}{e^{iv}+e^{-iv}}$$
$$= \sin(2m+1)v - \sin(2m-1)v + \sin(2m-3)v - \cdots\cdots + (-)^m \sin v$$

扨 a, b を正の整数として

$$(5)\begin{cases} \int_0^{2\pi}\sin(2a+1)x\cdot\sin 2bx\,dx = 0, & \int_0^{2\pi}\sin(2a+1)x\cos 2bx\,dx = 0 \\ \int_0^{\pi}\sin(2a+1)x\cdot\cos(2b+1)x\,dx = 0, & \int_0^{2\pi}\cos(2a+1)x\cos 2bx\,dx = 0 \\ \int_0^{2\pi}\sin(2a+1)x\cdot\sin(2b+1)x\,dx = \begin{cases} 0 & a \neq b \\ \pi & a = b \end{cases} & \end{cases}$$

であるから上の $E_0(u,v)$ と ce_n 又は se_n との積の積分(3.1)に於て se_{2s+1} 以外はすべて消失する。そして

$$B_{2s+1}\cdot U_{2s+1}(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N_{se\cdot 2s+1}}\int_0^{2\pi}E_0(u,v)\,se_{2s+1}(v)\,dv$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{N_{se,2s+1}}\cdot\frac{8\pi}{K}\Lambda\sinh u\cdot\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(m+1)\left\{\gamma_{2m+1}^{2s+1} - \gamma_{2m-1}^{2s+1} + \cdots\cdots + (-)^m\gamma_1^{2s+1}\right\}H_{m+1}^{(1)}\left(\tfrac{K}{2}e^u\right)J_{m+1}\left(\tfrac{K}{2}e^{-u}\right)$$

即ち E_0 の表示として結局次式が得られる。

$$E_0(u,v) = \frac{4}{K}\Lambda\sinh u\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{N_{se.2s+1}}\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(m+1)\left\{\gamma_{2m+1}^{2s+1} - \gamma_{2m-1}^{2s+1} + \cdots\cdots + (-)^m\gamma_1^{2s+1}\right\}H_{m+1}^{(1)}\left(\tfrac{K}{2}e^u\right)J_{m+1}\left(\tfrac{K}{2}e^{-u}\right)\times se_{2s+1}(v)$$

扨

$$\overset{+}{\Xi}_{O_{2s+1}}(u) = \sinh u\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left\{\gamma_0^{2s+1} - \gamma_1^{2s+1} + \cdots\cdots + (-)^m\gamma_m^{2s+1}\right\}\times H_{m+1}^{(1)}\left(\tfrac{K}{2}e^u\right)J_{m+1}\left(\tfrac{K}{2}e^{-u}\right) \quad \cdots\cdots(5)$$

とすると $E_0(u,v)$ は結局次の様に書ける。

$$E_0(u,v) = \frac{4\Lambda}{K}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{N_{se,2s+1}}\cdot\overset{+}{\Xi}_{O_{2s+1}}(u)\,se_{2s+1}(v) \quad \cdots\cdots(4)$$

但し

$$se_{2s+1}(v) = \sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m^{2s+1}\sin(2m+1)v \quad \cdots\cdots(6)$$

斯くて双極線状電流源が楕円柱中洞の中心に置かれた時の空洞中の電界は

(綜合)

$$\boxed{E(u,v) = \frac{4\Lambda}{K}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{N_{se,2s+1}}\left\{\overset{+}{\Xi}_{O_{2s+1}}(u) - \frac{\overset{+}{\Xi}_{O_{2s+1}}(u_1)}{\Xi_{O_{2s+1}}(u_1)}\cdot\Xi_{O_{2s+1}}(u)\right\}\times se_{2s+1}(v) \quad \cdots(7)}$$

となる。但し $\Xi_{O_{2s+1}}(u)$ は $\overset{+}{\Xi}_{O_{2s+1}}(u)$ の表示式中の $H_{m+1}^{(1)}\left(\tfrac{K}{2}e^u\right)$ を

$J_{m+1}(\frac{\kappa}{2}e^{u})$で置換へたものである。そして $N_{se,2s+1}$ は $se_{2s+1}(v)$ の正規化因数で次式で与へられる。 3-6

$$N_{se,2s+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{se_{2s+1}(v)\}^2 dv = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(\gamma_n^{2s+1})^2 \qquad (8)$$

(7) は次の様に書くことが出来る。

$$E(u,v) = -A\cdot H_1^{(1)}(kr)\sin\varphi - \frac{4A}{\kappa}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{N_{se,2s+1}}\frac{\overset{+}{\Xi}_{0_{2s+1}}(u_1)}{\overset{-}{\Xi}_{0_{2s+1}}(u_1)} \times \overset{-}{\Xi}_{0,2s+1}(u)\cdot se_{2s+1}(v) \qquad \cdots\cdots (7.1)$$

上式で，第二項以下は空洞壁による反作用を示す。

5.3 数値例 5.1節の附論を実際の数値によつて検当しよう。

$$\frac{d^2E}{dv^2} - \left(\frac{\kappa^2}{2}\cos 2v + B + \frac{\kappa^2}{2}\right)E = 0\,, \quad \kappa = kf$$

を標準形に直す

$$\boxed{\frac{d^2E}{dv^2} + (4A + 16q\cos 2v)E = 0}$$

従て $q = \frac{1}{32}\kappa^2$, $4A = -\left(B + \frac{\kappa^2}{2}\right)$ である。

$q=0.5\,(\kappa=4)$ としよう。この場合 ce_{2s+1} に対する個有値A及び正規化因数Nは附録数値表によつて

	A	N
ce_1 に対し	0.579502	0.73204
ce_3 〃	2.6677657	0.790567
ce_5 〃	6.3359395	0.54906

(1)

であつて，其のフーリエ級数形は次の如くである。

$$(2)\left\{\begin{aligned}
ce_1(0.5,v) &= \cos v - 0.67049\cos 3v + 0.120067\cos 5v \\
&\quad - 0.010333\cos 7v + 0.00053\cos 9v - 0.00001 \\
&\quad \times\cos 11v + \cdots\cdots \\
ce_3(0.5,v) &= 0.705349\cos v + \cos 3v - 0.28758\cos 5v \\
&\quad + 0.03019\cos 7v - 0.00172\cos 9v \\
&\quad + 0.00007\cos 11v - \cdots\cdots \\
ce_5(0.5,v) &= 0.050554\cos v + 0.257114\cos 3v \\
&\quad + \cos 5v - 0.171175\cos 7v + 0.012339 \\
&\quad \times\cos 9v - 0.000517\cos 11v + 0.000014 \\
&\quad \times\cos 13v - \cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

又之れに対する変函数は次の様になる。

$$\overset{+}{\Xi}e_1(q,u) = \overset{+}{\Xi}e_1(0.5\,;u) = \cosh u\{H_1^{(1)}(\tfrac{\kappa}{2}e^{u})J_1(\tfrac{\kappa}{2}e^{-u})$$
$$-0.65902H_2^{(1)}(\tfrac{\kappa}{2}e^{u})J_2(\tfrac{\kappa}{2}e^{-u}) + H_3^{(1)}(\tfrac{\kappa}{2}e^{u})J_3(\tfrac{\kappa}{2}e^{-u})$$

$$-1.75698\,H_4^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u}\right)J_4\left(\tfrac{k}{2}e^{-u}\right)+2.19887\,H_5^{(1)}J_5-2.6385\times H_6^{(1)}J_6+\cdots\cdots\Big\}$$

$$\Xi e_3^{+}(q;u)=\Xi e_3^{+}(0.5;u)=\cosh u\Big\{0.70535\,H_1^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u}\right)J_1\left(\tfrac{k}{2}e^{-u}\right)-3.41070\,H_2^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u}\right)J_2\left(\tfrac{k}{2}e^{-u}\right)+4.2533\,H_3^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u}\right)J_3\left(\tfrac{k}{2}e^{-u}\right)-5.79184\,H_4^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u}\right)J_4\left(\tfrac{k}{2}e^{-u}\right)+7.2312\,H_5^{(1)}J_5-8.67786\times H_6^{(1)}J_6+\cdots\cdots\Big\}$$

$$\Xi e_5^{+}(q;u)=\Xi e_5^{+}(0.5;u)=\cosh u\Big\{0.050554\,H_1^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u}\right)J_1\left(\tfrac{k}{2}e^{-u}\right)-0.61534\,H_2^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u}\right)J_2\left(\tfrac{k}{2}e^{-u}\right)+3.9230\,H_3^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u}\right)J_3\left(\tfrac{k}{2}e^{-u}\right)-4.54597\,H_4^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u}\right)J_4\left(\tfrac{k}{2}e^{-u}\right)+5.74416\,H_5^{(1)}J_5-6.8899\,H_6^{(1)}J_6+8.0383\,H_7^{(1)}J_7-\cdots\cdots\Big\}.$$

ここに $k/2=\frac{1}{2}\sqrt{32q}=2$ である。即ち $k=4$ 。

$\Xi e_{2s+1}^{-}(q,v)$ は上の $\Xi e_{2s+1}^{+}(q,v)$ に於て $H_n^{(1)}$ の代りに J_n を用ひればよい。

故(13)式の $E(u,v)$ の表現に於て反作用を示す項のみを取出して再び下に示す。

$$E_{reaction}(u,v)=\frac{4\Lambda}{k}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{N_{ce,2s+1}}\cdot\Xi e_{2s+1}^{+}(u_1)\frac{\Xi e_{2s+1}^{-}(u)}{\Xi e_{2s+1}^{-}(u_1)}ce_{2s+1}(v)\qquad\cdots\cdots(13.1)$$

である。

例へば $k=4$, $e^{u_1}=2.5$ $(u_1=0.9163)$ なる如き楕円柱空間の場合には $\cosh u_1=1.4500$

$$H_1^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u_1}\right)J_1\left(\tfrac{k}{2}e^{-u_1}\right)=H_1^{(1)}(5)J_1(0.8)=(-0.3275791+0.1473631i)\times 0.368842=-0.12082493+0.05453812i$$

$$H_2^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u_1}\right)J_2\left(\tfrac{k}{2}e^{-u_1}\right)=H_2^{(1)}(5)J_2(0.8)=(+0.046565+0.367663i)\times 0.0758178=0.00353045+0.0278754i$$

$$H_3^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u_1}\right)J_3\left(\tfrac{k}{2}e^{-u_1}\right)=H_3^{(1)}(5)J_3(0.8)=(0.364831++0.146267i)\times 0.0102468=0.00373835+0.00149877i$$

$$H_4^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u_1}\right)J_4\left(\tfrac{k}{2}e^{-u_1}\right)=H_4^{(1)}(5)J_4(0.8)=(0.391232+0.1921423i)\times \overset{0.0010330}{\cancel{0.0000831}}=\overset{0.000404143}{\cancel{0.0000217?0}}-\overset{0.000198482i}{\cancel{0.0000377020i}}$$

$$H_5^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u_1}\right)J_5\left(\tfrac{k}{2}e^{-u_1}\right)=H_5^{(1)}(5)J_5(0.8)=(0.261141-0.4536948i)\times 0.0000831=0.000021703-0.0000377020i$$

$$H_6^{(1)}\left(\tfrac{k}{2}e^{u_1}\right)J_6\left(\tfrac{k}{2}e^{-u_1}\right)=H_6^{(1)}(5)J_6(0.8)=(0.131049-0.7152474i)\times 0.0000058=0.0^{6}760-0.0^{5}4148i$$

又 $e^{u_1}=5$ （$u_1=1.60944$）では

$H_1^{(1)}(\frac{\kappa}{2}e^{u_1})J_1(\frac{\kappa}{2}e^{-u_1})=H_1^{(1)}(10)J_1(0.4)=(0.043473+0.2490154i)$
$\times 0.1960266=0.00852186+0.04881364i$

$H_2^{(1)}(\frac{\kappa}{2}e^{u_1})J_2(\frac{\kappa}{2}e^{-u_1})=H_2^{(1)}(10)J_2(0.4)=(0.254630-0.0058681i)$
$\times 0.0197347=0.005025047-0.0001158052i$

$H_3^{(1)}(\frac{\kappa}{2}e^{u_1})J_3(\frac{\kappa}{2}e^{-u_1})=H_3^{(1)}(10)J_3(0.4)=(0.058379-0.2513627i)$
$\times 0.0013201=0.000077066-0.000331823i$

$H_4^{(1)}(\frac{\kappa}{2}e^{u_1})J_4(\frac{\kappa}{2}e^{-u_1})=H_4^{(1)}(10)J_4(0.4)=(-0.219603-0.1449495i)$
$\times 0.0000661=-0.0^4 14516-0.0^5 958116i$

$H_5^{(1)}(\frac{\kappa}{2}e^{u_1})J_5(\frac{\kappa}{2}e^{-u_1})=H_5^{(1)}(10)J_5(0.4)=(-0.234062+0.1354030i)$
$\times 0.0000026=-0.0^6 6086+0.0^6 35205i$

又 $\cosh u_1=2.6000$ である。

これを用いて $q=0.5$；$u_1=0.9163$ の時は級数の最初の三項は次の如くなる。

$$(4)\begin{cases}\Xi e_1^{+}(0.5;0.9163)=-0.172+0.056i\\ \qquad \Xi \bar{e}_1(0.5;0.9163)=-0.172\\ \Xi e_3^{+}(0.5;0.9163)=-0.120-0.070i\\ \qquad \Xi \bar{e}_3(0.5;0.9163)=-0.120\\ \Xi e_5^{+}(0.5;0.9163)=0.0066-0.011i\\ \qquad \Xi \bar{e}_5(0.5;0.9163)=0.0066\end{cases}$$

$q=0.5$；$u_1=1.60944$ の時には

$$(5)\begin{cases}\Xi e_1^{+}(0.5;1.60944)=0.0137+0.126i\\ \qquad \Xi e_1(0.5;1.60944)=0.0137\\ \Xi e_3^{+}(0.5;1.60944)=-0.030+0.095i\\ \qquad \Xi e_3(0.5;1.60944)=-0.030\\ \Xi e_5^{+}(0.5;1.60944)=-0.0063+0.0033i\\ \qquad \Xi e_5(0.5;1.60944)=-0.0063\end{cases}$$

(13.1) の無限級数は今の場合の様に $q=0.5$（$\kappa=4$）位では最初の数項により決定される。そして有限電界は(2),(5)を用いて各 u 及び v の値に対して容易に決定することが出来る。但し $u\leq u_1$，$0\leq v\leq 2\pi$，とする。

5.32 他の例として次に

$q=\frac{1}{32}$（$\kappa=1$）としよう。この値に対して $ce_{2s+1}(q,v)$ は次の如くなる。

$$(1)\begin{cases}ce_1(1/32;v)=\cos v-0.031359\cos 3v+0.000339\cos 5v\\ \qquad -0.0000018\cos 7v+\cdots\cdots\\ ce_3(1/32;v)=0.031363\cos v+\cos 3v-0.015630\\ \qquad \times\cos 5v+0.000098\cos 7v-0.0000003\cos 9v\\ ce_5(1/32;v)=0.000164\cos v+0.015625\cos 3v\\ \qquad +\cos 5v-0.0104167\cos 7v+0.000046\end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} \times \cos 9v - 0.0000001 \cos 11v + \cdots\cdots \\ ce_7(1/32; v) = 0.0000003 \cos v + 0.000065 \cos 3v \\ \quad + 0.010417 \cos 5v + \cos 7v - 0.007813 \\ \quad \times \cos 9v + 0.000027 \cos 11v - 0.0000006 \cos 13v \\ \quad + \cdots\cdots \end{array} \right.$$

3-7.

$Nce^1 = 0.500491751$; $Nce^3 = 0.500613922$; $Nce^5 = 0.5001763386$

$Nce^7 = 0.5000847809$

上の各三角級数の係数を用ひて(10)より $\Xi e^+_{2s+1}(q; u)$ は次の様に定まる。

$$(2)\begin{cases} \Xi e_1^+(1/32; u) = \cosh u \{ H_1''' J_1 - 1.93728 H_2''' J_2 + 2.90694 H_3''' J_3 \\ \qquad - 3.87591 H_4''' J_4 + \cdots\cdots \} \\ \Xi e_3^+(1/32; u) = \cosh u \{ 0.03136 H_1''' J_1 - 2.06272 H_2''' J_2 \\ \qquad + 3.04720 H_3''' J_3 - 4.06332 H_4''' J_4 + \cdots \} \\ \Xi e_5^+(1/32; u) = \cosh u \{ 0.00016 H_1''' J_1 - 0.03158 H_2''' J_2 \\ \qquad + 3.04737 H_3''' J_3 - 4.02149 H_4''' J_4 + \cdots \} \\ \Xi e_7^+(1/32; u) = \cosh u \{ 0.0000003 H_1''' J_1 - 0.00013 H_2''' J_2 \\ \qquad + 0.031447 H_3''' J_3 - 4.04193 H_4''' J_4 + \cdots \} \end{cases}$$

ここに H_n''' の変数は $\frac{1}{2}e^u$ であり J_n のそれは $\frac{1}{2}e^{-u}$ である。

$u \leq u_1$, $0 \leq v \leq 2\pi$ なる u, v の任意の値に対して (1)(2)の各函数が決定せられ得るから (13.1) の反作用電界は直ぐ求められる。

例へば

$$\begin{cases} \Xi e_1^+(1/32; 1.60944) = 0.061769 + 0.021221\, i \\ \Xi e_3^+(1/32; 1.60944) = -0.000928 + 0.003028\, i \\ \Xi e_5^+(1/32; 1.60944) = 0.000000319 - 0.00007962\, i \\ \Xi e_7^+(1/32; 1.60944) = 0 - 0.00000081 + 0.00000174\, i \end{cases}$$

ここに $e^{u_1} = 5$ $(u_1 = 1.60944)$ である。

又 $\Xi \bar{e}_{2s+1}(1/32; 1.60944)$ は上式の実部のみである。

又 $\Xi \bar{e}_1(\frac{1}{32}; 0) = 0.058694026 - 1.93728204 \times 0.0009366 +$
$+ 2.90694072 \times 0.0^5657 - 3.87591388 \times 0.0^726$
$= 0.056898566$

$\Xi \bar{e}_3(\frac{1}{32}; 0) = 0.031362909 \times 0.058694026$
$- 2.06272582 \times 0.0009366 + 3.04719771$
$\times 0.0^5657 - 4.06332088 \times 0.0^726$
$= \cancel{-}0.0^471219$

$\Xi \bar{e}_5(1/32; 0) = 0.000164456 \times 0.058694026 - 0.03157912$
$\times 0.0009366 + 3.04736868 \times 0.0^5657$
$- 4.02149148 \times 0.0^726 = \cancel{0.0}$
$= -0.0^87765$

$$\Xi ce_7(\tfrac{\pi}{32};0)=0.0^{6}339\times 0.058694026-0.00013088\times 0.0009366+0.03144747\times 0.0^{5}657-4.04192996\times 0.0^{7}26=-0.0^{8}1165$$ 3

(13.1) の $u=0$ に於ける反作用は次の様に計算される。

$$+E_{react.}(0;v)=4A\left\{\frac{0.06177+0.02122i}{0.500492}\cdot\frac{0.05690}{0.06177}ce_1(v)+\frac{-0.00093+0.00303i}{0.500614}\cdot\frac{-0.0^{4}71}{-0.0^{3}93}ce_3(v)+\frac{0.0^{6}32-0.0^{4}8i}{0.500176}\cdot\frac{-0.0^{8}78}{0.0^{6}32}ce_5(v)+\frac{-0.0^{7}8+0.0^{5}17}{0.500085}\cdot\frac{-0.0^{8}1}{-0.0^{7}8}ce_7(v)+\cdots\right\}$$

$$\doteqdot 4A\{(0.11369+0.03906i)ce_1(v)+(-0.000142+0.000462i)ce_3(v)\}$$

ce_1, ce_3 は(1)で与へられる。

又 $u=0$ に於ける始源電界 E_0 は第5.1節(3)より

$$E_0\doteqdot A\frac{H_1^{(1)}\left(\frac{\kappa}{2}\sqrt{e^{2u}+2\cos 2v+e^{-2u}}\right)}{\frac{\kappa}{2}\sqrt{e^{2u}+2\cos 2v+e^{-2u}}}\kappa\cosh u\cos v$$

於て $\kappa=1$, $u=0$ として

$$E_0=2A\frac{H_1^{(1)}\{\frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos 2v)}\}}{\sqrt{2(1+\cos 2v)}}\cos v$$

であるから反作用電界の始源電界に対する比は中心近傍に於て

$$\Re=\left(\frac{E_{react}}{E_0}\right)_{u=0}\doteqdot\frac{2\{(0.11369+0.03906i)ce_1(v)+(-0.000142+0.000462i)ce_3(v)\}}{\frac{H_1^{(1)}\{\frac{1}{2}\sqrt{2(1+\cos 2v)}\}}{\sqrt{2(1+\cos 2v)}}\cdot\cos v}\quad\cdots\cdots(3)\ *$$

第六節　平面波と楕円柱状導体

6.1. 楕円柱状導体に平面波が投射した場合の平面波の回折の問題は Sieger† により行はれた。而し彼の行ったものは楕円柱が無限に薄い板となった場合、その板に直角に投射する波による回折波の強さを、板の中心を通って板に直角な直線の上のみについて求めてゐる。ここでは薄板でなくやはり $u=u_1$ なる楕円柱であるとし、平面波が楕円の中心の面に直角な方向から進んで来るとする。そして電界の方向は楕円柱の母線と平行であるとするとこれは次式の実部又は虚部で与へられる。

$$E=E_0e^{-iky}\cdot e^{-i\omega t}\qquad(1)$$

＊特に焦点即ち $v=0$ では

$$\Re=\left|\frac{4\{0.1100189+0.03832i\}}{H_1^{(1)}(1)}\right|\doteqdot 52\%\text{ となる}$$

† B. Sieger: Die Beugung einer ebenen elektrischen Wellen an einem Schirm von elliptischen Querschnitt. Ann. d. Physik. 27, ~~S. 629–664~~ (1908) S.629–664

8 但し E_0は電界の強さ，kは伝播定数であって $k=\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega$ $=\omega/v=2\pi/\lambda$ である。

$y=f\sinh u\sin v$ であるから之を用いて

$$e^{-iky}=e^{-i\kappa\sinh u\sin v}=\cos(\kappa\sinh u\sin v)-i\sin(\kappa\sinh u\sin v)$$

であるから e^{-iky}を楕円柱の函数に展開する。問題は $v=\pm\pi/2$ について対称だから

$$e^{-i\kappa\sinh u\sin v}=\sum_{s=0}^{\infty}A_{2s}\,Ue_{2s}(u)\,ce_{2s}(v)+\sum_{s=0}^{\infty}B_{2s+1}\,Uo_{2s+1}(u)\,se_{2s+1}(v)\quad\cdots(2)$$

の如く表し得る。（第四節参照）

$Ue_{2s}(u)$及び$Uo_{2s+1}(u)$は夫々 $ce_{2s}(v)$及び$se_{2s+1}(v)$の特性値と同じ値を分離常数Bに有する。

$$\frac{d^2U}{du^2}+(\kappa^2\cosh^2u+B)U=0$$

なる方程式の解である。そしてce_{2s}，se_{2s+1}の直交性を用いて次の如く与へられる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i\kappa\sinh u\sin v}ce_{2s}(v)\,dv=N_{ce,2s}A_{2s}\,Ue_{2s}(u)\\&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i\kappa\sinh u\sin v}se_{2s+1}(v)\,dv=N_{se,2s+1}B_{2s+1}\,Uo_{2s+1}(u)\end{aligned}\right\}(3.1)$$

即ち

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\kappa\sinh u\sin v)\,ce_{2s}(v)\,dv=N_{ce,2s}A_{2s}\,Ue_{2s}(u)\\&\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\kappa\sinh u\sin v)\,se_{2s+1}(v)\,dv=N_{se,2s+1}B_{2s+1}\,Uo_{2s+1}(u)\end{aligned}\right.$$

となる。上の2式の左辺の函数$e^{-i\kappa\sinh u\sin v}$は二次元の振動方程式の解であるから、積分自身は$d^2U/du^2+(\kappa^2\cosh^2u+B)U=0$の解でなければならない。（第五節§1(2)(6)及び(7)式の前論参照）故にこの積分を$U(u)$と定義すると

$$\left.\begin{aligned}&Ue_{2s}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\kappa\sinh u\sin v)\,ce_{2s}(v)\,dv\\&Uo_{2s+1}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\kappa\sinh u\sin v)\,se_{2s+1}(v)\,dv.\end{aligned}\right\}(4)$$

とすると上の関係より

$$A_{2s}=\frac{1}{N_{ce,2s}},\quad B_{2s+1}=\frac{-i}{N_{se,2s+1}}\quad\cdots(5)$$

即ち投射波の楕円函数による表示式が得られる。

$$E=E_0\left\{\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{N_{ce,2s}}Ue_{2s}(u)\,ce_{2s}(v)-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{i}{N_{se,2s+1}}Uo_{2s+1}(u)\times se_{2s+1}(v)\right\}e^{-i\omega t}\quad\cdots\cdots(6)$$

同様にx軸方向から来る投射波に対しては

$$E = E_0 \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{N_{ce,2s}} \mathrm{W}e_{2s}(u)\, ce_{2s}(v) - i \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{N_{ce,2s+1}} \mathrm{W}e_{2s+1}(u)\, ce_{2s+1}(v) \right\} \times e^{-i\omega t} \quad \cdots\cdots (7)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{W}e_{2s}(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\kappa \cosh u \cos v)\, ce_{2s}(v)\, dv \\ \mathrm{W}e_{2s+1}(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\kappa \cosh u \cos v)\, ce_{2s+1}(v)\, dv \end{aligned}\right\} \cdots (8)$$

とする。

楕円筒による反作用界をも考慮して綜合電界は次の如し。先づy方向から投射する波に対しては

$$E = \left[\sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{E_0}{N_{ce,2s}} \mathrm{U}e_{2s}(u) + A_{2s} \mathrm{V}e_{2s}(u) \right\} ce_{2s}(v) + \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{-iE_0}{N_{se,2s+1}} \mathrm{U}o_{2s+1}(u) + B_{2s+1} \mathrm{V}o_{2s+1}(u) \right\} se_{2s+1}(v) \right] e^{-i\omega t} \quad \cdots (9)$$

但し

$$(10)\left\{\begin{aligned} \mathrm{V}e_{2s}(u) &= \tfrac{1}{2}\alpha_0^{2s} H_0^{(1)}\!\left(\tfrac{\kappa}{2}e^{u}\right) J_0\!\left(\tfrac{\kappa}{2}e^{-u}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \alpha_n^{2s} H_n^{(1)}\!\left(\tfrac{\kappa}{2}e^{u}\right) J_n\!\left(\tfrac{\kappa}{2}e^{-u}\right) \\ \mathrm{V}o_{2s+1}(u) &= \sinh u \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left[\gamma_0^{2s+1} - \gamma_1^{2s+1} + \cdots + (-)^n \gamma_n^{2s+1}\right] H_{n+1}^{(1)}\!\left(\tfrac{\kappa}{2}e^{u}\right) \times J_{n+1}\!\left(\tfrac{\kappa}{2}e^{-u}\right) \end{aligned}\right.$$

又x方向から投射する場合には

$$E = \left[\sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{E_0}{N_{ce,2s}} \mathrm{W}e_{2s}(u) + C_{2s} \mathrm{X}e_{2s}(u) \right\} ce_{2s}(v) + \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{-iE_0}{N_{ce,2s+1}} \mathrm{W}e_{2s+1}(u) + D_{2s+1} \mathrm{X}e_{2s+1}(u) \right\} ce_{2s+1}(v) \right] e^{-i\omega t} \quad \cdots\cdots (11)$$

ここに $\mathrm{X}e_{2s}(u)$ は $\mathrm{V}e_{2s}(u)$ と同じである。又

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X}e_{2s+1}(u) &= \cosh u \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{2s+1} H_{n+1}^{(1)}\!\left(\tfrac{\kappa}{2}e^{u}\right) J_{n+1}\!\left(\tfrac{\kappa}{2}e^{-u}\right) \\ \text{但し}\quad \beta_n^{2s+1} &= (-)^n (n+1)\left[\beta_0^{2s+1} + \cdots + \beta_n^{2s+1}\right] \end{aligned}\right\} (12)$$

である。

先づy方向から投射する波即ち楕円柱の中の広い面に直角に向って投射する波について考へる。$u = u_1$ を楕円柱の表面とする。楕円柱が完全導電性であるならば $u = u_1$ で電界Eが0になるから この条件から 定数 A_{2s}, B_{2s+1} が次の如く定まる。

$$\therefore A_{2s} = \frac{-E_0 \mathrm{U}e_{2s}(u_1)}{N_{ce,2s} \mathrm{V}e_{2s}(u_1)}, \quad B_{2s+1} = \frac{iE_0}{N_{se,2s+1}} \cdot \frac{\mathrm{U}o_{2s+1}(u_1)}{\mathrm{V}o_{2s+1}(u_1)}$$

故に電界は時間係数 $\exp(-i\omega t)$ を省略して次の如くである。

$$\boxed{\begin{aligned} E = E_0 e^{-iky} &- E_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{N_{ce,2s}} \frac{\mathrm{U}e_{2s}(u_1)}{\mathrm{V}e_{2s}(u_1)} \mathrm{V}e_{2s}(u)\, ce_{2s}(v) \\ &+ iE_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{N_{se,2s+1}} \frac{\mathrm{U}o_{2s+1}(u_1)}{\mathrm{V}o_{2s+1}(u_1)} \mathrm{V}o_{2s+1}(u)\, se_{2s+1}(v) \quad \cdots\cdots (13) \\ & u \geqq u_1 \end{aligned}}$$

ここに $U_{e2s}(u)$, $U_{o2s+1}(u)$ は (4) で, V_{e2s}, $V_{o2s+1}(u)$ は (10) で与へられる。

同様にオ方向から投射する波は

$$\boxed{\begin{aligned} E = E_0 e^{-ikx} &- E_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{N_{ce,2s}} \frac{W_{e2s}(u_1)}{X_{e2s}(u_1)} X_{e2s}(u)\, ce_{2s}(v) \\ &+ iE_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{N_{ce,2s+1}} \frac{W_{e2s+1}(u_1)}{X_{e2s+1}(u_1)} X_{e2s+1}(u)\, ce_{2s+1}(v) \quad \cdots (14) \\ & u \geq u_1 \end{aligned}}$$

ここに $W_{e2s}(u)$, $W_{e2s+1}(u)$ は (8) で与へられ, $X_{e2s}(u)=[V_{e2s}(u)]$ は (10) で $X_{e2s+1}(u)$ は (12) で与へられる。ce, se 等は第四章に与へられてゐる。

(13)及び(14)の式で第一項は勿論入射波であり残余の項は楕円柱導体の存在に基くその反作用界である。

6.2. 導体による平面波の回折の問題を前述の様に級数展開法によって解くことは任意の形状の導体についても適用されるとは限らない。球及び円柱導体についてはこれは解決せられる。而し他の形状の導体については球及び円柱の場合程充分には論ぜられてゐない。楕円柱導体の場合には Sieger によって取上げられたが Mathieu 函数が余りよく研究されてゐなかったので充分な数値的論議に致らなかった。抛物柱の場合には Epstein* によって論ぜられた。この場合所要の電磁界は $d^2X/dx^2+(k^2x^2+A)X=0$ なる Weber の微分方程式を解いて得られる。この方程式の解はよく知られてゐる様に Hermite の多項式である。無限に薄い抛物柱即ち半平面の場合は Sommerfeld※ が論じた。尚双曲座標の場合は Morse 及び Rubenstein+ が論じてゐる。

楕円体による平面波の回折は Gans‡, Möglich§ 等によって研究された。特に有限長アンテナの問題が長球導体の極限の場合として ||Page 及び Adams|| によって論ぜられた。

6.3 6.1の数値例

実際の数値を以て(13)式の反作用の大きさを算定してみよう。

(4)より $$U_{e2s}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(k\sinh u\sin v)\,ce_{2s}(v)\,dv$$

既周知の如く $\cos(k\sinh u\sin v)=J_0(k\sinh u)$ $+2J_2(k\sinh u)\cos 2v+2J_4(k\sinh u)\cos 4v+\cdots$

* P. Epstein : Diss. München 1914

※ A. Sommerfeld : Math. Ann. Bd XLVII S. 317 (1896)

\+ P. M. Morse & Rubenstein : Phys. Rev. **54**, 895 (1938)

‡ Gans ; Ann. Phys. **37**, 881, **47**, 270 (1915), **61**, 465 (1920)

§ Möglich : Ann. d. Phys. **83**, 609 (1927)

|| Page & Adams : Electrodynamics (1940)

であり又才四節より

$$ce_{2s}(v) = \frac{1}{2}\alpha_0^{2s} + \alpha_1^{2s}\cos 2v + \alpha_2^{2s}\cos 4v + \alpha_3^{2s}\cos 6v + \cdots$$

であるから三角函数の直交性を用いて

$$\mathrm{Ue}_{2s}(u) = \frac{1}{2}\alpha_0^{2s} J_0(\kappa \sinh u) + \alpha_1^{2s} J_2(\kappa \sinh u) +$$
$$+ \alpha_2^{2s} J_4(\kappa \sinh u) + \alpha_3^{2s} J_6(\kappa \sinh u) + \cdots\cdots$$

である。又

$$\mathrm{Uo}_{2s+1}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\kappa \sinh u \sin v)\, se_{2s+1}(v)\, dv$$

そして

$$\sin(\kappa \sinh u \sin v) = 2J_1(\kappa \sinh u)\sin v + 2J_3(\kappa \sinh u) \times$$
$$\times \sin 3v + 2J_5(\kappa \sinh u)\sin 5v + \cdots\cdots$$
$$se_{2s+1}(v) = \gamma_0^{2s+1}\sin v + \gamma_1^{2s+1}\sin 3v + \gamma_2^{2s+1}\sin 5v + \cdots$$

であるから、前と同様にして次式が得られる。

$$\mathrm{Uo}_{2s+1}(u) = \gamma_0^{2s+1} J_1(\kappa \sinh u) + \gamma_1^{2s+1} J_3(\kappa \sinh u)$$
$$+ \gamma_2^{2s+1} J_5(\kappa \sinh u) + \cdots\cdots$$

こゝで $\underline{\kappa = 1 \quad (\text{即ち } q = 1/32),\ \sinh u = 0.1}$ とすると

$\kappa \sinh u = 0.1$

$$J_0(\kappa \sinh u) = J_0(0.1) = 0.9975016, \quad J_1(0.1) = 0.0499375$$
$$J_2(0.1) = 0.0012490, \quad J_3(0.1) = 0.0000208$$
$$J_4(0.1) = 0.0000003, \quad J_5(0.1) = 0.0000000$$

$ce_{2s}(q; v)$ は次の様になる。

$$ce_0(1/32; v) = 1 - \left(\frac{1}{8} - 1/8192\right)\cos 2v + (1/512)\cos 4v +$$
$$- (1/73728)\cos 6v + \cdots\cdots,$$

$$= 1 - 0.1241455\cos 2v + 0.001953125\cos 4v$$
$$- 0.00001356336\cos 6v + \cdots\cdots$$

$$ce_2(1/32; v) = (1/16 - 5/12288) + \cos 2v - (1/32 + 43/884736)\cos 4v$$
$$+ (1/6144)\cos 6v - \cdots\cdots$$

$$= 0.06290690 + \cos 2v - 0.031298602\cos 4v + 0.00016276\cos 6v - \cdots$$

$$ce_4(1/32; v) = 1/3072 + (1/48 + 1/147456 + 7/2211840)\cos 2v +$$
$$+ \cos 4v - (1/80 + 13/409600)\cos 6v + 1/15360\cos 8v - \cdots$$

$$= 0.0003255 + 0.020832796\cos 2v + \cos 4v - 0.01253173\cos 6v$$
$$+ 0.000065104\cos 8v - \cdots\cdots$$

$$N_{ce,0} = 1.00770796, \quad N_{ce,2} = 0.50444709, \quad N_{ce,4} = 0.5002958$$

3-10. $se_1(1/32;v) = \sin v - (1/32 - 1/1024 + 1/98304)\sin 3v$
$+ (1/3072 - 1/73728)\sin 5v$
$- (1/589824 - 1/12582912)\sin 7v$
$+ \cdots\cdots$

$= \sin v - 0.03028361 \sin 3v + 0.000311957 \sin 5v$
$- 0.00000161 \sin 7v + \cdots\cdots$

$se_3(1/32;v) = (1/32 - 1/1024 + 1/65536)\sin v + \sin 3v$
$-(1/64 + 7/131072 0)\sin 5v + (1/10240)\sin 7v + \cdots\cdots$

$= 0.030288696 \sin v + \sin 3v - 0.01563034 \sin 5v + 0.00009765 \sin 7v + \cdots\cdots$

$se_5(1/32;v) = (1/6144 - 1/589824)\sin v + (1/64 + 1/196608)\times$
$\times \sin 3v + \sin 5v - (1/96 + 13/12386304)\sin 7v$
$+ (1/21504)\sin 9v + \cdots\cdots$

$= 0.0001611 \sin v + 0.01563008 6 \sin 3v + \sin 5v$
$- 0.01041771 6 \sin 7v + 0.000.046503 \sin 9v + \cdots\cdots$

$N_{se,1} = 0.5004586$, $N_{se,3} = 0.5005809$, $N_{se,5} = 0.50017643$

之より Ue_{2s} 及び Uo_{2s+1} は次の如く成る。又 Ve_{2s}, Vo_{2s+1} は (10)を用いて求められる。之等によって(13)は計算出来る。

$Ue_0(1/32;u_1) = 0.9973466,$

$Ue_2(1/32;u_1) = 0.0639987,$

$Ue_4(1/32;u_1) = 0.0003510,$

$\left(\begin{array}{l} \sinh u_1 = 0.1 \\ u_1 \cong 0.0999 \\ e^{u_1} = 1.10506 \\ e^{-u_1} = 0.90493 \end{array}\right)$

$Uo_1(1/32;u_1) = 0.0499369$

$Uo_3(1/32;u_1) = 0.0015333,$ $\sinh u_1 = 0.1$

$Vo_5(1/32;u_1) = 0.0000084$

$Vo_{2s+1}(u)$ の級数の係数は次の様に成る。

S	$\gamma_0'^{2s+1}$	$\gamma_1'^{2s+1}$	$\gamma_2'^{2s+1}$	$\gamma_3'^{2s+1}$	$\gamma_4'^{2s+1}$
0	1.0	2.0 ~~917867~~ 60567	3.0917867	4.1223887	5.153
1	0.030289	-1.9394226	-2.9560249	-3.94175716	-5.255
2	0.000161	-0.0309379 8	2.95359303	3.9797949	5.306

但し $\gamma_n'^{2s+1} = (n+1)\left[\gamma_0^{2s+1} - \gamma_1^{2s+1} + \gamma_2^{2s+1} - \cdots\cdots (-)^n \gamma_n^{2s+1}\right]$

斯くして(13)の反作用は次の如くなる。

$$E_{react} = -E_0\left\{0.9897179\frac{Ve_0(u)}{Ve_0(u_1)}\cdot ce_0(v) + 0.1268690\frac{Ve_2(u)}{Ve_2(u_1)}\times\right.$$

$$\times ce_2(v) + 0.000701585\frac{Ve_4(u)}{Ve_4(u_1)}ce_4(v) + \cdots\Big\} +$$

$$+ iE_0\left\{0.0997823\frac{V\theta_1(u)}{V\theta_1(u_1)}\cdot se_1(v) + 0.00306304\frac{V\theta_3(u)}{V\theta_3(u_1)}\cdot se_3(v) +\right.$$

$$\left. + 0.000016794\frac{V\theta_5(u)}{V\theta_5(u_1)}se_5(v) + \cdots\right\} \qquad ---- (15)^*$$

但し $\sinh u_1 = 0.1$ である。

(11)を計算するために $H_n^{(1)}(\frac{1}{2}e^{u_1})J_n(\frac{1}{2}e^{-u_1})$ を求める必要がある。$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の夫々の場合の $H_n^{(1)}J_n$ を示すと次の如くである。

n	$e^{u_1} = 1$	$e^{u_1} = 5$
1	$0.058694026 - 0.3564914\,i$	$0.02482364 + 0.0072868\,i$
2	$0.0009366 - 0.1665277\,i$	$0.0005571 - 0.0047629\,i$
3	$0.00000657 - 0.1078279\,i$	$0.00000450 - 0.0001573\,i$
4	$0.00000026 - 0.0802331\,i$	$0.00000002 - 0.00000043\,i$
5	$-0.0643650\,i$	――
6	$-0.05386511\,i$	――

$Ve_{2s}(u)$ の級数の係数は下の如くである。

S	$\frac{1}{2}\alpha_0^{2s}$	α_1^{2s}	α_2^{2s}	α_3^{2s}	α_4^{2s}	α_5^{2s}
0	1	-0.124145	0.0019531	-0.0000136	――	――
1	0.06291	1	-0.03130 ~~-0.006163~~	0.000163	――	――
2	0.000325	0.020843	1	-0.012532	0.0000651	――

第七節　Mathieu函数の数値的計算

Goldstein によって Mathieu の微分方程式の標準形は次の如く与へられてゐる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (4A - 16q\cos 2x)y = 0 \qquad (1)$$

与へられた q の値に対して特に解が π 又は 2π の周期函数になるやうな A の値を≫特性値≪と云ひ、このやうな解を Mathieu 函数と名づける。$q \to 0$ では(1)は1式は $\cos mx$, $\sin mx$ になるが、これに対応する $q \neq 0$ の時の解を

$$ce_0(x),\quad ce_m(x),\quad se_m(x)$$

と書く。そしてこれに属する特性値を A_0, A_m, B_m と書く。m は正の整数である。こゝでは第五節の計算に必要な $ce_{2s+1}(x)$ 及び $se_{2s+1}(x)$ について主として論ずる。

---

* $ce_0(\frac{1}{32};0) = 0.87779405$, $ce_2(\frac{1}{32};0) = 1.03177106$, $ce_4(\frac{1}{32};0) = 1.00870215$ であるから $u = u_1$, $v = 0$ に於ける反作用電界は $E_{react} = -E_0$ となる。

3-last

$$ce_{2s+1}(x) = \beta_0^{2s+1}\cos x + \beta_1^{2s+1}\cos 3x + \beta_2^{2s+1}\cos 5x + \cdots \qquad (2)$$

$$se_{2s+1}(x) = \gamma_1^{2s+1}\sin x + \gamma_2^{2s+1}\sin 3x + \gamma_3^{2s+1}\sin 5x + \cdots \qquad (3)$$

まぎれる恐れがない時は普通係数A, Bの上方の添字2s+1は省略する。(2)に於て $\beta_{n+1}/\beta_n = v_n$ と置き(2)を(1)に代入して、各三角函数の係数を0として

$$\left.\begin{aligned} &2q v_0 + \left(2q + \tfrac{1}{4} - A_{2s+1}\right) = 0 \\ &\left\{\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \alpha_{2s+1}\right\} v_{n-1} + 2q(1 + v_n v_{n-1}) = 0 \ (n \geqq 1) \end{aligned}\right\} (4)$$

同様に(3)を(1)に代入して

$$\gamma_{n+1}/\gamma_n = v_n$$

$$\left.\begin{aligned} &2q v_0 + \left(-2q + \tfrac{1}{4} - B_{2s+1}\right) = 0 \\ &\left\{\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 - B_{2s+1}\right\} v_{n-1} + 2q(1 + v_n v_{n-1}) = 0 \ (n \geqq 1) \end{aligned}\right\} (5)$$

これらの式より特性値A, Bを決定すべき連分数表示がえられる。A, Bが定まればフーリエ級数β, γを求めることは容易である。

第3.1表はce_0, ce_1, ce_2, ⋯⋯, ce_5, se_1, se_2, ⋯⋯ se_6, の特性値を$q = 0$, 0.5, 1.0 ⋯⋯ 5.0 に対して求めたものであり、第3.2表はce_1, ce_3, ce_5, のフーリエ級数の係数を求めたものである。

第3.1表

第3.2表.

第四章 回転対称導体殻による遮蔽作用

本章では回転対称の導体殻による遮蔽の問題として、主として中空の導電性の球，扁球，中空空洞等について考察するつもりである。前章の中空円柱殻が実際問題としてはケーブル遮蔽体に対応するのに対して中空の殻は遮蔽函に対応する。そして之について取扱ったものは中空球の場合を除いては殆んど見当らない。

先づ回転座標に関する一般論より、回転対称導体殻による遮蔽問題に論及して行きたいと思ふ。

第一節 回転面

直交座標(x, y, z)に於てz軸を含む任意の平面を考へる。この平面内で

$$z + i\rho = F(u_1 + i u_2) = F(u) \qquad \cdots\cdots(1)$$ 第4.1図

で与へられる(u_1, u_2)はこの平面内の直交曲線群のパラメーターである。~~此処に~~z軸からの垂直距離ρは$x + iy = \rho e^{i\varphi}$であって、$u_1, u_2$及び$\varphi$に依って直交曲線座標が出来る。そしてこの座標系は$z$軸を回転軸とする任意の回転平面を表はすのに都合がよい。上式より

$$dz + i\,d\rho = F'(u)\cdot(du_1 + i\,du_2)$$

が得られる。線要素をdsとするとこれは次の如くである。

$$ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + (\rho\,d\varphi)^2 = |F'(u)|^2\cdot(du_1^2 + du_2^2) + (\rho\,d\varphi)^2$$
$$= h_1^2\,du_1^2 + h_2^2\,du_2^2 + h_3^2\,d\varphi^2$$

ここに

$$F'(u) = dF(u)/du$$ である。これより

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\{F'(u_1 + iu_2)\cdot F'(u_1 - iu_2)\}}$$

及び $$h_3 = \rho = \frac{1}{2i}\{F(u_1 + iu_2) - F(u_1 - iu_2)\}$$

となる。二三の回転面を示すと下表の如くである。(次頁第4.1表)

$F(u_1 + iu_2)$が適当な条件を満足する時はu_1, u_2及びφを変数とするラプラス方程式のnormal solutionが存在する。* 即ちラプラス方程式は

$$F'(u_1 + iu_2)\cdot F'(u_1 - iu_2)\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial u_2}\right) = 0$$

であって、そのNormal Solutionは

$$V = U_1(u_1)\cdot U_2(u_2)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi$$

である。ここにU_1及びU_2は次式を満足する。

* E.W. Hobson: The Theory of Spheroidal & Ellipsoidal Harmonics. Cambridge University Press. 1931, P.411

第1表 二三の回転座標系の回転面の形状と測度係数

座標系の種類	$F(u_1+iu_2)$	$h_1=h_2$	h_3
長球回転座標 Prolate Spheroidal coördinates	$f_1\cosh(u_1+iu_2)$ $\cosh u_1=\eta$ $\cos u_2=\xi$	$f_1\sqrt{\sinh^2 u_1+\sin^2 u_2}$ $=f_1\sqrt{(\eta^2-\xi^2)}$	$f_1\sinh u_1\cdot\sin u_2$ $=f_1\sqrt{(\eta^2-1)(1-\xi^2)}$
扁球回転座標 Oblate spheroidal coördinates	$f_1\sinh(u_1+iu_2)$ $\sinh u_1=\zeta$ $\cos u_2=\xi$	$f_1\sqrt{\sinh^2 u_1+\cos^2 u_2}$ $=f_1\sqrt{(\zeta^2+\xi^2)}$	$f_1\cosh u_1\cdot\sin u_2$ $=f_1\sqrt{(1+\zeta^2)(1-\xi^2)}$
抛物線回転座標 Parabolic coördinates	$c(u_1+iu_2)^2$ $u_1^2=\xi$ $u_2^2=\eta$	$2c\sqrt{(\xi+\eta)}$	$2c\,u_1u_2=2c\sqrt{\xi\eta}$
円環回転座標 Toroidal coördinates	$a\cot\frac{1}{2}(u_1+iu_2)$	$\dfrac{a}{\cosh u_1-\cos u_2}$	$\dfrac{a\sinh u_1}{\cosh u_1-\cos u_2}$
球座標 Spherical coördinates	$e^{u_1+iu_2}$ $e^{u_1}=r,\ u_2=\theta$	e^{u_1}	$e^{u_1}\sin u_2=r\sin\theta$

$$\frac{d^2 U_1}{du_1^2} + F_1(u_1)\frac{dU_1}{du_1} + 4m^2\chi_1(u_1)\cdot U_1 = \alpha U_1 ,$$

$$\frac{d^2 U_2}{du_2^2} + F_2(u_2)\frac{dU_2}{du_2} + 4m^2\chi_2(u_2)\cdot U_2 = -\alpha U_2$$

上式でm及びαは任意の常数である。特に$m=0$の場合即ちVがφに無関係の場合には簡単に解が求まることが多い。そして空間に於けるベクトルポテンシャルは上のスカラポテンシャルVを用いて$\nabla\times(\mathbf{U}V)$から求められる。ここに$\mathbf{U}$は直角座標の単位ベクトルが、又は径ベクトル$\mathbf{r}(=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z)$であるがここでは$z$軸方向の単位ベクトル$\mathbf{k}$を選定するとベクトルポテンシャル$A$は、

$$A = \nabla V\times\mathbf{k}$$

である。∇Vはφ分値を欠くからAは結局φ分値のみを有することとなる。

第二節 ループコイル電流のベクトルポテンシャル

前節では電磁界がA_φなる唯一つのベクトルポテンシャル成分を有する場合を回転座標に関して考察したのであるが、かゝる電磁界を発生する源としてすぐ考へられるのはループコイルに流れる電流によつて生ずる場合である。コイルの寸法が考察する現象の波長に比して極めて小さい場合には現象はループコイルの中心軸の廻りに対称的であると考へられ、従つてφに無関係であると見做して宜しい。そしてループコイル電流による考察点のベクトルポテンシャルはループコイルの半径をρ_0としコイル上の任意の点と考察点との距離をDとすると

$$A_\varphi^0 = \frac{\mu I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0\, d\varphi}{D}\cos\varphi$$

で与へられる。そして源点$(u_{10}, u_{20}, \varphi_0)$と考察点$(u_1, u_2, \varphi)$との間の距離の逆数を回転座標に関するNormal函数で表はしたものを

$$D^{-1} = \sum_n\sum_m \alpha_{mn} R_{mn}(u_1)\,\Xi_{mn}(u_2)\cdot\cos m(\varphi-\varphi_0)$$

とする。然る時は始源ベクトルポテンシャルA_φ^0は次の如くなる。

$$A_\varphi^0(u_1, u_2, 0) = \frac{\mu I\rho_0}{4}\sum_n \alpha_{1n} R_{1n}(u_1)\,\Xi_{1n}(u_2)$$

各座標系に於ける逆距離D^{-1}のノルマル函数表示の例を二三掲げておく。

1° 長球(Prolate spheroid) ; $\eta>\eta_0$

$$\frac{f_1}{D} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\{P_n(\xi_0)P_n(\eta_0)P_n(\xi)Q_n(\eta)\}$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\sum_{m=1}^{n}(-)^m\left\{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right\}^2 P_n^m(\xi)P_n^m(\xi_0)Q_n^m(\eta)P_n^m(\eta_0)\cos m(\varphi-$$

2° 扁球 (Oblate spheroid) ; $\zeta > \zeta_0$

$$\frac{f_1}{D} = i\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\Big[P_n(\xi_0)P_n(i\zeta_0)P_n(\xi)Q_n(i\zeta) + 2\sum_{m=1}^{n}(-)^m\left\{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right\}^2 P_n^m(\xi)P_n^m(\xi_0)Q_n^m(i\zeta)P_n^m(i\zeta_0)\cos m(\varphi-\varphi_0)\Big]$$

3° 円環 (Toroid) ; $u_1 > u_{10}$

$$\frac{a}{D} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\cosh u_{10}-\cos u_{20}}\cdot\sqrt{\cosh u_1 - \cos u_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\epsilon_n\epsilon_m(-)^m \times \frac{\Gamma(n-m+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})} Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\cosh u_1)\, P^m_{n-\frac{1}{2}}(\cosh u_{10}) \times \cos n(u_2-u_{20})\cos m(\varphi-\varphi_0)$$

但し $\epsilon_\nu = 1\ (\nu=0)$; $\epsilon_\nu = 2\ (\nu=1,2,3,\cdots)$ である。P, Q は夫々第一種第二種の球函数である。

これらによって外源ベクトルポテンシャルを求めると長球及び扁球に対して夫々次の結果が得られる。

長球 : $\eta > \eta_0$

$$A_\varphi^0 = -\frac{\mu I}{2}\sqrt{(\eta_0^2-1)(1-\xi_0^2)}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left\{\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\right\}^2 \times P_n^1(\xi)P_n^1(\xi_0)Q_n^1(\eta)P_n^1(\eta_0)$$

もし $\eta < \eta_0$ の時には上式の $Q_n^1(\eta)P_n^1(\eta_0)$ の代りに $Q_n^1(\eta_0)P_n^1(\eta)$ を用ふればよい。

扁球 : $\zeta > \zeta_0$

$$A_\varphi^0 = -\frac{i\mu I}{2}\sqrt{(1+\zeta_0^2)(1-\xi_0^2)}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left\{\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\right\}^2 P_n^1(\xi) \times P_n^1(\xi_0)Q_n^1(i\zeta)P_n^1(i\zeta_0)$$

もし $\zeta < \zeta_0$ ならば上式の $Q_n^1(i\zeta)P_n^1(i\zeta_0)$ の代りに ~~Pn(iζ)× Qn(iζ)Pn(iζ₀)の代りに~~ $P_n^1(i\zeta)Q_n^1(i\zeta_0)$ を用ひればよろしい。

第三節 中空回転体による遮蔽作用

z軸を含む平面での切口が $u_1 = u_{11}$ なる曲線で与へられる回転閉曲面でループコイルによる磁界を遮蔽した場合を考へよう。既に示した様にループコイルによる磁界の外源ベクトルポテンシャルは

$$A_\varphi^0 = \frac{\mu I \rho_0}{4}\sum_n \alpha_{1n}^0 R_{1n}^a(u_1)\cdot \Xi_{1n}^0(u_2)$$

で与へられる。閉曲面内の諸量に肩符 i をつけ、閉曲面外の諸量に肩符 a をつけるものとする。閉曲面を薄い中空導体殻と考へその方程式を $u_1 = u_{11}$ とする。径函数 R 及び角函数 Ξ は二つの独立解を持つが物理的条件を併せ考へるとそれらの中の一つのみが要求を満足し殻内外のベクトル

ポテンシャルは結局次の様に書けるであろう。角函数は唯一種のみが普通用いられる。もう一つの解は物理的条件を満足しないのが普通である。

$$A_\phi^i = \sum_n \alpha_{1n}^i R_{1n}^i(u_1) \Xi_{1n}(u_2) + A_\phi^0$$

$$A_\phi^a = \sum_n \alpha_{1n}^a R_{1n}^a(u_1) \Xi_{1n}(u_2) + A_\phi^0$$

$$A_\phi^0 = \sum_n a_{1n}^0 R_{1n}^a(u_1) \Xi_{1n}^1(u_2)$$

偖て $H_2^a(u_{11}) - H_2^i(u_{11}) = K_\phi(u_{11})$ 及び $B_1^a(u_{11}) = B_1^i(u_{11})$ なる境界条件より $u_1 = u_{11}$ に於て

オ4.2図

$$\frac{\partial A_\phi^a}{\partial u_1} - \frac{\partial A_\phi^i}{\partial u_1} = -i\omega\mu\sigma d \cdot h_1 \cdot A_\phi$$

及び $A_\phi^a - A_\phi^i = 0$

である。是より α_{1n}^a 及び α_{1n}^i を決定し得る。

$$\alpha_{1n}^i = \frac{i\omega\mu\sigma d h_1 R_{1n}^a \cdot R_{1n}^a \cdot a_{1n}}{R_{1n}^a \frac{\partial R_{1n}^i}{\partial u_1} - R_{1n}^i \frac{\partial R_{1n}^a}{\partial u_1} - i\omega\mu\sigma d h_1 R_{1n}^i R_{1n}^a}$$

$$\alpha_{1n}^a = \frac{i\omega\mu\sigma d h_1 R_{1n}^a R_{1n}^i a_{1n}}{R_{1n}^a \cdot \frac{\partial R_{1n}^i}{\partial u_1} - R_{1n}^i \frac{\partial R_{1n}^a}{\partial u_1} - i\omega\mu\sigma d h_1 R_{1n}^i R_{1n}^a}$$

例1　扁球導電体が一様な磁界 $B_0 e^{-i\omega t}$ の中に置かれた場合の界を決定しよう。ここで扁球の導電率は非常に高いとする。又一様磁界の方向は扁球対称軸の方向と一致するものとしよう。扁球の導電率は非常によいから扁球内では場は消滅する。一様磁界に基く始源ベクトルポテンシャルは中分値のみを有している。扁球外の全ベクトルポテンシャルは

$$A_\phi = \frac{f_1 B_0}{2i}\{P_1^1(i\zeta) + DQ_1^1(i\zeta)\} P_1^1(\xi) \cdot e^{-i\omega t}$$

で与へられる*。ここに f_1 は扁球座標の焦点距離の半分である。(オ4.1図参照)　オ1表より知る如く

$$\zeta = \sinh u_1 \;,\; \xi = \cos u_2 \;,\; 0 < \zeta < \infty,$$
$$-1 \leq \xi \leq +1$$ 4-3.

であり弧要素 ds は

$$ds^2 = h_\zeta^2 d\zeta^2 + h_\xi^2 d\xi^2 + h_\phi^2 d\phi^2$$

とすると計量係数は

$$h_\zeta = h_1 \left|\frac{du_1}{d\zeta}\right| = f_1 \frac{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}{\sqrt{1+\zeta^2}} \;,\quad h_\xi = h_2 \left|\frac{du_2}{d\xi}\right| = f_1 \frac{\sqrt{\xi^2+\zeta^2}}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$h_\phi = f_1 \sqrt{(1+\zeta^2)(1-\xi^2)}$$

---

*. 勿論実数部分(又は虚数部分)をとることを意味する。

となる。境界条件から界を決定すると次の様になる。但し時間係数 $\exp(-i\omega t)$ は省略する。

$$B_\xi = \frac{B_0}{i\sqrt{(\xi^2+\zeta^2)}}\{P_1(i\zeta)+DQ_1(i\zeta)\}P_1'(\xi)$$

$$B_\zeta = \frac{B_0}{i\sqrt{(\xi^2+\zeta^2)}}\{P_1'(i\zeta)+DQ_1'(i\zeta)\}P_1(\xi)$$

及び $$E_\phi = \frac{1}{2}\omega f_1 B_0\{P_1'(i\zeta)+DQ_1'(i\zeta)\}P_1'(\xi)$$

ここに $D=-P_1'(i\zeta_1)/Q_1'(i\zeta_1)$ である。$\zeta=\zeta_1$ は導電体となつておる扁球の表面の座標の値である。$\zeta=\zeta_1$ で $H_\zeta=0$ となる。点 $\zeta=\zeta_1$, $\xi=1.0$ は流線の分岐点 (Stagnation Point, Staupunkt) である。

$Z_\zeta=E_\phi/H_\xi$ によつて ζ 方向の空間インピーダンスを定義すると外向き及び内向きのインピーダンスに対して夫々次の結果が得られる。扁球面上でその位置によつて Z_ζ の値が異なる事に注意すべきである。即ち ζ のみならず ξ の函数でもある。

$$Z_\zeta^+ = \frac{1}{2}i\omega\mu f_1\sqrt{(\xi^2+\zeta^2)}\frac{Q_1'(i\zeta)}{Q_1(i\zeta)},\quad Z_\zeta^- = \frac{1}{2}i\omega\mu f_1\sqrt{(\xi^2+\zeta^2)}\times\frac{P_1'(i\zeta)}{P_1(i\zeta)}$$

例2　扁球の軸方向に一様な電界(電気誘導を D_0 とす)がある場合、扁球外の場を求める。前例題の磁気ベクトルポテンシャルの A_ϕ^* によつて界が決定する。(Aφに対して電気ベクトルポテンシャル)

$$A_\phi^* = \frac{f_1 D_0}{2i}\{P_1'(i\zeta)+DQ_1'(i\zeta)\}P_1'(\xi)\cdot e^{-i\omega t}$$

これより界は時間係数は別として次の様になる。

$$D_\xi = \frac{D_0}{i\sqrt{(\xi^2+\zeta^2)}}\{P_1(i\zeta)+DQ_1(i\zeta)\}P_1'(\xi)$$

$$D_\zeta = \frac{D_0}{i\sqrt{(\xi^2+\zeta^2)}}\{P_1'(i\zeta)+DQ_1'(i\zeta)\}P_1(\xi)$$

及び $$H_\phi = -\frac{1}{2}\omega f_1 D_0\{P_1'(i\zeta)+DQ_1'(i\zeta)\}P_1'(\xi).$$

ここに $D=-P_1(i\zeta_1)/Q_1(i\zeta_1)$ である。

$Z_\xi=-E_\xi/H_\phi$ によつて定義せられる ζ 方向の空間インピーダンスは次の如くなる。

$$Z_\xi^+ = \frac{2}{i\omega\epsilon f_1}(\xi^2+\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{Q_1(i\zeta)}{Q_1'(i\zeta)} = \frac{2}{\omega\epsilon f_1\zeta}\cdot\frac{1}{P_1'(i\xi/\zeta)}\cdot\frac{Q_1(i\zeta)}{Q_1'(i\zeta)}{}^{*}$$

$$Z_\xi^- = \frac{2}{i\omega\epsilon f_1}(\xi^2+\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{P_1(i\zeta)}{P_1'(i\zeta)} = \frac{2}{\omega\epsilon f_1\zeta}\cdot\frac{1}{P_1'(i\xi/\zeta)}\cdot\frac{P_1(i\zeta)}{P_1'(i\zeta)}$$

* $P_1(i\zeta)=i\zeta$, $P_1'(i\zeta)=i\sqrt{1+\zeta^2}$, $Q_1(i\zeta)=\zeta\cot^{-1}\zeta-1$ 及び $Q_1'(i\zeta)=\sqrt{1+\zeta^2}\{\cot^{-1}\zeta-\zeta/(1+\zeta^2)\}$ である但し $-\infty<\zeta<\infty$ に対して $0<\cot^{-1}\zeta<\pi$ である。これらの数表は本章附録に掲げてある。

こゝで$\varsigma\to\infty$とすると$Q_1(i\varsigma)/Q_1'(i\varsigma)\to -1/2$であり、$P_1(i\varsigma)/P_1'(i\varsigma)\to 1$であるから$\varsigma\to\infty$になしつゝ同時に$f_1\to 0$として$f_1\varsigma\to a$なる定値に近づかしめると$Z_\varsigma^+\to -1/(i\omega\epsilon a)$, $Z_\varsigma^-\to 2/(i\omega\epsilon a)$となつて球導体の場合の径方向のインピーダンスが得られる。同時にベクトルポテンシャルも球の場合の式

$$A_\phi = \frac{1}{2}\, a D_0 \left\{ \frac{r}{a} + 2\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right\} \sin\theta$$

となる事が容易に確かめ得る。

第4.3図は$Z_\varsigma^+, Z_\varsigma^-$の計算に必要な函数を示したものである。 第4.3図

第4節 中空の扁球殻及び長球殻による電磁界の遮蔽

4.1 扁球殻導体による遮蔽

先づループコイルによる始源ベクトルポテンシャルを求めて置かう。これはA_ϕのみを有し

$$A_\phi^0 = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 \cos\varphi \, d\varphi}{D}$$ 第4.4図

で与へられる事は前節で述べた処である。Dはループコイル上の点と考察点$(\xi, \varsigma, 0)$の点との間の距離である。逆距離D^{-1}のノルマル函数による表示は既に与へられてゐるから、之を上式に代入してφについて積分すると次の様になる。

$$A_\phi^0 = -\frac{i\mu I}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\cdot n^{-2}(n+1)^{-2} \sqrt{(1+\varsigma_0^2)(1-\xi_0^2)}$$
$$\times P_n^1(i\varsigma_0)\, P_n^1(\xi_0)\cdot Q_n^1(i\varsigma)\, P_n^1(\xi), \quad \varsigma > \varsigma_0$$

$\varsigma < \varsigma_0$の時は$P_n^1(i\varsigma_0)Q_n^1(i\varsigma)$の代りに$P_n^1(i\varsigma)Q_n^1(i\varsigma_0)$を用ひればよい。簡単のため

$$M_n \equiv -\frac{i\mu I}{2} \sqrt{(1+\varsigma_0^2)(1-\xi_0^2)} \cdot \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\, P_n^1(i\varsigma_0)\, P_n^1(\xi_0) \quad \cdots\cdots(1.1)$$

とおくと

$$A_\phi^0 = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cdot Q_n^1(i\varsigma)\, P_n^1(\xi) \qquad \varsigma > \varsigma_0 \quad \cdots\cdots(1)$$

となる。扁球殻の内外のベクトルポテンシャルは次の如く与へられる。但しこゝでそのn−分値のみを考へよう。

$$A_{en} = A_n^0 + D_n Q_n^1(i\varsigma)\, P_n^1(\xi) \qquad \varsigma > \varsigma_1 \quad \cdots(2.1)$$

$$A_{in} = A_n^0 + C_n P_n^1(i\varsigma)\, P_n^1(\xi) \qquad \varsigma < \varsigma_1 \quad \cdots(2.2)$$

$\varsigma = \varsigma_0$に於ける境界条件は次の二つである。

$$D_n Q_n^1(i\varsigma_1) = C_n P_n^1(i\varsigma_1)$$

及び

$$D_n Q_n^{1\prime}(i\varsigma_1) - C_n P_n^{1\prime}(i\varsigma_1) = -\omega\mu\sigma d \cdot h_\varsigma \{ M_n Q_n^1(i\varsigma_1) + C_n P_n^1(i\varsigma_1) \}$$

即ち $C_n \cdot \omega\mu\Sigma f_1 \cdot P_n^1(i\varsigma_1) - C_n \dfrac{n(n+1)}{(1+\varsigma_1^2)Q_n^1(i\varsigma_1)} = -\omega\mu\Sigma f_1 Q_n^1(i\varsigma_1) \cdot M_n$
故に

$$C_n = \frac{\omega\mu\,\Sigma \cdot f_1 \dfrac{(1+\varsigma_1^2)}{n(n+1)}\left[Q_n^1(i\varsigma_1)\right]^2 \cdot M_n}{1 - \dfrac{\omega\mu\,\Sigma \cdot f_1}{n(n+1)} \cdot (1+\varsigma_1^2) P_n^1(i\varsigma) Q_n^1(i\varsigma_1)} \quad \cdots\cdots(3\cdot1)$$

$$D_n = \frac{\omega\mu\,\Sigma \cdot f_1 \dfrac{(1+\varsigma_1^2)}{n(n+1)} \cdot Q_n^1(i\varsigma_1) P_n^1(i\varsigma_1) \cdot M_n}{1 - \dfrac{\omega\mu\,\Sigma \cdot f_1}{n(n+1)} \cdot (1+\varsigma_1^2) \cdot P_n^1(i\varsigma) Q_n^1(i\varsigma_1)} \quad \cdots\cdots(3\cdot2)$$

但しここに $\sigma \cdot d \cdot h_\varsigma = f_1 \cdot \Sigma$ とする。即ち面比抵抗が子午面に沿つて h_ς / f_1 で変化してゐるものと仮定する。
扁球の外部ではベクトルポテンシャルは (3·2) の D_n を (2·1) に用ひ

$$\frac{A_{en}}{A_n^0} = \left\{1 - \frac{\omega\mu f_1 \Sigma}{n(n+1)} \cdot (1+\varsigma_1^2)\, P_n^1(i\varsigma_1) Q_n^1(i\varsigma_1)\right\}^{-1} \cdots(4)$$

の割合で減殺されてゐるからこれを以てベクトルポテンシャルの第n−分値に対する遮蔽効果を表示する一つの measure としてよい。

ここで半焦点距離 f_1 が0に近づくと共に ς が r/f_1 なる如く増大するものとする。r は或る一定値とする。然る時は $\xi \to \cos\theta$ となり $h_\xi \to r/\sin\theta$ ，$h_\varsigma \to f_1$ 及び $h_\phi \to r\sin\theta$ $\cdots\cdots(5\cdot1)$

更に $P_n^1(i\varsigma) \longrightarrow \dfrac{(2n)!}{2^n n!(n-1)!} i^n \varsigma^n$ ，$Q_n^1(i\varsigma) \to -\dfrac{n!(n+1)!}{(2n+1)!} \dfrac{2^n}{i^{n+1}\varsigma^{n+1}}$

$$P_n^1(i\varsigma) \cdot Q_n^1(i\varsigma) \longrightarrow -\frac{n(n+1)}{2n+1} \cdot \frac{1}{i\varsigma} \quad \cdots\cdots(5\cdot2)$$

であるから(4)は次の如く

$$\left.\frac{A_{en}}{A_{on}}\right|_{f_1 \to 0} = \left\{1 - \frac{i\omega\mu r}{(2n+1)} \sigma d\right\}^{-1} \quad \cdots\cdots(4\cdot1)$$

となつて完全球殻導体の場合と一致する。

4.2 長球殻導体による遮蔽作用

この場合も取扱は殆んど扁球の場合と同様なる故省略するが前項の(1)……(5)の諸式に対応してここでは次の諸式が成立する。

第4.5図

$$A_\phi^0 = \sum_{n=1}^{\infty} M_n Q_n^1(\eta) P_n^1(\xi) \qquad \eta > \eta_0 \quad \cdots\cdots(6)$$

但し $M_n = -\frac{1}{2}\mu I\sqrt{(\eta_0^2-1)(1-\xi_0^2)} \cdot n^{-2}(n+1)^{-2}(2n+1) P_n^1(\eta_0) \times P_n^1(\xi_0) \quad \cdots(6\cdot1)$

$$A_{en} = A_n^0 + D_n Q_n^1(\eta) P_n^1(\xi) \qquad \eta > \eta_1 \quad (7\cdot1)$$

$$A_{in} = A_n^0 + C_n P_n^1(\eta) P_n^1(\xi), \quad \eta < \eta_1 \qquad \cdots\cdots(7.2)$$

$$C_n = \frac{i\omega\mu f_2 \Sigma \frac{(1-\eta_1^2)}{n(n+1)} [Q_n^1(\eta_1)]^2}{1 - \frac{i\omega\mu f_2 \Sigma}{n(n+1)} \cdot (1-\eta_1^2) P_n^1(\eta_1) Q_n^1(\eta_1)} \qquad \cdots\cdots(8.1)$$

$$D_n = \frac{i\omega\mu f_2 \Sigma \frac{(1-\eta_1^2)}{n(n+1)} P_n^1(\eta_1) Q_n^1(\eta_1)}{1 - \frac{i\omega\mu f_2 \Sigma}{n(n+1)} \cdot (1-\eta_1^2) P_n^1(\eta_1) Q_n^1(\eta_1)} \qquad \cdots\cdots(8.2)$$

但し $f_2 \cdot \Sigma = \sigma d \cdot h_\eta$

$$\frac{A'_{en}}{A_n} = \left\{ 1 - \frac{i\omega\mu f_2 \Sigma}{n(n+1)} \cdot (1-\eta_1^2) P_n^1(\eta_1) Q_n^1(\eta_1) \right\}^{-1} \cdots\cdots(9)$$

$f_2 \to 0$ とすると

$$P_n^1(\eta_1) \longrightarrow \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!(n-1)!} \eta_1^n, \quad Q_n^1(\eta_1) \to -\frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!} \frac{2^n}{\eta_1^{n+1}}$$

従って $P_n^1(\eta_1) \cdot Q_n^1(\eta_1) \to -\dfrac{n(n+1)}{2n+1} \cdot \dfrac{1}{\eta_1}$. $\cdots\cdots(10)$

であつて之を(9)に代入すると前項(4.1)式が得られる。

第5節　遮蔽体中に於けるエネルギー損失

遮蔽体中に於ける平均エネルギー損失を求めよう。電界 E_ϕ に対する共軛値を $\bar{E}_\phi$ とすると平均エネルギー損失は之を P_{av} とすると

$$P_{av} = \int_0^{2\pi} h_\phi d\phi \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \sigma d \cdot E_\phi \bar{E}_\phi h_\xi \cdot d\xi$$

で与へられる。電界 $\bar{E}_\phi$ は遮蔽体中に於て

$$E_\phi = i\omega (M_n + D_n) \cdot Q_n^1(i\zeta_1) P_n^1(\xi) \qquad \text{扁球}$$

$$E_\phi = i\omega (M_n + D_n) \cdot Q_n^1(\eta_1) P_n^1(\xi) \qquad \text{長球}$$

であるからこれを上式に代入し $\sigma \cdot d = \frac{f_2}{h_\zeta} \Sigma$ を用ひ

$h_\xi \cdot h_\phi / h_\zeta = f_1 (1 + \zeta_1^2)$ なること及び $\int_{-1}^{1} [P_n^1(\xi)]^2 d\xi$

$= 2n(n+1)/(2n+1)$ なる事を考慮して平均エネルギー損失を求めると結局次の様になる。

$$P_{av} = \pi \cdot \Sigma \cdot f_1^2 \cdot \omega^2 (1+\zeta_1^2) \frac{2n(n+1)}{2n+1} |M_n + D_n|^2 \cdot Q_n^1(i\zeta_1) \cdot \overline{Q_n^1(i\zeta_1)} \qquad \text{扁球}$$

$$P_{av} = \pi \cdot \Sigma \cdot f_2^2 \omega^2 (\eta_1^2 - 1) \frac{2n(n+1)}{2n+1} |M_n + D_n|^2 [Q_n^1(\eta)]^2 \qquad \text{長球}$$

但し $M_n + D_n$ は次の如くである

$$M_n + D_n = \begin{cases} \left\{1 - \dfrac{\omega\mu\cdot\Sigma\cdot f_1}{n(n+1)}\cdot(1+\varsigma_1^2)\, P_n^1(i\varsigma_1)\, Q_n^1(i\varsigma_1)\right\}^{-1} M_n & 扁球 \\[2ex] \left\{1 - \dfrac{i\omega\mu\Sigma f_2}{n(n+1)}(1-\eta_1^2)\, P_n^1(\eta_1)\, Q_n^1(\eta_1)\right\}^{-1} M_n & 長球 \end{cases}$$

この式で M_n は扁球の場合と長球の場合で異なり夫々次の値をとる。

$$M_n = -\frac{1}{2} i\mu I\cdot\sqrt{(1+\varsigma_0^2)(1-\xi_0^2)}\cdot n^{-2}(n+1)^{-2}(2n+1)\cdot P_n^1(i\varsigma_0)P_n^1(\xi_0) \quad 扁球$$

$$M_n = -\frac{1}{2}\mu I\sqrt{(\eta_0^2-1)(1-\xi_0^2)}\cdot n^{-2}(n+1)^{-2}(2n+1)\cdot P_n^1(\eta_0)P_n^1(\xi_0) \quad 長球$$

以上は始源ループコイルが球殻の中にある場合であるがこれが z 軸上で遮蔽殻の外側にある場合も殆んど同様にして解き得る。そして結果はループが殻内にある場合について得られた上の諸結果に於て $i\varsigma_0$, η_0, $i\varsigma_1$ 及び η_1 を変数とする球函数に於て P_n^1 と Q_n^1 とを交換すれば得られる。

これらの諸結果に於て扁球の場合には $f_1\varsigma \to r$, $\xi \to \cos\theta$ とし、長球の場合には $f_2\eta \to r$, $\xi \to \cos\theta$ とすると球の場合に対するものが得られる。即ち $M_n + D_n$ はいずれの場合にも

$$\{1 - i\omega\mu\sigma d\, r/(2n+1)\}^{-1}\cdot M_n$$

となつて球の場合に等る。そしてエネルギー損失は

$$P_{av} = \frac{\pi}{8}\mu^2 I^2\omega^2 r_1^2 S_0\cdot n(n+1)(2n+1)\cdot\sin^4\theta_1\,(r_1/r_0)^{2n} \times\{\omega^2\mu^2 r_1^2 + (2n+1)^2 S_0^2\}^{-1}$$

となる。* ここに $S_0 = (\sigma d)^{-1}$ である。又 r_1 は遮蔽球の半径, θ_1 はループコイルが座標の中心に於てもつ角である。r_0 はループコイル上の点と座標原点との距離である。今 $M = \pi(r_0\sin\theta)^2 I$ をループコイルの磁気能率とするならば平均エネルギー損失は次の様になる。

$$P_{av} = \frac{S_0}{8\pi r_0^4}\cdot M^2\cdot n(n+1)(2n+1)\cdot\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n}\cdot\cos^2\beta_n \quad [W]$$

ここに $\tan\beta_n = (2n+1)S_0/(\omega\mu r_1)$ である。

---

* $P_n^1(i\varsigma_1)Q_n^1(i\varsigma_0) \longrightarrow i\cdot\dfrac{n(n+1)}{2n+1}\dfrac{1}{\varsigma_0}\left(\dfrac{\varsigma_1}{\varsigma_0}\right)^n$, $P_n^1(\eta_1)Q_n^1(\eta_0) \longrightarrow -\dfrac{n(n+1)}{2n+1} \times \dfrac{1}{\eta_0}\left(\dfrac{\eta_1}{\eta_0}\right)^n$ なること及び $\sin\theta\cdot P_n^1(\cos\theta) \doteqdot \frac{1}{2}n(n+1)\sin^2\theta$ なること等を用いるとやゝ長い運算の結果上式が得られる。

第6節 一様磁界内の扁球導体殻，過渡的渦電流

6.1 扁球殻の短軸の方向を向く一様な磁界H_0に附随したベクトルポテンシャルは

$$A_\phi^0 = \frac{f_1 B_0}{2i} \cdot P_1^1(i\zeta) P_1^1(\xi) \;, \quad B_0 = \mu_0 H_0$$

であって丁度前節の一般論に於ける$n=1$の場合に相当する。そして球殻内外のベクトルポテンシャルを夫々

$$A_{\phi e} = A_\phi^0 + D Q_1^1(i\zeta) P_1^1(\xi)$$

$$A_{\phi i} = A P_1^1(i\zeta) P_1^1(\xi)$$

とすると定数A及びDは次の如く決定される。但し$s = h_2 S_0/\zeta_1$と仮定する。

$$A = \frac{f_1 B}{2i}\left\{1 - \frac{\omega\mu(1+\zeta_1^2) f_1}{2S_0} P_1^1(i\zeta_1) Q_1^1(i\zeta_1)\right\}^{-1}$$

$$D = \frac{f_1 B}{2i} \frac{\omega\mu(1+\zeta_1^2) f_1}{2S_0} \left[P_1^1(i\zeta_1)\right]^2 \left\{1 - \frac{\omega\mu(1+\zeta_1^2) f_1}{2S_0} \times P_1^1(i\zeta_1) Q_1^1(i\zeta_1)\right\}^{-1}$$

ここで$\omega\mu f_1/(2S_0)$はダメンションの無い量でこれをαとおく。すると

$$A = \frac{f_1 B}{2i} F_1(\alpha, \zeta_1) \;, \quad D = \frac{f_1 B}{2i} F_2(\alpha, \zeta_1)$$

$$F_1 = \left\{1 - \alpha(1+\zeta_1^2) P_1^1(i\zeta_1) Q_1^1(i\zeta_1)\right\}^{-1}$$

$$F_2 = +\alpha \cdot (1+\zeta_1^2)\left[P_1^1(i\zeta_1)\right]^2 \cdot F_1$$

と書く事が出来る。$\alpha = 1$, $\zeta_1 = 0.5$として場の模様を書いたものが第4.6図である。$\alpha = \infty$とすると完全導電性の扁球殻の場合となり$F_1 = 0$であり$F_2 = -P_1^1(i\zeta_1)/Q_1^1(i\zeta_1)$となる。この場合は既に第3節例1で述べた所である。 第4.6図

尚第4.7図第4.8図は一様な磁界，一様な電界の中の扁球の近傍に於ける場の模様を示したものである。 第4.7図

第4.9図は第4.6図を画くに必要な函数$\Phi(\alpha,\zeta_1)$及び$\Psi(\alpha,\zeta_1)$をα, ζ_1の二三の値につき計算したものである。 第4.8図 第4.9図

6.2 次に一様な磁界が時刻$t=0$で突然短軸の方向に加へられた場合の殻中の過渡渦電流を調べよう。$B_0 \exp(-j\omega t)$による定常渦電流は前項の結果より

$$K(t) = \frac{i\omega}{s} \cdot \frac{f_1 B_0}{2i}\left\{1 - \frac{\omega\mu(1+\zeta_1^2) f_1}{2S_0} P_1^1(i\zeta_1) Q_1^1(i\zeta_1)\right\}^{-1} \times P_1^1(i\zeta_1) P_1^1(\xi)$$

である。ここで$-i\omega$の代りにpを置き換へて$P_1^1(i\zeta_1) = i \times \sqrt{(1+\zeta_1^2)}$，$P_1^1(\xi) = \sqrt{(1-\xi^2)}$及び$h_2 = f_1\sqrt{(\xi^2+\zeta_1^2)}/\sqrt{(1+\zeta_1^2)}$を代入して少しく整理すると渦電流に対し次の演算子式が得られる。

$$K(p)=\frac{f_1NB}{2}\cdot\frac{(1+\zeta_1^2)\sqrt{(1-\xi^2)}}{\sqrt{(\xi^2+\zeta_1^2)}}\cdot\frac{p}{p+NS_0}$$

但し　$N\equiv\left\{\frac{\mu f_1}{2}(1+\zeta_1^2)^{3/2}Q_1^1(i\zeta_1)\right\}^{-1}$

故に単位磁界 $H_0(t)=H_0(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty i}^{+\infty i}e^{pt}p^{-1}\,dp$ による過渡渦電流の時間的経過は次の如くである。

$$K(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{K(p)}{p}e^{pt}\,dp=\frac{f_1NB(1+\zeta_1^2)}{2\sqrt{(\xi^2+\zeta_1^2)}}\sqrt{(1-\xi^2)}\cdot e^{-NS_0t}$$

即ち渦電流は

$K_0=\frac{1}{2}f_1NB(1+\zeta_1^2)\cdot(\xi^2+\zeta_1^2)^{-\frac{1}{2}}(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}$ なる初値より指数的に減衰する。減衰の時定数は $T=(\mu f_1/2S_0)\cdot(1+\zeta_1^2)^{3/2}Q_1^1(i\zeta_1)$ [S] である。そして殻の形状及び比抵抗によつて定まる値をもつてゐる。球導体殻の場合には $T_{sph}=\mu r/(3S_0)$ である。但し r は球殻の平均半径とする。

第7節　中空導電球による電磁界の遮蔽について

この問題は回転対称導体殻として最も簡単な場合であり既に報告*した処である。故に詳細は述べる事を避けて要点のみを記述するに止める。

標題の如き問題は具体的には高周波装置の遮蔽函の遮蔽効果に関係してゐる。遮蔽函として最も普通に考へられるのは立方形のものであらう。然しそれはその物理的形状の簡単なるにも拘はらず遮蔽作用の算定は極めて困難である。今考へんとする中空導体球の場合といへども源の形状及びその位置によつては問題は必ずしも容易でない。唯、一様外部電磁界の場合又はループ形のコイルに流れる電流又は磁極による場の中でループの中心軸が遮蔽球の中心を通る場合のみが完全に解けるのである。然しこの様な極めて特異な例題についても解が分つてゐるならばそれを基にして色々の複雑な形状の（実用的な）場合をも或程度類推する事が出来るであらう。この意味に於ては少しく実用と離れ過ぎるかに見へる標記の問題も考察の意味がある。

17.1. 一様な外部電磁界による遮蔽作用に関する従来の研究

一様な外部電磁界による遮蔽作用に関しては既に Larmor※, Barfield†, King‡ 等の研究がある。Larmor のものは単に低周波域に於てのみ適用され得るものであり、King の報告は磁界の遮蔽のみを取扱ひ周波数の各領域で成立する近似式を与へてゐる。

今内半径 b、外半径 c なる中空導電球を一様な磁界中に置いた場合を考へよう。磁界は $H_0\exp(-i\omega t)$ で与へられるとし、これが

* 茂木晃：電気試験所彙報 6. PP. 579−583 (昭17-12)
8 PP. 67−74, 75−79 (昭19-2)

※ J. Larmor: Phil. Mag. 4 (1884)

† Barfield: J. I. E. E. 62 P. 249 (1924)

‡ L. V. King: Phil. Mag. [7] 15 P. 201 (1933)

球座標の $\theta=0$ の方向に向いてゐるとする。球殻外空間、球殻体部分及び球殻内~~部分~~空間の夫々をI, II, 及びIIIとすると各領域では電界は φ 分値のみ、磁界は r 及び θ 分値のみ有してゐる。そして球殻内部即ちIIIの領域では磁界は一様磁界であり、球殻外では一様磁界と球殻による反作用磁界としての双極場との和よりなることが分る。球殻内の場は上述の様で一様でこれを H_i とすると H_i は H_0 と相似である。即ち球殻によって外部磁界 H_0 は形を乱すことなく球内空域で H_i となる。その大きさは $|H_i|=S_{(m)}|H_0|$ の割合に小さくなる。

$$S_{(m)}^{-1} = \cos kd - \frac{i}{3}\left(Z_{III}^{+}/Z_{II} - Z_{II}/Z_{III}^{-}\right)\sin kd$$

ここに

$$Z_{III}^{+} = -i\omega\mu c,\quad Z_{III}^{-} = \frac{i}{2}\omega\mu c,\quad Z_{II} = -ik/\sigma,\quad d = c-b$$

である。

同様にして一様な外部電界の場合に於ては各領域で電界は r 及び θ 分値を有し、磁界は φ 分値のみを有する。そして球内の電界の大さ $|E_i|$ は始源電界によって $S_{(e)}|E_0|$ の如く表はされる。$S_{(e)}$ はこの場合の遮蔽率である。そして

$$S_{(e)}^{-1} = \cos kd + \frac{i}{3}\left(Z_{III}^{-}/Z_{II} - Z_{II}/Z_{III}^{+}\right)\sin kd$$

ここに $Z_{III}^{+} = -1/i\omega\epsilon c$, $Z_{III}^{-} = 2/i\omega\epsilon c$ 及び $Z_{II} = -ik/\sigma$ であって、又 d は先の場合と同様に $c-b$ に等しい。

7-2 中空球殻の内部におかれたループ電流による場，球殻の遮蔽作用とループコイルに及ぼす反作用

この問題については Kaden 及び Buchholz の研究がある。ループコイルの寸法を極めて小さいとし、コイルの面積とコイル電流の積を M とおく。M はコイル電流の磁気能率であるが之を用ひると取扱はやゝ簡單になる。Kaden* の論じたのはこの場合についてである。Buchholz† はこれよりやゝ一般的に論じてゐる。即ち始源ループコイルのベクトルポテンシャルを球調和函数の級数として表はし更に之を複素積分の形に直して論じ、反作用をも含めた全ベクトルポテンシャルを[illegible]の優雅な形に表はすのに成功した。即ちベクトルポテンシャルは φ 分値のみ有し

---

* H. Kaden: Die Rückwirkung metallischer Spulenkapseln auf Verluste, Induktivität und Außenfeld einer Spule. E.N.T., **10**, s.277〜284 (1933)

——— : Schirmwirkung metallischer Hüllen gegen magnetische Wechselfelder. Hochfreq. u. Elektroakustig, **40**, s.92〜97 (1932)

† H. Buchholz: Die gegenseitige Beeinflussung einer Kreisring-spule und einer dünnwandigen gleichachsigen Metal-hohlkugel bei höheren Frequenzen. A.f.E., 28, s.556〜577 (1934)

$$A_\phi = \overset{\circ}{A}_\phi + \frac{\mu I}{4\pi} i\alpha \sqrt{\frac{a'}{a}} \int_0^\infty e^{i\alpha\frac{s}{2}} Q_{\frac{1}{2}}\left[\frac{\cosh(s+|\rho|+|\rho'|)-\cos\theta\cos\theta'}{\sin\theta\sin\theta'}\right] ds$$

である。A_ϕ^0は始源ベクトルポテンシャルで

$$A_\phi^0 = \frac{\mu I}{2\pi}\sqrt{\frac{a'}{a}}\cdot Q_{\frac{1}{2}}\left[\frac{\cosh(\rho-\rho')-\cos\theta\cos\theta'}{\sin\theta\sin\theta'}\right]$$

である。ここにaは考察点を通り対称軸のまはりに描いた円の半径であり、r, θは考察点の球座標分である。又 $e^\rho = r/R$ とし、Rは球殻の半径とする。又 $\alpha = R/\delta = \omega\mu\sigma t R$ であり、tは球殻の厚みである。ダッシュを附したのは考察点がループコイル上にある場合を示す。

Buchholzは1/2なる次数を有する第二種球函数を積分記号下に有する上の如き簡潔なる式を用いて球殻に関する二三の定理を導き、更にBarnesによる$Q_{1/2}$の複素積分表示を用いて之を計算したが結果は余り数値計算に便利な形にならなかった。又$Q_{1/2}$の函数表の完全でない現今では上式は形式の優雅さにも不拘実用上の価値は低いと云はねばならぬ。

筆者は別の方法でベクトルポテンシャルの級数解を求め、特に回路論との関連を明らかにするために伝播方向のインピーダンスを用いて表示した。*

第8節　球状空洞中の電流線輪

第4.10図 第4.10図の様に無限の広がりを持った良導電性の媒質の中に半径bの球状の空洞があるとする。z軸上のaなる点にz軸と直角に極めて小さいループコイルがあるとしこれにIなる電流が流れてゐるとしよう。コイルの球座標は(a, α, φ)である。そして球座標分で表はしたコイル電流のベクトルポテンシャルは

$$A_\phi^0 = \frac{1}{2}\mu I\sin\alpha\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^1(\cos\alpha)\,P_n^1(\cos\theta),\quad a<r$$

で与へられる。即ちAはφ分値のみを有し且φ座標分には無関係である。上式は$a<r$の場合であるが、$a>r$の場合には上の$(a/r)^{n+1}$の代りに$(r/a)^n$を用ひればよい。上の一次ベクトルポテンシャルの第n分値のみ取り出して考へる。そしてI及びIIの領域に於ける綜合ベクトルポテンシャルの第n成分を次の如くする。以下A_ϕの添字φは省略する。その代り第n成分を示すnをつける。

領域I：　$A_{In} = \left\{\Lambda_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + C_n\left(\frac{r}{b}\right)^n\right\} P_n^1(\cos\theta)$

領域II：　$A_{IIn} = D_n\cdot h_n^{(1)}(kr)\,P_n^1(\cos\theta)$

ここに　$\Lambda_n = \frac{1}{2}\mu I\sin\alpha\cdot\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} P_n^1(\cos\alpha)$

---

* 茂木晃：電試彙 8, pp 67−74 (昭19−2) 所出

$$h_n^{(1)}(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\,H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)\,,\quad k^2=i\omega\mu\sigma$$

である。

扨て磁界は r 成分と θ 成分を有するが H_θ を考へると、これは $-\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)$ によつて与へられるとして境界 $r=b$ に於てベクトルポテンシャル自身及び H_θ の連續することにより

$$A_n+C_n=h_n^{(1)}(kb)\cdot D_n$$

及び

$$\frac{nA_n}{\mu_I b}-\frac{(n+1)C_n}{\mu_I b}=-\frac{k}{\mu_{II}\cdot kb}\,\psi_n^{(1)}(kb)\cdot D_n$$

である。但し $\psi_n^{(1)}(z)=\frac{d}{dz}[z h_n^{(1)}(z)]$

上の2条件は書換へると次の様になる。

$$A_n+C_n=h_n^{(1)}(kb)\cdot D_n$$
$$\frac{A_n}{Z_I^+}+\frac{C_n}{Z_I^-}=\frac{1}{Z_{II}^+}\,h_n^{(1)}(kb)\cdot D_n$$

ここに $Z_I^+=-i\omega\mu b/n$, $Z_I^-=i\omega\mu b/(n+1)$, $Z_{II}^+=\frac{k}{\sigma}\times\frac{kb\,h_n^{(1)}(kb)}{\psi_n^{(1)}(kb)}$

は夫々電気的横波球面波に対する各媒質の r 方向のインピーダンスである。これらを用ひると C_n 及び D_n は次の様になる。

$$C_n=-\frac{1-Z_{II}^+/Z_I^+}{1-Z_{II}^+/Z_I^-}\,A_n$$

$$D_n\,h_n^{(1)}(kb)=\frac{1-Z_I^-/Z_I^+}{1-Z_I^-/Z_{II}^+}\,A_n$$

第9節 電気的磁気的横波の球面波と空洞

9.1. 球状空洞の中心に電気能率 I^*S [V·m²]※ なる双極源がおかれてゐる場合のベクトルポテンシャルは次の様に与へられる。但し空洞内部の電気定数を $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1=0$ とし、空洞をとり囲む無限領域のそれを ϵ_2, μ_2, 及び ~~μ_2~~ σ_2 とすると

$$A_{\phi I}^*=A^*\{h_1^{(1)}(k_1r)+B\,j_1(k_1r)\}\sin\theta\cdot e^{-i\omega t}$$

$$A_{\phi II}^*=D\,h_1^{(1)}(k_2r)\cdot\sin\theta\cdot e^{-i\omega t}$$

$$k_1^2=\omega^2\epsilon_1\mu_1\,,\quad k_2^2=\omega^2\epsilon_2\mu_2+i\omega\mu_2\sigma_2\,;\quad A^*=ik_1^2\epsilon_1 I^*S/(4\pi)$$

※ 面積 S なる小さい円板が2枚, d なる巨離へだてて相対する平行板コンデンサーがあり各極板は単位面積当り q 及び $-q$ なる電荷があつてこれが $\exp(-i\omega t)$ なる振動を行つてる様な系を考へるとこの蓄電器源による電磁界は $qS\cdot d/\epsilon_1$ なる大さのモーメントを持つ電気的双極子により生ずる場であつてこれは等価的に S と同じ周辺を持つコイルに $I^*=q\cdot d/\epsilon$ [V] なる磁流が流れてゐる時生ずる場と考へられる。そして $A^*=+\frac{\epsilon}{4\pi}\int\frac{J^*}{r}dS$ なる電気的ベクトルポテンシャルを以て記述し得る。

磁界はHφ分値のみを示も有し,電界はEr,Eθ分値を有するが,これらは上の電気的ベクトルポテンシャルを用いて次の様に求められる。

$$H_\phi = -\partial A_\phi^*/\partial t - (\sigma/\epsilon)\cdot A_\phi^*$$

$$\epsilon E = -\nabla\times A^*$$

空洞の半径をbとすると,この境界層でHφが連続することおよびEθが連続することより夫々次の条件が得られる。

$$h_1^{(1)}(k_1 b) + B j_1(k_1 b) = \left(1-\frac{\sigma_2}{i\omega\epsilon_2}\right)\cdot\frac{D}{\Lambda^*}\cdot h_1^{(1)}(k_2 b)$$

$$Z_{rI}^{+} h_1^{(1)}(k_1 b) + B Z_{rI}^{-} j_1(k_1 b) = \left(1-\frac{\sigma_2}{i\omega\epsilon_2}\right)\cdot\frac{D}{\Lambda^*}\cdot Z_{rII}^{+} h_1^{(1)}(k_2 b)$$

ここにZ_{rI}^{+}及びZ_{rI}^{-}は夫々空洞内空間のr方向の空間インピーダンスで+符号は発散波に対するもの,一符号は収斂波に対するものである。又Z_{rII}^{+}は空洞の外側媒質中における空間インピーダンスで発散波に対するものである。

$$Z_{rI}^{+} = (i\omega\epsilon_1 b)^{-1}\left[\frac{d}{dz}\{z h_1^{(1)}(z)\}/h_1^{(1)}(z)\right]_{z=k_1 b}$$

$$Z_{rI}^{-} = (i\omega\epsilon_1 b)^{-1}\left[\frac{d}{dz}\{z j_1(z)\}/j_1(z)\right]_{z=k_1 b}$$

$$Z_{rII}^{+} = (i\omega\epsilon_2 b - \sigma_2 b)^{-1}\left[\frac{d}{dz}\{z h_1^{(1)}(z)\}/h_1^{(1)}(z)\right]_{z=k_2 b}$$

上式より係数B及びDが次の如く与へられる。

$$B = \frac{h_1^{(1)}(k_1 b)}{j_1(k_1 b)}\cdot\frac{Z_{rI}^{+} - Z_{rII}^{+}}{Z_{rII}^{+} - Z_{rI}^{-}}$$

$$\frac{D}{\Lambda^*} = \left(1-\frac{\sigma_2}{i\omega\epsilon_2}\right)^{-1}\cdot\frac{h_1^{(1)}(k_1 b)}{h_1^{(1)}(k_2 b)}\cdot\frac{Z_{rI}^{+} - Z_{rI}^{-}}{Z_{rII}^{+} - Z_{rI}^{-}}$$

9.2 次に磁気的横波の球面波と空洞の相互作用について考へよう。即ち空洞の中心におかれた源が電気双極でなくて,双曲能率 I・S [A・m²]なる磁気双曲である時も今述べた電気双極の場合と同様に取扱へるのであって,この場合各領域の磁気ポテンシャルを$A_{\phi I}$及び$A_{\phi II}$とするとこれは次の如くなる。

$$A_{\phi I} = \Lambda\{h_1^{(1)}(k_1 r) + B j_1(k_1 r)\}\sin\theta\cdot e^{-i\omega t}$$

$$A_{\phi II} = D\cdot h_1^{(1)}(k_2 r)\cdot\sin\theta\cdot e^{-i\omega t}$$

$$\Lambda = i k_1^2\cdot\mu_1 I S/(4\pi)$$

そして前と殆んど同様な計算の結果定数B及びDは次の様に与へられる

$$B = \frac{h_1^{(1)}(k_1 b)}{j_1(k_1 b)}\cdot\frac{1/Z_{rII}^{+} - 1/Z_{rI}^{+}}{1/Z_{rI}^{-} - 1/Z_{rII}^{+}}$$

$$\frac{D}{\Lambda} = \frac{h_1^{(1)}(k_1 b)}{h_1^{(1)}(k_2 b)}\cdot\frac{1/Z_{rI}^{-} - 1/Z_{rI}^{+}}{1/Z_{rI}^{-} - 1/Z_{rII}^{+}}$$

そしてY方向の空間インピーダンスは

$$Z^{+}_{Y\,I} = i\omega\mu_1 b\left[h_1^{(1)}(z)\Big/\frac{d}{dz}\{z\,h_1^{(1)}(z)\}\right]_{z=k_1 b}$$

$$Z_{Y\,I} = i\omega\mu_1 b\left[j_1(z)\Big/\frac{d}{dz}\{z\,j_1(z)\}\right]_{z=k_1 b}$$

及び

$$Z^{+}_{Y\,II} = i\omega\mu_2 b\left[h_1^{(1)}(z)\Big/\frac{d}{dz}\{z\,h_1^{(1)}(z)\}\right]_{z=k_2 b}$$

である。上式で

$$\frac{d}{dz}\{z\,h_1^{(1)}(z)\}/h_1^{(1)}(z) = iz-\frac{i}{z}\left(1+\frac{i}{z}\right)^{-1}$$

$$\frac{d}{dz}\{z\,j_1(z)\}/j_1(z) = -1-z\,\mathrm{tg}\,z\left(1-\mathrm{tg}\,z/z\right)^{-1}$$

でありこの中第一のものは$z\to 0$で-1にtendし$z\to\infty$ではizに近づく。第二のものは$z\to 0$で2となる。そして$z\doteqdot 2.76$で0となり4.45で∞となる。之の実変数に対する変化を示したものが第4.11図である。 第4.11図

第10節　長球座標による電磁界の基礎方程式

第7節迄の長球に関する理論に於ては我々は空間に於ける変位電流を無視してゐる。第八及び第九の両節に於ては空間に於ける変位電流も考慮に入れてある。これは系の構成が完全空洞であるので、変位電流を考へに入れても尚且比較的簡単な数学的取扱が出来ることを示してゐる。然らば長球の場合に変位電流を考へに入れて厳密な取扱ひを行った場合如何になるか、この問題は直線状アンテナに依る(之は長球の一つの極端な場合と考へられる)電波の受信の問題等に関して最近二三論ぜられる様になったが長球波動函数についても未だ完全に研究し盡されては居ない現状に於ては未だ多分に未解決の問題が残されてゐる。ここではこれらの問題解明に対して一寄与を行はんとするものである。

10.1　ここでは一つの軸のまはりに回転対称的な電磁界を考へる事にする。Maxwellの基礎方程式は媒質の諸量及び誘電係数が座標ϕに無関係であるから次の如くに独立な2つの電磁場系に分れる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{h_2 h_\phi}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_\phi E_\phi)+\frac{\partial B_1}{\partial t}=0\\
&-\frac{1}{h_\phi h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_\phi E_\phi)+\frac{\partial B_2}{\partial t}=0\\
&\frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 H_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 H_1)\right\}-\frac{\partial D_\phi}{\partial t}=0
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{h_2 h_\phi}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_\phi H_\phi)+\frac{\partial D_1}{\partial t}=0\\
\frac{1}{h_1 h_\phi}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_\phi H_\phi)+\frac{\partial D_2}{\partial t}=0\\
\frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2E_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1E_1)\right\}+\frac{\partial B_\phi}{\partial t}=0
\end{aligned}\right\}(\mathrm{II})$$

もし長球座標を考へるならば計量係数は

$$h_1=f_2\sqrt{\frac{u_1^2-u_2^2}{u_1^2-1}},\quad h_2=f_2\sqrt{\frac{u_1^2-u_2^2}{1-u_2^2}},\quad h_\phi=\rho=f_2\sqrt{(u_1^2-1)(1-u_2^2)}\qquad\cdots(P.1)$$

であり又扁球座標では

$$h_1=f_1\sqrt{\frac{u_1^2-u_2^2}{u_1^2-1}},\quad h_2=f_2\sqrt{\frac{u_1^2-u_2^2}{1-u_2^2}},\qquad h_\phi=\rho=f_1 u_1 u_2\qquad\cdots(O.1)$$

である。$2f_1$, $2f_2$は夫々各座標系の焦点間の距離であり、ρは座標の一点より回転軸への垂直距離である。尚弧要素は

$$ds^2=h_1^2du_1^2+h_2^2du_2^2+h_\phi^2d\phi^2\qquad\cdots\cdots(2)$$

である。

今(I)(II)の群の中で(II)のみを考へることにする。

$$h_\phi\cdot H_\phi=\Psi$$

とおくと(II)よりE_1, E_2を消去してΨに対する次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left\{\frac{h_2}{h_1h_\phi}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}\right\}+\frac{\partial}{\partial u_2}\left\{\frac{h_1}{h_2h_\phi}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}\right\}+\omega^2\epsilon\mu\frac{h_1h_2}{h_\phi}\Psi=0\qquad\cdots\cdots(3)$$

この(3)を解いてΨを求めれば此のΨによって電磁界は次の様に与へられる。

$$\left.\begin{aligned}
E_1=\frac{i}{\omega\epsilon}\cdot\frac{1}{h_2h_\phi}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2},\quad E_2=-\frac{i}{\omega\epsilon}\cdot\frac{1}{h_1h_\phi}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}\\
H_\phi=\frac{1}{h_\phi}\Psi,
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

(3)は長球の場合には(P.1)を用ひ次の如くなる。

$$(u_1^2-1)\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_1^2}+(1-u_2^2)\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_2^2}+\frac{\omega^2f_2^2}{v^2}(u_1^2-u_2^2)\cdot\Psi=0\qquad\cdots(P.4)$$

但し $v^2=\epsilon\mu$

扁球の場合には(O.1)に於て $u_1=\sqrt{1+\xi^2}$, $u_2=\sqrt{1-\zeta^2}$ と変換*すると計量係数は

$$h_\xi=f_1\sqrt{\frac{\xi^2+\zeta^2}{\xi^2+1}},\quad h_\zeta=f_1\sqrt{\frac{\xi^2+\zeta^2}{1-\zeta^2}},\quad h_\phi=f_1\sqrt{(1+\xi^2)(1-\zeta^2)}$$

であって(3)は次の様になる。

$$(\xi^2+1)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}+(1-\zeta^2)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}+\frac{\omega^2f_1^2}{v^2}(\xi^2+\zeta^2)\Psi=0\qquad\cdots\cdots(O.4)$$

(4)は共に変数が分離してゐるから

$$\Psi_P=D_1(u_1)\cdot D_2(u_2)\qquad(長球の場合)$$

---

* $h_1du_1=h_\xi d\xi$ 及び $du_1=\xi d\xi/\sqrt{(1+\xi^2)}$ の関係を用ふ。

$$\Phi_0 = Z(\zeta)\,\Xi(\xi) \qquad \text{（偏球の場合）}$$

なる解がある。U_1, U_2 或は Z, Ξ は次式の解である。

$$\left.\begin{aligned}(u_1^2-1)\frac{d^2U_1}{du_1^2} + (-B+\lambda^2u_1^2)U_1 &= 0\\ (1-u_2^2)\frac{d^2U_2}{du_2^2} + (B-\lambda^2u_2^2)U_2 &= 0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (P.5)$$

及び

$$\left.\begin{aligned}(\zeta^2+1)\frac{d^2Z}{d\zeta^2} + (-B+\lambda^2\zeta^2)Z &= 0,\\ (1-\xi^2)\frac{d^2\Xi}{d\xi^2} + (B+\lambda^2\xi^2)\Xi &= 0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (O.5)$$

但し $\lambda^2 = \omega^2 f^2/v^2$ である。

(O.5)式で λ の代りに $i\lambda$ とおき、ζ の代りに iu_1 とおくと (P.5) の式が得られる。故に何れか一組例へば (P.5) を考へればよい。(P.5) の二組の式は同一のものであるから結局

$$(1-u^2)\frac{d^2U}{du^2} + (B-\lambda^2u^2)U = 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

を考へればよい。この式は $U = \sqrt{1-u^2}\,X$ とおくと

$$\frac{d}{du}\left\{(1-u^2)\frac{dX}{du}\right\} + \left(B-\lambda^2u^2-\frac{1}{1-u^2}\right)X = 0 \quad \cdots\cdots (5.1)$$

となる。之は楕球波動方程式

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dX}{dx}\right\} + \left(B-\lambda^2x^2-\frac{m^2}{1-x^2}\right)X = 0$$

又は $X = (1-x^2)^{m/2}\,w$ として

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dw}{dx} + \{\lambda^2x^2 + B - m(m+1)\}w = 0$$

に於て $m=-1$ とした特別の場合に相当する。この方程式は Nicholson*, Wilson** 等によって論ぜられた。

(5)より分る様に微分方程式の一つの解を $f(u)$ とすると $f(-u)$ も又解であるから $f(u)+f(-u) = f_1$, $f(u)-f(-u) = f_2$ として f_1, f_2 を作ると、この f_1, f_2 は又解であって夫々偶函数及び奇函数である。物理的な問題では $-1 \le u_2 \le 1$ に於て有限な解及び $1 \le u_1 \le \alpha$（α はある一定の有限の定数）で有限な解を求めることが問題となる。

10.21 (5)式を考へる。

$$(1-u^2)\frac{d^2U}{du^2} + (B-\lambda^2u^2)U = 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

$-1 \le u \le 1$ に於て有限な上式の解は u の冪級数又は Legendre の陪函数 $P_{s+1}^{1}(u)$ の級数で表はす等の色々の表現法が考へられるが、B の特性値を求めるためには u の冪級数で表はすのが最も簡単である。

* J. W. Nicholson : Proc. Roy. Soc. Lond. A, CVII P.431 (1925)
** A. W. Wilson : Proc. Roy. Soc. Lond. A, CXVIII P.617 (1928)

先づ偶函数について考へる。

$$U = a_0 + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \cdots\cdots \qquad \cdots(6)$$

として之を上の(5)に代入すると次の様な漸近式を得る。

$$\left.\begin{aligned} &2a_2 + a_0 B = 0 \\ &4\cdot3\cdot a_4 = (2-B)a_2 + \lambda^2 a_0 \\ &6\cdot5\cdot a_6 = (4\cdot3-B)a_4 + \lambda^2 a_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots \\ &(2m+2)(2m+1)a_{2m+2} = \{2m(2m-1)-B\}a_{2m} + \lambda^2 a_{2m-2} \end{aligned}\right\} \cdots(7)$$

今 $a_{2m+2}/a_{2m} = N_m$ とおくと上式より

$$N_m = \frac{2m(2m-1)-B}{(2m+2)(2m+1)} + \frac{\lambda^2}{(2m+2)(2m+1)}\cdot\frac{1}{N_{m-1}} \qquad \cdots\cdots(8)$$

又は

$$N_{m-1} = \frac{-\lambda^2}{2m(2m-1)-B-(2m+2)(2m+1)N_m} \qquad \cdots\cdots(8\cdot1)$$

が得られる。もし $m\to\infty$ で $N_m \to 0$ ならば(6)は $-1 \leqq u \leqq 1$ で有限である。 (8·1)と(7)より

$$N_0 = -\frac{B}{2} = \frac{-\lambda^2}{1\cdot2-B} + \frac{3\cdot4\lambda^2}{3\cdot4-B} + \frac{5\cdot6\lambda^2}{5\cdot6-B} + \cdots\cdots \qquad (9)^*$$

の如き連分数式が得られる。之が特性値 B を λ^2 の函数で与へる関係式である。λ^2 は普通極めて小さいから、B を λ^2 の冪級数として次の様に表はす。

$$B = b_0 + b_2\lambda^2 + b_4\lambda^4 + \cdots\cdots \qquad \cdots(10)$$

$\lambda^2=0$ の時は(5·1)より分る様に球の場合となり

$$B = b_0 = n(n+1) \quad , \; n = 0, 1, 2, \cdots$$

である故に(10)は

$$B_n = n(n+1) + b_2\lambda^2 + b_4\lambda^4 + \cdots \qquad \cdots(10\cdot1)$$

の様に書き得るであらう。(10·1)を(9)に代入すれば各特性値は分り次の結果を得る。

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 2 + \frac{1}{5}\lambda - \frac{4}{5^3\cdot7}\lambda^4 + \cdots\cdots \\ B_3 &= 12 + \frac{7}{3\cdot5}\lambda^2 + \frac{152}{3^4\cdot5^3\cdot11}\lambda^4 + \cdots\cdots \end{aligned}\right\}(11)$$

次に奇函数について考へよう。

$$U = a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + \cdots\cdots \qquad (12)$$

とおき、これを(5)に代入する。そして u の各々の冪の係数を 0 とおくと次の漸化式を得る。

---

* (9)を変形して得られる

$$B = \frac{\lambda^2}{1-\frac{B}{1\cdot2}} + \frac{\lambda^2/1\cdot2}{1-\frac{B}{3\cdot4}} + \frac{\lambda^2/3\cdot4}{1-\frac{B}{5\cdot6}} + \frac{\lambda^2/5\cdot6}{1-\frac{B}{7\cdot8}} + \cdots\cdots$$

の方がよい形である。

$$\left.\begin{aligned} &2\cdot 3 a_3 + B a_1 = 0 \\ &4\cdot 5 a_5 = (2\cdot 3 - B) a_3 + \lambda^2 a_1 \\ &6\cdot 7 a_7 = (4\cdot 5 - B) a_5 + \lambda^2 a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(2m+2)(2m+3)\, a_{2m+3} = \{2m(2m+1) - B\}\, a_{2m+1} + \lambda^2 a_{2m-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

今$a_{2m+3}/a_{2m+1} = N_m$とすると上式より

$$N_{m-1} = \frac{-\lambda^2}{2m(2m-1) - B - (2m+2)(2m+3) N_m}$$

が得られる。之より

$$N_0 = \frac{-\lambda^2}{2\cdot 3 - B} + \frac{4\cdot 5\lambda^2}{4\cdot 5 - B} + \frac{6\cdot 7\lambda^2}{6\cdot 7 - B} + \cdots\cdots$$

が得られる。一方$N_0 = a_3/a_1 = -B/(2\cdot 3)$であるからこの2つを等しいとおいてみると特性値Bを求むべき次の連分数式が得られる。

$$B = \frac{\lambda^2}{1 - B/2\cdot 3} + \frac{\lambda^2/2\cdot 3}{1 - \frac{B}{4\cdot 5}} + \frac{\lambda^2/4\cdot 5}{1 - \frac{B}{6\cdot 7}} + \frac{\lambda^2/6\cdot 7}{1 - \frac{B}{8\cdot 9}} + \cdots \quad (14)$$

これよりBが得られるが最初の2根を次に与へる。

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= 6 + \frac{3}{7}\lambda^2 - \frac{109}{4\cdot 7^3}\lambda^4 + \cdots\cdots \\ B_4 &= 20 + \frac{37}{7\cdot 11}\lambda^2 + \frac{1871473}{2^3\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11^3\cdot 13}\lambda^4 + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

10.22　固有値Bは上の如くして求められたが実際の函数は陪ルヂャンドル函数で展開した方が便利である。即ち$U = \sqrt{1-u^2}\, X$とおくとXの満足する式は

$$\frac{d}{du}\left\{(1-u^2)\frac{dX}{du}\right\} + \left(B - \lambda^2 u^2 - \frac{1}{1-u^2}\right) X = 0 \quad (16)$$

である。先づ偶函数解を求めよう。

$$X = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} P'_{2m+1}(u) \qquad (B = B_1, B_3, \cdots)$$

として上式に代入するのであるがその為に上式を次の如く書き直す

$$\frac{d}{du}\left\{(1-u^2)\frac{dX}{du}\right\} + \left\{(2m+1)(2m+2) - \frac{1}{1-u^2}\right\} X + \{B - \lambda^2 u^2 - (2m+1)(2m+2)\} X = 0$$

この最初の2項は$P'_{2m+1}(u)$によつて満足される式であるからXの値を代入すると次の様になる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}\{(B-\lambda^2 u^2)-(2m+1)(2m+2)\}P^1_{2m+1}(u)=0$$

扨て $u^2 P_n^m(u)=\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}P^m_{n+2}(u)+\frac{2n(n+1)-2m^2-1}{(2n-1)(2n+3)}P^m_n(u)$

$$+\frac{(m+n)(n+m-1)}{(2n-1)(2n+1)}P^m_{n-2}(u) \qquad (17)^*$$

なる関係があるから之を上式に代入し同種のルジャンドル函数の係数を0とおいて次の(18)を得る。

$$\frac{(2m+4)(2m+3)}{(4m+5)(4m+7)}a_{2m+2}-\frac{a_{2m}}{\lambda^2}\Big\{B-(2m+1)(2m+2)$$

$$-\lambda^2\frac{(4m+2)(2m+2)-3}{(4m+1)(4m+5)}\Big\}+\frac{(2m-1)(2m)}{(4m-1)(4m+1)}a_{2m-2}=0 \qquad \cdots(18)^\dagger$$

Bは既に分ってゐるのであるから之より各係数が決定される。

次に奇函数解

$$X=\sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}P^1_{2m+1+1}(u) \qquad (B=B_2, B_4, B_6 \cdots)$$

を考へる。この級数の係数に対する漸化式は上式の(18)の(2m)の代りに(2m+1)を用いればよいのである。

(16)の微分方程式は或るBの値に対して2つの独立解がある。

Bを特性値に撰ぶとその中一つは周期解になる。$B_1, B_3, \cdots$の群を選べば その周期解は偶函数であり、$B_2, B_4, \cdots$の群を選べば奇数周期函数を得る。他の一つの独立解は何れも周期解ではなく普通の物理的条件を顧慮すると用いられない。

(11)と(18)を用いると偶周期函数の解Xの係数が求められる。即ち

$$B_1=2+\frac{1}{5}\lambda^2-\frac{4}{5^3\cdot 7}\lambda^4+\cdots\cdots$$

に対しては

$$X=P^1_1(u)-\Big\{\frac{1}{3\cdot 5^2}\lambda^2-\frac{2}{3^2\cdot 5^4}\lambda^4+\frac{31}{3\cdot 5^5\cdot 7^2\cdot 11}\lambda^6-\cdots\cdots\Big\}P^1_3(u)+$$

$$+\Big\{\frac{1}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}\lambda^4-\frac{4}{3\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 13}\lambda^6+\cdots\cdots\Big\}P^1_5(u)+\Big\{\frac{1}{3^4\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13}\lambda^6$$

$$+\cdots\cdots\Big\}P^1_7(u)+\cdots\cdots \qquad (19)$$

が得られ、又

$$B_3=12+\frac{7}{3\cdot 5}\lambda^2+\frac{152}{3^4\cdot 5^3\cdot 11}\lambda^4+\cdots\cdots$$

に対しては $X=\frac{6}{5^2\cdot 7}\lambda^2 P^1_1(u)+P^1_3(u)-\frac{2}{3^3\cdot 7}\lambda^2 P^1_5(u)+\cdots\cdots \qquad (20)$

となる。

---

* 特に $n=m=1$ のときには次の様になる

$$u^2P^1_1(u)=\frac{2}{3\cdot 5}P^1_3(u)+\frac{1}{5}P^1_1(u)$$

† 特に $m=0$ のときは $\frac{4\cdot 3}{5\cdot 7}a_2-\frac{a_0}{\lambda^2}\left(B-2-\frac{\lambda^2}{5}\right)=0$ となる。

奇数周期函数も $B_2, B_4, \cdots\cdots$ と係数間の漸化式を用ひて求め得る。$B_2, B_4, \cdots\cdots$ は(15)に与へられており漸化式は(18)で $2m$ の代りに $2m+1$ とおけばよい。

10.3　扁球の問題　前述の如く電磁界を決定すべき函数Φは(1.4)で与へられる。この函数Φが

$$\Phi_0 = Z(\zeta)\cdot\Xi(\xi)$$

の如く分離し得るとすると各函数は次の微分方程式を満足する。

$$(\zeta^2+1)\frac{d^2Z}{d\zeta^2} + (-B+\lambda^2\zeta^2)Z = 0 \qquad \cdots(1.1)$$

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\Xi}{d\xi^2} + (B+\lambda^2\xi^2)\Xi = 0 \qquad \cdots(1.2)$$

ここで(1.2)は長球の場合の(5)に於てλ^2の代りに$-\lambda^2$を用ひればよいからこの解は次の様になる。

$$B_1 = 2 - \frac{1}{5}\lambda^2 - \frac{4}{5^3\cdot7}\lambda^4 - \frac{8}{3\cdot5^5\cdot7}\lambda^6 - \cdots\cdots$$

$$(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\Xi_1(\xi) = P_1^1(\xi) + \left(\frac{1}{3\cdot5^2}\lambda^2 + \frac{2}{3^2\cdot5^4}\lambda^4 + \frac{31}{3\cdot5^5\cdot7^2\cdot11}\lambda^6\right)P_3^1(\xi)$$
$$+\left(\frac{1}{3^2\cdot5^2\cdot7^2}\lambda^4 + \frac{4}{3\cdot5^4\cdot7^2\cdot13}\lambda^6 + \cdots\right)P_5^1(\xi) + \left(\frac{1}{3^4\cdot5\cdot7^2\cdot11\cdot13}\lambda^6 + \cdots\cdots\right)P_7^1(\xi) + \cdots\cdots \qquad (2.1)$$

$$B_3 = 12 - \frac{7}{3\cdot5}\lambda^2 + \frac{152}{3^4\cdot5^3\cdot11}\lambda^4 + \cdots\cdots$$

$$(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\,\Xi_3(\xi) = -\frac{6}{5^2\cdot7}\lambda^2 P_1^1(\xi) + P_3^1(\xi) + \frac{2}{3^3\cdot7}\lambda^2 P_5^1(\xi) + \cdots \qquad (2.2)$$

次に(1.1)は前の長球の場合の対応する式(P.5)よりも導き得るがこゝでは此の場合に便利な様に直接(1.1)を考へよう。この式で$\lambda^2\to0$とした時の解は周知の様に$B_1=2$に対して

$$Z(\zeta) = \sqrt{1+\zeta^2}\,P_1^1(i\zeta) = 1+\zeta^2$$

及び

$$\sqrt{1+\zeta^2}\cdot Q_1^1(i\zeta) = (1+\zeta^2)\operatorname{ctg}^{-1}\zeta - \zeta$$

である。故にλ^2が小さいが然し有限の値を有する時の完全解を次のやうに仮定する。即ち

$$B_1 = 2 - \frac{1}{5}\lambda^2 - \frac{4}{5^3\cdot7}\lambda^4 - \cdots\cdots$$

に対して

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= (1+\zeta^2) + w_1\lambda^2 + w_2\lambda^4 + \cdots\cdots \\ V_1 &= W_1\cdot\operatorname{ctg}^{-1}\zeta - \zeta\cdot v \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(3)$$

ここに $w_1, w_2 \cdots\cdots$ は ζ^2 の多項式であり v は次の方程式の解である。

$$\zeta(1+\zeta^2)\frac{d^2v}{d\zeta^2} + 2(1+\zeta^2)\frac{dv}{d\zeta} + (-B+\lambda^2\zeta^2)\zeta v + 2W_1' - \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}W_1 = 0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

先づ w の表現を(1.1)に代入し，w_1; w_2，…の満足する方程式を作これを解くと

$$W_1=(1+\varsigma^2)\left\{1-\frac{1}{10}\varsigma^2\lambda^2+\frac{1}{2^3.5^3.7}(25\varsigma^4-16\varsigma^2)\lambda^4-\frac{1}{2^4.3^3.5^3.7}(625\varsigma^6-1200\varsigma^4+5765\varsigma^2)\lambda^6+\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots\right\}$$

となる。この W_1 を用いて(4)を解くと長い計算の後 v が求まり従って第二の解は

$$V_1=W_1\cdot ctg^{-1}\varsigma-\varsigma\left\{1-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\varsigma^2\right)\lambda^2+\left(\frac{26}{5^3}+\frac{73}{5^3 7}\varsigma^2+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^3.5.7}\varsigma^4\right)\lambda^4-\left(\frac{7796}{3^2.5^5.7}+\frac{6203}{2^2.3^3.5^5}\varsigma^2+\frac{31}{2^3.3^2.5^3}\varsigma^4+\frac{1}{2^4.3^2.5.7}\varsigma^6\right)\lambda^6$$
$$\left.+\cdots\cdots\right\}$$

となる。同様にして

$$B_3=12-\frac{7}{3.5}\lambda^2+\frac{152}{3^4.5^3.11}\lambda^4+\cdots\cdots$$

に対しては* $W_3=(1+\varsigma^2)\left\{(5\varsigma^2+1)-\frac{1}{2.3^2.5}(25\varsigma^4+21\varsigma^2)\lambda^2+\right.$

$$\left.+\frac{1}{2^3.3^5.5^3.11}(16875\varsigma^6+25775\varsigma^4+1824\varsigma^2)\lambda^4+\cdots\cdots\right\}$$

となり、第二解 V_3 は次の如く

$$V_3=W_3\,ctg^{-1}\varsigma\ -\varsigma\left\{\frac{1}{3}(13+15\varsigma^2)+g_1(\varsigma^2)\lambda^2+g_2(\varsigma^2)\lambda^4+\cdots\cdots\right\}$$

と仮定して g_1, g_2 を定めると結局次の様になる。

$$V_3=W_3\cdot ctg^{-1}\varsigma-\varsigma\left\{\frac{1}{3}(13+15\varsigma^2)-\left(\frac{16}{3^3.5}+\frac{113}{2.3^3.5}\varsigma^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{5}{2.3^2}\varsigma^4\right)\lambda^2+\cdots\cdots\right\}$$

即ち方程式(1.1)の一般解は特性値 B_1 に対しては

$$Z_1(\varsigma)=A_1\cdot W_1(\varsigma)+B_1V_1(\varsigma)$$

であり特性値 B_3 に対しては

$$Z_3(\varsigma)=A_3\cdot W_3(\varsigma)+B_3\cdot V_3(\varsigma)$$

である。この解が無限遠に於て発散波 $\exp(i\lambda\varsigma)$ に等しくなるために A, B なる定数は任意ではあり得ない。無限遠に於て $Z(\varsigma)=\exp(i\lambda\varsigma)$ になる様な解を求めるために

$$Z(\varsigma)=\exp(i\lambda\varsigma)\left\{1+p_1(\lambda)\varsigma^{-1}+p_2(\lambda)\varsigma^{-2}+\cdots\right\}$$

とおいてこれを(1.1)式に代入し p_1, p_2 を定める。一方 $Z(\varsigma)=A\cdot W+$ $+B\cdot V$ であるからこれらの2つの $Z(\varsigma)$ の表現を比較して A, B を

* $\lambda^2\to 0$ の時の解は $W_3=(1+\varsigma^2)(5\varsigma^2+1)$, $V_3=W_3\cdot ctg^{-1}\varsigma$ $-\frac{1}{3}\varsigma(13+15\varsigma^2)$ である。

定めることが出来る。後で用いるから A/B を次に与へる。

$$A_1/B_1 \doteqdot -\frac{2\lambda^3}{9}i \quad , \quad A_3/B_3 = O(\lambda^5)$$

扁球の短軸の方向に始源電界が加へられた場合の扁球導体(完全導体とする)の振動を考へる。始源電界は扁球の極めて近傍に於ては一様と見做し得る程度の波長であると仮定しよう。始源電界 E_0 の扁球表面に於ける切線成分を求めると

$$-E_0 \cdot \zeta_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2} \Big/ \sqrt{\zeta_0^2+\xi^2}$$

となる。* 又二次電界の切線成分 E_ξ は

$$E_\xi = -\frac{i}{\omega\epsilon}\cdot\frac{1}{h_\zeta h_\varphi}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta} = \frac{-i}{\omega\epsilon}\cdot\frac{1}{f_1^2}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2+\xi^2}\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}$$

であるから、これより境界条件、即ち導体の表面に於て全電界の切線成分が消滅する(導体が完全導体であるから)ことを考慮すると、

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta} = i\lambda\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cdot E_0\cdot f_1\zeta\cdot P_1^1(\xi)\sqrt{1-\xi^2}\,,\quad (\zeta=\zeta_0)$$

でなければならない。Ψ は $C_1, C_3, \cdots\cdots$ を常数として

$$\Psi = C_1\cdot Z_1(\zeta)\Xi_1(\xi) + C_3 Z_3(\zeta)\Xi_3(\xi) + \cdots$$

であり、Ξ, Z は (2) 及び (3) で与へられてゐる。

即ち $\Xi_1(\xi) = \{a_{1,0}P_1^1(\xi) + a_{1,2}P_3^1(\xi) + a_{1,4}P_5^1(\xi) + \cdots\}\sqrt{1-\xi^2}$

$$\Xi_3(\xi) = \{a_{3,0}P_1^1(\xi) + a_{3,2}P_3^1(\xi) + a_{3,4}P_5^1(\xi) + \cdots\}\sqrt{1-\xi^2}$$

とすると境界条件は

$$\begin{aligned} &C_1\cdot Z_1'(\zeta)\{a_{1,0}P_1^1(\xi) + a_{1,2}P_3^1(\xi) + \cdots\cdots\} \\ &+ C_3 Z_3'(\zeta)\{a_{3,0}P_1^1(\xi) + a_{3,2}P_3^1(\xi) + \cdots\} + \cdots\cdots \\ &= i\lambda\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cdot E_0\cdot f_1\zeta_0\cdot P_1^1(\xi) \end{aligned}$$

である。同種のルヂャンドル函数の係数を等しいとおくと、

$$a_{1,0}Z_1'(\zeta_0)\cdot C_1 + a_{3,0}Z_3'(\zeta_0)\cdot C_3 \doteqdot i\lambda\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cdot E_0\cdot f_1\zeta_0$$

$$a_{1,2}Z_1'(\zeta_0)\cdot C_1 + a_{3,2}Z_3'(\zeta_0)C_3 \doteqdot 0$$

が得られ、これを解いて C_1, C_3 が求められる。即ち

$$C_1 \doteqdot i\lambda\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cdot E_0\cdot f_1\cdot\zeta_0\left\{1+\frac{2}{5^4\cdot 7}\lambda^4+\frac{4}{3\cdot 5^6\cdot 7}\lambda^6+\cdots\right\}\Big/\left(\frac{dZ_1}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0}$$

$$C_3 \doteqdot -i\lambda\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cdot E_0\cdot f_1\zeta_0\left\{\frac{1}{3\cdot 5^2}\lambda^2+\frac{2}{3^2\cdot 5^6}\lambda^4+\cdots\cdots\right\}\Big/\left(\frac{dZ_3}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0}$$

扨 $2\pi\rho\cdot H_\varphi$ を考へるとこれは子午線に沿つて流れる全電流 I_ξ である。$\rho H_\varphi = \Psi$ を用ひると結局次の様になる。但し時間

* 扁球を短軸を含む平面で截つた切口の楕円は $(y^2/\zeta_0^2)+\{\rho^2/(\zeta_0^2+1)\} = f_1^2$ で与へられるから、これより楕円への切線が楕円長軸 ρ となす角を χ とすれば $\tan\chi = dy/d\rho = -\frac{\zeta_0}{\xi}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1+\zeta_0^2}}$ となる。電界の切線成分は $E_0\sin\chi$ である。

に

に関する因数は省略する。

$$I_\xi = 2\pi\Psi = 2\pi\left\{C_1 Z_1(\xi)\Xi_1(\xi) + C_3 Z_3(\xi)\Xi_3(\xi) + \cdots\cdots\right\}$$

$$= i\lambda K\left\{\left(1+\frac{2}{5^4\cdot 7}\lambda^4+\frac{4}{3\cdot 5^6\cdot 7}\lambda^6+\cdots\cdots\right)\Xi_1(\xi)Z_1(\xi_0)\Big/\left(\frac{dZ_1}{d\xi}\right)_{\xi_0} -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{3\cdot 5^2}\lambda^2+\frac{2}{3^2\cdot 5^4}\lambda^4+\cdots\cdots\right)\Xi_3(\xi)Z_3(\xi_0)\Big/\left(\frac{dZ_3}{d\xi}\right)_{\xi_0} + \cdots\cdots\cdots\right\}$$

ここに　$K \equiv 2\pi\sqrt{\varepsilon/\mu}\cdot E_0\cdot f_1\xi_0$　である。

普通上式の第二項の寄与は極めて僅かであって I_ξ は大体基本項で表はし得る。即ち，

$$I_\xi \doteqdot i\lambda K\left(1+\frac{2}{5^4\cdot 7}\lambda^4+\frac{4}{3\cdot 5^6\cdot 7}\lambda^6+\cdots\cdots\right)\Xi_1(\xi)\cdot Z_1(\xi_0)\Big/\left(\frac{dZ}{d\xi}\right)_{\xi_0}$$

円板周辺に於ける電流 $I_\xi\,(\xi=0)$ を $I_{\xi 0}$ とすると 10.21頁の(6)(7)より

$$\frac{I_\xi}{I_{\xi 0}} = \frac{\Xi(\xi)}{\Xi_1(0)} = 1-\frac{B}{2}\xi^2+\left\{\frac{B(B-2)}{24}-\frac{\lambda^2}{12}\right\}\xi^4$$

$$+\left[\frac{(12-B)}{30}\left\{\frac{B(B-2)}{24}-\frac{\lambda^2}{12}\right\}+\frac{B}{60}\lambda^2\right]\xi^6+\cdots\cdots$$

$$= 1-\left(1-\frac{1}{2\cdot 5}\lambda^2-\frac{2}{5^3\cdot 7}\lambda^4-\frac{4}{3\cdot 5^5\cdot 7}\lambda^6\right)\xi^2$$

$$-\frac{\lambda^2}{2^3\cdot 3\cdot 5}\left(12-\frac{27}{5^2\cdot 7}\lambda^2-\frac{104}{3\cdot 5^4\cdot 7}\lambda^4-\frac{32}{3\cdot 5^4\cdot 7^2}\lambda^6\right)\xi^4$$

$$-\frac{\lambda^4}{2^3\cdot 5\cdot 7}\left(1+\frac{23}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5^2}\lambda^2\right)\xi^6+\cdots\cdots$$

ここで $\xi=\pm 1$ とすると上式は λ の値の如何に拘はらず 0 となる。即ち円板の中心では電流は常に 0 である。又 λ の値が極めて小さい時には円板半径に沿ふ電流分布は $1-\xi^2$ に近似する。λ の増加と共に電流分布は全体として円板周辺に密になり円板中心部は極めて疎になる。

又 $Z_1(0) = A_1 + \frac{\pi}{2}B_1$ ，$\quad \dfrac{dZ_1(0)}{d\xi} = -2\left(1-\frac{1}{5}\lambda^2+\frac{13}{5^3}\lambda^4-\right.$

$$\left. -\frac{3898}{3^2\cdot 5^5\cdot 7}\lambda^6+\cdots\right)B_1,$$

$$Z_3(0) = A_3 + \frac{\pi}{2}B_3\,,\quad \frac{dZ_3}{d\xi} = -\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3^2\cdot 5}\lambda^2+\cdots\cdots\right)B_3$$

であり $A_1/B_1 \doteqdot -\frac{2}{9}i\lambda^3$ であり $A_3/B_3 = O(\lambda^5)$ であるから

この関係を用いて

$$I_\xi \doteqdot K\left\{-\frac{\lambda^4}{9}+i\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\lambda^3}{5^2}\frac{3}{32}-\frac{\lambda}{2}\right)\right\}\qquad となる。$$

附録

純虚変数に対する球函数表

$Q_1(ix)$, $Q_2(ix)$, $P_2(ix)$, $P_1^1(ix)$, $Q_1^1(ix)$, $P_2^1(ix)$ 及び $Q_2^1(ix)$

を $x = 0, 0.02, 0.04, \cdots\cdots 0.98, 1.0, 1.2, 1.4 \cdots\cdots 9.8, 10$ の各々に対して与へ更に

$P_1^1(ix)$, $Q_1^1(ix)$ 及び $P_2^1(ix)$, $Q_2^1(ix)$ を

$x = 0, 0.1, 0.2, \cdots\cdots 0.9, 1.0, 2.0, 3.0 \cdots\cdots 10$. の各 x に対して次に与へてある。(別冊数表)　第42表

第五章　傳送回路網としての考察及び多重遮蔽の問題

導波管，同軸ケーブル等に於ける電磁エネルギーの傳送の問題を分布定数送電線に於ける電力傳送の問題に変換して考へたのはSchelkunoff である。彼のこの考へ方はその初期の論文*にもすでに窺ふことが出来るが，その後同種の問題で次々に考察が熟し，ついに方向性を持つた新しいインピーダンス+の概念に到達した。そしてこれに倣つて導波管，空洞共振器及び同軸ケーブル内の電磁波の傳播を回路論的な見地から論じた論文も少なからず発表されて居る。筆者は≫多重遮蔽の問題≪にこの考へ方を用ひて見た。これは傳送回路で言ふ≫複合線路の問題≪に歸着せしめ得るからである。

第一節　円柱遮蔽現象に於ける傳送方程式

導波管，同軸ケーブル等では管軸の方向がエネルギー傳送の方向であつて，これを直交座標(u_1, u_2, u_3)に於てu_3の方向であるとする．真直な場の場合には(u_1, u_2, z)である。管軸方向に傳送される信号のエネルギーは単位面積当り$(E_1H_2-E_2H_1)$である。但し場のベクトル成分の内u_1及びu_2の方向をむいたものを夫々1及び2の添字によつてあらはしてゐる。これに反して我々がこゝで考へようとする場は遮蔽管壁を徹して外部に脱出するエネルギー流を構成するのに寄与するものであつて，エネルギーベクトル$\mathbf{E}\times\mathbf{H}$の内で管軸に直角な分値に関係するもので必然的に$E_3$或は$H_3$（$E_z$或は$H_z$）の何れか一つを含む。即ち管壁をあらはす方程式が例へば$u_1=$一定であるとすれば管壁を直角に外界に脱出するエネルギーは$(E_2H_3-E_3H_2)$である。
普通導波管理論では管壁の導電率は無限に大きいものと假定して所謂横の電気波と横の磁気波とを夫々独立に存在し得る如くして論じてゐるが，遮蔽論に於て斯くの如く假定することは許されない。しかし一方導傳率が有限な場合には管軸に対して対称な波動を除いては一般に電界又は磁界の主傳送方向の分値を欠くことによつて特徴づけられる波動即ち横の電気波又は横の磁気波を相互独立に論ずることは出来ない。
我々はさきに假定したやうにこゝに考へんとする管軸に直角な方向の場の変化に比較して，管軸方向の場の変化を無視して考へてよい場合，即ち管軸方向の傳播定数kを管軸に直角方向

* S.A Schelkunoff; The Electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Lines and Cylindrical Shield. B.S.T.J. **13**, P. 532 (1934)
\+ S.A Schelkunoff; The Impedance Concept and its Application to Problems of Reflection, Refraction, Shielding and Power Absorption. B.S.T.J. **17**, P. 17 (1938)

の傳播恒数kに比して無視し得る場合には問題は非常に簡單となる。極限として$n=0$の場合が、さきに考へた二次元の場合場合であつて。界は再び横磁的のものと横電気的のものとの二つに分離する。
さて第二章第一節の基礎方程式(I)を円柱座標で考へて見ると、E_z, H_ϕ及びH_r間の関係式が得られるが、こゝで電界E_zが座標分ϕに関して$\cos n\phi$に従ふとするならば、この関係式は更に次の如くなる。

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r}H_\phi=\left(\frac{k^2}{i\omega\mu}-\frac{n^2}{i\omega\mu r^2}\right)E,$$

$$\frac{\partial E}{\partial r}=-i\omega\mu H_\phi.$$

これを磁気的横波に対する傳送方程式と云つてもよいであらう。
$|kr|\gg 1$なる所では上式のはじめのものは

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial r}=\frac{k^2}{i\omega\mu}E$$

となり、第二式と共に形式上分布直列インピーダンス$i\omega\mu$及び分布並列アドミッタンス$k^2/i\omega\mu$をもつ送電線の傳送方程式が得られる。
しかしE, H_ϕ及びH_rは共に一つのベクトルポテンシャルA_zによつて記述し得るのであつて、これらは筆者の以前の報告に詳しくのべた所である。
さて次に球遮蔽の場合を考へよう。この場合にはさきの円柱の場合と異り傳送方向としては唯一つで、球中心よりの放射線の方向即ちr座標分の方向である。傳送方程式は第二章、第二節で述べたやうに、磁気的横波の場合には

$$\frac{\partial V}{\partial r}=-Z\cdot A\ ,\quad \frac{\partial A}{\partial r}=-Y\cdot V$$

$$Z=-i\omega\mu+\chi^2/\{r^2(\sigma-i\omega\epsilon)\},\qquad Y=\sigma-i\omega\epsilon$$

であり電気的横波の場合には

$$\frac{\partial C}{\partial r}=-Z\cdot\Phi,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial r}=-Y\cdot C$$

$$Z=-i\omega\mu,\qquad Y=(\sigma-i\omega\epsilon)-\chi^2/(i\omega\mu r^2)$$

となる。

第二節　円柱波に関する空間インピーダンス
第二章、第二節(9)より知るやうに<u>$H_z=0$なる横磁円柱波</u>のベクトルポテンシャルは

$$A=C_n\left(\sqrt{k^2-h^2}\cdot r\right)e^{in\phi}\cdot e^{\pm ihz}\cdot e^{-i\omega t}$$

であり、スカラポテンシャルは $Y=\sigma-i\omega\epsilon$ として

$$V=-\frac{1}{Y}\cdot\frac{\partial A}{\partial z}=\pm\frac{ih}{Y}\cdot C_n(\sqrt{k^2-h^2}\cdot r)e^{in\phi}\cdot e^{\pm ihz}\cdot e^{-i\omega t}$$

である。これより場の諸成分は次の如く与へられる。

$$H_r=\frac{in}{r}A\ ,\quad H_\phi=-\frac{\partial A}{\partial r}\ ,\quad H_z=0$$

$$E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}\ ,\quad E_\phi=-\frac{in}{r}V\ ,\quad E_z=i\omega\mu A-\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$=i\omega\mu A+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$=\frac{1}{Y}(k^2-h^2)A.$$

これより空間インピーダンスは次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}Z_r^{(m)}&=-\frac{E_z}{H_\phi}=\frac{k^2-h^2}{Y}\cdot\frac{A}{\partial A/\partial r}\\Z_\phi^{(m)}&=\frac{E_z}{H_\phi}=\frac{(k^2-h^2)r}{inY}\\Z_z^{(m)}&=\frac{E_r}{H_\phi}=-\frac{E_\phi}{H_r}=\pm\frac{\omega\mu h}{k^2}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

次に $E_z=0$ なる電気的横波の円柱波の場合には、電気ベクトルポテンシャル或は流れの函数 Φ は

$$\Phi=C_n(\sqrt{k^2-h^2}\cdot r)\,e^{in\phi}\cdot e^{\pm ihz}\cdot e^{-i\omega t}$$

となり、磁気スカラポテンシャル C は $Z=-i\omega\mu$ として

$$\pm ih\cdot C=-Z\cdot\Phi$$

で与へられる。又場の諸量は次の如くである。

$$H_r=\frac{\partial C}{\partial r}\ ,\ rH_\phi=-\frac{\partial C}{\partial\phi}\ ,\quad H_z=\frac{-1}{Z}(k^2-h^2)\Phi$$

$$YE_r=\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\ ,\ E_\phi=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}\ ,\quad E_z=0$$

となり、磁気スカラポテンシャル C は $Z=-i\omega\mu$ として

$$\pm ih\cdot C=-Z\cdot\Phi$$

で与へられる。又場の諸量は次の如くである。

$$H_r=-\frac{\partial C}{\partial r},\quad rH_\phi=-\frac{\partial C}{\partial\phi}\ ,\quad H_z=\frac{-1}{Z}(k^2-h^2)\Phi$$

$$rE_r=\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\ ;\quad E_\phi=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}\ ,\quad E_z=0$$

これより空間インピーダンスは次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}&Z_r^{(e)}=\frac{E_\phi}{H_z}=\frac{Z}{k^2-h^2}\cdot\frac{\partial\Phi/\partial r}{\Phi}\ ,\quad Z_\phi^{(e)}=-\frac{E_r}{H_z}=\frac{inZ}{(k^2-h^2)r}\ ,\\&Z_z^{(e)}=-\frac{E_\phi}{H_r}=\frac{E_r}{H_\phi}=\frac{Z}{\pm ih}=\pm\frac{\omega\mu}{h}\ ,\\&\qquad=\pm\frac{k}{h}Z_0\end{aligned}\right\}(2)$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu + i\omega\mu\sigma$$

(1)(2)より

$$Z_r^{(m)} Z_r^{(e)} = Z_\phi^{(m)} Z_\phi^{(e)} = Z_z^{(m)} Z_z^{(e)} = Z/Y = Z_0^2 \qquad (3)$$

特にz軸方向の減衰が非常に小さいとし、場を二次元にすると、(1)及び(2)に対応して磁気的横波(H_r, H_ϕ, E_z)及び電気的横波(E_r, E_ϕ, H_z)に対して夫々次の空间インピーダンスが得られる。

$$Z_r^{(m)} = \frac{k^2}{Y} \cdot \frac{A}{\partial A/\partial r}, \quad Z_\phi^{(m)} = \frac{k^2}{in} \cdot \frac{r}{Y}, \quad Z_z^{(m)} = 0 \qquad (1\cdot1)$$

$$Z_r^{(e)} = \frac{Z}{k^2} \times \frac{\partial \Phi/\partial r}{\Phi}, \quad Z_\phi^{(e)} = \frac{in}{k^2} \frac{Z}{r}, \quad Z_z^{(e)} = \infty \qquad (2\cdot1)$$

これは(σ, ϵ, μ)なる電気的性質をもつ一般の媒質中に於ける空间インピーダンスであつて、特に所謂導体中では現象の周波数があまり大きくない限り $k^2 = \omega^2\epsilon\mu + i\omega\mu\sigma \cong i\omega\mu\sigma$ であつて、上の空间インピーダンスは

$$Z_r^{(m)} \cong i\omega\mu A / \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right), \quad Z_\phi^{(m)} \cong \omega\mu r/n \qquad (1\cdot2)$$

$$Z_r^{(e)} \cong -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \Phi/\partial r}{\Phi}, \quad Z_\phi^{(e)} \cong -in/(\sigma r) \qquad (2\cdot2)$$

となつて普通何れも極めて小さい量である。これに反して導電性のない空间では $k^2 = \omega^2\epsilon\mu$ であつて空间インピーダンスは

$$Z_r^{(m)} \cong i\omega\mu A / \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right), \quad Z_\phi^{(m)} \cong \omega\mu r/n \qquad (1-3)$$

$$Z_r^{(e)} \cong \frac{1}{i\omega\epsilon} \cdot \frac{\partial \Phi/\partial r}{\Phi}, \quad Z_\phi^{(e)} \cong \frac{n}{\omega\epsilon r} \qquad (2-3)$$

となる。これを見て分るやうに»磁気的横波の円柱波に対する空间インピーダンスは導体中でも導電性のない空间中でも殆ど等しく且つその絶対値は非常に小さい*。反之電気的横波の円柱波に対する空间インピーダンスは導体中では極めて小さいが、不導電性の空间中では極めて大きい«のである。このことは単に円柱波に対する特性であるのではなく、球面波についても同じことが云へることは次節に示すであらう。以上の事実より又次のやうなことが結論される。即ち»電気的横波の円柱波はこれを中空円柱導体によつて遮断すると、円柱外の場の減少は主として遮蔽体境界面に於ける空间インピーダンスの非常に大きい不連続に基づく反射作用によつて起る。これに反して磁気的横波の場合はその遮蔽円柱による遮蔽効果は反射によるものは極めて僅かで、むしろ遮蔽導体そのものによる場の減衰に基因する«

* r 及び $A/(\partial A/\partial r)$ は適当に小さいことは假定されねばならない。

さてA及びΨは全く同じ表現をもつてゐるが、こゝで$k=0$、$\sigma\neq 0$の場合には

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial r}=\frac{1}{\Psi}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}=\frac{k_0}{C_n(kr)}C'_n(kr)\quad,\ k_0^2=\omega^2\varepsilon\mu$$

故に

$$Z_r^{(m)}\cong\frac{i\omega\mu}{k_0}\left[C'_n(kr)\Big/C_n(kr)\right]^{-1}\qquad(1\text{-}4)$$

となる。こゝにダッシュは円柱函数C_nをその変数krについて微分することを意味する。外方に発散する円柱波に対してはC_nとしては$H_n^{(1)}$をとるべきであり、内方に収斂する波に対しては$H_n^{(2)}$をとるべきである。又定在波に対してはJ_nをとらねばならない。発散波及び定在波に対して肩符十及び土をもつて区別すると

$$\left.\begin{aligned}Z_r^{(m)+}&=\frac{i\omega\mu}{k_0}\cdot\left[H_n'^{(1)}(kr)\Big/H_n^{(1)}(kr)\right]^{-1}\\&=(-i)Z_0\cdot\left\{\frac{n}{kr}-\frac{H_{n-1}^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kr)}\right\}^{-1}\\Z_r^{(m)\pm}&=\frac{i\omega\mu}{k_0}\cdot\left[J_n'(kr)\Big/J_n(kr)\right]^{-1}\\&=(-i)Z_0\cdot\left\{\frac{n}{kr}-\frac{J_{n-1}^{(1)}(kr)}{J_n^{(1)}(kr)}\right\}^{-1}\end{aligned}\right\}(1.5)$$

こゝで$n=1$の場合は往復線状電流源より発する磁気的横波の場合に相当することは既に述べた所である。(1·5)で$n=1$の場合を図示したのが第5·1図である。なほこれに対応する電気的横波の円壔波に対するものを第5·2図に示す。 第5·1 5·2図

第三節　球面波に関する空間インピーダンス

磁気的横波の球面波の場合には$H_r=0$であつて、これより電界の球面に対する切線成分は電気のスカラポテンシャルVの勾配によつて与へられる。又磁界は球面内にのみ横たはるから流れの函数Aによつて表現される。即ち

$$rE_\theta=-\frac{\partial V}{\partial\theta}\ ,\quad r\sin\theta E_\phi=-\frac{\partial V}{\partial\phi}$$

$$rH_\phi=-\frac{\partial A}{\partial\theta}\ ,\quad r\sin\theta H_\theta=\frac{\partial A}{\partial\phi}\ ,\quad H_r=0$$

別に

$$E_r=i\omega\mu A-\frac{\partial V}{\partial r}$$

電磁方程式よりA.Vの満足すべき式が得られるが、これはよく知られてゐるやうに次の解を有する。

$$A=\left\{\begin{matrix}kr\,h_{p-\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)\\kr\,h_{p-\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)\end{matrix}\right\}S_n^m(\theta,\phi)\quad,\ \frac{4p^2-1}{4}=n(n+1)$$

m, n は整数で S_n^m は球面調和函数で

$$S_n^m = \{A\cdot P_n^m(\cos\theta) + B\cdot Q_n^m(\cos\theta)\}\{C\cos m\phi + D\sin m\phi\}$$

である。そして V は次の如くなる。

$$V = -\frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon}\cdot\left\{\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial r}[kr h^{(1)}_{p-\frac{1}{2}}(kr)] \\ \frac{\partial}{\partial r}[kr h^{(2)}_{p-\frac{1}{2}}(kr)]\end{matrix}\right\}\cdot S_n^m(\theta,\phi)$$

そして空間インピーダンスは次のやうになる。

$$Z_r = -E_\phi/H_\theta = \frac{V}{A} = \frac{-k}{\sigma - i\omega\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial(kr)}\ln A,$$

$$A \propto A_r = kr\cdot h_{p-\frac{1}{2}}(kr)$$

特に $m=0,\ n=1,$ の場合には $p=\frac{3}{2}$ であって

$$A_r^+ = kr h_1^{(1)}(kr) = -e^{ikr}\left\{1-\frac{1}{ikr}\right\}$$

であるから

$$Z_r^+ = Z_0\cdot\frac{1-ikr+(ikr)^2}{(-ikr)(1-ikr)}\quad ,\ 但し\ Z_0 = \sqrt{\left(\frac{z}{y}\right)} = \sqrt{\left(\frac{-i\omega\mu}{\sigma - i\omega\varepsilon}\right)}$$

となる。$\sigma = 0$ の時は

第5･3図

$$Z_r^+ = \sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)}\cdot\left\{\frac{k^2r^2}{1+k_0^2r^2} + i\frac{1}{k_0r(1+k_0^2r^2)}\right\},\qquad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

となり、更に $k_0r\to 0$ では($k_0r = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\,r < 0.2$ の範囲では最大誤差は4%である)

$$Z_r^+ \longrightarrow \frac{1}{i\omega\varepsilon r}$$

となる。同様にして内方に收斂する波に対しては、定在波に対する表示

$$2A_r^- = kr\{h_1^{(1)}(kr) + h_1^{(2)}(kr)\}$$

を用ひると Z_r^- は次の如くなる。

$$Z_r^- = -iZ_0\frac{\operatorname{tg} kr\cdot(1-k^2r^2) - kr}{kr(kr - \operatorname{tg} kr)}$$

$\sigma = 0$ の時は

第5･4図

$$Z_r^- = i\sqrt{\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)}\cdot\frac{\operatorname{tg} k_0r(1-k_0^2r^2) - k_0r}{k_0r(k_0r - \operatorname{tg} k_0r)}$$

更に $k_0r \to 0$ では

$$Z_r^- = \frac{2}{i\omega\varepsilon r}\qquad (\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot r < 1)$$

となる。

第四節　多重遮蔽の傳送論的考察

4･1　電氣的横波の球面波の場合

5-6 傳送方程式は第二章第二節に述べたやうに

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial C}{\partial r} = -Z\cdot\Psi \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -Y\cdot C \\ &Z = -i\omega\mu \quad ; \quad Y = (\sigma - i\omega\epsilon) - \frac{\chi^2}{i\omega\mu r^2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

で与へられる。こゝにCは磁界のスカラーポテンシャル[V]であり、Ψは電界に対する流れの函数[V]である。上式を解くと、

$$\left.\begin{aligned} &C(r) = A\cdot f^+(r) + B f^-(r) = C^+(r) + C^-(r) \\ &\Psi(r) = A\cdot f^+(r)/Z_e^+(r) + B\cdot f^-(r)/Z_e^-(r) = \Psi^+(r) + \Psi^-(r) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

となる。こゝに、

$$\left.\begin{aligned} &Z_e^+(r) = \frac{C^+(r)}{\Psi^+(r)} = -Z\cdot\left[\frac{d}{dr}\ln f^+(r)\right]^{-1} \\ &Z_e^-(r) = \frac{C^-(r)}{\Psi^-(r)} = -Z\cdot\left[\frac{d}{dr}\ln f^-(r)\right]^{-1} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

であり、$k^2 = \omega^2\epsilon\mu + i\omega\mu\sigma$ として $f^+(r)$ 及び $f^-(r)$ は夫々次の如くである。

$$f^+(r) = kr\cdot h^{(1)}_{p-\frac{1}{2}}(kr) \quad , \quad f^-(r) = kr\cdot h^{(2)}_{p-\frac{1}{2}}(kr) \qquad (4)$$

$r = r_1$ 及び $r = r_2$ に於ける $C(r)$, $\Psi(r)$ の値を夫々 $C(r_1)$, $\Psi(r_1)$ 及び $C(r_2)$, $\Psi(r_2)$ とすると、上の関係より

$$\begin{bmatrix} C(r_1) \\ \Psi(r_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^+(r_1) & f^-(r_1) \\ f^+(r_1)/Z_e^+(r_1) & f^-(r_1)/Z_e^-(r_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \qquad (2\cdot1)$$

及び上式で r_1 をすべて r_2 で置きかへた方程式を得る。そしてこの二つの方程式よりA, Bを消去すると、

$$\begin{bmatrix} C(r_1) \\ \Psi(r_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^+(r_1) & f^-(r_1) \\ f^+(r_1)/Z_e^+(r_1) & f^-(r_1)/Z_e^-(r_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f^+(r_2) & f^-(r_2) \\ f^+(r_2)/Z_e^+(r_2) & f^-(r_2)/Z_e^-(r_2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C(r_2) \\ \Psi(r_2) \end{bmatrix}$$

即ち

$$\begin{bmatrix} C(r_1) \\ \Psi(r_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{f^+(r_2) f^-(r_2)\{1/Z_e^-(r_2) - 1/Z_e^+(r_2)\}} \begin{bmatrix} f^+(r_1) & f^-(r_1) \\ f^+(r_1)/Z_e^+(r_1) & f^-(r_1)/Z_e^-(r_1) \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} f^-(r_2)/Z_e^-(r_2) & -f^-(r_2) \\ -f^+(r_2)/Z_e^+(r_2) & f^+(r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(r_2) \\ \Psi(r_2) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

これを簡単に

$$\begin{bmatrix} C(r_1) \\ \Psi(r_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C(r_2) \\ \Psi(r_2) \end{bmatrix} \qquad (5\cdot1)$$

と書く。A, B, C及びDは r_1, r_2 及び k のみに関係した量である。

これは四端子回路網の方程式

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_2\\I_2\end{bmatrix}$$

に相当するものである。そしてA, B, C及びDを四端子定数と云ひ、$AD-BC=1$ なる関係のあることはよく知られてゐる。上の球面波の場合にもこれらのことは云へる。

特に$|kr|\gg 1$, $p-\frac{1}{2}=1$ とすると $f^+(r)\approx -\exp(ikr)$, $f^-(r)=-\exp(-ikr)$ となり、$Z_e^+(r)=i\omega\mu/ik$, $Z_e^-(r)=-Z_e^+(r)$ となる。これはrに無関係であるから$Z_e(r)$の代りにたゞZ_eと書くことにする。かくして四端子方程式として

$$\begin{bmatrix}C(r_1)\\\Psi(r_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos kd & -iZ_e^+\sin kd\\ -i\sin kd/Z_e^+ & \cos kd\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C(r_2)\\\Psi(r_2)\end{bmatrix}\qquad(5\cdot 2)$$

が得られる。こゝに$Z_e^+=\omega\mu/k$であり、$d=r_2-r_1$である。Z_e^+は又四端子網で云ふ影像インピーダンスに等しい。そして右から見た影像インピーダンスは左から見たものと等しい。kdは影像傳達定数に相当する。

さて次に遮蔽率$\mathfrak{S}$及び反射率$\mathfrak{R}$を定義しやう。始源界が$C_i=A\cdot f^+(r_1)$だとする。そして反射界C_rを$Bf^-(r_1)$としよう。(2)よりこれらは$C(r_1)$及び$\Psi(r_1)$であらはされて次の如くなる。

$$C_i(r_1)=Af^+(r_1)=\{C(r_1)-Z_{Ie}^-(r_1)\Psi(r_1)\}/\{1-Z_{Ie}^-(r_1)/Z_{Ie}^+(r_1)\}$$
$$C_r(r_1)=Bf^-(r_1)=\{C(r_1)-Z_{Ie}^+(r_1)\Psi(r_1)\}/\{1-Z_{Ie}^+(r_1)/Z_{Ie}^-(r_1)\}\qquad(6)$$

このやうな始源界が遮蔽体の四端子網の左端に加へられた場合その出口の界は(5·1)で求められるが、その場合遮蔽率$\mathfrak{S}$及び反射率$\mathfrak{R}$を次のやうに定義する。

第5.5図

$$\mathfrak{S}=\frac{C_t(r_2)}{C_i(r_1)},\qquad \mathfrak{R}=\frac{C_r(r_1)}{C_i(r_1)}\qquad(7)$$

こゝにC_tは遮蔽体の出口$r=r_2$に於けるCの値即ち$C(r_2)$であつて、この点から見た右方のインピーダンスが$Z_{III}^+(r_2)$であるとすると

$$C(r_2)=Z_{III}^+(r_2)\Psi(r_2)\qquad(8)$$

である。(6), (7)及び(8)を用ひて結局

$$\mathfrak{S}=\frac{1-Z_I^-(r_1)/Z_I^+(r_1)}{A+\{B-D\cdot Z_I^-(r_1)\}/Z_{III}^+(r_2)-C\cdot Z_I^-(r_1)}\qquad(9)$$

及び

$$\mathfrak{R}=-\frac{Z_I^-(r_1)}{Z_I^+(r_1)}\cdot\frac{A+\{B-D\cdot Z_I^+(r_1)\}/Z_{III}^+(r_2)-CZ_I^+(r_1)}{A+\{B-D\cdot Z_I^-(r_1)\}/Z_{III}^+(r_2)-CZ_I^-(r_1)}\qquad(10)$$

が得られる。

m-多重遮蔽の場合は特性の異る m 個の遮蔽四端子網の縦續接續であって、合成回路網の四端子定数は

$$\prod_{n=1}^{m}\begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \quad (11)$$

とすれば、この場合の遮蔽率 $\mathfrak{S}^{(m)}$ 及び反射率 $\mathfrak{R}^{(m)}$ はやはり(10)で与へられる。もし遮蔽層の厚さが無限に大きい時その四端子定数は $A=D=1$, $B=C=0$ である。従って無限に拡った一様な媒質のある場所に作った球状の空洞の中心に置かれた源に関する遮蔽率及び反射率は次の如くである。

$$\mathfrak{S} = \frac{1 - Z_I^-(r_1)/Z_I^+(r_1)}{1 - Z_I^-(r_1)/Z_{II}^+(r_1)}$$

及び

$$\mathfrak{R} = \frac{Z_I^-(r_1)}{Z_I^+(r_1)} \cdot \frac{1 - Z_I^+(r_1)/Z_{II}^+(r_1)}{1 - Z_I^-(r_1)/Z_{II}^+(r_1)}$$

4.2 磁気的横波の球面波

前の電気的横波の場合と磁界及び電界の役割が変るだけであって殆んど同様の取扱ひが可能である。傳送方程式は A を磁界に対する流れの函数とし、V を電界に関するスカラポテンシャルとすると

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -ZA \ , \quad \frac{\partial A}{\partial r} = -YV \ ,$$

$$Z = -i\omega\mu + \frac{\kappa^2}{(\sigma - i\omega\epsilon)r^2} \ , \quad Y = \sigma - i\omega\epsilon \ .$$

これを解くと

$$A(r) = C\cdot f^+(r) + D\cdot f^-(r) = A^+(r) + C^-(r)$$

$$V(r) = CZ_m^+(r)f^+(r) + DZ_m^-(r)f^-(r) = V^+(r) + V^-(r)$$

$$Z_m^+(r) = V^+(r)/A^+(r) = -\frac{1}{Y}\cdot\frac{d}{dr}\ln f^+(r)$$

$$Z_m^-(r) = V^-(r)/A^-(r) = -\frac{1}{Y}\cdot\frac{d}{dr}\ln f^-(r)$$

である。$f^+(r)$ 及び $f^-(r)$ は4.1の場合と同じである。そして4.1の(5)に対応して

$$\begin{bmatrix} A(r_1) \\ V(r_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{Y^+(r_2)Y^-(r_2)\{Z_m^-(r_2) - Z_m^+(r_2)\}}\begin{bmatrix} f^+(r_1) & f^-(r_1) \\ Z_m^+(r_1)f^+(r_1) & Z_m^-(r_1)f^-(r_1) \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} Z_m^-(r_2)f^-(r_2) & -f^-(r_2) \\ -Z_m^+(r_2)f^+(r_2) & f^+(r_2) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A(r_2) \\ V(r_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(r_2) \\ V(r_2) \end{bmatrix}$$

これが磁気的横波の球面波に対する四端子方程式である。又前の4.1の場合と同様に始源界が $A_i = Cf^+(r)$ であり、反射界が $A_r = Df^-(r)$ であるとすると A, B, C 及び D なる四端子定数をもつ遮蔽体に関する遮蔽率は夫々次の如くなる。

$$\mathfrak{S} = \frac{1 - Z_I^+(r_1)/Z_I^-(r_1)}{A + \{B - D/Z_I^-(r_1)\}Z_{III}^+(r_2) - C/Z_I^-(r_1)}$$

及び

$$\mathcal{R}=\frac{\sqrt{Z_I^+(r_1)}}{Z_I^-(r_1)}\cdot\frac{A+\{B-D/Z_I^+(r_1)\}Z_{III}^-(r_2)-C/Z_I^+(r_1)}{A+\{B-D/Z_I^-(r_1)\}Z_{II}^+(r_2)-C/Z_I^-(r_1)}$$

第五節 円柱導体に於ける多重遮蔽の問題

第二章に述べたやうに円柱導体軸方向の場の減衰を無視し得る場合には界は二次元的になり、横電気的及び横磁気的な互に独立な二つの系に分離する。こゝでは専ら横磁気的な界についてだけ考へることにする。横電気的な場合も全く対称的に論じうるからである。

(9.1) 式に於て $\mathcal{R}=0$ とする。界は E_z, H_φ 及び H_r であって、この内 E_z 及び E_φ を以下用ひるのであるがこれは次のやうに与へられる。

$$E_z(r\cdot\varphi)=\{A\cdot H_n^{(1)}(kr)+B\,H_n^{(2)}(kr)\}\cdot e^{in\varphi}$$
$$H_\varphi(r\cdot\varphi)=-\frac{k}{i\omega\mu}\cdot\{A\,H_n^{(1)\prime}(ka)+B\,H_n^{(2)\prime}(ka)\}\cdot e^{in\varphi}$$
$$k^2=\omega^2\epsilon\mu+i\omega\mu\sigma$$

こゝに $H_n'(ka)$ は $dH_n(z)/dz$ に於て $z=ka$ と置いたものを意味する。以下 φ に関する因子 $\exp(in\varphi)$ は不要であるから時間因子 $\exp(-i\omega t)$ と共に省略して一々書かないことにする。又次の如きインピーダンスを定義する。

$$Z_r^+(r)=\frac{i\omega\mu}{k}\cdot\frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)\prime}(kr)}\quad,\quad Z_r^-(r)=\frac{i\omega\mu}{k}\cdot\frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)\prime}(kr)}$$

これを用ひて

$$E_z(r)=A\cdot H_n^{(1)}(kr)+B\cdot H_n^{(2)}(kr)$$

$$H_\varphi(r)=-A\frac{H_n^{(1)}(kr)}{Z_r^+(r)}-B\frac{H_n^{(2)}(kr)}{Z_r^-(r)}$$

$$\text{即ち}\quad\begin{bmatrix}E_z(r)\\ H_\varphi(r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_n^{(1)}(kr) & H_n^{(2)}(kr)\\ \dfrac{-H_n^{(1)}(kr)}{Z_r^+(r)} & \dfrac{-H_n^{(2)}(kr)}{Z_r^-(r)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}$$

これより傳播定数 $k=k_i$ なる媒質中に於て $r=a_i$ 及び $r=b_i$ なる二点間の E_z 及び H_φ の関係を求めると次のやうになる。

$$E(a)=\mathfrak{A}_1\cdot E(b)+\mathfrak{B}\cdot H(b)$$
$$H(a)=\mathfrak{C}\cdot E(b)+\mathfrak{A}_2\cdot H(b)$$

或ひは

$$E(b)=\frac{a}{b}\cdot\{\mathfrak{A}_2\cdot E(a)-\mathfrak{B}\cdot H(a)\}$$
$$H(b)=\frac{a}{b}\cdot\{-\mathfrak{C}\cdot E(a)-\mathfrak{A}_1\cdot H(a)\}$$

此處に

$$\mathfrak{A}_1=\frac{b}{a}\cdot\frac{mZ_r^+(a)-lZ_r^-(a)}{Z_r^+(b)-Z_r^-(b)},\quad \mathfrak{B}=\frac{b}{a}\cdot\frac{mZ_r^-(b)Z_r^+(a)-lZ_r^+(b)Z_r^-(a)}{Z_r^+(b)-Z_r^-(b)}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{b}{a}\cdot\frac{l-m}{Z_r^+(b)-Z_r^-(b)},\quad \mathfrak{A}_2=\frac{b}{a}\cdot\frac{lZ_r^+(b)-mZ_r^-(b)}{Z_r^+(b)-Z_r^-(b)}$$

及び

$$l=\frac{H_n^{(1)}(kb)}{H_n^{(1)}(ka)}\cdot\frac{\{1-Z_r^-(b)/Z_r^+(b)\}}{\{1-Z_r^-(a)/Z_r^+(a)\}},\quad m=\frac{H_n^{(2)}(kb)}{H_n^{(2)}(ka)}\cdot\frac{\{1-Z_r^+(b)/Z_r^-(b)\}}{\{1-Z_r^+(a)/Z_r^-(a)\}}$$

である。そして

$$\mathfrak{A}_1\cdot\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}=\frac{b}{a}$$

となる。上述の諸関係は四端子回路の傳送方程式とそれに関係した諸関係に対応するものであって、$\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ 及び $\mathfrak{A}_2$ は四端子定数と称すべきものである。しかしこの場合傳送網はその中央に対して対称でない。従って $\mathfrak{A}_1$ は $\mathfrak{A}_2$ に等しくないし、$\mathfrak{A}_1\cdot\mathfrak{A}_2-\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$ は I に等しくない。しかし円筒の半径がその厚みに比して充分大きい場合には Z_r^+ は $\omega\mu/k$ となり、Z_r^- は $-\omega\mu/k$ となる。そして $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ は共に $\cos k(b-a)$ に近づき、$\mathfrak{B}$ は $iZ_r^+\cdot\sin k(b-a)$ に、そして $\mathfrak{C}$ は $(i/Z_r^+)\sin k(b-a)$ に近づく。即ち四端子マトリックスは

$$\begin{bmatrix}\cos kd & +i\frac{\omega\mu}{k}\cdot\sin kd\\ +i\cdot\frac{k}{\omega\mu}\cdot\sin kd & \cos kd\end{bmatrix}$$

となる。こゝに d は $b-a$ に等しい。

斯くして多重球遮蔽の場合と全く同様にして、多重円柱遮蔽体系に於ける綜合遮蔽率及び綜合反作用率が求められることになる。

例　多層円柱遮蔽体の中心軸上に双極線状電流源を置いた場合の遮蔽作用及び円柱内部の反作用磁界を求める

双極線状電流源による軸方向の電界及び φ 方向の磁界は

$$E_z=-\frac{i}{2}\omega\mu k\cdot aI\cdot H_1^{(1)}(kr)\cdot\cos\varphi\cdot e^{-i\omega t}$$
$$=\alpha\cdot H_1^{(1)}(kr)\cdot\cos\varphi\, e^{-i\omega t}$$

$$H_\varphi=-E_z/Z_r^+$$

$$Z_r^+=\frac{i\omega\mu}{k}\Big/\frac{d}{dx}\left\{\ln H_1^{(1)}(x)\right\}_{x=kr}$$

$$Z_r^-=\frac{i\omega\mu}{k}\Big/\frac{d}{dx}\left\{\ln J_1(x)\right\}_{x=kr}$$

である。k は源導線の周囲の媒質の傳播常数である。

今

$$\begin{bmatrix} H_1^{(1)}(k_n r) & J_1(k_n r) \\ -\dfrac{H_1^{(1)}(k_n r)}{Z_{rn}^{+}(r)} & -\dfrac{J_1(k_n r)}{Z_{rn}^{-}(r)} \end{bmatrix} \equiv R_n(r)$$

と置くと、各領域で次の関係が有る。(例へば3層導体系の場合とする) B_1; $A_2 B_2$; $A_3 B_3$; …… ; A_5 はこれから定めんとする定数である。

$$\begin{bmatrix} E_{z1}(r) \\ H_{\varphi 1}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ B_1 \end{bmatrix}$$

第5.6図

$$\begin{bmatrix} E_{z2}(r) \\ H_{\varphi 2}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2(r) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

– – – – – – – – – – –

$$\begin{bmatrix} E_{z5}(r) \\ H_{\varphi 5}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_5(r) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

そして $r = r_n$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ に於て E_z 及び H_φ が連続することより

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(r_1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_2(r_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_2(r_2) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_3(r_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_3(r_3) \end{bmatrix}^{-1} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} R_4(r_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_4(r_4) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_5(r_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

さて

$$\begin{bmatrix} R_n(r_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n(r_n) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} H_1^{(1)}(k_n r_{n-1}) & J_1(k_n r_{n-1}) \\ -\dfrac{H_1^{(1)}(k_n r_{n-1})}{Z_{rn}^{+}(r_{n-1})} & -\dfrac{J_1(k_n r_{n-1})}{Z_{rn}^{-}(r_{n-1})} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1^{(1)}(k_n r_n) & J_1(k_n r_n) \\ -\dfrac{H_1^{(1)}(k_n r_n)}{Z_{rn}^{+}(r_n)} & -\dfrac{J_1(k_n r_n)}{Z_{rn}^{-}(r_n)} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{\pi \omega \mu r_n}{2} \cdot \begin{bmatrix} \left(\dfrac{k_n}{i\omega\mu}\right) N_1(r_{n-1}, r_n), & N_0(r_{n-1}, r_n) \\ \left(\dfrac{k_n}{i\omega\mu}\right)^2 N_2(r_n, r_{n-1}), & \left(\dfrac{k_n}{i\omega\mu}\right) N_1(r_n, r_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix}$$

ここに、

$$N_0(r_n, r_{n-1}) = J_1(k_n r_n)H_1^{(1)}(k_n r_{n-1}) - J_1(k_n r_{n-1})H_1^{(1)}(k_n r_n)$$
$$N_1(r_n, r_{n-1}) = J_1(k_n r_n)H_1^{(1)\prime}(k_n r_{n-1}) - J_1'(k_n r_{n-1})H_1^{(1)}(k_n r_n)$$
$$N_2(r_n, r_{n-1}) = J_1'(k_n r_n)H_1^{(1)\prime}(k_n r_{n-1}) - J_1'(k_n r_{n-1})H_1^{(1)\prime}(k_n r_n)$$

とする。これを用いて

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ B_1\end{bmatrix} = \left[R_1(r_1)\right]^{-1}\cdot\prod_{n=2}^{N}\begin{bmatrix}A_n & B_n\\ C_n & D_n\end{bmatrix}\cdot\left[R_{N+1}(r_N)\right]\begin{bmatrix}A_{N+1}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \left[R_1(r_1)\right]^{-1}\cdot\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\cdot\left[R_{N+1}(r_N)\right]\cdot\begin{bmatrix}A_{N+1}\\ 0\end{bmatrix}$$

これより遮蔽率 A_{N+1} 及び反作用率 B_1 は容易に求められる。普通領域1と領域N+1は空間であって従って $k_1 = k_{n+1} = k_0 = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ である。そしてこの量は $|k_0 r| \ll 1$ なる如き程度のものであるから上式より

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ B_1\end{bmatrix} = \frac{\pi\omega\mu r_1}{2}\cdot\begin{bmatrix}-\dfrac{J_1(k_0 r_1)}{Z_{r1}^-(r_1)}, & -J_1(k_0 r)\\ \dfrac{H_1^{(1)}(k_0 r_1)}{Z_{r1}^+(r_1)}, & H_1^{(1)}(k_0 r)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\cdot\times$$

$$\times\begin{bmatrix}H_1^{(1)}(k_0 r), & J_1(k_0 r)\\ -\dfrac{H_1^{(1)}(k_0 r_n)}{Z_{r,n+1}^+(r_n)}, & -\dfrac{J_1(k_0 r_n)}{Z_{r,n+1}^-(r_n)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A_{N+1}\\ 0\end{bmatrix}$$

$|k_0 r_1| < |k_0 r_n| \ll 1$ とすると

$$J_1(x) \fallingdotseq \frac{1}{2}x,\quad H_1^{(1)}(x) \fallingdotseq -2i/\pi x,\quad x \to 0$$

なる近似式を用いて

$$A_{N+1} = \frac{\alpha}{\dfrac{i\omega\mu r_1}{2}\left[\dfrac{-A}{Z_{r1}^-(r_1)} + C - \dfrac{B}{Z_{r1}^-(r_1)Z_{r,n+1}^+(r_n)} - \dfrac{D}{Z_{r,n+1}^-(r_n)}\right]\dfrac{r_1}{r_n}}$$

$$B_1 = \frac{4i}{\pi k_0^2 r_1^2}\cdot\frac{\left[\dfrac{A}{Z_{r1}^-(r_1)} + C - \dfrac{B}{Z_{r1}^-(r_1)Z_{r,n+1}^+(r_n)} - \dfrac{D}{Z_{r,n+1}(r_n)}\right]\alpha}{\left[\dfrac{A}{Z_{r1}^-(r_1)} + C - \dfrac{B}{Z_{r1}^-(r_1)Z_{r,n+1}^+(r_n)} - \dfrac{D}{Z_{r,n+1}^+(r_n)}\right]}$$

が得られる。尚 $Z_{r1}^+(r_1) \fallingdotseq -i\omega\mu r_1$, $Z_{r1}^-(r_1) \fallingdotseq i\omega\mu r_1$ 等を用いて

$$\frac{A_{N+1}}{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left\{\left(A + \frac{r_1}{r_n}D\right) + \left(i\omega\mu r_1\cdot C + \frac{B}{i\omega\mu r_n}\right)\right\}\frac{r_1}{r_n}}$$

$$\frac{B_1}{\alpha} = \frac{2i}{\pi k_0^2 r_1^2}\cdot\frac{\left\{\left(A - \frac{r_1}{r_n}D\right) - \left(i\omega\mu r_1 C - \frac{B}{i\omega\mu r_n}\right)\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\left(A + \frac{r_1}{r_n}D\right) + \left(i\omega\mu r_1\cdot C + \frac{B}{i\omega\mu r_n}\right)\right\}}$$

4. となる。

次に四端子定数を求めよう。導体中では$|k|r$ は非常に大きいから近似的に

$$N_0(r_n r_{n-1}) \sim \left(\frac{2}{\pi k_n r_m}\right) i \sin k_n (r_{n-1}-r_n),$$

$$N_1(r_n, r_{n-1}) \sim \left(\frac{2}{\pi k_n r_m}\right) i \cos k_n (r_{n-1}-r_n),$$

$$N_2(r_n, r_{n-1}) \sim \left(\frac{2}{\pi k_n r_m}\right) i \sin k_n (r_{n-1}-r_n),$$

$$r_m = \sqrt{r_n \cdot r_{n-1}}$$

であって近似的に

$$\begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} = \sqrt{\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)} \cdot \begin{bmatrix} \cos k_n d_n, & \frac{\omega\mu}{k_n} \cdot i \sin k_n d_n \\ \frac{k_n}{\omega\mu} \cdot i \sin k_n d_n, & \cos k_n d_n \end{bmatrix}$$

$$k_n^2 \cong i\omega\mu_n \sigma_n$$
$$d_n = r_n - r_{n-1}$$

となる。又絶縁体中では$|k|r$ は1に比して非常に小さいから

$$N_0(r_n, r_{n-1}) \cong \frac{i}{\pi}\left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{r_{n-1}}{r_n}\right)$$

$$N_1(r_n, r_{n-1}) \cong -\frac{i}{\pi} \cdot \frac{1}{k_n r_n} \cdot \left(1 + \frac{r_n^2}{r_{n-1}^2}\right) \qquad k_n^2 = \omega^2 \epsilon_n \mu_n$$

$$N_2(r_n, r_{n-1}) \cong \frac{i}{\pi} \frac{1}{(k_n r_n)^2} \left(1 - \frac{r_n^2}{r_{n-1}^2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} = \frac{i\omega\mu r_n}{2} \begin{bmatrix} -\frac{k_n}{i\omega\mu} \cdot \frac{1}{k_n r_{n-1}}\left(1 + \frac{r_{n-1}^2}{r_n^2}\right), & -\left(\frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{r_{n-1}}{r_n}\right) \\ \left(\frac{k_n}{i\omega\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{(k_n r_n)^2} \cdot \left(1 - \frac{r_n^2}{r_{n-1}^2}\right), & -\left(\frac{k_n}{i\omega\mu}\right)\left(\frac{1}{k_n r_n}\right)\left(1 + \frac{r_n^2}{r_{n-1}^2}\right) \end{bmatrix}$$

となる。

例へば内径0.95 cm 外径1.0 cm の銅薄円柱の側を厚さ0.04cm の銅帯で巻いた場合、合成四端子常数は

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\sqrt{\frac{r_3}{r_2}} \begin{bmatrix} \cos k_2 d_2, & \frac{\omega\mu_2}{k} i \sin k_2 d_2 \\ \frac{k_2}{\omega\mu_2} i \sin k_2 d_2, & \cos k_2 d_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos k_3 d_3 & \frac{\omega\mu_3}{k_3} i \sin k_3 d_3 \\ \frac{k_3}{\omega\mu_3} \cdot i \sin k_3 d_3, & \cos k_3 d_3 \end{bmatrix}$$

第17図

= 次頁へ

$$= 1.046 \begin{bmatrix} \cos 0.007564(1+i)\sqrt{f} , & 3.6905 \cdot 10^{-7} \sqrt{f}\sqrt{i} \sin 0.007564(1+i)\sqrt{f} \\ 0.27096 \cdot 10^{7} \dfrac{i\sqrt{i}}{\sqrt{f}} \sin 0.007564(1+i)\sqrt{f} , & \cos 0.007564(1+i)\sqrt{f} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos 0.02515(1+i)\sqrt{f} , & 88.81 \cdot 10^{-7} \sqrt{f}\sqrt{i} \sin 0.02515(1+i)\sqrt{f} \\ 0.01126 \cdot 10^{7} \dfrac{i\sqrt{i}}{\sqrt{f}} \sin 0.02515(1+i)\sqrt{f} , & \cos 0.02515(1+i)\sqrt{f} . \end{bmatrix}$$

これより各周波数に対する四端子定数は容易に求め得る。

55.

第六章　単一コイルの場とそれの薄円柱殻による遮蔽の問題

ループコイルに依つて発生する磁界を薄い円柱殻で遮蔽した場合について論ずる。円柱座標の原点Oに中心を有しxy-平面に横はる半径aなる単一ループコイルにIなる電流が流が流れてゐるとする。これに依つて生ずる磁界をZ軸を軸とする半径bなる中空円柱導体で遮蔽した場合について各部の場の模様を調べ，殻中の電流及びそれに依る損失等の問題に論及する。この問題は第七章に述べる同じループコイルの場を薄平面板で遮蔽する問題と殆んど同様の取扱ひが出来る。

第一節　ループコイルに依る始源ベクトルポテンシャル

第6.1図に示す様に円柱座標の原点に置かれたループコイルに依るベクトルポテンシャルはコイルの半径をaとしコイルに流れる電流をIとすると次の式で与へられる。 第6.1図

$$A\varphi_0=\frac{\mu I}{4\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\varphi' d\varphi'}{r_{aq}}$$

こゝにr_{aq}は始源ループコイル上の一点$q(a,\varphi',0)$と考察円上の一点$a(r,\varphi,z)$との距離で円柱座標の固有函数であらはす*と次のやうになる。

$$\frac{1}{r_{aq}}=\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\infty}\cos\lambda z\,d\lambda\sum_m{}'\begin{cases}K_m(\lambda a)I_m(\lambda r) & a\geqq r\\ I_m(\lambda a)K_m(\lambda r) & a\leqq r\end{cases}\cos m(\varphi-\varphi')$$

こゝに求和符号の肩のダッシュは$m=0$の時，係数$\frac{1}{2}$を乗ずべきことを意味する。

今$\varphi=0$の点を考へるとしr_{aq}^{-1}の表示を積分に代入してφ'に就いて積分を行ふと次式が得られる。

$$A\varphi_0=\frac{\mu a I}{\pi}\cdot\int_0^{\infty}\begin{cases}K_1(\lambda a)I_1(\lambda r) & a\geqq r\\ I_1(\lambda a)K_1(\lambda r) & a\leqq r\end{cases}\cdot\cos\lambda z\,d\lambda \quad \text{---(1)}$$

これが始源ベクトルポテンシャルの固有函数に依る表現であつて，r,zに関係しφ座標分には無関係である。これは我々の取扱ふ問題では現象の周波数が余り高くなく，従つて波長が系の寸法に対してなほ非常に大きいことから由来するの

* J. Dougall: Proc. Edin. Math. Soc., **18**, P61(1899/1900)

である。

今 $a \leqq r \leqq b$ なる領域を(I)とし $r \geqq b$ なる領域を(II)とすると領域のベクトルポテンシャルは

$$\left.\begin{aligned} A_{\phi I} &= A_{\phi 0} + A_{\phi i} \qquad & a \leqq r \leqq b, \\ A_{\phi II} &= A_{\phi 0} + A_{\phi e} \qquad & r \geqq b. \end{aligned}\right\} \text{---} (2)$$

で與へられる。こゝに

$$\left.\begin{aligned} A_{\phi 0} &= \frac{\mu a I}{\pi}\int_0^\infty I_1(\lambda a) K_1(\lambda r) \cos\lambda z \cdot d\lambda \\ A_{\phi i} &= \frac{\mu a I}{\pi}\cdot\int_0^\infty A(\lambda)\cdot I_1(\lambda r)\cos\lambda z\cdot d\lambda \\ A_{\phi e} &= \frac{\mu a I}{\pi}\int_0^\infty B(\lambda)\cdot K_1(\lambda r)\cos\lambda z\cdot d\lambda\cdot \end{aligned}\right\} \text{---} (2\cdot 1)$$

である。

以下取扱ふベクトルポテンシャルはφ分値のみであるから A_ϕ の代りに単に A と書く。又現象の時間的変化は $\exp(-i\omega t)$ に従ふものとする。$r=b$ に於てベクトルポテンシャルが連続すること及び磁界の z 分値が b を通過する際に $\sigma t\cdot E_\phi$ の飛躍をすることを條件として定數 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ を定める事が出来る。こゝに E_ϕ は電界のφ分値であり, t は殻の厚さとする。

計算の結果

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{i}{\lambda\delta}\cdot I_1(\lambda a) K_1(\lambda b)\cdot K_1(\lambda b)\cdot\frac{1}{\Delta}, \\ B(\lambda) &= \frac{i}{\lambda\delta} I_1(\lambda a)\cdot K_1(\lambda b)\cdot I_1(\lambda b)\cdot\frac{1}{\Delta}, \\ \frac{1}{\delta} &= \omega\mu\sigma t, \quad \Delta = \frac{1}{\lambda b} - \frac{i}{\lambda\delta} K_1(\lambda b) I_1(\lambda b) \end{aligned}\right\} \text{---} (2\cdot 2)$$

が得られる。此処で $\delta = 0$ とすると殻の導電率が完全な場合となり $A(\lambda) = -I_1(\lambda a)K_1(\lambda b)/I_1(\lambda b)$ 及び $B(\lambda) = -I_1(\lambda a)$ が得られる。これを用ひると $r=b$ に於て $A=0$ となる。

1·1 特別な場合

1·11 次に(2)の特別な場合として ≫平面導体板と直線状導体≪ に関するベクトルポテンシャルを導びかう。$b-a=h$, $b-r=x$ なる関係を保ちつゝ a, b 及び r を∞に近づけると

(2·1) の $A\phi_i$ 式は $I_n(v)\sim\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi v}\right)}\cdot e^{v}$, $K_n(v)\sim\sqrt{\left(\frac{\pi}{2v}\right)}\cdot e^{-v}$ 6
($v\longrightarrow\infty$) なる漸近関係式を用ひると次の様になる。

$$A_i(z,x)=\frac{\mu I}{2\pi}\cdot\int_0^\infty\frac{i}{2\lambda\delta}\cdot\frac{e^{-\lambda(h+x)}}{\lambda-i/2\delta}\cdot\cos\lambda z\cdot d\lambda \quad\text{------}(3\cdot1)$$

これは導平面板上 h の高さにある直線状導体による (z,x) の点のベクトルポテンシャルである。こゝに x は考察点の導板よりの高さであり, z は導体と考察点間の水平距離である。全ベクトルポテンシャルは

$$A=A_0+A_i$$

$$=\frac{\mu I}{2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda|x-h|}}{\lambda}\cdot\cos\lambda z\cdot d\lambda+\frac{\mu I}{2\pi}\int_0^\infty\frac{i}{2\lambda\delta}\,\frac{e^{-\lambda(h+x)}}{\lambda-i/2\delta}\cdot\cos\lambda z\cdot dz.$$

こゝで $\frac{i}{2\lambda\delta}\cdot\frac{1}{\lambda-i/2\delta}=\frac{1}{\lambda-i/2\delta}-\frac{1}{\lambda}$ なる関係によって, λ の積分を二つに分離し且つ $\int_0^\infty\lambda^{-1}\cdot e^{-\lambda\alpha}\cos\lambda z\cdot d\lambda=-\ln\sqrt{(\alpha^2+z^2)}$

なる関係を用ひると結局 P 点のベクトルポテンシャル A は次のやうになる。

$$A(z,x)=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\sqrt{\left\{\frac{(h+x)^2+z^2}{(h-x)^2+z^2}\right\}}+\frac{\mu I}{2\pi}\cdot\int_0^\infty e^{-\lambda(h+x)}\frac{\cos\lambda z\cdot d\lambda}{\lambda-i/2\delta},$$

第6.2図

$$x\geqq0,\quad h\geqq0. \quad\text{----}(3)$$

1.12 更に (2·1) の Ae を考へる。

$$Ae=\frac{\mu aI}{\pi}\cdot\int_0^\infty\frac{\frac{i}{\lambda\delta}I_1(\lambda b)K_1(\lambda b)I_1(\lambda a)}{\frac{1}{\lambda b}-\frac{i}{\lambda\delta}K_1(\lambda b)I_1(\lambda b)}K_1(\lambda r)\cdot\cos\lambda z\cdot d\lambda$$

に於て $b-a=h$, $b-r=x$ として a, b 及び r を∞に近づけると前述せる処と殆んど同様にして導平面板上の直線導体によるベクトルポテンシャルの $x\leqq0$ の領域の値が得られる。これと A_0 を合せて全ポテンシャル A は次のやうになる。

$$A\equiv A_0+Ae=\frac{\mu I}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda(h+|x|)}\frac{\cos\lambda z\,d\lambda}{\lambda-i/2\delta}\qquad x\leqq0,\ h\geqq0$$

$$\text{------}(4)$$

-2 (3)及び(4)式は多くの人々*に依って大地を帰路とする単一直線導体の自己インダクタンス、大地を帰路として用ひる単一回路による誘導作用に関連して論ぜられた。この場合大地は表面の極めて薄い層のみが電流傳導に役立つといふ假定がある。斯かる仮定に立つ理論は其後CarsonやPollaczekによる、平面で境された無限の拡りをもつ均一導電体上に架設された単一導線に関する理論が出るに及んであまり利用されることもなくなった。

然し導板による直線導体の遮蔽といふ観点からすると問題も残されて居り今迄の処、余り論ぜられてはゐない。即ち(4)に依って與へられ居る導板に対して導線の反対側の領域の界について以下に項を改めて論ずるつもりである。

第二節　積分の評價

先づA_eを考へよう。これは(2·1)より次の如く與へられる。

$$A_e=\frac{\mu a I}{\pi}\int_0^\infty\frac{\frac{i}{\lambda\delta}I_1(\lambda b)K_1(\lambda b)I_1(\lambda a)}{\frac{1}{\lambda b}-\frac{i}{\lambda\delta}K_1(\lambda b)I_1(\lambda b)}$$

$$\times K_1(\lambda r)\cdot\cos\lambda z\cdot d\lambda\qquad r\geqq b$$

この積分を厳密に解くことは困難であるから茲では数値積分及び近似解に依ることゝし、積分範囲を$(0\sim\epsilon)$と$(\epsilon\sim\infty)$の二つに分ける。ϵを適当に大きく取って$I_1(v)$及び$K_1(v)$の漸近表示を用ひると上の積分の内$(\epsilon\sim\infty)$なる部分は次のやうになる

$$A_e=\frac{\mu a I}{4\pi\sqrt{ar}}\int_\epsilon^\infty\left\{\frac{1}{\lambda-i/2\delta}-\frac{1}{\lambda}\right\}\cdot\left\{e^{-\lambda s}+e^{-\lambda\bar{s}}\right\}d\lambda$$

此処に　$s=(r-a)+iz$,　$\bar{s}=(r-a)-iz$.
である。

そして上の積分は結局次のやうにあらはされる。

---

* F. Breisig : Theoretische Telegraphie, Bräunschweig (1924) S. 83

O. Mayr : Die Erde als Wechselstromleiter, ETZ, Heft 35 u. 36 (1925)

F. Ollendorff : Erdströme Berlin, Julius Springer (1928) S. 128—130

$$^{*}A_e=\frac{-\mu a I}{4\pi\sqrt{ar}}\Big\{e^{-\frac{i}{2\delta}s}li(e^{-\epsilon s+\frac{i}{2\delta}s})-li(e^{-\epsilon s})$$
$$+e^{-\frac{i}{2\delta}\bar{s}}li(e^{-\epsilon\bar{s}+\frac{i}{2\delta}\bar{s}})-li(e^{-\epsilon\bar{s}})\Big\}.$$

こゝにliは対数積分[+]であつて次の如く定義される。

$$li(e^{-z})=C+\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n\cdot z^n}{n!\,n},\quad C=0.5772156$$

$$|\arg z|\leqq\pi$$

又$|z|$が大きい時には次の漸近表示がある。

$$li(e^{-z})\sim e^{-z}\sum_{n=0}^{r-1}\frac{(-)^{n+1}n!}{z^{n+1}}+R_r,$$

$$|R_r|<\frac{r!}{\rho^{1+r}|\cos\frac{\vartheta}{2}|},\qquad z=\rho e^{i\vartheta}$$

然し複素変数に対するli-函数は現在の処計算されてゐない。
次に$(0\sim\epsilon)$の間の積分は既知の函数で簡単に表す事が困難であるから此処では数値積分に依る事にする。

$$\frac{a}{b}=\alpha,\ \frac{r}{b}=\rho,\ \frac{z}{b}=\zeta,\ \frac{\delta}{b}=\Delta\ \text{及び}\ b\lambda=\Lambda$$

と置くとA_eの式は次のやうになる。

$$\frac{\mu a I}{\pi b}\int_0^{b\epsilon}\frac{I_1(\Lambda)K_1(\Lambda)}{\frac{\Delta}{i}-I_1(\Lambda)K_1(\Lambda)}I_1(\alpha\Lambda)K_1(\rho\Lambda)\cos\zeta\Lambda\cdot d\Lambda.$$

$$^{*}\int_\epsilon^\infty\frac{e^{-t\alpha}}{t+\beta}dt=e^{\beta\alpha}\int_{\epsilon+\beta}^\infty\frac{e^{-t\alpha}}{t}dt=-e^{\beta\alpha}li(e^{-\epsilon\alpha-\beta\alpha})$$
$$=-e^{\beta\alpha}Ei(-\epsilon\alpha-\beta\alpha).$$

+ N. Nielsen: Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten

Leipzig, 1906, B. G. Teubner

6-3 積分の中の分数の項を実部と虚部に分って別々に積分する。即ち,

$$M \equiv \int_0^{b\epsilon} \frac{I_1^2(\Lambda)K_1^2(\Lambda)}{I_1^2(\Lambda)K_1^2(\Lambda)+\Delta^2} \cdot I_1(\alpha\Lambda)K_1(\rho\Lambda)\cos\zeta\Lambda \cdot d\Lambda,$$

$$N \equiv \int_0^{b\epsilon} \frac{\Delta \cdot I_1(\Lambda)K_1(\Lambda)}{I_1^2(\Lambda)K_1^2(\Lambda)+\Delta^2} \cdot I_1(\alpha\Lambda)K_1(\rho\Lambda)\cos\zeta\Lambda \cdot d\Lambda.$$

とするとAeは次のやうになる。

$$Ae = \frac{\mu a I}{\pi b}\left\{-M + iN\right\}.$$

積分は何れも収斂が速やかで，従って積分の上限$b\epsilon \to \infty$の場合の数値計算も比較的容易である。

$\alpha = 0.1$ 及び 0.5, $\Delta = 1.0$ として $\rho = 1, 2$ 及び 5 の各

第6.3図 々の場合のMとNとをζを変数として求めたのが第6.3図である。こゝで$I_1(\Lambda)$及び$K_1(\Lambda)$に対しては数表*がある。なほ

第6.4図 xが小さい値及び大きい値に対しては夫々次の近似式を用ひることが出来る。(第6.4図)

$$I_1(x)\cdot K_1(x) \cong 0.5 - \frac{x}{8}, \quad x \cong 0;$$

$$I_1(x)\cdot K_1(x) \sim \frac{1}{2x}, \qquad x \to \infty.$$

第三節 無限に拡った薄平面板上にこれと平行に走る単一直線導体の問題.

主として薄板に依る遮蔽作用について考察する。薄板の厚さをtとし，板上hの高さに，これと平行に走る単一導体の電流をIとすると$x < 0$なる領域の綜合ベクトル

第6.5図 ポテンシャルは第一節(4)に与へた通りである。これは又三角函数を指数函数に分割して次の様にあらはす事が出来る。

$$A = \frac{\mu I}{4\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda w}}{\lambda - i/2\delta}\,d\lambda + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda \overline{w}}}{\lambda + i/2\delta}\,d\lambda\right\}. \quad \text{-----}(1)$$

---

* G.N. Watson: Theory of Bessel Functions, pp. 698-713

但し $w=h+|x|+iz$, $\bar{w}=h+|x|-iz$, $\delta^{-1}=\omega\mu\sigma t$ 6-4
とする。上の積分は対数積分を用ひてあらはし得る事は前述の如くであつて、

$$A=-\frac{\mu I}{4\pi}\cdot\left\{e^{-\frac{iw}{2\delta}}\cdot li\left(e^{\frac{iw}{2\delta}}\right)+e^{-\frac{i\bar{w}}{2\delta}}\cdot li\left(e^{\frac{i\bar{w}}{2\delta}}\right)\right\}. \qquad \text{-----(2)}$$

となる。$\frac{iw}{2\delta}$ は一般に複素数であるが前述せる通り一般の複素数に対する li-函数の数値表はない。然し特別な場合に対しては数値表を用ひ得る。今、

$$\frac{iw}{2\delta}=-\frac{z}{2\delta}+\frac{h+|x|}{2\delta}\cdot i\equiv-\zeta+\xi\cdot i,$$

$$\frac{i\bar{w}}{2\delta}=+\frac{z}{2\delta}+\frac{h+|x|}{2\delta}\cdot i\equiv+\zeta+\xi\cdot i,\qquad \xi\geqq 0$$

として $\xi=0$ の場合或は $\zeta=0$ の場合を考へやう。

1° <u>$\xi=0$ の場合</u>　此の場合には ζ を正の実数として A は次のやうになる。

$$A=-\frac{\mu I}{4\pi}\cdot\left\{e^{\zeta}\cdot li(e^{-\zeta})+e^{-\zeta}\cdot li_1(e^{\zeta})-e^{-\zeta}\cdot\pi i\right\} \qquad \text{-----(2·1)}$$

但し $li_1(e^{\zeta})=\overline{Ei}(\zeta)=C+\ln\zeta+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\zeta^s}{s!\,s}$,

$C=0.5772156$

である。更に $\zeta\to 0$ 或は $\zeta\to\infty$ の場合には次の近似式を得る。

$$\left.\begin{aligned}A&\cong-\frac{\mu I}{2\pi}\left\{C+\ln\zeta-\frac{\pi}{2}i+O(\zeta^2)\right\}, \quad \zeta\cong 0;\\ A&\sim-\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\frac{1}{\zeta^2}-O\left(\frac{1}{\zeta^4}\right)\right\}, \quad \zeta\longrightarrow\infty\end{aligned}\right\} \qquad \text{----(2·2)}$$

2° <u>次に $\zeta=0$ の場合</u>

$$\begin{aligned}A&=-\frac{\mu I}{2\pi}\cdot e^{-\xi i}\cdot li(e^{\xi i})\\ &=-\frac{\mu I}{2\pi}\cdot e^{-\xi i}\left[Ci(\xi)+i\left\{Si(\xi)-\frac{\pi}{2}\right\}\right] \qquad \text{-----(3.1)}\end{aligned}$$

$$= -\frac{\mu I}{2\pi}\cdot e^{-\xi\cdot i}\left[Ci(\xi)+iSi(\xi)\right] \text{------} (3\cdot1)$$

更に $\xi \cong 0$ 或は $\xi \to \infty$ の場合には夫々次の近似式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} A &\cong -\frac{\mu I}{2\pi}\left\{-\ln\frac{1}{\gamma\xi}+i\left(\xi-\frac{\pi}{2}\right)\right\}, \quad \xi\cong 0, \\ &\qquad\qquad \gamma = 1.781072; \\ A &\sim -\frac{\mu I}{2\pi}\cdot e^{-\xi\cdot i}\left\{\frac{\sin\xi}{\xi}-\frac{\cos\xi}{\xi}\right\}, \quad \xi\to\infty. \end{aligned}\right\}$$

$$\text{-----} (3\cdot2)$$

第6·6図 (3·1) の函数は第6·6図に示すやうになる。これは直線状導体が平面板の原点の位置に在る(勿論平面板とは絶縁されてゐる)場合の板の側方に於けるベクトルポテンシャルの分布、従って面電流分布を与へるものである。数値的距離 ξ ($= x/2\delta$) が 6 を超へると大体Aは無視しうる程度の大きさになる。δ^{-1} は屡々述べるやうに平面板の浸透深さに関係する量で $\omega\mu\sigma t$ である。これより導電率 σ、現象の周波数 ω が大きければ大きい程、面電流は導線の近くに集まることが分る。これは薄板に限った事ではなく、$x\leq 0$ が総べて導電性物質で充された場合にも勿論起ることであって、これより例へば電気探鉱等に用ひる電源の周波数を余り大きくすると捜査範囲がかなり狭くなる様子等を量的に求めることが出来る。

更に (3·1) のベクトルポテンシャルは直線導体を含む垂直線上の分布を与へるもので第6·7図がその計算結果である。
第6·7図

第四節. 薄板中の渦流電流及びその過渡現象

薄円柱殻のベクトルポテンシャルの内、渦電流に寄与する分、即ち二次ベクトルポテンシャルは円柱上に於て

$$A^{(s)} = A\phi e = A\phi i = \frac{\mu a I}{\pi}\cdot\int_0^\infty \frac{\frac{i}{\lambda\delta}I_1(\lambda b)K_1^2(\lambda b)I_1(\lambda a)}{\frac{1}{\lambda b}-\frac{i}{\lambda\delta}K_1(\lambda b)I_1(\lambda b)}\cdot\cos\lambda z\cdot d\lambda$$

であるから、これより遮蔽板中の渦電流 $K\phi$ は $-\sigma t\cdot\partial A^{(s)}/\partial t'$ によって与へられる。こゝに t' は時間である。こゝでは現象が $\exp(-i\omega t')$ に従って変化してゐるものとすると

$$K_\phi = -\frac{i}{\delta}\cdot\frac{aI}{\pi}\cdot\int_0^\infty \frac{(i/\delta)\, I_1(\lambda a)K_1(\lambda b)}{(i/\delta)-\{bI_1(\lambda b)K_1(\lambda b)\}^{-1}}\cos\lambda z\cdot d\lambda \quad \text{----} (1)$$

である。これは $\exp(-i\omega t')$ に従つて変化する源電流による渦流であるが、若し、源電流が始め零であり、$t'=0$ に於て突然 I_0 なる定電流値に飛躍し、以後これを維持する場合、これに伴ふ過度的渦流 $K_\phi(t')$ は次の如く与へられる。

$$K_\phi(t') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i} dp\cdot\frac{e^{pt'}}{p}\cdot\mu\sigma t p\cdot\frac{aI_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{-\mu\sigma t p\cdot I_1(\lambda a)K_1(\lambda a)}{-\mu\sigma t p-\{bI_1(\lambda b)K_1(\lambda b)\}^{-1}}\cos\lambda z\cdot d\lambda$$

これは積分順序を変へて(許されるものとする)複素積分を遂行すると次のやうになる。

$$K_\phi(t') = -\frac{a}{b}\cdot\frac{I_0}{\pi}\cdot\int_0^\infty \frac{I_1(\lambda a)}{I_1(\lambda b)}\cdot e^{-\frac{t'}{\mu\sigma b t I_1(\lambda b)K_1(\lambda b)}}\cdot\cos\lambda z\cdot d\lambda \quad \text{-----}(2)$$

これが単位函数 $I=\frac{I_0}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{e^{pt'}}{p}dp$ を印加した場合の導体円筒中の渦電流である。

上式は数値積分に依る以外には簡単には解けない。

$b\lambda=\Lambda$, $\alpha=\frac{a}{b}$, $\zeta=\frac{z}{b}$ 及び $\tau=\frac{t'}{\mu\sigma b t}$ と置いて上の K_ϕ の式を書き換へると次のやうになる。

$$K_\phi(\tau;\alpha,\zeta) = -\frac{a}{b^2}\cdot\frac{I_0}{\pi}\cdot\int_0^\infty\frac{I_1(\alpha\Lambda)}{I_1(\Lambda)}\cdot e^{-\frac{\tau}{I_1(\Lambda)K_1(\Lambda)}}\cdot\cos\zeta\Lambda\cdot d\Lambda \quad \text{--}(3)$$

この式によつて、α をパラメーターとして数値的時刻 τ に対する渦電流 K_ϕ の経過を計算する事が出来る。

(2)の式で $b-a=h$ を一定に保ちながら a, b を ∞ に tend させると渦電流の式は次のやうになる。

$$K_\phi(t') = -\frac{I_0}{\pi}\cdot\int_0^\infty e^{-h\lambda}\cdot e^{-\frac{2t'}{\mu\sigma t}\lambda}\cos\lambda z\cdot d\lambda \quad \text{------} (4)$$

これは無限平面板上方の単一直線導体に単位函数

$$I=\frac{I_0}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{e^{pt'}}{p}dp$$

を印加した場合の薄板中の渦電流である。これは簡単に積分出来次のやうになる。

$$K_\phi(t') = -\frac{I_0}{\pi h}\cdot\frac{1+\frac{2t'}{\mu\sigma t h}}{\left(\frac{z}{h}\right)^2+\left(1+\frac{2t'}{\mu\sigma t h}\right)^2} \quad \text{---------} (5)$$

第五節　数学的補足

第二節及び第三節に於て用ひた対数積分について少しく補足する。即ち複素数を変数とする対数積分

$$li(e^{\pm\varsigma+i\xi}),\qquad \varsigma>0,\qquad \xi>0.$$

について考へて見る。これは

$$li(e^{\pm\varsigma+i\xi})=li\left\{e^{(\mp\varsigma-\xi i)\exp(\pi i)}\right\}=li(e^{\pm\varsigma+i\xi})+i\pi$$

$$\equiv\overline{Ei}(\pm\varsigma+i\xi)+i\pi.$$

等と書くことが出来る。Taylorの展開によつて $\overline{Ei}(z+\alpha)$ は

$$\overline{Ei}(z+\alpha)=\overline{Ei}(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\overline{Ei}^{(n)}(z)$$

と書ける。こゝに z 及び α は一般の複素数とする。$\overline{Ei}(z)$ の n 次微係数は

$$\overline{Ei}^{(n)}(z)=-e^{z}(n-1)!\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-)^m}{(n-m)!}\frac{1}{z^m}$$

であるからこれを上の式に代入して

$$\overline{Ei}(z+\alpha)=\overline{Ei}(z)-e^{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-)^m}{(n-m)!\,z^m}$$

が得られる。こゝに於て $z=\varsigma$, $\alpha=\pm i\xi=\pm i\varsigma\cdot\sigma$ とする。但し ς, ξ 及び σ は何れも正の実数とする。然る時は $\sigma=\xi/\varsigma$ が1より大きいか小さいかに従つて

$$\overline{Ei}(\varsigma\pm i\varsigma\cdot\sigma)=\overline{Ei}(\varsigma)-e^{\varsigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm i\varsigma)^n\sigma^n}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-)^m}{(n-m)!\,\varsigma^m},\qquad \sigma<1;$$

$$\overline{Ei}(\varsigma\pm i\varsigma\sigma)=\overline{Ei}(\pm i\varsigma\sigma)-e^{\pm i\varsigma\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varsigma^n}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{(\pm)^m}{(n-m)!\,\varsigma^m\sigma^m},\qquad \sigma>1$$

と展開できる。こゝに

$$\overline{Ei}(\varsigma)=C+\ln\varsigma+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varsigma^n}{n!\,n},$$

$$\overline{Ei}(\pm i\xi)=Ci(\xi)\pm i\left\{\frac{\pi}{2}+Si(\xi)\right\}^{*}$$

---

* Janke u. Emde : Funktionentafeln (1933) S.80

これらによつて一般の複素数に対する li-函数を計算することが出来る。 6-6
実変数 x に対する函数 $Si(x)$, $Ci(x)$ 及び $\overline{Ei}(x)$ は Jahnke u. Emde の数表*に掲載されてゐる。

---

*Jahnke u. Emde a.a.O. S. 83-86.

第七章　単一コイルの場と薄平板による遮蔽の問題

本章ではループコイルに流れる電流によつて生ずる磁界の中に一枚又は二枚の薄板を置いた場合に就いて論ずる。簡単の為に薄板は無限の拡がりを持つものとし薄板の厚さは極めて薄いものとする。磁界の変化に伴つて薄板中には渦流が流れその為にコイルの実效抵抗は増加し又薄板による反作用のためにコイルの実效インダクタンスは減少する。又一方薄板に対して始源ループコイルと反対側では磁界が弱められ薄板は遮蔽体としての作用をしてゐる。前者の問題に対しては、F. Ollendorf* が既に論じてゐるが、後者の遮蔽作用については簡単に触れてゐるのみであるからここでこの問題を詳しく考　第7.1図
察した。更に薄板中の渦流分布、過渡遮蔽作用等についても論じた。

第一節　ループコイルによる始源ベクトルポテンシャル。

第7.1図に示す様に平面板上 h の高さにある半径 a なる単一ループコイルに電流 I が流れてゐるとする。この電流による各点のベクトルポテンシャルは円壔座標系の φ-分値のみを有し次の如く与へられる。

$$A_{\varphi 0} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\varphi'\, d\varphi'}{r_{aq}}$$

ここに r_{aq} はコイル内の一点 $q(a, \varphi', h)$ と考察点 $a(r, \varphi, z)$ との間の距離で

$$r_{aq}^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos(\varphi - \varphi') + (z-h)^2$$ である。

距離の逆数即ち r_{aq}^{-1} を固有函数に展開して，特に $\varphi = 0$ の如き位置では

$$r_{aq}^{-1} = 2\int_0^\infty e^{-\lambda(z-h)}\, d\lambda \sum_m{}' J_m(\lambda r)\, J_m(\lambda a)\cos m\varphi'$$

$$z > h$$

で表はされる。** ここに求和符号の肩のダッシュは $m=0$ の時係数 $\frac{1}{2}$ を乗ずることを意味する。この r_{aq}^{-1} を前のベクトルポテンシャルの式に代入し三角函数の直交性を利用すると $m=1$ の項のみを残し他はすべて消滅する。そして $\int_0^{2\pi}(\cos\varphi')^2 d\varphi' = \pi$ なることを考慮すれば容易に次の関係が得られる。これが始源ベクトルポテンシャルの固有函数による表示である。

---

* F. Ollendorff ; Die Ruckwirkung flächenhafter Leiter auf das magnetische Feld von Spulen ; ENT, 6, S. 479 - 500 (1929)

** J. Dougall ; The Determination of Green's Function by Means of Cylindrical or Spherical Harmonics [Proc. Edin. Math. Soc., 18, P.59 (1899/1900)

$$A_{\phi 0}=\frac{1}{2}\mu_0 a I\int_0^\infty e^{-\lambda|z-h|}J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)\,d\lambda,\quad z\lessgtr h \quad\cdots\cdots(1)$$

然るに一般に

$$\int_0^\infty e^{-a\lambda}J_\nu(b\lambda)J_\nu(c\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{\pi\sqrt{bc}}\,Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right)$$

なる関係がある。* ここにQは第二種の球函数である。これを用いると上のAφ0は次の如くなる。

$$A_{\phi 0}(r,z)=\frac{1}{2}\mu_0 a I\,\frac{1}{\pi\sqrt{ar}}\,Q_{\frac{1}{2}}\left\{\frac{(z-h)^2+a^2+r^2}{2ar}\right\}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)}\,Q_{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{(z-h)^2+(a-r)^2}{2ar}\right\}\cdots(1.1)$$

故に電流の流れてゐるコイルの断面の半径をρとするとコイル表面のベクトルポテンシャルは次の如くである

$$A_{\phi 0}(a,h)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,Q_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\rho^2}{2a^2}\right)\quad\cdots\cdots(1.2)$$

普通 $\rho^2\ll 2a^2$ であるから $Q_{\frac{1}{2}}(1+\epsilon)\doteqdot\frac{1}{2}\ln\frac{2}{\epsilon}$ $(\epsilon\ll 1)$ なる関係を用ひる時は上式は更に次の様になる。

$$A_{\phi 0}(a,h)\cong\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{2a}{\rho}\quad\cdots\cdots(1.3)$$

之よりコイルの固有インダクタンスは次の如くなる。

$$L_0=\mu_0 a\ln\frac{2a}{\rho}\quad\cdots\cdots(1.4)$$

最後にaが極めて小さい時のベクトルポテンシャルは(1)よりすぐ求められ次の様になることを附言しておく。

$$A_{\phi 0}=\frac{\mu M}{4\pi}\,\frac{1}{r^2+(z-h)^2}\sin\phi$$

$$\operatorname{tg}\phi=r/|z-h|\quad\cdots\cdots(1.5)$$

ここに $M=\pi a^2 I$ はループコイルの磁気能率である。

第7.2図

第二節　ループコイルと無限に拡がった薄板とより成る系の各領域のベクトルポテンシャル。　無限に拡がった厚さ0なる薄板の上方hの高さの処に電流Iの流れてゐるコイルがあり コイルの面は薄板に平行であるとする。(第7.2図)

$z>0$, $z<0$ なる各領域のベクトルポテンシャルは前節の始源ポテンシャルとそれより誘発される二次ベクトルポテンシャルの和として次の様に与へられる。

---

* G.N. Watson: Theory of Bessel Functions (Cambridge, 1922, University Press) P.389

17-2

$$A_{\phi I} = A_{\phi 0} + \frac{1}{2}\mu_0 a I \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) A(\lambda) d\lambda, \quad z \geqq 0$$

$$A_{\phi II} = A_{\phi 0} + \frac{1}{2}\mu_0 a I \int_0^\infty e^{\lambda z} J_1(\lambda r) B(\lambda) d\lambda, \quad z \leqq 0 \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに $A_{\phi 0} = \frac{1}{2}\mu_0 a I \int_0^\infty e^{-\lambda|z-h|} J_1(r\lambda) J_1(\lambda a) d\lambda$

境界 $z=0$ に於てベクトルポテンシャルの連続すること及び磁界の r-分値が $i\omega\mu\sigma t \cdot A_\phi$ だけ飛躍すること即ち

$$H_{rI} - H_{rII} = -\frac{1}{\mu_0}\{\partial A_{\phi I}/\partial z - \partial A_{\phi II}/\partial z\} = i\omega\sigma t \cdot A_\phi$$

なる関係を用いると係数 A, B は次の様に決定される。

$$A(\lambda) = B(\lambda) = \frac{i\omega\mu_0\sigma t}{2\lambda - i\omega\mu_0\sigma t} \cdot e^{-\lambda h} J_1(\lambda a)$$

故に綜合ベクトルポテンシャルは各領域で次の様に決定される。

$$A_{\phi I} = A_{\phi 0} + \frac{1}{2}\mu_0 I \cdot \frac{ia}{\delta}\int_0^\infty \frac{1}{2\lambda - \frac{i}{\delta}} \cdot e^{-\lambda(h+z)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad z \geqq 0$$

$$A_{\phi II} = A_{\phi 0} + \frac{1}{2}\mu_0 I \cdot \frac{ia}{\delta}\int_0^\infty \frac{1}{2\lambda - \frac{i}{\delta}} e^{-\lambda(h-z)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \quad z \leqq 0 \quad (2.1)$$

或は両者をまとめて

$$A_\phi = A_{\phi 0} + \frac{1}{2}\mu_0 I \frac{ia}{\delta}\int_0^\infty \frac{1}{2\lambda - \frac{i}{\delta}} e^{-\lambda(h+|z|)} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad z \gtrless 0 \quad \cdots(2.2)$$

と書くことが出来る。ここに $\delta^{-1} = \omega\mu_0\sigma t$ で電磁界の侵透の深さに関係した量である。A_{ϕ_0} については前に少しく述べたから ここでは二三の特別の場合について二次ベクトルポテンシャルを考へよう。

先づ aは極めて小さく 従ってコイル電流の効果を磁気双極で置換できるものとする。

2.1. 更に δが極めて小さい場合を考へると (2)の表現の中で

$$\frac{1}{2\lambda - \frac{i}{\delta}} = -\frac{\delta}{i}\left\{1 + \frac{2\delta}{i}\lambda + \left(\frac{2\delta}{i}\right)^2\lambda^2 + \cdots\cdots\right\}$$

と展開できる。 そして $J_1(\lambda a) \cong \frac{1}{2}\lambda a$ として (2.2) の第二項に代入し且つ

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\zeta} J_1(\lambda r) \cdot \lambda^{\mu-1} \cdot d\lambda = \frac{\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(2) \cdot (\zeta^2+r^2)^{\frac{1}{2}(\mu+1)}} \times {}_2F_1\left(\frac{\mu+1}{2}, \frac{2-\mu}{2}; 2; \frac{r^2}{r^2+\zeta^2}\right) \; *$$

---

* $$\int_0^\infty e^{-yt} J_\nu(xt) \cdot t^\rho dt = \frac{\Gamma(\nu+\rho+1)\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(\nu+\rho+1)}} \times {}_2F_1\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}, \frac{\nu+\rho}{2}; \nu+1; \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

N. Nielsen : Handbuch der Zylinderfunktion, Leipzig, B. G. Teubner (1904) S.188

なる関係を用いて積分すると二次ポテンシャル —— これを $A^{(s)}$ と
置く —— は次の如くなる。

$$A^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(s)} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\delta}{a}\right)^n \frac{\Gamma(n+3)\left(\frac{r}{2}\right)}{(\zeta^2+r^2)^{\frac{1}{2}(n+3)}} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{n+3}{2}, -\frac{n}{2}; 2; \frac{r^2}{r^2+\zeta^2}\right) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\zeta \equiv h + |z|$$

ここに F は超幾何函数* である。又 M は前述の如くループ
電流の磁気能率であり更に δ, a は極めて小さいと仮定する。
$r^2/(r^2+\zeta^2)$ が小さいときには超幾何函数はよく収斂し計算
は容易である。特に n が偶数の場合には F — 函数は多項式
となる。 ここに $\tan\theta = r/\zeta$ であるとき初項 $A_0^{(s)}$ は
$-\frac{\mu_0 M}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2+\zeta^2} \sin\theta$ である。 この $A_0^{(s)}$ は 始源ループコイルの
薄板に対して鏡像の位置におかれた同じ磁気能率を有する
ループコイルによるベクトルポテンシャルである。そしてこ
れは $\delta = 0$ 即ち完全導電性の薄板の存在による反作用を
与へるもので従って ≫$A\phi_0 + A_0^{(s)}$ は薄板の導電率が無限に
大きい場合の綜合ベクトルポテンシャルである。そしてそ
れは源ポテンシャルと源の鏡像によるポテンシャルによって与
へられる。≪ のである。然る時は残余の項 $\sum A_n^{(s)}$ は薄板の
導電率が有限なることに基因する完全導電性の場合に対す
る補正項と見做し得るわけである。次に補正項について少
しく考察することにする。尚第7.3図は完全導電性薄板の
第7.3図 上方にある磁気双極による磁界分布を示したものである。

2.11 補正項についての考察

薄板の導電率が有限の為の補正項は前述の如く

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(s)} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\delta}{a}\right)^n \frac{\Gamma(n+3)\left(\frac{r}{2}\right)}{(\zeta^2+r^2)^{\frac{1}{2}(n+3)}} {}_2F_1\left(\frac{n+3}{2}, -\frac{n}{2}; 2; \frac{r^2}{r^2+\zeta^2}\right) \quad \cdots\cdots(3.1)$$

である。

n が大きな正の整数で $0 < r^2/(r^2+\zeta^2) < 1$ の場合には

$${}_2F_1(n+a, -n; \gamma; \sin^2\phi) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{n^{\gamma-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} \cdot (\sin\phi)^{\frac{1}{2}-\gamma} \times$$

$$\times (\cos\phi)^{\gamma-a-\frac{1}{2}} \cdot \cos\left\{(2n+a)\phi - \frac{1}{4}\pi(2\gamma-1)\right\} + O\left(n^{-\gamma-\frac{1}{2}}\right)$$

である** からこれを用いて

---

* ${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \cdots\cdots$

E. T. Whittaker and G. N. Watson : Modern Analysis, Cambridg.
University Press (1920) Chap. XIV

** Whittaker and Watson ; Modern Analysis, ibid, P.301

$${}_2F_1\left(\frac{n+3}{2}, -\frac{n}{2}; 2; \frac{r^2}{r^2+\zeta^2}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}(\sin\phi)^{-\frac{3}{2}}\cos\left\{\left(n+\frac{3}{2}\right)\phi-\frac{3}{4}\pi\right\} + O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$\frac{r^2}{r^2+\zeta^2} \equiv \sin^2\phi$$

であって n が非常に大きくなった場合の F-函数から求められる。

次数に $A_n^{(s)}$ の最初の一・二項を求めると次の如くになる。

$$A_1^{(s)} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi}\cdot\frac{2\delta}{i}\,\frac{3!\left(\frac{\zeta}{2}\right)}{(r^2+\zeta^2)^2}\left(1-\frac{r^2}{r^2+\zeta^2}\right)^{1/2} \quad *$$

$$A_2^{(s)} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi}\left(\frac{2\delta}{i}\right)^2\frac{4!\left(\frac{\zeta}{2}\right)}{(r^2+\zeta^2)^{5/2}}\left(1-\frac{5}{4}\,\frac{r^2}{r^2+\zeta^2}\right)$$

- - - - - - - - - - -

これらを用いて近似的に

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(s)} \cong \frac{\mu_0 M}{4\pi R^2}\cdot\sin\theta\left\{\frac{12}{R^2}(2\delta)^2 + i\frac{3}{R}\cdot 2\delta\cdot\cos\theta\right\} + O(\delta^3)\\ &R^2 = r^2 + (h+|z|)^2, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{r}{h+|z|}, \quad \frac{\delta}{R} \ll 1\end{aligned}\right\} \quad \cdots(3.2)$$

が得られる。かくして総合ベクトルポテンシャルは次の様になる。

$$\left.\begin{aligned}A_\phi = {}&\frac{\mu_0 M}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2+(z-h)^2}\sin\theta' - \frac{\mu_0 M}{4\pi}\cdot\frac{1}{R^2}\sin\theta\\ &+ \frac{\mu_0 M}{4\pi}\cdot\frac{1}{R^2}\sin\theta\left\{\frac{12}{R^2}(2\delta)^2 + i\frac{3}{R}\cdot 2\delta\cdot\cos\theta\right\} + O(\delta^3)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

但し $\mathrm{tg}\,\theta' = r/|z-h|$, $\mathrm{tg}\,\theta = r/(h+|z|)$, $R^2 = r^2+(h+|z|)^2$

この表現に於ける第一項、第二項、第三項の意味は前述した通りである。

2.12. 薄板中の渦流及び渦流損失

薄板中を流れる渦流 $K(r)$ は薄板の厚さ及び導電率を夫々 t 及び σ として

$$K(r) = -\sigma t\,\frac{\partial A}{\partial t} = i\omega\sigma t\,[A]_{z=0}$$

で与へられる。$z=0$ に於けるベクトルポテンシャルは(4)より

$$A = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\cdot\frac{\sin\theta_0}{R_0^2}\left\{\frac{12}{R_0^2}(2\delta)^2 + i\frac{3}{R_0}\cdot 2\delta\cdot\cos\theta_0\right\}$$

$$R_0 = \sqrt{(h^2+r^2)}, \quad r/R_0 = \sin\theta_0$$

であるから結局渦流分布は(5)で与へられる。

$$K(r) \equiv \frac{M}{4\pi}\cdot\frac{2}{\delta}\cdot\frac{\sin\theta_0}{R_0^2}\left\{\frac{12}{R_0^2}(2\delta)^2 + i\frac{3}{R}\cdot 2\delta\cdot\cos\theta_0\right\}\ \left[\frac{A}{m}\right] \quad (5)$$

---

* ${}_2F_1(a,b;b;x) = (1-x)^{-a}$ を用ひれば直ぐ得られる。

次に渦流損を $\overline{W}$ とするとこれは

$$\overline{W} = \frac{1}{\sigma t}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty 2\pi r\cdot K(r)\cdot \overline{K}(r)\cdot dr$$

で与へられる。ここに $\overline{K}(r)$ は $K(r)$ の共軛複素量である。故に

$$\overline{W} = \frac{\pi}{\sigma t}\cdot\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2\int_0^\infty\left\{\left[\frac{\sin\theta_0}{R_0^4}12(2\delta)^2\right]^2 + \left[\frac{\sin\theta_0}{R_0^3}3\cdot 2\delta\cdot\cos\theta_0\right]^2\right\} r\,dr$$

扨 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2\theta_0}{R_0^8}\, r\,dr = \int_0^\infty \frac{r^3 dr}{(r^2+h^2)^5}$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0}{R_0^6} = h^2\int_0^\infty\frac{r^3 dr}{(r^2+h^2)^5}$

であるが一般に

$$\int_0^\infty \frac{r^\nu dr}{(r^2+h^2)^p} = \frac{1}{2}\cdot h^{\nu+1-2p}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma(2p-\nu-1/2)}{\Gamma(p)}$$

$$R(\nu+1)>0,\quad R(2p-\nu-1)>0$$

の関係があるから之を用ひて

$$\int_0^\infty\frac{r^3 dr}{(r^2+h^2)^5} = \frac{1}{24h^6}$$

である。従って結局 $\overline{W}$ として

$$\overline{W} = \frac{\pi}{\sigma t}\cdot\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2\frac{1}{h^2}\left\{\frac{3}{8}\left(\frac{2\delta}{h}\right)^2 + 6\left(\frac{2\delta}{h}\right)^4\right\},\ [W] \quad\cdots\cdots(6)$$

が得られる。

2.2. 次に δ が相当大きい場合を考へよう。この場合には

$$\frac{1}{2\lambda - \frac{i}{\delta}} = \frac{1}{2\lambda} + \frac{i}{\delta}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{i}{\delta}\right)^2\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^3 + \cdots\cdots$$

と展開できる。前と同様に $J_1(a\lambda)\doteqdot\frac{1}{2}a\lambda$ として (2.2) に代入すると次の様になる。

$$A_\phi = A_{\phi 0} + \frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{ia}{\delta}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\lambda} + \frac{i}{\delta}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \cdots\right\}e^{-\lambda(h+|z|)}J_1(\lambda r)\lambda d\lambda$$

ここで

$$\int_0^\infty e^{-a\lambda}J_1(r\lambda)d\lambda = \frac{\sqrt{(r^2+a^2)}-a}{r\sqrt{(r^2+a^2)}},\quad \int_0^\infty e^{-a\lambda}J_1(r\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{r}\left\{\sqrt{r^2+a^2}-a\right\}$$

の関係*を用ひると

$$A_\phi = A_{\phi 0} + \frac{\mu_0 I}{2}\frac{ia}{\delta}\frac{a}{4}\left[\frac{\sqrt{\{r^2+(h+|z|)^2\}}-(h+|z|)}{r\sqrt{\{r^2+(h+|z|)^2\}}} + \frac{i}{2\delta}\frac{1}{r}\left\{\sqrt{\{r^2+(h+|z|)^2\}}-(h+|z|)\right\}\right]$$

$$= A_{\phi 0} + \frac{\mu_0 M}{4\pi}\left\{\frac{i}{2\delta}\frac{R-(h+|z|)}{rR} + 0\left(\frac{1}{2\delta}\right)^2\right\}$$

となる。故に始源コイルに対して薄板と反対側の領域では綜合ベクトルポテンシャルは次の (7) となる。

---

*G.N.Watson; Theory of Bessel Functions, loc. cit. P.386

$$A_\phi \cong \frac{\mu_0 M}{4\pi}\left\{\frac{\sin\theta}{R^2} + \frac{i}{2\delta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{R\cdot\sin\theta}\right\}$$

$$R = \sqrt{\{r^2+(h+|z|)^2\}},\quad tg\,\theta = r/(h+|z|) \quad \cdots\cdots(7)$$

(7)式はループコイルからかなり遠方の点のベクトルポテンシャルであつて、コイルの中心を原点とする球座標によつて表はされてゐる。これより磁界はループコイル及び導体よりかなり遠方では球座標について(7)の回転を計算して

$$H_r = \mathbf{R}\cdot e^{-i\omega t}\left\{\frac{M}{4\pi}\cdot\frac{2\cos\theta}{R^3}+\frac{M}{4\pi}\frac{i}{2\delta}\cdot\frac{1}{R^2}\right\}$$

$$= \frac{M}{4\pi}\left\{\frac{2\cos\theta}{R^3}\cos\omega t + \frac{\omega\mu\sigma t}{2R^2}\sin\omega t\right\}$$

$$H_\theta = \mathbf{R}\cdot e^{-i\omega t}\frac{M}{4\pi}\cdot\frac{\sin\theta}{R^3} = \frac{M}{4\pi}\frac{\sin\theta}{R^3}\cos\omega t \qquad (8)$$

が得られる。Mは屡々述べる様にループコイルの磁気モーメントで $M=\pi a^2 I$ である。

2.21 薄板中の渦流及び渦流損失

薄板中を流れる渦流K(r)は前の2.12と同様に

$$K(r) = \frac{M}{4\pi}\cdot\frac{i}{\delta}\left\{\frac{\sin\theta_0}{R_0^2}+\frac{i}{\delta}\cdot\frac{1-\cos\theta_0}{R_0\sin\theta_0}\right\}\quad\cdots\cdots(9)$$

であつて渦流損は

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma t}\int_0^\infty 2\pi r\cdot K(r)\cdot\overline{K(r)}\,dr$$

$$= \frac{\pi}{\sigma t}\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{M}{4\pi}\right)^2\frac{1}{4h^2}+O\left(\frac{1}{2\delta}\right)^2 \quad\cdots\cdots(10)$$

となる。

2.3. 源点と考察点の位置交換によるベクトルポテンシャルの不変性。 再び(2.2)のベクトルポテンシャルに立ち戻つて考へよう。このベクトルポテンシャルは源点の座標Q(a,φ,h)と観察点の座標P(r,φ,z)の函数であるから、今之をA(Q;P)と書くと(2.2)よりすぐ分る様に $A(P;Q)=\frac{r}{a}A(Q;P)$ である。即ち無限の拡がりをもつた導平面板の上方に、その面を平板に平行に置かれたループコイルより発生する磁場の中で、コイルの中心軸(導平面板に垂直である)上に中心を有し、コイル従つて平面板に平行な同軸円輪に沿つて生ずるベクトルポテンシャルはこの円輪とコイル円輪の位置を交換した場合にはじめコイルがあつた位置に於て生ずるベクトルポテンシャルの r/a 倍である。交換と同時に電流の大さも変へて電流の大きさと円輪半径との積が一定なる如く電流を調整すれば交換によつてベクトルポテンシャルの積は不変であると云ふ事が出来る。又 $a\to 0$ として有限のループコイルの代りに $\pi a^2 I = M$ なる能率をもつ磁気双極を考へ

ると源点と考察点の位置を交換してもベクトルポテンシャルは不変であるから上の系として次の様に云ふことも出来る。

≫磁気双極源によって薄板外方のある点に生ずるベクトルポテンシャルは源と考察点の位置を交換した場合にはじめ源のあった位置に生ずるベクトルポテンシャルと等しい。但し薄板は無限の拡がりを有するものとし磁気双極ベクトルは薄面板に垂直に向ふものとす。≪

第三節　コイルの見掛けの外部インピーダンス

薄板の存在によってコイルの見掛けのインピーダンスは異なる。これは薄板の二次的な反作用によるもので前節(12.2)式の第二項はベクトルポテンシャルで表示したこの反作用に外ならない。(12.2)を改めて次に書く。

$$A_\phi = \frac{1}{2}\mu_0 a I \int_0^\infty e^{-\lambda|z-h|} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r)\, d\lambda + \frac{1}{2}\mu_0 a I \int_0^\infty e^{-\lambda(h+|z|)} \frac{i/\delta}{2\lambda - i/\delta} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r)\, d\lambda$$

ここで第一項は既に求めた様に次のいろいろの形に与へられる。*

$$A_{\phi 0} = \frac{1}{2}\mu_0 a I \int_0^\infty e^{-\lambda|z-h|} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r)\, d\lambda$$

$$= \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{ar}} \cdot Q_{\frac{1}{2}}\left\{\frac{(h-z)^2+a^2+r^2}{2ar}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{ar}} \frac{1}{k}\left\{(2-k^2)K(k) - 2E(k)\right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 a I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{ar}} \frac{1}{\sin\alpha}\left\{2E - (1+\cos^2\alpha)K\right\}$$

ここに K, E は完全楕円積分でその母数は次の如くである。

$$k^2 = \sin^2\alpha = \frac{4ar}{(h-z)^2+(a+r)^2} = 1 - \frac{(h-z)^2+(a-r)^2}{(h-z)^2+(a+r)^2}$$

そして、kが1に近ずくと $K \sim \ln\frac{4}{k'}$ となり $E \sim 1$ となる。但し $k^2+k'^2=1$ である。故に $r \to a$, $z \to h$ として $(h-z)^2+(a-r)^2 = \rho^2$ とすると結局 $A_{\phi 0}$ は次の如くなる。

$$A_{\phi 0} \cong \frac{\mu_0 a I}{2} \cdot \frac{1}{\pi a}\left\{\ln\frac{8a}{\rho} - 2\right\} \quad \cdots\cdots (1)$$

これよりコイルの固有インダクタンス L_0 は

$$L_0 = \mu_0 a \left\{\ln\frac{8a}{\rho} - 2\right\} \quad \cdots\cdots (1.1)$$

で与へられる。

---

* 附録3 参照

反作用象を示す第二項の積分は次に項目を改めて論ずるが,今後は対象が外部インピーダンスであるからaは極めて小さいとおくことは都合が悪い。そこで前節(2.2)の第二項の積分を次に$a\to 0$と仮定しないで評価しよう。 7-5

3.1. 反作用を示す第二項について、

3.1.1 既に第二節の渦流損失の計算に於て知る如く $\delta\lambda\ll 1$ なる時は

$$-\frac{i/\delta}{2\lambda-i/\delta}=-\left\{1+\frac{2\lambda\delta}{i}+\left(\frac{2\lambda\delta}{i}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

であって之を積分の中に用い、第二項は

$$-\frac{\mu_0 a I}{2}\int_0^\infty e^{-2h\lambda}\{J_1(\lambda a)\}^2\left\{1+\frac{2\delta}{i}\lambda+\left(\frac{2\delta}{i}\right)^2\lambda^2+\cdots\cdots\right\}d\lambda$$

$$=-\frac{\mu_0 a I}{2}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{2\delta}{i}\right)^n\int_0^\infty e^{-2h\lambda}\{J_1(\lambda a)\}^2\lambda^n d\lambda=\sum_{n=0}^\infty A_n^{(s)}$$

となる。$n=0$ の場合は既に分っており*

$$A_0^{(s)}=-\frac{\mu_0 a I}{2}\frac{(2h^2+a^2)K-2(h^2+a^2)E}{\pi a^2\sqrt{(h^2+a^2)}} \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる。故に全ベクトルポテンシャルは次の如くなる。

$$A=A_{\phi 0}+A_0^{(s)}+\sum_{n=1}^\infty A_n^{(s)}$$

$A_{\phi 0}$は既述の如くループコイルによる始源ベクトルポテンシャルで(1)で与へられ, $A_0^{(s)}$は始源ループコイルの薄板に対する鏡像によって始めのループコイル上に生ずるベクトルポテンシャルである。そして二つのコイル間の相互インダクタンスをM_1とすると之は(2)より

$$M_1=\frac{2\pi a\cdot A_0^{(s)}}{I}=\mu_0\frac{(2h^2+a^2)K-2(h^2+a^2)E}{\sqrt{h^2+a^2}} \quad\cdots\cdots(2.1)$$

と与へられる。この結果は二つの同軸円輪間の相互インダクタンスの式として電磁気学の書に記載されてゐる周知の結果**である。そして $\delta=0$ 即ち薄板が完全導電性の場合には薄板の存在による見掛けのインピーダンスの変化は結局もとのコイルの薄板に対する鏡像による反作用として与へられる。従って実效インダクタンスをL_eとすると

$$L_e=L_0-M_1\ (\delta=0) \quad\cdots\cdots(3)$$

である。ここにL_0及びM_1は夫々(1.1)及び(2.1)で与へられる。そして上の$n=0$を除いた残余の$\sum_{n=1}^\infty A_n^{(s)}$なる部分ベクトルポテ

* G.N. Watson: loc. cit., P.390

** 例へば Ollendorf: Potentialfelder der Elektrotechnik, Berlin, Julius Springer 1932, S.113

ンシャルは結局上の完全導電性の導板の場合に対して、その導板の導電率が有限であることに原因する修正項であるから(3)に対して $\delta \neq 0$ の時には次の(4)の如くおき得るであろう。

$$L_e = L_0 - M_1 - \mathfrak{R}(\delta) \qquad 0 < \delta\lambda \leq 1 \quad \cdots\cdots (4)$$

3.12 $\mathfrak{R}(\delta)$ についての考察

扨上述の様に補正項 $\mathfrak{R}(\delta)$ は次の様に与へられる。

$$\mathfrak{R}(\delta) = \frac{2\pi a}{I}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(5)}$$

$$= -\mu_0 \pi a^2 I \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\delta}{i}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-2h\lambda}\{J_1(\lambda a)\}^2 \lambda^n d\lambda$$

$$= -\mu_0 \pi a^2 I \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\delta}{i}\right)^n \eta_n(h;a) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\eta_n(h;a) = \int_0^{\infty} e^{-2h\lambda}\{J_1(\lambda a)\}^2 \lambda^n d\lambda \quad \cdots\cdots (5.1)$$

扨(5.1)の積分であるが之は次の如くして求められる。

先づ*

$$\{J_1(\lambda a)\}^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(2s+3)(\frac{1}{2}a\lambda)^{2+2s}}{\Gamma(s+3)\{\Gamma(s+2)\}^2} ds$$

$$(0 < \sigma < 3/2)$$

を(5.1)の積分に入れて、二つの積分の積分順序を交換して先づλについて積分する。

$$\int_0^{\infty} e^{-2h\lambda}\lambda^{n+2+2s} d\lambda = \frac{\Gamma(n+2s+3)}{(2h)^{n+2s+3}},$$

$$\mathfrak{R}(n+2+2s) > -1$$

であるから

$$\int_0^{\infty} e^{-2h\lambda}\{J_1(\lambda a)\}^2 \cdot \lambda^n d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(2s+3)\Gamma(n+2s+3)\left(\frac{a}{2}\right)^{2+2s}}{\Gamma(s+3)\Gamma(s+2)\Gamma(s+2)(2h)^{n+2s+3}} ds$$

即ち

$$\left.\begin{aligned} \eta_n(h;a) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m}{m!}\frac{\Gamma(2m+3)\cdot\Gamma(n+2m+3)\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^{2+2m}}{\Gamma(m+3)\{\Gamma(m+2)\}^2\cdot(2h)^{n+2m+3}} \\ h > a \end{aligned}\right\} (5.2)$$

3.13 δが相当大なる場合

δが相当に大なる場合の二次ベクトルポテンシャルは第一近似として第二節(22)より

$$A_{-1}^{(5)} = \frac{1}{2}\mu_0 a I \cdot \frac{i}{2\delta}\int_0^{\infty} J_1(\lambda a) J_1(\lambda r) e^{-\lambda(h+|z|)}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 a I \cdot \frac{i}{2\delta}\cdot \eta_{-1}(h;a)$$

---

* Watson: loc. cit, P436

ここに

$$\eta_{-1}(h;a)=\int_0^\infty e^{-2h\lambda}\{J_1(\lambda a)\}^2\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)\Gamma(2)}{}_3F_2\left(\frac{3}{2};1,\frac{3}{2};3,2;-\frac{a^2}{h^2}\right)$$

である。

第四節　導板による遮蔽作用　　導板の下方の領域即ち導板に対してループコイルと反対側のベクトルポテンシャルを考へよう。二次ポテンシャルは前述の如く次式で与へられる。

$$A^{(s)}_{-}=\frac{\mu_0 aI}{2}\,\frac{i}{\delta}\int_0^\infty\frac{e^{-(h+|z|)}}{2\lambda-i/\delta}J_1(\lambda a)\cdot J_1(\lambda r)\,d\lambda$$

これより磁界は次の様になる。

$$\left.\begin{aligned}H_z^{(s)}&=\frac{1}{\mu_0 r}\frac{\partial}{\partial r}(rA^{(s)})=\frac{aI}{2}\frac{i}{\delta}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda(h+|z|)}}{2\lambda-i/\delta}J_1(a\lambda)J_0(r\lambda)\lambda\,d\lambda\\H_r^{(s)}&=\frac{-1}{\mu_0}\frac{\partial A^{(s)}}{\partial z}=-\frac{aI}{2}\frac{i}{\delta}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda(h-|z|)}}{2\lambda-i/\delta}J_1(\lambda a)J_0(\lambda r)\lambda\,d\lambda\\H_\phi^{(s)}&=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ここでは $H_z^{(s)}$ についてだけ考へよう。特に $r\simeq a$, $a/(h+|z|)\ll 1$ の場合の厳密な解を附録*に示してあるがそれによると二次磁界は

$$H_z^{(s)}=-H_{z0}+\sum_{n=1}^{\infty}H_z^{(s)}\qquad\cdots\cdots(2)$$

で与へられる。H_{z0} は始源磁界であって従って全磁界は $H_{z0}+H_z^{(s)}$ である。そして $H_{z0}+H_z^{(s)}$ と H_{z0} との比を δ が極めて小さい場合について考へ δ の一次項のみとると

$$\frac{H_{z0}+H_z^{(s)}}{H_{z0}}\cong-2i\delta\frac{3!}{2!(h+|z|)}=-6i\delta\cdot(h+|z|)^{-1}$$

$$r\simeq a\ ,\quad \delta/(h+|z|)\ll 1\qquad\cdots\cdots\cdots(3)$$

となる。これは Ollendorf が別法で求めた結果**に一致する。氏は a を極めて小さいとし，$r=0$ として上の結果を得たのであるが著者の場合は $r\cong a$ としたのであって絶対値は必らずしも小さいことを必要としない。特に $r=a$ の場合は

$$\frac{H_{z0}+H_z^{(s)}}{H_{z0}}=-6i\delta\cdot\frac{1}{h+|z|}\,\frac{{}_2F_1(\frac{3}{2},\frac{5}{2};2;4a^2/(h+|z|)^2)}{{}_2F_1(\frac{3}{2},\frac{1}{2};2;4a^2/(h+|z|)^2)}$$

$$\cdots\cdots(4)$$

---

* 附録 4.1

** F. Ollendorf ; ENT, **6**, S.479 — 500 (1929) 公式 (43a)

4-6 となる。即ち 光軸に沿って 大体 $(h+|z|)$ に比例して 減少して行くのである。

特に $a\to 0$ の場合には始源電磁界は

$$H_{z0} = \frac{1}{2}aI\int_0^\infty e^{-\lambda(h+|z|)} J_1(\lambda a)\, J_0(\lambda r)\,\lambda\, d\lambda$$

$$\doteqdot \frac{1}{4}a^2 I\int_0^\infty e^{-\lambda(h+|z|)} J_0(\lambda r)\,\lambda^2 d\lambda$$

$$= \frac{1}{4}a^2 I\cdot \frac{\Gamma(3)}{\{(h+|z|)^2+r^2\}^{3/2}}\ {}_2F_1\left(\frac{3}{2},-1;+1;\frac{r^2}{(h+|z|)^2+r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{a^2 I}{R^5}\left(2R^2-3r^2\right) \quad\cdots\cdots(5)$$

但し $R=\sqrt{\{(h+|z|)^2+r^2\}}$ である。

次に二次磁界は

$$H_z^{(s)} = \frac{1}{4}a^2 I\int_0^\infty e^{-\lambda(h+|z|)}\frac{i/\delta}{2\lambda - i/\delta}\, J_0(r\lambda)\,\lambda^2 d\lambda$$

であるが $r=0$ の場合には簡単に積分できて

$$\left.\begin{aligned} H_z^{(s)} &= -\frac{1}{4}a^2 I\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\delta}{i}\right)^n \frac{\Gamma(n+3)}{(h+|z|)^{n+3}}, \quad \frac{\delta}{h+|z|}\ll 1 \\ H_z^{(s)} &\sim \frac{1}{4}a^2 I\left\{\frac{i}{2\delta}\frac{1}{(h+|z|)^2} + \left(\frac{i}{2\delta}\right)^2\frac{1}{h+|z|}\right\}, \quad \frac{\delta}{h+|z|}\gg 1 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

となる。故に(5)及び(6)を用ひると、$r=0$ の場合には遮蔽作用として次の近似式が得られる。

$$\frac{H_{z0}+H_z^{(s)}}{H_{z0}} \doteqdot \begin{cases} -\dfrac{2\delta}{i}\dfrac{3}{h+|z|} - \left(\dfrac{2\delta}{i}\right)^2\dfrac{12}{(h+|z|)^2}, & \dfrac{\delta}{h+|z|}\ll 1 \\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\delta}\right)^2(h+|z|)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{i}{2\delta}(h+|z|), & \dfrac{\delta}{h+|z|}\gg 1 \end{cases}$$

但し $r=0$ ……(7)

第五節 薄板導体中の渦流K

5.1. ループコイル中を流れる電流のために薄板中に生ずる渦流については既に第二節に簡単に考察した所であるがここで新らしく項を改めて更に詳細に調べる事にする。

ベクトルポテンシャルの表現(2.2)を用ひて渦流は $K=-\sigma t\,\partial A/\partial t'$ で与へられる。ここに t' は時刻を意味する。今一次ベクトルポテンシャル $A_{\phi 0}$ による渦流を K_0 とし、二次誘導ベクトルポテンシャルによるものを $K^{(s)}$ とすると之等は次の様である。

$$K = K_0 + K^{(s)}$$

$$K_0 = \frac{aI}{2}\cdot\frac{i}{\delta}\int_0^\infty e^{-\lambda h} J_1(\lambda a)\, J_1(\lambda r)\, d\lambda$$

$$K^{(s)} = \frac{aI}{2}\left(\frac{i}{\delta}\right)^2\int_0^\infty e^{-\lambda h}\frac{J_1(\lambda a)\, J_1(\lambda r)}{2\lambda - i/\delta}\, d\lambda$$

δが極めて大きい場合にはK_0と$K^{(s)}$は位相が大体$\pi/2$だけ異なる及びδが極めて小さい時にはK_0と$K^{(s)}$の位相はπだけ異なることがすぐ観察される。そして中間のδの値では両者の位相差は$\pi/2$とπとの間にあるのである。

扨 K_0に関する積分は既に第三節に於て求めてあるから、ここでは専ら二次渦流$K^{(s)}$に就いて考察する。$\lambda a \ll 1$, $h=0$ の場合は簡単に積分出来て

$$K^{(s)} = -\frac{a^2 I}{4\delta^2}\cdot\int_0^\infty \frac{\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda}{2\lambda - i/\delta} = -\frac{a^2 I}{4\delta^2}\cdot \mathfrak{X}$$

となる。積分$\mathfrak{X}$については附録*に求めてあるが$-(\pi k/4)\cdot N_1(rk)$及び$-(\pi k/4)\cdot \mathbf{H}_{-1}(rk)$の和となる。ここに$k = -i/2\delta$であり$\mathbf{H}_{-1}(rk)$はStruveの函数である。$-(\pi k/4)\,N_1(rk)$は$k$の偶数項のみを含み従って電流の有効分（ループコイルの電流と同相又はπだけ位相が異なる分値）を与へる。一方，$-(\pi k/4)\mathbf{H}_1(rk)$は$k$の奇数項のみ含み，電流の無效分（即ちループコイル電流と$\pi/2$だけ位相を異にする分値）を与へる。更に$|rk| \gg 1$になると有效分電流はなくなって無效電流分のみが優勢となる。

5.2. 突発擾乱による過渡渦電流。 次にループコイルに突然に単位の電流が印加された場合に又はその他の任意の電流が印加された場合に於ける平面板の渦流の変遷を調べる。定常電流による二次渦流は

$$K^{(s)} \cong \frac{1}{4}a^2 I\left(\frac{i}{\delta}\right)^2\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h}\,\lambda J_1(\lambda r)}{2\lambda - i/\delta}\,d\lambda$$

である。これは$I\cdot\exp(-i\omega t')$なる電流によるもので$i/\delta = i\omega\mu\sigma t$は$-\mu\sigma t\cdot\partial/\partial t'$によつて生じたのである。故に印加電流が$I\cdot\exp(-i\omega t')$で無くて

$$I(t') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{e^{pt'}}{p}\,dp$$

なる単位擾乱電流であるならば$\partial/\partial t' = p$となり$i/\delta = -p\mu\sigma t$となるから上の$K^{(s)}$の代りに

$$K^{(s)}(t') = (\mu\sigma t)^2\frac{a^2}{4}\int_0^\infty e^{-\lambda h}\,\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{p\,e^{pt'}\,dp}{2\lambda + p\mu\sigma t}$$

$$= -\frac{a^2}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda h}\,\lambda^2 J_1(\lambda r)\cdot e^{-\frac{2t'}{\mu\sigma t}\lambda}\,d\lambda$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^3}\,\frac{\frac{r}{h}\left(1+\frac{2t'}{\mu\sigma t h}\right)}{\left\{\left(\frac{r}{h}\right)^2+\left(1+\frac{2t'}{\mu\sigma t h}\right)^2\right\}^{5/2}} \quad \cdots\cdots (1)^{**}$$

---

* 附録 5.1

** Watson: loc. cit., P 386.

となる。これが単位擾乱が印加された場合の過渡的な渦電流である。これを用いて例へば $\mathrm{Im}\{J_0\exp(-i\omega t')\}$ が印加された時のそれは相乗定理*を用いて

$$\mathrm{Im}\ \frac{3}{2}a^2\, i\omega\, e^{-i\omega t'}\int_0^{t'}\frac{r\left(h+\frac{2\tau}{\mu\sigma t}\right)e^{i\omega\tau}}{\left\{r^2+\left(h+\frac{2\tau}{\mu\sigma t}\right)^2\right\}^{5/2}}d\tau$$

となる。今 $\frac{2\tau}{\mu\sigma t r}=\frac{2\tau}{T_r}$ とおくと、渦電流は次の如くなる。

$$K^{(s)}(t')=\mathrm{Im}\ \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^3}\, i\omega\, e^{-i\omega t'}\int_0^{t'}\frac{\left(\frac{h}{r}+\frac{2\tau}{T_r}\right)e^{i\omega\tau}d\tau}{\left\{1+\left(\frac{h}{r}+\frac{2\tau}{T_r}\right)^2\right\}^{5/2}}\quad\cdots(2)$$

特に $h=0$ の場合には $\frac{2\tau}{T_r}=s$ とおくと上式は次の様になる。

$$K^{(s)}(t')=\mathrm{Im}\ \frac{3}{2}\frac{a^2}{r^3}\frac{i\omega T_r}{2}\, e^{-i\omega t'}\int_0^{\frac{2t'}{T_r}}\frac{s\, e^{\frac{i\omega T_r}{2}s}}{(1+s^2)^{5/2}}ds\quad\cdots(3)$$

上の(2),(3)は数値積分又は図式積分によって求め得る。

第六節　コイルに対し薄板と反対側にある導体の影響

前節迄に考へて来たループコイル、薄平面板系に更に第7.4図に示す様にもう一枚の導板が附加した場合に、これによって先に算出した諸量が如何なる影響を受けるであらうか。

第7.4図

これを求めるために領域を

I $(0\le z\le h_2)$, II $(z\le 0)$, III $(z\ge h_2)$

の三つに分って各領域のベクトルポテンシャルを次の様に表はす。

$$A_{\phi\mathrm{I}}=A_{\phi0}+\frac{\mu_0 aI}{2}\int_0^\infty\left\{e^{-\lambda z}A_1(\lambda)+e^{\lambda z}A_2(\lambda)\right\}J_1(r\lambda)d\lambda\qquad 0\le z\le h_2$$

$$A_{\phi\mathrm{II}}=A_{\phi0}+\frac{\mu_0 aI}{2}\int_0^\infty e^{\lambda z}B(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda,\qquad z\le 0$$

$$A_{\phi\mathrm{III}}=A_{\phi0}+\frac{\mu_0 aI}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda z}C(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda\qquad z\ge h_2$$

ここに $A_{\phi0}$ はループコイルの始線ベクトルポテンシャルで

$$A_{\phi0}=\frac{1}{2}\mu_0 aI\int_0^\infty e^{-\lambda|z-h_1|}J_1(\lambda a)J_1(\lambda r)d\lambda$$

である。$z=0$ 及び $z=h_2$ に於ける界の接続の条件より係数 A_1, A_2, B 及び C を定めることが出来る。計算はやゝ煩雑であるから詳細を省いて結果のみ示すと次

* 単位擾乱が印加された時の解を演算子対応式で $f_1(t)\subset\Phi_1(p)$ とし、$f_2(t)$ が印加された時の解を $f_3(t)$ とすると〔但し $f_2(t)\subset\Phi_2(p)$, $f_3(t)\subset\Phi_1(p)\Phi_2(p)$〕これは $f_3(t)=f_1(t)f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)\frac{d}{dt}f_2(t-\tau)d\tau$ で与へられる。ここで t とかいたものは時間である。

、の如くである。

$$A_1 = e^{-\lambda h_2} J_1(\lambda a)\left\{ e^{\lambda(h_2-h_1)}\beta_1(2-\beta_2) - e^{-\lambda(h_2-h_1)}\beta_2(2-\beta_1)\right\}\frac{1}{\Delta} \qquad 7\text{-}8$$

$$A_2 = e^{-\lambda h_2} J_1(\lambda a)\left\{ e^{-\lambda(h_2-h_1)}\beta_2(2-\beta_1) - e^{-\lambda(h_2+h_1)}\beta_1(2-\beta_2)\right\}\frac{1}{\Delta}$$

$$C = e^{-\lambda h_2} J_1(\lambda a)\left\{\beta_2(2-\beta_1)e^{\lambda(h_2+h_1)} + \beta_2\beta_1 e^{-\lambda(h_2-h_1)} + 2\beta_1 e^{\lambda(h_2-h_1)}\right\}\frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta = (2-\beta_1)(2-\beta_2) - e^{-2\lambda h_2}\beta_1\beta_2$$

$$B = e^{-\lambda h_2} J_1(\lambda a)\left\{2\beta_2 e^{-\lambda(h_2-h_1)} + \beta_1(2-\beta_2)e^{\lambda(h_2-h_1)} + \beta_1\beta_2 e^{-\lambda(h_1+h_2)}\right\}\frac{1}{\Delta},$$

$$\beta_1 = \frac{\tau'}{\lambda\delta_1},\quad \beta_2 = \frac{\tau'}{\lambda\delta_2},\quad \delta_1^{-1} = \omega\mu_1\sigma_1 t_1,\quad \delta_2^{-1} = \omega\mu_2\sigma_2 t_2$$

之を少しく書直すと次の様になる。但しCは今は論じない事にする。

$$A_1 = \frac{\beta_1}{2-\beta_1} e^{-\lambda h_1} J_1(\lambda a)\{1 + P_{a1}\}$$

$$A_2 = -\frac{\beta_1}{2-\beta_1} e^{-\lambda h_1} J_1(\lambda a)\{1 + P_{a2}\}$$

$$B = \frac{\beta_1}{2-\beta_1} e^{-\lambda h_1} J_1(\lambda a)\{1 + P_b\}$$

扨第二の薄板の存在しない時には $A_2=0$ であり

$$A_1 = B = \frac{\beta_1}{2-\beta_1} e^{-\lambda h_1} J_1(\lambda a)$$

であった。A_2は第二の薄板よりの反射に基因する項でありP_{a1}及びP_bは第二の薄板の存在に基因する近接效果を示す一種の補正項であると見做し得る。そして之等は次の様に与へられる。

$$P_{a1} \doteqdot -e^{-2\lambda h_2}\left\{ e^{2\lambda h_1}\frac{\beta_2(2-\beta_1)}{\beta_1(2-\beta_2)} + \frac{\beta_1\beta_2}{(2-\beta_1)(2-\beta_2)}\right\}$$

$$P_b = e^{-2\lambda h_2}\left\{ \frac{\beta_2(\beta_1 + 2e^{2\lambda h_1})}{\beta_1(2-\beta_2)} + \frac{\beta_1\beta_2}{(2-\beta_1)(2-\beta_2)}\right\}$$

$$P_{a2} = -e^{-2\lambda h_1}\frac{\beta_2(2-\beta_1)}{\beta_1(2-\beta_2)}$$

ここで第二の薄板の導電率が無限大の場合を考へよう。コイルによる場はこの薄板で完全に反射されるのであって薄板の效果が最大に表はれる場合である。これは$\beta_2 \to \infty$とすればよいのであって、この場合のP_{a1}及びP_bは次の様になる。

$$P_{a1} = e^{-2\lambda h_2}\left\{ e^{2\lambda h_1}\left(\frac{2}{\beta_1} - 1\right) + \frac{\beta_1}{2-\beta_1}\right\}$$

$$P_b = -e^{-2\lambda h_2}\left\{ 1 + \frac{2}{\beta_1}e^{2\lambda h_1} + \frac{\beta_1}{2-\beta_1}\right\}$$

P_{a2}は第一の薄板に関する量によってのみ定まり次の様になる。

$$P_{a2} = e^{2\lambda h_1}\left(\frac{2}{\beta_1} - 1\right)$$

これらの補正項の大きさの程度を見るために例へばP_bについて考へよう。$\lambda\delta_1 = \Lambda$ とおくと

$$P_b = -e^{-2\frac{h_2}{\delta_1}\Lambda}\left\{1 - 2i\Lambda \cdot e^{2\frac{h_1}{\delta_1}\Lambda} + \frac{i}{2\Lambda - i}\right\}$$

となる。$|h_2/\delta_1|$ 及び $|h_1/\delta_1|$ は普通極めて大きく、1mmの銅薄板で周波数10^5サイクルの波動に対しては大体$4.5h \times 10^4$の程度であるからP_bは1に比して殆んど無視しうることが明らかである。その他の種々の場合に於ける補正項も上述の諸式によって容易にその大きさを推定する事が出来る。

第七章に対する附録、

3.* 球函数と楕円函数との関係

第一種球函数$P_n(x)$は次のラプラスの積分表示がある。

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x + \sqrt{x^2-1}\cdot\cos\varphi\right)^n d\varphi$$

Heineはこれを以てn及びxが一般の複素数の時の$P_n(x)$を定義した。ここでは $n = -\frac{1}{2}$ とおき且つ

$$k^2 = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}, \quad \psi = \frac{\varphi}{2}$$

とすると上式より

$$P_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}K(k)$$

が得られる。ここに$K(k)$はkを母数とする第一種完全楕円積分である。kの補母数をk'とすると $k' = (x+\sqrt{x^2+1})^{-1}$ であって結局次式が得られる。

$$P_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{k'}\cdot K(k) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

同様に $P_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$ であって

これより

$$P_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{k'}}E(k) \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

が得られる。$E(k)$はkを母数とする第二種完全楕円積分である。ここでxの代りに$\cosh u$を変数とすると(1),(2)は次の様になる。

$$P_{-\frac{1}{2}}(\cosh u) = \frac{2}{\pi}\cdot e^{-\frac{u}{2}}\cdot K(\alpha) \quad \cdots\cdots (1')$$

---

* 節(項)の分数に用ひた上記のdecimalは本章の本文に於けるその数の節(項)に対応する。

7-9

$$P_{\frac{1}{2}}(\cosh u) = \frac{2}{\pi}\, e^{\frac{u}{2}}\cdot E(\alpha) \quad \cdots\cdots (2)$$

ここに $\cos\alpha = e^{-u}$, $k = e^{-\frac{u}{2}}\sqrt{(2\sinh u)}$

$P_n(x)$は又次の様に超幾何級数でも表はせる。

$$P_n(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^n F\left(-n, -n; 1; \frac{x-1}{x+1}\right)$$

故に例へば $x = \cosh u$, $n = \frac{1}{2}$ の時には $P_{\frac{1}{2}}(\cosh u)$は次の様になる。

$$P_{\frac{1}{2}}(\cosh u) = \cosh\frac{u}{2}\cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \tanh^2\frac{u}{2}\right)$$

$$= \cosh\frac{u}{2}\left(1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{64} + \frac{z^3}{256} + \cdots\cdots\right)$$

但し $z = \tanh^2\frac{u}{2}$ $\cdots\cdots(3)$

同様に $P_{\frac{3}{2}}(\cosh u) = \cosh^3\frac{u}{2}\left(1 + \frac{9}{4}z + \frac{9}{64}z^2 + \frac{1}{256}z^3 + \cdots\right) \cdots(4)$

である。

次に第二種の球函数 $Q_{n-\frac{1}{2}}$ に対しては Mehler による次の積分表示がある。

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\cdot d\varphi}{\sqrt{(\cosh u - \cos\varphi)}}$$

ここで $n=0$, $\varphi = \pi - 2\psi$ とすると

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\cosh u) = k\cdot K(k) \quad \cdots\cdots (5)$$

が得られる。ここに

$$k^2 = 2/(1+\cosh u) = (\cosh\frac{u}{2})^{-2}$$

である。同様に

$$Q_{\frac{1}{2}}(\cosh u) = \frac{1}{k}\{2E - (2-k^2)K\} \quad \cdots\cdots(6)$$

Qは又超幾何級数を用いて次の様に書いてもよい。*

$$Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh u) = \pi\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\lambda^{n+\frac{1}{2}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}; n+1; z\right)$$

$$z = e^{-2u}, \quad \lambda = e^{-u} \quad \cdots\cdots(7)$$

故に $Q_{\frac{1}{2}}(\cosh u) = \frac{\pi}{2}\cdot z^{\frac{3}{4}}\left(1 + \frac{3}{8}z + \frac{15}{64}z^2 + \frac{175}{1024}z^3 + \cdots\right)$ 第7.5図

$\cdots(7)'$

$$Q_{\frac{3}{2}}(\cosh u) = \frac{3\pi}{8}\cdot z\cdot\sqrt[4]{z}\cdot\left(1 + \frac{5}{12}z + \frac{35}{128}z^2 + \frac{105}{512}z^3 + \cdots\right) \cdots(7)''$$

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\cosh u) = \pi\sqrt[4]{z}\left(1 + \frac{1}{4}z + \frac{9}{64}z^2 + \frac{25}{256}z^3 + \cdots\right) \cdots(7)'''$$

等である。第7.5図は半奇数次の球函数を計算したものを示す。尚数値表に関しては Airey** のものがある。

---

* E. W. Hobson : Spherical and Ellipsoidal Harmonics (1931) P.443

** J. R. Airey : Toroidal Functions and the complete Elliptic Integrals [Philo. Mag., 5.7, 19, PP. 177~188 (1935)

4.1 $H_z^{(s)} = \frac{aI}{2}\frac{i}{\delta}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(h+|z|)}}{2\lambda - i/\delta}\cdot J_1(\lambda a)\, J_0(\lambda r)\,\lambda d\lambda$ の計算

r は a に極めて近い附近を考へるとす。而して

$$J_0(\lambda r) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\frac{\lambda a}{2}\right\}^m \frac{1}{m!}\, J_m(\lambda a) \quad *$$

$$J_1(\lambda a)J_m(\lambda a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(1+m+2s+1)\left(\frac{1}{2}\lambda a\right)^{m+1+2s}}{\Gamma(m+2+s)\Gamma(2+s)\Gamma(m+1+s)}ds \quad **$$

を用いて δ が小さいときには $H_z^{(s)}$ は

$$H_z^{(s)} = -I\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^m\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}ds\,\frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(m+2+2s)}{\Gamma(m+2+s)\Gamma(2+s)\Gamma(m+1+s)}\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{-\lambda(h+|z|)}\left\{1+\frac{2\lambda\delta}{i}+\left(\frac{2\lambda\delta}{i}\right)^2+\cdots\cdots\right\}\left(\frac{1}{2}\lambda a\right)^{2m+2+2s}d\lambda.$$

となる。λ についての積分は

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(h+|z|)}\left(\frac{2\lambda\delta}{i}\right)^n\left(\frac{\lambda a}{2}\right)^{2m+2+2s}d\lambda = \left(\frac{2\delta}{i}\right)^n\left(\frac{a}{2}\right)^{2m+2+2s}\cdot\int_0^\infty e^{-\lambda(h+|z|)}\cdot\lambda^{2m+2s+2+n}d\lambda$$

$$= \left(\frac{2\delta}{i}\right)^n\left(\frac{a}{2}\right)^{2m+2+2s}\frac{\Gamma(2m+2s+n+3)}{(h+|z|)^{2m+2s+n+3}}$$

なる故之を上式に代入して更に s について積分を行ふと結局 $H_z^{(s)}$ は次の様になる。

$$H_z^{(s)} = -I\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^m\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-)^p}{p!}\frac{\Gamma(m+2p+2)\Gamma(2m+2p+n+3)}{\Gamma(m+p+2)\Gamma(2+p)\Gamma(m+p+1)}\times$$

$$\times\left(\frac{2\delta}{i}\right)^n\left(\frac{a}{2}\right)^{2m+2+2p}(h+|z|)^{-(2m+2p+n+3)}$$

ここで $n=0$ の項は

$$-\frac{aI}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda(h+|z|)}J_1(\lambda a)\,J_0(\lambda r)\lambda\, d\lambda$$

であって始源磁界 H_{z0} と丁度打消し合ふ項である。故に $H_z^{(s)}$ は次の様に書くことが出来る。

$$H_z^{(s)} = -H_{z0} + \sum_{n=1}^{\infty}H_{zn}^{(s)}$$

5.1 $X = \int_0^\infty \frac{\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda}{2\lambda - i/\delta}$ の計算

$$2X = \int_0^\infty\frac{\lambda J_1(\lambda r)\,d\lambda}{\lambda - i/2\delta} = \frac{\pi}{2}ik\left\{N_{-1}(rk) - \boldsymbol{H}_{-1}(rk)\right\}^{\dagger}$$

$$= -\frac{\pi k}{2}\begin{cases} N_1(rk) + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m\left(\frac{1}{2}rk\right)^{2m}}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{3}{2})} & |rk| \ll 1 \quad \ddagger \\ \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(-m-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{2}rk\right)^{2m+2}} + O\{(rk)^{-2p-2}\} & |rk| \gg 1 \quad \ddagger\S \end{cases}$$

註は右頁に附す。

故に

$$X = -\frac{\pi k}{4}\left\{\frac{2}{\pi}J_1(\gamma k)\ln\frac{\gamma\cdot\gamma k}{2} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\gamma k} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\gamma k}{4} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}(\gamma k)^3 + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\gamma k\right)^2 + \cdots\right\}\cdot \quad |\gamma k| \ll 1,\ \gamma = 1.78117$$

$$X = -\frac{\pi k}{4}\cdot\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\gamma k\right)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\gamma k\right)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{45}{32}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\gamma k\right)^6} + \cdots\cdots\right\},\ |\gamma k| \gg 1.$$

前頁の註.

* G. N. Watson : Bessel Functions (1922) P. 142

** G. N. Watson : loc. cit., P. 436.

† G. N. Watson ; loc. cit., P. 436

‡ ―――――― ; P. 328

§ ―――――― ; P. 333

17-1c.

第八章　ラセン回路に流れる電流による場と薄円柱導体によるその遮蔽に関する問題に就いて

8-1

これ迄の始源場は主として直線状平行導体、双極線状導体或はそれらの群によるものであつた。通信ケーブル等の実際の構成は各回路の平衡を保ち回路間の漏話を避ける為に導体をラセン状構造にする。即ち撚りをかけるのである。この様に撚りをかけた場合遮蔽作用はそれによつて何如に変化するであらうか　遮蔽体中の電流分布はどうなるのか等を論ずるのが本章の目的である。ラセン回路自身の、或は各路相互間の相互インダクタンスの問題等については大部発表されたものもある様である。が遮蔽体との関係に於て論じたものはBuchholzの星型の2芯及び4芯ケーブルの遮蔽体損失に関するものである。* 周波数が非常に高いものとし渦流は殆んど遮蔽体内面を流れるものとして、専ら磁気的のスカラポテンシャルを用ひて遮蔽体損失を論じてゐる。そして上述のケーブルは円柱殻の中心に関して対称の位置にある線状電流に模型化して論じた。

筆者はラセンの中心線と遮蔽円柱殻の中心線とが一致しない一般の場合につき論ずる事にする。尚導体外の空間のみならず導体内の電磁場をも一様に論じ得る様にスカラポテンシャルのみならず磁気的ベクトルポテンシャルも併用することにした。以下の所論は上述のBuchholzの論文をその特別の場合として包含するものである。

第一節　ラセンの中心軸が座標系の原点以外の横軸上にある場合のラセン電流によるベクトルポテンシャルの固有函数表示。

1. ラセンの中心をO_1とする。(第8.1図及び第8.4図参照)　第8.1図

$\overline{O_1O}=b$とし、ラセンの半径をaとする。ラセン上の任意の点$Q(a,\psi,\zeta)$と任意の考察点$P(r,\varphi,z)$との間の距離をDとする。Dは

$$D^2 = a^2+r^2-2ar\cos\left(\alpha-\varphi+\frac{\zeta}{h'}\right)+(z-\zeta)^2$$

である。こゝに$h'=h/(2\pi)$であつてhはラセンのピッチである。$\zeta=-\infty$より$+\infty$に向つてラセン中を流れ、中心O_1にある直線導体を通つて$+\infty$より$-\infty$に還流する電流系のベクトルポテンシャルは次の(1)で与へられる。Iは回路電流である。

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{D} - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{D_0} \qquad (1)$$

* H. Buchholz: Elektrische Strömungsfelder mit Schraubenstruktur. E.N.T., 14 S. 264～280 (1937)
海外通工，第121号

———: Die Hochfrequente Wirbelströmung im Kreiszylindrischen Schirmleiter verdrillter Leiterpaare..

ここに D_0 は上と同じP点と O_1 軸上の源点との距離であって

8-1 $$D_0^2 = r^2 + (z-\zeta)^2$$

である。D^{-1} は次の如く表はし得る。即ち $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_m = 2$ $(m = 1, 2, \cdots)$ とすると

$$D^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m(\varphi - \varphi_1) \cdot \int_0^{\infty} e^{-|z-\zeta|\lambda} \cdot J_m(r_1\lambda) J_m(r\lambda) d\lambda \dagger$$

である。

ここに J_m は m 次のベッセル函数である。

$$J_m(r_1\lambda) \cos m(\varphi - \varphi_1) = \cos m\varphi \cdot J_m(r_1\lambda) \cos m\varphi_1 + \sin m\varphi \cdot J_m(r_1\lambda) \sin m\varphi_1$$

に

$$J_m(r_1\lambda)\, e^{im\varphi_1} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{m+p}(b\lambda) J_p(a\lambda) \cdot e^{ip(\pi-\psi)} \ddagger$$

を用ひて

$$J_m(r_1\lambda) \cdot \cos m(\varphi-\varphi_1) = \cos m\varphi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{m+p}(b\lambda) J_p(a\lambda) \times \cos p(\pi-\psi) + \sin m\varphi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{m+p}(b\lambda) J_p(a\lambda) \sin p(\pi-\psi)$$

となる。これを上の D^{-1} に代入し、積分の順序を変更し ζ についての積分を先づ行ふ。$\psi = \alpha + \zeta/h'$ であって、ζ に関する積分は次の様になる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z-\zeta|\lambda} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p(\pi - \psi)\, d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z-\zeta|\lambda} \begin{matrix}(-)^p \cos\\ (-)^{p+1} \sin\end{matrix} p\left(\alpha + \frac{\zeta}{h'}\right) d\zeta$$

$$= \begin{matrix}(-)^p\\ (-)^{p+1}\end{matrix} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p}{h'}\right)^2} \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p\left(\alpha + \frac{z}{h'}\right)$$

故に

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{D} = \frac{\mu I}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-)^p \cos p\left(\alpha + \frac{z}{h'}\right) \cdot \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda)$$

$$\times J_p(a\lambda)\, J_m(r\lambda) \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p}{h'}\right)^2} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \sin m\varphi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-)^p \sin p\left(\alpha + \frac{z}{h'}\right)$$

$$\times \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda) J_p(a\lambda) J_m(r\lambda) \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 + (p/h')^2}$$

となる。同様に

$$D_0^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \int_0^{\infty} e^{-|z-\zeta|\lambda} J_m(b\lambda) J_m(r\lambda)\, d\lambda$$

であるから

$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{D_0} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \int_0^{\infty} d\lambda\, J_m(b\lambda) \times J_m(r\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z-\zeta|\lambda} d\zeta$$

Arch. f. Elekt., **31**, S. 507 (1937) 海外通工 第125号

† 附録 Ⅱ 参照

‡ Jahnke u. Emde: Funktionentafeln. Teubner (1933) S. S. 212

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \cdot \int_0^{\infty} J_m(b\lambda) J_m(r\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cdot \frac{1}{2m} \left(\frac{b}{r}\right)^m \cos m\varphi$$

故に結局 A_z は次の(2)の如くなる。

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{2m} \left(\frac{b}{r}\right)^m \cos m\varphi + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-)^p \chi_0 \cos\left(p\alpha + \frac{pz}{h'} + m\varphi\right)$$

但し $\chi_0(m, p) \equiv \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda) J_p(a\lambda) J_m(r\lambda) \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 + (p/h')^2}$。 ……(2)

次に A_r を求める。これは次の(3)で与へられる。

$$A_r = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{h'} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\alpha + \frac{\zeta}{h'} - \varphi\right) \frac{d\zeta}{D} \quad \cdots\cdots(3)$$

D' は前と全じ表示を用ひて先づ ζ について積分するのであるが、これは次の如くである。但し $\mu = \alpha + z/h'$ とする。先づ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z-\zeta|\lambda} {\cos \atop \sin} p\left(\alpha + \frac{\zeta}{h'}\right) {\sin \atop \cos}\left(\alpha + \frac{\zeta}{h'} - \varphi\right) d\zeta$$

$$= \sin\{(p+1)\mu - \varphi\} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p+1}{h'}\right)^2} \mp \sin\{(p-1)\mu + \varphi\} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p-1}{h'}\right)^2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z-\zeta|\lambda} {\sin \atop \cos} p\left(\alpha + \frac{\zeta}{h'}\right) {\sin \atop \cos}\left(\alpha + \frac{\zeta}{h'} - \varphi\right) d\zeta$$

$$= \cos\{(p-1)\mu + \varphi\} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p-1}{h'}\right)^2} \mp \cos\{(p+1)\mu - \varphi\} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p-1}{h'}\right)^2}$$

であるから これを用ひて A_r を計算すると次の様になる。

$$-\frac{h'}{a} A_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-)^p \Big[\sin\{(p+1)\mu - \varphi\} \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda) \times$$

$$\times J_p(a\lambda) J_m(r\lambda) \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p+1}{h'}\right)^2} - \sin\{(p-1)\mu + \varphi\} \cdot \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda) J_p(a\lambda) \times$$

$$\times J_m(r\lambda) \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p-1}{h'}\right)^2}\Big] - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \sin m\varphi \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-)^p \Big[\cos\{(p-1)\mu + \varphi\} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda) J_p(a\lambda) J_m(r\lambda) \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p-1}{h'}\right)^2} - \cos\{(p+1)\mu - \varphi\} \cdot \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda) \times$$

$$\times J_p(a\lambda) J_m(r\lambda) \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2 + \left(\frac{p+1}{h'}\right)^2}\Big]$$

これを整理して結局次の様になる。

8-2

$$-\frac{h'}{a}A_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=-\infty}^{\infty}(-)^p\chi_1\cdot\sin\{(p+1)\mu+(m-1)\varphi\}$$
$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=-\infty}^{\infty}(-)^p\chi_{-1}\cdot\sin\{(p-1)\mu+(m+1)\varphi\}$$

但し

$$\left.\begin{aligned}
\chi_1(m,p) &= \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda)\,J_p(a\lambda)\,J_m(r\lambda)\,\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p+1}{h'}\right)^2}\\
\chi_{-1}(m,p) &= \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda)\,J_p(a\lambda)\,J_m(r\lambda)\,\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p-1}{h'}\right)^2},\\
\mu &= \alpha + z/h'
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

である。

次にA_φであるが：これは

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{a}{h'}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\alpha+\frac{\zeta}{h'}-\varphi\right)\frac{d\zeta}{D} \quad\cdots\cdots(5)$$

で与へられる。そしてA_rを求めたのと全く同じ方法で次の如く与へられる。

$$\frac{h'}{a}A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=-\infty}^{\infty}(-)^p\chi_1\cos\{(p+1)\mu+(m-1)\varphi\}$$
$$+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=-\infty}^{\infty}(-)^p\chi_{-1}\cos\{(p-1)\mu+(m+1)\varphi\} \quad\cdots(6)$$

ここにμは前述の如く$\alpha+z/h'$である。又$\chi_1(m,p)$及び$\chi_{-1}(m,p)$の意味も前述のものと全く同じである。

以上でラセンを往路としラセンの中心線を帰路とする回路のベクトルポテンシャルの円柱座標分が完全に表はし得た訳である。唯χ_0, χ_{-1}及びχ_1なる積分の評価が未解決であるがこれは附録に与へてある。

次に$b\to 0$としてラセンが座標系の中心にある場合を導くことにしよう。

1.2 ラセンの中心線がZ軸と一致する場合のベクトルポテンシャル。

$b\to 0$の場合にはラセンの帰路が丁度Z軸に一致するのであるが、これは前述の諸結果に於て$b\to 0$として得られる。先づA_zを考へる。χ_0は

$$\chi_0(m,p) = \int_0^{\infty} J_{m+p}(b\lambda)\,J_p(a\lambda)\,J_m(r\lambda)\,\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$
$$= \int_0^{\infty} J_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\lambda\right) J_p\left(\frac{ap}{h'}\lambda\right) J_m\left(\frac{rp}{h'}\lambda\right)\frac{\lambda\,d\lambda}{1+\lambda^2}$$

であるがここで$b\to 0$とすると$p=-m$の場合に限って積分は存在し次の様になる。

$$\chi_0(m,p)=\chi_0(m,-m)=(-)^m\int_0^\infty J_m\left(\frac{am}{h'}\lambda\right)J_m\left(\frac{rm}{h'}\lambda\right)\frac{\lambda d\lambda}{1+\lambda^2}$$
$$\doteqdot(-)^m I_m\left(\frac{am}{h'}\right)K_m\left(\frac{rm}{h'}\right)^{*}\qquad r>a,\ m\neq 0\quad\cdots\cdots$$

もし$r<a$の時にはI_mとK_mとを入れ換へればよい。又$m=0$の時には　$\chi_0(0,0)=\int_0^\infty J_0(a\lambda)J_0(r\lambda)\dfrac{d\lambda}{\lambda}$　である。

又
$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{D_0}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^\infty J_0(r\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

であるからA_zは次の様になる。

$$A_z=\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\int_0^\infty J_0(a\lambda)J_0(r\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}-\int_0^\infty J_0(r\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}\right\}$$
$$+\frac{\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_m\left(\frac{am}{h'}\right)K_m\left(\frac{rm}{h'}\right)}{I_m\left(\frac{rm}{h'}\right)K_m\left(\frac{am}{h'}\right)}\cos m\left(\alpha+\frac{z}{h'}-\varphi\right),\quad r\gtrless a$$

積分を計算すると結局次の様になる。[**]

$$A_z=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\begin{matrix}0\\ \ln\frac{r}{a}\end{matrix}\right\}+\frac{\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{I_m\left(\frac{am}{h'}\right)K_m\left(\frac{rm}{h'}\right)}{I_m\left(\frac{rm}{h'}\right)K_m\left(\frac{am}{h'}\right)}\cos m\left(\alpha-\varphi+\frac{z}{h'}\right)$$
$$r\lessgtr a\qquad\cdots\cdots(7)$$

次にA_rについても殆んど全様にして次式を得る。

$$A_r=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{a}{h'}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{I_{m+1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{rm}{h'}\right)-I_{m-1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_{m-1}\left(\frac{rm}{h'}\right)\right\}$$
$$\times\sin m\left(\alpha-\varphi+\frac{z}{h'}\right),\quad r>a\quad\cdots(8)$$

$r<a$の場合には上式のIとKを交換すればよい。
最後にA_φは次の様になる。

$$A_\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^\infty J_1(a\lambda)J_1(r\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}+\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-)^{-m+1}\cos m(\mu-\varphi)\cdot\int_0^\infty\left\{J_{-m+1}(a\lambda)J_{m-1}(r\lambda)\right.$$
$$\left.+I_{m-1}(a\lambda)J_{m+1}(r\lambda)\right\}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{m}{h'}\right)^2}\qquad r>a$$

そして[†]

$$\int_0^\infty J_1(a\lambda)J_1(r\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda}=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{a}{r}, & r>a\\ \frac{1}{2}\frac{r}{a}, & r<a\end{cases}$$

であるからA_φは次の様になる。

---

[*] $J_{-m}(z)=(-)^m J_m(z)$，$J_m(z)=(-)^m J_m(z)$なることを用いる。尚I_m K_mは純虚数を変数とするベッセル函数である。

[**] G. N. Watson: Theory of Bessel Functions, Cambridge (1922) P. 406

[†] G. N. Watson: loc. cit., p. 405.

$$A_\varphi=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{a}{h'}\left\{\begin{matrix}\frac{a}{r}\\ \frac{r}{a}\end{matrix}\right\}+\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a}{h'}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix}I_{m+1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{rm}{h'}\right)+I_{m-1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_m\left(\frac{rm}{h'}\right)\\ I_{m+1}\left(\frac{rm}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{am}{h'}\right)+I_{m-1}\left(\frac{rm}{h'}\right)K_{m-1}\left(\frac{am}{h'}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$\times\cos m\left(\alpha-\varphi+\frac{z}{h'}\right)\qquad r\gtrless a\quad\cdots\cdots(9)$$

オ二節　$r=b$ に中心軸を有する対称導体系のベクトルポテンシャル

2.1 次に $r=b$ に中心軸を有する2本のラセンよりなる往復回路即ち対称導体を考へる。簡単のために z — const なる平面による直截面と二本のラセンの交点はラセン円上で丁度 π だけ位相が異なるものとする。然る時は先の A_r なるベクトルポテンシャルの式に於て α の代りに $\alpha+\pi$ なる置換を又 I の代りに $-I$ と置換へて得られるものを始めの A_r に加へると対称導体系の綜合ベクトルポテンシャルが得られる。そしてこれは次の様になる。

$$A_r=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a}{h'}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\left[\sin\{p\mu+(m-1)\varphi\}\cdot\int_0^\infty J_{m+p-1}(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)J_m(r\lambda)\times\right.$$

$$\times\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}-\sin\{p\mu+(m+1)\varphi\}\cdot\int_0^\infty J_{m+p+1}(b\lambda)J_{p+1}(a\lambda)J_m(r\lambda)$$

$$\left.\times\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}\right]\qquad\cdots\cdots(1)$$

同様にして A_φ 及び A_z は次の様になる。

$$A_\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{a}{h'}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\left[\cos\{p\mu+(m-1)\varphi\}\cdot\int_0^\infty J_{m+p-1}(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)J_m(r\lambda)\times\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\cos\{p\mu+(m+1)\varphi\}\cdot\int_0^\infty J_{m+p+1}(b\lambda)J_{p+1}(a\lambda)J_m(r\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}\right]\qquad\cdots(2)$$

$$A_z=-\frac{\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\cos(p\mu+m\varphi)\cdot\int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda)J_a(a\lambda)J_m'(r\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}\qquad\cdots(3)$$

上式は少し書換へると次の様になる。(附録 2.1 参照)

$$\left.\begin{matrix}A_r\\ A_\varphi\end{matrix}\right\}=\mp\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,p\mu\int_0^\infty J_p(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)J_1(r\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}$$

$$+\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(p\mu+m\varphi)\cdot\int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda)\{J_{p+1}(a\lambda)J_{m-1}(r\lambda)\mp J_{p-1}(a\lambda)\times$$

$$\times J_{m+1}(r\lambda)\}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

$$A_z=-\frac{\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\cos(p\mu+m\varphi)\int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda)J_p(a\lambda)J_m(r\lambda)$$

$$\times\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

$$\epsilon_0\equiv 1,\ \epsilon_m=2\,(m=1,2,\cdots\cdots)\qquad \mu=\alpha+z/h'\qquad\cdots\cdots(4)$$

今 $r>a+b$ の場合を考へよう。p に関する求和を $p=1,3,5,\cdots\cdots\infty$ のものと $p=-1,-3,-5,\cdots\cdots-\infty$ のものとの二群に分つて考へる。前者の場合即ち p が正の奇数の場合には積分の値は直ぐ求められる。例へば A_z^+ は次の如くである。但し $r>a+b$ とする。

$$A_z^+ = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\sum_{p=odd}^{+\infty}\cos p\mu\cdot I_p\left(\frac{bp}{h'}\right) I_p\left(\frac{ap}{h'}\right) K_0\left(\frac{rp}{h'}\right)$$
$$+\frac{2\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=odd}^{+\infty}\cos(p\mu+m\varphi)\cdot(-1)^{p-1} I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right) I_p\left(\frac{ap}{h'}\right)\cdot K_m\left(\frac{rp}{h'}\right)$$

A_φ, A_r も全称に求められるが冗長に失するから記述を省略する。後者の群，即ち p が <u>負の奇数</u> の場合には積分記号下のベッセル函数の次数が負になるものがあるから、これは $J_{-n}(z)=(-)^n J_n(z)$ の関係により正の次数のベッセル函数に直してから後で積分する。故に A_z は次の様に書ける。

$$A_z = A_z^+ + A_z^-$$
$$= A_z^+ - \frac{2\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=odd}^{-\infty}\cos(p\mu+m\varphi)\int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda) J_p(a\lambda) J_m(r\lambda)\frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}$$

$r>a+b$ $\cdots\cdots$ (5)

A_z^+ は前述の様に p の正の奇数全体に亘る部分ベクトルポテンシャルの求和である。A_z は b 点に中心軸を有する対称ラセン導体系による考察点の綜合ベクトルポテンシャルの円柱座標で表はされた三成分の中の z－成分である。他の二成分も上述せる所と全く全称の注意を以て積分する事が出来るが記述を省略する。

以上では $r>a+b$ と仮定したのであるが、この関係が満足されてゐない場合でも r, a, b の中で一つが他の二つの和より大きい場合例へば $b>a+r$ の如き場合には積分は遂行し得る。この場合 rp/h' を変数とする変形ベッセル函数は K ではなくて I になる。そして bp/h' を変数とするものが K になるのである。以下で我々が考へるのは薄円柱殻遮蔽体の外部或は遮蔽体上の場であるから (5) の $r>a+b$ の場合だけを与へておく。

上の (5) で $b\to 0$ とする。即ちラセン軸と遮蔽体軸とが一致する場合を考へる。この場合には二重級数の p に関する求和の中で $p=-m$ のものだけが残り他は消滅する。結局次の様になる。

$$A_z = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=odd}^{+\infty}\cos(m\mu-m\varphi)\cdot I_m\left(\frac{am}{h'}\right) K_m\left(\frac{rm}{h'}\right)$$

但し $b=0$，$r>a$，$\mu=\alpha+z/h'$ $\cdots\cdots$ (5.1)

同様にして他の二成分は次の如く与へられる。

8-3
$$\left.\begin{matrix}A_r\\A_\varphi\end{matrix}\right\}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{m=odd}^{\pm\infty}\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(m\mu-m\varphi)\left\{I_{m+1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{rm}{h'}\right)\mp I_{m-1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_{m-1}\left(\frac{rm}{h'}\right)\right\}\quad\cdots(5.2)$$

(5.1)及(5.2)の結果は当然偏心のない構造について論じた前記のBuchholzの論文の結果*と一致する。

ここで更に $h'\to\infty$ とする。即ちラセンのピッチが非常に大きくなった極限として平行往復直線状導体系によるベクトルポテンシャルが得られるがこれは次の周知の結果を与へる。

$$A_r=A_\varphi\equiv 0$$
$$A_z=\frac{\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=odd}^{\pm\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{a}{r}\right)^m\cos m(\varphi-\alpha)\quad\cdots\cdots(6)$$

2.2 ついでにベクトルポテンシャルの直角座標分を次に与へておく。これは $A_x=A_r\cos\varphi-A_\varphi\sin\varphi$ 及び $A_y=A_r\sin\varphi+A_\varphi\cos\varphi$ によって(1)及び(2)から直ちに次の様に与へられるものである。

$$A_x=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{a}{h'}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\sin(p\mu+m\varphi)\times\int_0^\infty\left\{J_{m+p-1}(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)-J_{m+p+1}(b\lambda)J_{p+1}(a\lambda)\right\}J_m(r\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}\quad\cdots\cdots(7.1)$$

$$A_y=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{a}{h'}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\cos(p\mu+m\varphi)\times\int_0^\infty\left\{J_{m+p-1}(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)+J_{m+p+1}(b\lambda)J_{p+1}(a\lambda)\right\}J_m(r\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}\quad\cdots\cdots(7.2)$$

$$A_z=-\frac{\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\cos(p\mu+m\varphi)\cdot\int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda)J_p(a\lambda)J_m(r\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+\left(\frac{p}{h'}\right)^2}\quad\cdots(7.3)$$

第三節 ラセン状対導体よりなる回路をそれと平行な薄円柱殻で包んだ場合の殻外の磁界の減少について

3.1 第8-2図の如き配置のラセン回路―薄円柱殻系を考へる。

第8.2図 ラセン回路はいはる円周上 π だけ位相の異なる対称の位置にある二本のラセンが往復路となって出来てゐるものとすると、この回路による、$r>b+a$ なる点のベクトルポテンシャルは前節(5)で与へられてゐる様に p 及び m に関する二重級数の和である。そして夫々については $p=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots\cdots;\ m=1,2,3,4,\cdots\cdots$ なる各分値よりなる。今代表的な一つの分値をとり之を $A^0_{m,p}$ とすると**

---

* H. Buchholz : ENT, 14, s.627, 6a, b und c.

** ここでは m, p 共に正と仮定する。p が負の奇数の場合は附録で述べる。(附録3.1参照)

$$\left.\begin{array}{l} A^{0}_{r,m,p} \\ A^{0}_{\varphi,m,p} \end{array}\right\} = (-)^{p-1}\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)\left\{I_{p+1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_{m-1}\left(\frac{rp}{h'}\right)\right.$$

$$\left.\mp I_{p-1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{rp}{h'}\right)\right\}\begin{array}{c}\sin\\ \cos\end{array}(p\mu + m\varphi)$$

$$A^{0}_{z,m,p} = (-)^{p-1}\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)\left\{-I_{p+1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_m\left(\frac{rp}{h'}\right)\right.$$

$$\left.+ I_{p-1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_m\left(\frac{rp}{h'}\right)\right\}\cos(p\mu + m\varphi) \qquad \cdots\cdots(1)$$

となる。
最後の A_z に於ては $I_p(z) = \frac{z}{2p}\{I_{p-1}(z) - I_{p+1}(z)\}$ の関係を用いて I_p を二つに分离してある。かくの如くすることにより綜合ベクトルポテンシャルは次の二つの部に分离される。即ち

$$\left.\begin{array}{l}
A^{0}_{r,m,p,1} = (-)^{p-1}\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)I_{p+1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_{m-1}\left(\frac{rp}{h'}\right)\sin(p\mu+m\varphi) \\
A^{0}_{\varphi,m,p,1} = (-)^{p-1}\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}\cdot I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)I_{p+1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_{m-1}\left(\frac{rp}{h'}\right)\cos(p\mu+m\varphi) \\
A^{0}_{z,m,p,1} = (-)^{p}\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)I_{p+1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_m\left(\frac{rp}{h'}\right)\cos(p\mu+m\varphi)
\end{array}\right\}(1.1)$$

及び

$$\left.\begin{array}{l}
A^{0}_{r,m,p,2} = (-)^{p}\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)I_{p-1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{rp}{h'}\right)\sin(p\mu+m\varphi) \\
A^{0}_{\varphi,m,p,2} = (-)^{p-1}\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)I_{p-1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{rp}{h'}\right)\cos(p\mu+m\varphi) \\
A^{0}_{z,m,p,2} = (-)^{p-1}\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)\cdot I_{p-1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_m\left(\frac{rp}{h'}\right)\cos(p\mu+m\varphi)
\end{array}\right\}(1.2)$$

である。簡単のために

$$(-)^{p-1}\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}\cdot I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)I_{p+1}\left(\frac{ap}{h'}\right) \equiv \alpha_1$$

$$(-)^{p-1}\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)I_{p-1}\left(\frac{ap}{h'}\right) \equiv \alpha_{-1}$$

とおくと二次ベクトルポテンシャルも考慮に入れて次の二組の綜合ベクトルポテンシャルを得る。即ち先づ α_1 に関するものは

$$A_{rI} = \left\{\alpha_1 K_{m-1}\left(\frac{rp}{h'}\right) + C_{r1}I_{m-1}\left(\frac{rp}{h'}\right)\right\}\sin(p\mu + m\varphi)$$

$$A_{\varphi I} = \left\{\alpha_1 K_{m-1}\left(\frac{rp}{h'}\right) + C_{\varphi 1}I_{m-1}\left(\frac{rp}{h'}\right)\right\}\cos(p\mu + m\varphi)$$

$$A_{zI} = \left\{-\alpha_1 K_m\left(\frac{rp}{h'}\right) + C_{z1}I_m\left(\frac{rp}{h'}\right)\right\}\cos(p\mu + m\varphi), \quad a+b<r<c$$

$$A_{rII} = D_{r1}K_{m-1}\left(\frac{rp}{h'}\right)\sin(p\mu + m\varphi)$$

$$A_{\varphi II} = D_{\varphi 1}K_{m-1}(rp/h')\cos(p\mu + m\varphi)$$

$$A_{zII} = D_{z1}K_m(rp/h')\cos(p\mu + m\varphi), \quad c<r<\infty$$

8-4. である。次にα_{-1}に関するものは次の如くなる。

$$A_{r\mathrm{I}} = \{-\alpha_{-1}\cdot K_{m+1}(rp/k') + C_{r2} I_{m+1}(rp/k')\}\sin(p\mu+m\varphi)$$
$$A_{\varphi\mathrm{I}} = \{-\alpha_{-1} K_{m+1}(rp/k') + C_{\varphi2} I_{m+1}(rp/k')\}\cos(p\mu+m\varphi)$$
$$A_{z\mathrm{I}} = \{\alpha_{-1} K_m(rp/k') + C_{z2} I_m(rp/k')\}\cos(p\mu+m\varphi),$$
$$a+b<r<c$$

$$A_{r\mathrm{II}} = D_{r2} K_{m+1}(rp/k')\sin(p\mu+m\varphi)$$
$$A_{\varphi\mathrm{II}} = D_{\varphi2} K_{m+1}(rp/k')\cos(p\mu+m\varphi)$$
$$A_{z\mathrm{II}} = D_{z2}\cdot K_m(rp/k')\cos(p\mu+m\varphi),\quad c<r<\infty$$

以上を通じて $\mu=\alpha+z/k'$ である。

磁界Hは上のベクトルポテンシャルより次の如く求められる。

$$H_r = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right),\quad H_\varphi = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)$$
$$H_z = \frac{1}{\mu_0 r}\left\{\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right\}.$$

そしてこれより求めた磁界について円柱殻 $r=c$ の上に於て境界条件として次の三つが与へられる。

$$H_{r\mathrm{I}} = H_{r\mathrm{II}},\quad H_{\varphi\mathrm{I}} - H_{\varphi\mathrm{II}} = -K_z = \frac{1}{S}\frac{\partial A_z}{\partial t}$$
$$H_{z\mathrm{I}} - H_{z\mathrm{II}} = K_\varphi = -\frac{1}{S}\cdot\frac{\partial A_\varphi}{\partial t}$$

ここにSは殻の面比抵抗である。この関係はαおよびpの値の如何に拘らず成立するから、結局次の関係式が得られる。

$$C_{r1}=0,\quad C_{\varphi1} = i\frac{c}{\delta}K_{m-1}^2(\gamma p)\alpha_1/\left\{1-\frac{ic}{\delta}I_{m-1}(\gamma p)K_{m-1}(\gamma p)\right\}$$
$$C_{z1} = -i\frac{c}{\delta}K_m^2(\gamma p)\alpha_1/\left\{1-\frac{ic}{\delta}I_m(\gamma p)K_m(\gamma p)\right\}$$
$$D_{r1}=\alpha_1,\quad D_{\varphi1}=\alpha_1/\left\{1-\frac{ic}{\delta}I_{m-1}(\gamma p)K_{m-1}(\gamma p)\right\}$$
$$D_{z1} = -\alpha_1/\left\{1-\frac{ic}{\delta}I_m(\gamma p)K_m(\gamma p)\right\}$$

ここに $\delta^{-1}=\omega\mu\sigma d=\omega\mu/S$ である。但しdは遮蔽円柱殻の厚さとする。又Sは前述の様に殻の面比抵抗である。更に $\gamma=c/k'$ とする。

次に始源電流α_{-1}に関するものも全く同様にして求まる。そして$C_{r2},\cdots;D_{r2},\cdots$等は前の$C_{r1},\cdots;D_{r1}\cdots$の結果に於て$I_{m-1},K_{m-1}$の代りに$I_{m+1},K_{m+1}$及び$\alpha_1$の代りに$-\alpha_{-1}$を代用すればよい。

かくして遮蔽体内外のベクトルポテンシャルが求まったのであるが、ここで $b\to0$ とすると遮蔽体の中心に対撚導体がある場合となり、これは $p=-m$ ($m=1,3,5,\cdots$) の場合のみが残り、

次の様になる。
即ち先づα_1に関するものは殻外のベクトルポテンシャルとして

$$A^{(1)}_{zII}=-\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\cdot I_{m-1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_m\left(\frac{rm}{h'}\right)\cdot\cos m(\varphi-\mu)\Big/\left\{1-\frac{ic}{\delta}I_m(\gamma m)K_m(\gamma m)\right\}$$

$$A^{(1)}_{\varphi II}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}I_{m-1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_{m-1}\left(\frac{rm}{h'}\right)\cos m(\varphi-\mu)\Big/\left\{1-\frac{ic}{\delta}I_{m-1}(\gamma m)K_{m-1}(\gamma m)\right\}$$

が得られ、次にα_{-1}に関するものから次のポテンシャルを得る。

$$A^{(2)}_{zII}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}I_{m+1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_m\left(\frac{rm}{h'}\right)\cos m(\varphi-\mu)\Big/\left\{1-\frac{ic}{\delta}I_m(\gamma m)K_m(\gamma m)\right\}$$

$$A^{(2)}_{\varphi II}=-\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}I_{m+1}\left(\frac{am}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{rm}{h'}\right)\cos m(\varphi-\mu)\Big/\left\{1-\frac{ic}{\delta}I_{m+1}(\gamma m)K_{m+1}(\gamma m)\right\}$$

最後に$h'\to\infty$とするとα_1に関するものは*

$$A^{(1)}_{zII}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{a}{r}\right)^m\left(1-\frac{ic}{2m\delta}\right)^{-1}\cos n(\varphi-\alpha).$$

$$A^{(1)}_{\varphi II}\simeq O(h'^{-1})$$

結局$b\to 0$, $h'\to\infty$とすると遮蔽体中心軸におかれた往復二平行線条の場合のベクトルポテンシャル

$$A_{zII}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{a}{r}\right)^m\left\{1-i\omega\mu c/(2ms)\right\}^{-1}\cos m(\varphi-\alpha)$$

が得られる。

以上よりラセン回路のベクトルポテンシャルは一般にA_r, A_φ及A_z分値を有するが、これを薄い円柱殻導体で遮蔽すると円柱殻面に対する切線成分A_φ, A_zのみが効果的な遮蔽作用を被りA_r成分はかゝる遮蔽体に於ては何等影響を蒙りないことが分るのである。これは薄円柱殻にはA_φ及びA_zによる渦流のみが流れ、反之A_rは渦流に関しては何も寄与しないからである。

尚ベクトルポテンシャルをα_1に関するものとα_{-1}に関するものに分つて考へることは、ピッチの大さによつて両者が受ける影響の間に差異があることを考へると意味がある。即ちh'が非常に大きくなると上に確めた様に綜合ベクトルポテンシャルに対して寄与するのはα_1に関するもの、その中でも特に$A^{(1)}_{zII}$のみであつてα_{-1}に関するものはh'^{-1}又はh'^{-2}で消滅する性質のものである。このことは実際の撚りケーブルの様にピッチの長いものの取扱ひを簡易化する。

渦流に関してはその密度をKとすると$K=-(\mu_0/s)\partial A/\partial t$であつて先に求めたベクトルポテンシャル$A$を用ひて容易に求め得る。即ち$A$の時間に対する変化は$\exp(-i\omega t)$に従ふから例へば$K^{(1)}_{zII}$は前述の$A^{(1)}_{zII}$より

---

* $I_{-n}(z)=I_n(z)$, $K_{-n}(z)=K_n(z)$を用ひる。そして$z\to 0$の時$I_n(z)\cong\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n$, $K_n\cong\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n$なる事を利用する。

$$K^{(1)}_{z\mathrm{II}} = (-)^{p}\frac{(i\omega\mu a/s)\cdot(I/\pi h')\cdot I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)\cdot I_{p+1}\left(\frac{ap}{h'}\right)K_m\left(\frac{cp}{h'}\right)}{1-\frac{i\omega\mu c}{s}K_m\left(\frac{cp}{h'}\right)I_m\left(\frac{cp}{h'}\right)}\cos(p\mu+m\varphi)$$

となる。特に完全導電性の遮蔽体では $s\to 0$ として

$$K^{(1)}_{z\mathrm{II}} = (-)^{p+1}\frac{I}{\pi c}\cdot\frac{a}{h'}\cdot\frac{I_{m+p}(bp/h')\,I_{p+1}(ap/h')}{I_m(cp/h')}\cdot\cos\left(p\alpha+p\frac{z}{h'}+m\varphi\right)$$

となる。これは給源ラセン電流による磁界に抗し遮蔽作用面に於て丁度 A_z を 0 ならしめる。(第8.3図参照)

第13図 以上より ≫遮蔽体内面を流れる電流は源ラセンを遮蔽体に投影した場合に出来るラセンに沿つて流れる。≪ 但し各量はすべてその (m,p) 成分に就いて云はれることである。而し実際 ~~場合~~ の構成は、之等の成分の表はしてゐる現象の重合せであつて、綜合したものについても矢張り上述の事柄は正しい。特に $b\doteqdot 0$ の場合には、第一近似として $m=1$, $p=\pm 1$ の成分を採れば充分である。

3.2 ラセン回路の偏心の影響について考へよう。対称導体を中空円柱殻で遮蔽した場合ラセン回路の中心軸が遮蔽円柱殻の中心軸から僅かの距離だけ偏心した場合、その偏心が全体の場の構成に如何なる影響を及ぼすであらうか。第(8.2図)に於て b がその偏心の距離であるがこれは系の他の寸法に比し極めて小さいものとする。

$r > a+b$ なる点のベクトルポテンシャルは第二節の(4)又は(5)の示す様に m 及び p に関する二重級数で表はされるのであるが、これを b の冪級数に書直す為に求和の方法を変更する。二重級数が若し収斂するならばそれは許される筈である。前節(4)の二重級数 $\sum_m\sum_p a_{p,m}$ の要素及び求和法は下の如くである。但し $m=0$ に関するものについては別に考へ入れる。

$a_{p,m}$

……	$a_{-5,1}$	$a_{-3,1}$	$a_{-1,1}$	$a_{1,1}$	$a_{3,1}$	$a_{5,1}$	……
……	$a_{-5,2}$	$a_{-3,2}$	$a_{-1,2}$	$a_{1,2}$	$a_{3,2}$	$a_{5,2}$	……
……	$a_{-5,3}$	$a_{-3,3}$	$a_{-1,3}$	$a_{1,3}$	$a_{3,3}$	$a_{5,3}$	……
……	$a_{-5,4}$	$a_{-3,4}$	$a_{-1,4}$	$a_{1,4}$	$a_{3,4}$	$a_{5,4}$	……

……………………

これを次の様な級数の求和法に変へる。

8-

$a_{p,m}$

⋯		$a_{-5,1}$	$a_{-3,1}$	$a_{-1,1}$	$a_{1,1}$	$a_{3,1}$	$a_{5,1}$	⋯
⋯		$a_{-5,2}$	$a_{-3,2}$	$a_{-1,2}$	$a_{1,2}$	$a_{3,2}$	$a_{5,2}$	⋯
⋯		$a_{-5,3}$	$a_{-3,3}$	$a_{-1,3}$	$a_{1,3}$	$a_{3,3}$	$a_{5,3}$	⋯
⋯	$a_{-7,4}$	$a_{-5,4}$	$a_{-3,4}$	$a_{-1,4}$	$a_{1,4}$	$a_{3,4}$	$a_{5,4}$	⋯
⋯	$a_{-7,5}$	$a_{-5,5}$	$a_{-3,5}$	$a_{-1,5}$	$a_{1,5}$	$a_{3,5}$	⋯	
⋯	$a_{-7,6}$	$a_{-5,6}$	$a_{-3,6}$	$a_{-1,6}$	$a_{1,6}$	⋯		
⋯	$a_{-7,7}$	$a_{-5,7}$	$a_{-3,7}$	$a_{-1,7}$	⋯			

そして $p+m$ を新らしく n とおく。かくして

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=\text{odd}}^{\pm\infty} a_{p,m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=\text{even or odd}}^{\infty} a_{n,m}$$

とし得る。但右辺の二重和で m に関する求和をは次の如く行ふ。即ち n が奇数の時は m は $2,4,6,\cdots\cdots$ について加へ合し、n が0を含めて偶数の時は m は $1,3,5,\cdots\cdots$ について集める。

偏心がない場合には、即ち $b\to 0$ の場合には、$n=0$ に関するもののみが残り才二節(5.1)の如き結果になることは既に述べた所である。

$n=\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$ に関するものは才二節(4)の積分を遂行すると結果の中に於て夫々 $I_1(|-m\pm 1|\cdot b/R')$, $I_2(|-m\pm 2|\cdot b/R')$, $\cdots\cdots$ なる係数が現はれる。今 b が極めて小さいと考へるのであるからこれらは夫々 $b, b^2,\cdots\cdots$ の order であるから、これらが小さな偏心に対する夫々才一次及び才二次の補正項である。

斯くして才一次補正項として b の一次の項を集めると $m=0$ の場合をも考慮して $a_{p,m}$ は

$$a_{-1,0},\quad a_{1,0},\quad a_{-1,2},\quad a_{-3,4},\quad a_{-5,6},\quad \cdots\cdots$$
$$a_{-3,2},\quad a_{-5,4},\quad a_{-7,6},\quad \cdots\cdots$$

である。又才二次補正項としての b^2 の項を持つ係数 $a_{p,m}$ は

$$a_{-3,1},\quad a_{-5,3},\quad a_{-7,5},\quad \cdots\cdots,$$
$$a_{1,1},\quad a_{-1,3},\quad a_{-3,5},\quad a_{-5,7},\quad \cdots\cdots$$

である。而して是等の各分値を計算すると分るが次数 $|p|$, $|m|$ が大きくなると、係数の値は急速に減少する*から p 及 m の絶対値の小さい最初の二三の項をとれば実用上充分の場合が多い。

例へば才一次補正項として $a_{-1,0}$, $a_{1,0}$, $a_{-1,2}$, $a_{-3,2}$ をとると二三の計算の結果 A_r, A_φ, 及び A_z の才一次補正項 δA は次の様になる。

---

* Jahnke u. Emde : Funktionentafeln, zweite Aufl. B.G. Teubner (1933) S.282～284

Watson : Theory of Bessel Functions, Cambridge, University Press (1922) Chap. XX

本文附録：鞍点法による $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, $I_\nu'(z)$, 及び $K_\nu'(z)$ の漸近表示（附録3.2）等々参照

$$\left(\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}\right)^{-1}\left.\begin{matrix}\Delta^{(1)}A_r\\ \Delta^{(1)}A_\varphi\end{matrix}\right\} \cong \frac{b}{2h'}\Big[\{I_2(\alpha')K_1(\rho)\mp I_0(\alpha')K_1(\rho)\}\begin{matrix}\sin\mu\\ \cos\mu\end{matrix} +$$
$$\mp\{I_0(\alpha')K_1(\rho)\mp I_2(\alpha')K_3(\rho)\}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\mu-2\varphi) +$$
$$\mp 3\{I_2(3\alpha')K_1(3\rho)\mp I_4(3\alpha')K_3(3\rho)\}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3\mu-2\varphi)\Big]$$

$$\left(\frac{2\mu_0 I}{\pi}\right)^{-1}\Delta^{(1)}A_z \cong \frac{b}{2h'}\Big[I_1(\alpha')K_0(\rho)\cos\mu +$$
$$+ I_1(\alpha')K_2(\rho)\cos(\mu-2\varphi) - 3I_3(3\alpha')K_2(3\rho)\cos(3\mu-2\varphi)\Big]$$

ここに $\alpha'=a/h'$, $\rho=r/h'$, $\mu=\alpha+z/h'$ である。
上に見る様に補正項はbは勿論として、a, h'及びαにも関係することが分る。これらを与へればI, Kの数表を用ひて、$\Delta^{(1)}A$は容易に算定し得る。

第四節　スカラポテンシャルによる記述

前節に於てはベクトルポテンシャルの三成分を用ひて遮蔽体の存在によつて、それが如何なる影響を受けるかに就いて考へた。電流を含まない領域については、而し$\nabla\times\mathbf{H}=0$であつて従つて磁界$\mathbf{H}$はあるスカラーポテンシャルΦ^*の勾配として表はし得る。事実、前節(1)の三つのベクトルポテンシャルの成分の代りに$\nabla^2\Phi^*=0$なる関係を満足する一つのスカラーポテンシャルΦ^*を以てする事が出来る。始源ベクトルポテンシャルの(p, m)分値なる第三節(1)を再び下に書く。$\mu=\alpha+z/h'$として

$$A_r^0 = \{\alpha_1 K_{m-1}(rp/h') - \alpha_{-1} K_{m+1}(rp/h')\}\sin(p\mu+m\varphi)$$
$$A_\varphi^0 = \{\alpha_1 K_{m-1}(rp/h') + \alpha_{-1} K_{m+1}(rp/h')\}\cos(p\mu+m\varphi)$$
及び
$$A_z^0 = \{-\alpha_1 K_m(rp/h') + \alpha_{-1} K_m(rp/h')\}\cos(p\mu+m\varphi)$$

これより$\nabla\times\mathbf{A}$の演算によつて磁気誘導$\mathbf{B}$は次の様になる。

$$\mu_0 H_r = -(\alpha_1+\alpha_{-1})\frac{\partial}{\partial r}K_m(rp/h')\cdot\sin(p\mu+m\varphi)$$
$$\mu_0 H_\varphi = -(\alpha_1+\alpha_{-1})\frac{m}{r}\cdot K_m(rp/h')\cos(p\mu+m\varphi)$$
及び
$$\mu_0 H_z = -(\alpha_1+\alpha_{-1})\frac{p}{h'}K_m(rp/h')\cos(p\mu+m\varphi)$$

これは一つのスカラーポテンシャル

$$\Phi_0^* = \alpha\cdot K_m(rp/h')\sin(p\mu+m\varphi)$$

の勾配であることが分る。但しここにαは次の如くである。

$$\alpha = \alpha_1+\alpha_{-1} = (-)^{p-1}\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}I_{m+p}(bp/h')\left\{I_{p+1}\left(\frac{ap}{h'}\right) + I_{p-1}\left(\frac{ap}{h'}\right)\right\}$$
$$= (-)^{p-1}\frac{2\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)I_p'\left(\frac{ap}{h'}\right)$$

故　第8.2図のI, IIの各領域で$\nabla^2\Phi^*=0$を満足するポテンシャル

を適当に選んで綜合スカラーポテンシャルは次の様になる。

領域Ⅰでは

$$\Phi_{I}^{*}=\Phi_0^{*}+\Phi_i^{*}=\Phi_0^{*}+C_i I_m\left(\frac{rp}{R'}\right)\sin(p\mu+m\varphi)$$

$$a+b<r<c$$

領域Ⅱでは

$$\Phi_{II}^{*}=\Phi_0^{*}+\Phi_a^{*}=\Phi_0^{*}+C_a' K_m\left(\frac{rp}{R'}\right)\sin(p\mu+m\varphi)$$

$$r>c$$

磁界はこれらの綜合スカラー磁気ポテンシャルの勾配として求められる。

次の遮蔽体中の渦流Kは一つの流れの函数Ψ^*を以て

$$K_\varphi=\frac{\partial\Psi^*}{\partial z},\qquad K_z=\frac{\partial\Psi^*}{\partial\varphi}$$

と書かれる。cは前述の如く遮蔽殻の半径である。Ψ^*はφ及びzのみの函数で

$$\Psi^*=D\cdot\sin(p\mu+m\varphi)$$

と書いてよい。遮蔽薄板上の境界条件としてはB_rの連続性より

$$\frac{\partial\Phi_i^*}{\partial r}=\frac{\partial\Phi_a^*}{\partial r}$$

なる関係が得られる。又磁界の切線分値の薄板上での飛躍，即ち $H_{\varphi a}-H_{\varphi i}=K_z$ 及び $H_{za}-H_{zi}=-K_\varphi$

より $\Phi_a^*-\Phi_i^*=\Psi^*$

が得られる。又 $\mathbf{K}=-\sigma d\,\partial A/\partial t=i\omega\sigma d\mathbf{A}$ より

$[\nabla\times\mathbf{K}]_r=i\omega\mu\sigma\cdot d\cdot H_r$ が得られるがこれより第三の条件式として

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial z^2}=\frac{i}{\delta}\frac{\partial\Phi^*}{\partial r}$$

を得る。ここにdは薄板の厚さであり $\delta^{-1}=\omega\mu\sigma d$ である。

上の三つの条件より定数 C_i, C_a 及び D の間の関係として

$$I_m'(\gamma p)\cdot C_i-K_m'(\gamma p)\cdot C_a=0$$

$$I_m'(\gamma p)\cdot C_i-K_m(\gamma p)\,C_a+D=0$$

$$\frac{i}{\delta}\frac{p}{R'}K_m'(\gamma p)C_a+\left(\frac{m^2}{c^2}+\frac{p^2}{R'^2}\right)D=-\frac{i}{\delta}\frac{p}{R'}K_m'(\gamma p)\alpha$$

を得る。但しここに $\gamma=c/R'$ である。これらを解いて三定数を定める事が出来る。即ち

$$C_i=\gamma p\cdot K_m'(\gamma p)\,D,\qquad C_a=\gamma p\,I_m'(\gamma p)\cdot D$$

$$D=(-)^p\frac{i}{\delta}\frac{p}{R'}\cdot\frac{2\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{R'}I_{m+p}\left(\frac{bp}{R'}\right)K_m'(\gamma p)I_p'\left(\frac{ap}{R'}\right)\Big/\left\{\left(\frac{m^2}{c^2}+\frac{p^2}{R'^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{i}{\delta}\frac{p}{R'}\frac{cp}{R'}K_m'(\gamma p)I_m'(\gamma p)\right\}$$

上の特別な場合としてラセン導体が遮蔽体の中心にある場合にはDは次の様になる。

-7.

$$D=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{a}{m}\cdot\frac{2\mu_0 I}{\pi}\cdot K_m'(\gamma m)\,I_m'\left(\frac{am}{h'}\right)\Big/\left\{\left(\frac{c^2+h'^2}{c^2}\right)+\frac{1}{\sigma}\cdot c\cdot K_m'(\gamma m)\;I_m'(\gamma m)\right\}$$

これはBuchholzの論文の式と一致する。*

上のDの表現に於て遮蔽体の導電率が無限に大きくなるとDは次の様になる。 $D=-\dfrac{1}{\gamma p\;I_m'(\gamma p)}\cdot\alpha.$

これを Φ^* の式に代入すると Φ^*_{II} は勿論零であるが Φ^*_I は次の様になる。

$$\Phi^*_I=\alpha\cdot\left\{K_m\left(\frac{\gamma p}{h'}\right)-\frac{K_m'(\gamma p)}{I_m'(\gamma p)}I_m\left(\frac{\gamma p}{h'}\right)\right\}\sin(p\mu+m\varphi)$$

ここに $\alpha=(-)^{p-1}\dfrac{2\mu_0 I}{\pi}\dfrac{a}{h'}I_{m+p}\left(\dfrac{bp}{h'}\right)I_p'\left(\dfrac{ap}{h'}\right)$

これより磁界は次の演算によつて求められる。

$$H_r=\frac{\partial\Phi_I^*}{\partial r},\quad H_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_I^*}{\partial\varphi},\quad H_z=\frac{\partial\Phi_I^*}{\partial z}$$

完全導電性の遮蔽円柱の表面即ち $r=c$ に於ては H_r は当然0になる。一方そこに於ける H_φ 及び H_z は遮蔽体表面を流れる渦流と次の関係で結ばれる。

$$K_z=-H_\varphi=-\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\Phi_I^*}{\partial\varphi}\right]_{r=c},\quad K_\varphi=H_z=\left[\frac{\partial\Phi_I^*}{\partial z}\right]_{r=c}$$

$r=c$ なる表面に於ける渦流線の方程式は

$$\frac{dz}{K_z}=\frac{c\,d\varphi}{K_\varphi}.$$

であつてこれと上の K_φ, K_z の値とから結局次式が得られる。

即ち

$$\left[\Phi_I^*\right]_{r=c}=(-)^{p-1}\frac{2\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)\cdot I_p'\left(\frac{ap}{h'}\right)}{p\,I_m'(\gamma p)}\sin\left\{p\left(\alpha+\frac{z}{h'}\right)+m\varphi\right\}$$

$$=const.$$

渦電流は次の如くである。但し m, p についての求和に関しては附録を参照されたい。

$$K_\varphi=(-)^{p-1}\frac{2\mu_0 I}{\pi h'}\frac{a}{c}I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)\cdot\frac{I_p'\left(\frac{ap}{h'}\right)}{I_m'(\gamma p)}\cos(p\mu+m\varphi)$$

$$K_z=(-)^{p}\frac{2\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{m}{c}\cdot\frac{a}{c}\cdot I_{m+p}\left(\frac{bp}{h'}\right)\frac{I_p'\left(\frac{ap}{h'}\right)}{p\,I_m'(\gamma p)}\cdot\cos(p\mu+m\varphi)$$

最後にラセン回路が円柱数の中心にある場合は上式で $b\to 0$ とすると $p=-m$ のもののみが残り次の如くなる。

$$K_\varphi=(-)^{p-1}\frac{2\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{ch'}\cdot\frac{I_p'(ap/h')}{I_p'(\gamma p)}\cos p(\mu-\varphi)$$

$$K_z=(-)^{p-1}\frac{2\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{c^2}\cdot\frac{I_p'(ap/h')}{I_p'(\gamma p)}\cos p(\mu-\varphi)$$

ここで p についての求和は $p=1,3,5,\cdots$ である。

---

* H. Buchholz: ENT, 14, a, a, 0 (25) and (26. a)

第五節. 無限に長く平行した二組のラセン回路間の相互インダクタンス。

中心に対して対称なる二本のラセンよりなる回路が2組, b なる軸間距離を以て平行してゐるとする。回路は両方とも無限に長いものとし各回路のラセンの半径を夫々 a_1 及び a_2 とし、ピッチを夫々 h_1 及び h_2 とする。座標の $z=0$ に於ける各回路の二本のラセン導体の初位相を夫々 $(\alpha_1, \alpha_1+\pi)$, 及び $(\alpha_2, \alpha_2+\pi)$ なりとする。

各回路の電流を I_1 及び I_2 としそれによるベクトルポテンシャルを A_1 及び A_2 とすると、両回路の相互エネルギーはこれを $W_{12}^{(m)}$ とすると

$$W_{12}^{(m)} = \frac{1}{2}\int A_1 \cdot I_2 \cdot ds_2$$

である。ds_2 は第二回路の回路素片である。第二回路の上に於ける A_1 の値は第二節(6)の表示に於て a を a_1 とし μ を μ_1 とし、r を a_2 とし φ を $\alpha_2 + z/h''$ とすれば得られる。但し $\mu_1 = \alpha_1 + z/h'$ である。h', h'' は夫々第一回路, 第二回路のピッチである。又 $I_2 \cdot ds_2$ の各分値は次の如くである。

$$I_{x_2} ds_2 = I_2 \cdot d\xi_2 = -I_2 \sin(\alpha_2 + z/h'') \cdot a_2/h'' \, dz$$
$$= -I_2 \sin\mu_2 \cdot a_2/h'' \cdot dz$$

$$I_{y_2} ds_2 = I_2 \cdot dy_2 = I_2 \cos(\alpha_2 + z/h'') \, a_2/h'' \cdot dz$$
$$= I_2 \cos\mu_2 \cdot a_2/h'' \, dz$$

$$I_{z_2} \cdot ds_2 = I_2 dz$$

これを用ひ $A_1 \cdot I_2 ds_2$ を第二回路の一つのラセン(初位相 α_2 のもの)について求めると dz なる係数は別として

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{a_1}{h'}\frac{a_2}{h''}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p:\mathrm{odd}}^{\pm\infty}\sin(p\mu_1+m\mu_2)\sin\mu_2\int_0^\infty\{J_{m+p-1}(b\lambda)J_{p-1}(a_1\lambda)$$
$$-J_{m+p+1}(b\lambda)J_{p+1}(a_1\lambda)\}J_m(a_2\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$
$$+\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{a_1}{h'}\frac{a_2}{h''}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=\mathrm{odd}}\cos(p\mu_1+m\mu_2)\cos\mu_2\int_0^\infty\{J_{m+p-1}(b\lambda)J_{p-1}(a_1\lambda)$$
$$+J_{m+p+1}(b\lambda)J_{p+1}(a\lambda)\}J_m(a_2\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$
$$-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\sum_{p=\mathrm{odd}}^{\pm\infty}\cos(p\mu_1+m\mu_2)\int_0 J_{m+p}(b\lambda)J_p(a_1\lambda)J_m(a_2\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

となる。これに更にもう一つのラセン導体(初位相 $\alpha_2+\pi$ で電流 I_2 の方向は寄と逆向きのもの)による寄与を加へると

$$A_1 I_2 \cdot ds_2 = \frac{2\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\frac{a_1 a_2}{h' h''}\sum_{n=\mathrm{odd}}^{\infty}\sum_{p=\mathrm{odd}}^{\pm\infty}\cos(p\mu+n\mu_2)\int_0^\infty J_{n+p}(b\lambda)\times$$
$$\times\{J_{p+1}(a_1\lambda)J_{n-1}(a_2\lambda)+J_{p-1}(a_1\lambda)J_{n+1}(a_2\lambda)\}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}dz -$$

-8、 $$-\frac{4\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\sum_{m=odd}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\cos(p\mu_1+m\mu_2)\int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda)J_p(a_1\lambda)J_m(a_2\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}dz$$

となる。zについて第二回路全体にわたつて積分するのであるが上式より

$$\mathbf{A}_i\mathbf{I}_2\,ds_2 = -\frac{4\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\sum_{m=odd}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\chi(p,m)\cos(p\mu_1+m\mu_2)dz$$

$$+\frac{2\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\frac{a_1a_2}{h'h''}\sum_{m=odd}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\{\chi(p+1,m-1)+\chi(p-1,m+1)\}\cos(p\mu_1+m\mu_2)dz$$

であるからこれを積分すると下の様になる。

$$\frac{1}{2}\int_{\mathrm{II}}\mathbf{A}_i\mathbf{I}_2 ds_2 = -\frac{2\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\sum_{m=odd}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\left(\frac{p}{h'}+\frac{m}{h''}\right)^{-1}\chi(p,m)\sin(p\mu_1+m\mu_2)$$

$$+\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\cdot\frac{a_1a_2}{h'h''}\sum_{m=odd}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\left(\frac{p}{h'}+\frac{m}{h''}\right)^{-1}\{\chi(p+1,m-1)+\chi(p-1,m+1)\}\sin(p\mu_1+m\mu_2)$$

但しここに

$$\chi(p,m) = \int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda)J_p(a_1\lambda)J_m(a_2\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

$$\chi(p\mp1,m\pm1) = \int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda)J_{p\mp1}(a_1\lambda)J_{m\pm1}(a_2\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

及び $\mu_1=\alpha_1+z/h'$, $\mu_2=\alpha_2+z/h''$, $h'=h_1/(2\pi)$

$h''=h_2/(2\pi)$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\quad 1)$$

之が二回路の相互エネルギー — $W_{12}^{(m)}$である。相互インダクタンスの計算にはこれの外に更に$\frac{1}{2}\int_{\mathrm{I}}\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{I}_1 ds_1$が必要であるが前述せる所と殆んど同様にして求められる。

上式より相互エネルギーは定常項と共に軸方向に沿つて$(p/h_1+m/h_2)$なる波長で正弦的に変化する項とからなることが認められる。

尚この問題に関しては小林氏による詳細なる計算*がある。氏は二組のラセン回路即ち4本のラセン導体についてNeumannの相互誘導に関する積分公式より出発して上記の1)の結果を得た。尤も氏のものは$z=0$より$z\Rightarrow\infty$に亘る半無限の平行ラセン回路の取扱いのため1)の表現の他に更に

$$\int_0^\infty J_{m+n}(b\lambda)J_n(a_1\lambda)\cdot J_m(a_2\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

なる形の積分が入つて来るがこれは上述のχー積分の様に簡潔な形では表現し得ぬ様で氏はこれの算定に相当努力しておられる。

---

* 小林夏雄：軸対称な二螺旋を往復線とする二組の回路間の相互誘導係数(電磁結合) 電試研報 第427号 (1944) 80頁

扨．(1)に於て $b \to 0$ とすると共に両回路の構造を全く同じであるとする。即ち $\alpha_1=\alpha_2$, $h'=h''$ であるとする。然る時は(1)の二重和の内で p に関する和は $p=-m$ のもののみが寄与をする。そして m についての和は ~~1, 3, 5~~ $1, 3, 5 \cdots$ ……である。又*

$$\chi(-m,m)=(-)^m\int_0^\infty J_m(a_1\lambda)J_m(a_2\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(m/h')^2}=(-)^m I_m\left(\frac{a_1 m}{h'}\right)K_m\left(\frac{a_2 m}{h'}\right)$$

$$a_2>a_1>0$$

であるから、これを用ひると(1)は次の様になる。

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\sum_{m=odd}^{\infty}\left(\frac{m}{h''}-\frac{m}{h'}\right)^{-1}\left[2I_m\left(\frac{a_1 m}{h'}\right)K_m\left(\frac{a_2 m}{h'}\right)+\frac{a_1 a_2}{h' h''}\left\{I_{m-1}\left(\frac{a_1 m}{h'}\right)K_{m-1}\left(\frac{a_2 m}{h'}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+I_{m+1}\left(\frac{a_1 m}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{a_2 m}{h'}\right)\right\}\right]\sin\left\{z\left(\frac{m}{h''}-\frac{m}{h'}\right)\right\}$$

ここで $h' \to h''$, $a_1 \to a_2$ とし又 $I_1=I_2$ とすると上式は次の様になる**

$$-\frac{2\mu_0 I_1^2}{\pi}\frac{a^2}{h'^2}\sum_{m=odd}^{\infty}I_m'\left(\frac{am}{h'}\right)K_m'\left(\frac{am}{h'}\right)\cdot z$$

そして之はラセン回路の自己エネルギー $\frac{1}{2}LI^2$ に外ならぬ故．外部自己インダクタンス L_1 は次の様になる。(単位軸長当り)。

$$L_1=-\frac{4\mu_0}{\pi}\cdot\frac{a^2}{h'^2}\cdot\sum_{m=odd}^{\infty}I_m'\left(\frac{am}{h'}\right)\cdot K_m'\left(\frac{am}{h'}\right)\qquad\cdots\cdots(2)$$

同じ結果を Buchholz† はラセン回路をつらぬく磁束を計算することにより求めてゐる。

第八章に対する附録

8.1‡ ラセン回路の電流のベクトルポテンシャル。第8.4図に示す様なラセン回路を考へる。これは半径 a，ピッチ h なるラセンとその中心軸にある直線状の帰路導体とから成つてゐる。 第8.4図

ラセンの上の任意の点 Q の直交座標分 ξ, η 及び ζ と円柱座標分 a, ψ 及び ζ の間の関係は

$\xi=a\cos\psi$, $\eta=a\sin\psi$, $\psi-\alpha=2\pi\zeta/h=\zeta/h'$

で与へられる。ラセン回路による任意の点 $P(r,\varphi,z)$ のベクトルポテンシャルは $A=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}\,dv}{D}$

---

* Watson: Bessel Functions (1922) P.429 公式(5)

** $2I_m(mx)K_m(my)+xy\{I_{m-1}(mx)K_{m-1}(my)+I_{m+1}(mx)K_{m+1}(my)\}$
$=-2xy\,I_m'(mx)K_m'(my)$ を用ひる。

† H. Buchholz: ENT, 14, S. 273 公式(5) 1937

‡ 節(項)の分類に用ひた上記の decimal は本書の本文に於けるその数の節(項)に対応する。以下全様である．

8-9 で与へられる。j は源点Qの電流密度であり dv はその微小容積である。又Dは考察点Pと源点Qとの距離であり、積分は源電流によって占められる全容積について行ふ。ここでは線状電流源と考へて、電流はその線條の小さい断面に一様に分布してるものとし上式の代りに次の様に書く。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I\,ds}{D}$$

ここで I は線条の切口を通って流れる全電流[A]である。そして積分は線条のContourに沿ふ線積分である。ds はそのContourの微小部分である。ベクトルの直角三成分を考へ且 $I_x = I\cdot d\xi/ds$ であるから $I_x ds = I\cdot d\xi = -I\cdot a\sin\psi\, d\psi = -I\cdot(a/h')\sin(\alpha+\zeta/h')\,d\zeta$. となる。同様にして $I_y\, ds = I\cdot(a/h')\cdot\cos(\alpha+\zeta/h')\,d\zeta$ 及び $I_z\, ds = I\cdot d\zeta$ が得られるから結局三成分は次の様になる。

$$A_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{h'}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\alpha+\frac{\zeta}{h'}\right)\frac{d\zeta}{D}$$

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{h'}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\alpha+\frac{\zeta}{h'}\right)\frac{d\zeta}{D}$$

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{D_0}\right)d\zeta$$

ここに D_0 は中心軸の帰路導体上の源点 Q_0 と考察点 P との距離である。

円柱座標分 A_r, A_φ は A_x と A_y より次の様に与へられる。

$$A_r = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi\,; \qquad A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$$

そして次の様になる。

$$A_r = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{a}{h'}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\alpha+\frac{\zeta}{h'}-\varphi\right)\frac{d\zeta}{D}$$

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{h'}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\alpha+\frac{\zeta}{h'}-\varphi\right)\frac{d\zeta}{D}$$

次に逆距離 D^{-1} は G.N. Watson: Theory of Bessel Functions (1922) P.384 及び P.358 を用ひて容易に次の如く表はし得る。即ち源点 $Q(a, \psi, \zeta)$ と考察点 $P(r, \varphi, z)$ の間の距離 D は

$$D^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\left(\alpha+\frac{\zeta}{h'}-\varphi\right) + (z-\zeta)^2$$

で

$$\frac{1}{D} = \int_0^\infty e^{-|z-\zeta|\lambda} J_0\left[\lambda\sqrt{\left\{a^2+r^2-2ar\cos\left(\alpha+\frac{\zeta}{h'}-\varphi\right)\right\}}\right]d\lambda$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\cos m\left(\alpha-\varphi+\frac{\zeta}{h'}\right)\cdot\int_0^\infty e^{-|z-\zeta|\lambda}J_m(a\lambda)J_m(r\lambda)\,d\lambda$$

ここに $\epsilon_0 \equiv 1$, $\epsilon_m = 2$ ($m=1, 2, \cdots$) である。

1.1 積分の評価　　下記の積分

$$\chi = \int_0^\infty \frac{J_\mu(bx)J_\lambda(ax)J_\nu(ax)}{x^2+k^2}dx$$

を求めるために次の積分* を取って考へる。

$$(-)^{\frac{\rho+\mu}{2}}\int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}J_\mu(bx)J_\nu(cx)J_\nu(ax)}{x^2+k^2}dx = -I_\mu(bk)I_\nu(ck)K_\nu(ak)\cdot k^{\rho-1}$$

ここに $\rho+\mu=$ 偶数，$a-c>b$ なりとする。
上の積分の両辺に c^ν を乗じて c について m 回微分すると

$$\frac{d^m}{dc^m}\{c^\nu J_\nu(cx)\} = c^\nu x^m J_{\nu-m}(cx)$$

$$\frac{d^m}{dc^m}\{c^\nu J_\nu(ck)\} = c^\nu k^m I_{\nu-m}(ck)$$

であるから

$$(-)^{\frac{\rho+\mu}{2}}\int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}x^m J_\mu(bx)J_{\nu-m}(cx)J_\nu(ax)}{x^2+k^2}dx = -I_\mu(bk)I_{\nu-m}(ck)K_\nu(ak)k^{\rho-2}\cdot k^m$$

となる。ここで $\nu-m=\lambda$ と置き，且つ $\rho-2+\nu-\lambda=0$ になる様に ρ を定めると

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(bx)J_\lambda(cx)J_\nu(ax)x\cdot dx}{x^2+k^2} = (-)^{\frac{\mu+\lambda-\nu}{2}} I_\mu(bk)I_\lambda(ck)K_\nu(ak) \quad \cdots\cdots(1)$$

となる。但し $\mu+\lambda-\nu=$ 偶数，$a>b+c$ とする。
又一般に

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(bx)J_\lambda(cx)J_\nu(ax)x^{\rho-1+\nu-\lambda}}{x^2+k^2}dx$$
$$= (-)^{\frac{\rho+\mu+2}{2}} I_\mu(bk)I_\lambda(ck)K_\nu(ak)\cdot k^{\rho-2+\nu-\lambda}$$

であるから $\rho-1+\nu-\lambda=\tau$ とおけば次の関係も得られる。

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(bx)J_\lambda(cx)J_\nu(ax)\cdot x^\tau dx}{x^2+k^2} = (-)^{\frac{\tau+3+\lambda+\mu-\nu}{2}} I_\mu(bk)I_\lambda(ck)K_\nu(ak)\cdot k^{\tau-1}$$

但し $\mu+\lambda+\tau-\nu+1=$ 偶数，$a>b+c$，$a>0$，$b>0$，$c>0$
$R(k)>0$ $\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

2.1　A_r について考へる。2.1 の (1) を次の様に書換へる。

$$-A_r = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\sin p\mu\cdot\int_0^\infty J_p(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)J_1(r\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$
$$+\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{a}{h'}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\sin(p\mu-\varphi)\int_0^\infty J_{p-1}(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)J_0(r\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$
$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{a}{h'}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\sin(p\mu+\varphi)\int_0^\infty J_{p+1}(b\lambda)J_{p+1}(a\lambda)J_0(r\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$
$$+\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\sin(p\mu+\varphi)\int_0^\infty J_{p+1}(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)J_2(r\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}+$$

---

* G.N. Watson: Bessel Functions (1922) p.430 (7)

8-10
$$+\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\sin(p\mu+n\varphi)\int_0^{\infty}J_{n+p}(b\lambda)\left\{J_{p-1}(a\lambda)J_{n+1}(r\lambda)-J_{p+1}(a\lambda)J_{n-1}(r\lambda)\right\}\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

これは2.1の(1)のmについての和を少し並べ換へたもので、第一項は(1)式のA_rの$m=1$の場合の第一の積分を示し、第二項、第三項は$m=0$の場合の第一、第二の積分を示す。第四項は$m=2$の場合の第一の積分を示す。最後の第五項は$m=1$の場合及び$m=2$の場合の第二の積分と$m=3$以下の項をまとめたもので2.1の(1)のmについての和と新らしい表示のnについての和の間の関係は下の如くである。

第一積分	$m=3$,	4,	5	6	……
第二積分	$m=1$	2	3	4	……
+	$n=2$	3	4	5	……

扨上のA_rの表示で第二、第三、第四項は一つにまとめる事が出来る。それは第二項をみるとpについての和は負の奇数から正の奇数全体に亘ってゐるから第二項の式中のpを$-p$でおき換へても値は変らない。そしてpを$-p$で置換へた表現は第三項と全く同じであるから結局第二、第三項をまとめて

$$-\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\sin(p\mu+\varphi)\int_0^{\infty}J_{p+1}(b\lambda)J_{p+1}(a\lambda)J_0(r\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

となりこれと第四項と合せると、第五項で$n=1$と置いた場合の表示と同じになる。結局上式は

$$-A_r=\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\sin p\mu\int_0^{\infty}J_p(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)J_1(\lambda r)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$
$$+\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\sin(p\mu+m\varphi)\int_0^{\infty}J_{m+p}(b\lambda)\left\{J_{p-1}(a\lambda)J_{m+1}(r\lambda)-J_{p+1}(a\lambda)J_{m-1}(r\lambda)\right\}\times\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

となる。

同様にA_φは前式2.1(2)の$m=1$の第一積分が

$$\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{m=odd}^{\pm\infty}\cos p\mu\int_0^{\infty}J_p(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)J_1(r\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

であり、$m=2$の第一積分、$m=0$の第一及び第二積分の三者をまとめたものが

$$\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\cos(p\mu+\varphi)\int_0^{\infty}J_{p+1}(b\lambda)\left\{J_{p-1}(a\lambda)J_2(r\lambda)+J_{p+1}(a\lambda)J_0(r\lambda)\right\}\times\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

であり残余の項を前のA_rの場合に於けると同様に適当に取まとめたものが

$$\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\cos(p\mu+n\varphi)\int_0^{\infty}J_{n+p}(b\lambda)\left\{J_{p-1}(a\lambda)J_{n+1}(r\lambda)+J_{p+1}(a\lambda)J_{n-1}(r\lambda)\right\}\frac{\lambda\,d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

である。そして上の三つの表現の中で才二のものは才三のものの $n=1$ の場合に外ならぬが故に結局三者を一まとめにして次の如く表現し得る。即ち

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\cos p\mu\int_0^\infty J_p(b\lambda)J_{p-1}(a\lambda)J_1(r\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$
$$+\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=odd}^{\pm\infty}\cos(p\mu+n\varphi)\int_0^\infty J_{n+p}(b\lambda)\times$$
$$\times\left\{J_{p-1}(a\lambda)J_{n+1}(r\lambda)+J_{p+1}(a\lambda)J_{n-1}(r\lambda)\right\}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

3.1. p が負の奇数値の場合の $A^0_{m,p}$

$b\to 0$ とした場合のベクトルポテンシャルに寄与するのは $p=-1,-3,-5,\cdots\cdots$ に関する分値であつて、今 p の負の奇数値に対する部分のみを取り出して A_r, A_φ 及び A_z を下に示す。

$$\left.\begin{matrix}A_r\\A_\varphi\end{matrix}\right\} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a}{h'}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=odd}^{-\infty}\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(p\mu+m\varphi)\int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda)\times$$
$$\times\left\{J_{p+1}(a\lambda)J_{m-1}(r\lambda)\mp J_{p-1}(a\lambda)J_{m+1}(r\lambda)\right\}\times$$
$$\times\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{\pi}\sum_{p=odd}^{-\infty}\cos(p\mu+m\varphi)\int_0^\infty J_{m+p}(b\lambda)J_p(a\lambda)J_m(r\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

今 $p=-p'$ ($p'>0$ とする) とし上のベクトルポテンシャルの m, p' 成分を下の様に書く。

$$\left.\begin{matrix}A^0_{r,m,p'}\\A^0_{\varphi,m,p'}\end{matrix}\right\} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(p'\mu-m\varphi)\int_0^\infty J_{m-p'}(b\lambda)\times$$
$$\times\left\{J_{p'+1}(a\lambda)J_{m+1}(r\lambda)\mp J_{p'-1}(a\lambda)J_{m-1}(r\lambda)\right\}\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

$$A^0_{z,m,p'} = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\cdot\cos(p'\mu-m\varphi)\int_0^\infty J_{m-p'}(b\lambda)J_{p'}(a\lambda)J_m(r\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2+(p/h')^2}$$

ここで $m=1,2,3,\cdots\cdots,\quad p'=1,3,5,\cdots$

である。積分を遂行すると(附録1.1 積分の評価の2項参照)下の如くなる。但し $m\geqq p'$ とする。

$$\left.\begin{matrix}A^0_{r,m,p'}\\A^0_{\varphi,m,p'}\end{matrix}\right\} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{a}{h'}\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(p'\mu-m\varphi)\cdot I_{m-p'}\left(\frac{bp'}{h'}\right)\times$$
$$\times\left\{I_{p'+1}\left(\frac{ap'}{h'}\right)K_{m+1}\left(\frac{rp'}{h'}\right)\mp I_{p'-1}\left(\frac{ap'}{h'}\right)K_{m-1}\left(\frac{rp'}{h'}\right)\right\}$$

$$A^0_{z,m,p'} = \frac{2\mu_0 I}{\pi}\cdot\cos(p'\mu-m\varphi)\cdot I_{m-p'}\left(\frac{bp'}{h'}\right)I_{p'}\left(\frac{ap'}{h'}\right)K_m\left(\frac{rp'}{h'}\right)$$

もし $m<p'$ ならば更に右辺全体に $(-)^{p'-m}$ が乗ぜられる。

結局 p が負の場合には本文の才三節(1)の中の三角函数及び変形ベッセル函数 I 及び K の次数に於て p の符号を変へさへすればよい事が分る。変数中の p は符号を変へない。そして $p' > m$ の時には更に全体に $(-)^{p'-m}$ が乗ぜられることは今上に述べた通りである。
8-11.

3.2 鞍点法による $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, $I'_\nu(z)$ 及び $K'_\nu(z)$ の漸近表示

純虚数変数をもつベッセル函数 $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ 及びそれらの微分は次の様な積分表示をもつ。*

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} e^{z\cosh w - \nu w}\, dw$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\cosh w - \nu w}\, dw$$

才85図

$$I'_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} e^{z\cosh w - w\nu}\cosh w\, dw$$

$$K'_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\cosh w - \nu w}\cosh w\, dw$$

上式は何れも

$$F(x) = \int_L e^{-x g(w)}\phi(w)\, dw \qquad \cdots\cdots(1)$$

なる形の積分である。今 x は正の非常に大きな実数とする。積分は収斂すべきことは勿論であるが、今 Contour L の上で $-xg(w)$ の実部が出来るだけ小さい最大値を有し、その路の両側で出来るだけ急激に減少する様な路 L が選び得るならば、L 上の極めて小部分に於ける積分の寄与が全積分の殆んど大部分を占める様にすることも出来る。これが Debye によって用いられた鞍点法の思想である。

$g(w)$ の実数部が最大変化をする様な方向は $\nabla\{R g(w)\}$ の方向であってその方程式は $w = u + iv$ として

$$\frac{du}{-\frac{\partial}{\partial u}R\{g(w)\}} = \frac{dv}{-\frac{\partial}{\partial v}R\{g(w)\}}$$

で与へられ、これとコーシー・リーマンの関係式とより次式が得ら

---

* G. N. Watson : Theory of Bessel Functions, Cambridge (1922) P. 181 and P. 182.

** ―――― : loc. cit. PP. 235－270, R. Courant und D. Hilbert ; Methoden der Mathematischen Physik, I. Julius Springer. Berlin (1924) S. 435－440.
F. Emde u. R. Rühle : Jahresber. Deutsche Math. Ver. 45 (1934)
F. Emde : Ztschr. f. angew. Math. und Mech., 17, Heft 6, (1937) S. 324－340 S. 51

れる。即ち

$$I\{g(w)\} = \text{const} \qquad \cdots\cdots (2)$$

であつて流れの函数が一定なる方向が最急傾斜なることを示してゐる。$R\{g(w)\}$が極限値をとる点では L に沿つてとつた微分は 0 であり、又 $I\{g(w)\}$は L に沿つて一定であるからその微分も 0 である。従つてその点(鞍点と云ふ) w_0 に於ては

$$\{dg(w)/dw\} = 0 \qquad \cdots\cdots (3)$$

である。

故 $s = g(w) - g(w_0)$ なる変数 s を考へるとこれは(2)により虚部をもたぬから正の実数である。又 $s(w_0)=0$, $s'(w_0) = g'(w_0) = 0$ である。故に s は次の様になる。

$$s = g(w) - g(w_0) = (w-w_0)^2\{c_0 + c_1(w-w_0) + c_2(w-w_0)^2 + \cdots\cdots\} = c_0\varpi^2\left(1 + \frac{c_1}{c_0}\varpi + \frac{c_1}{c_0}\varpi^2 + \cdots\cdots\right) \qquad \cdots\cdots (4)$$

但し $\varpi = w - w_0$ とする。

(1)を s に関する積分に直すと次の様な正の実軸上の積分になる。

$$F(x) = e^{-g(w_0)x}\int e^{-xs}\phi(w)\frac{dw}{ds}ds, \quad s>0 \qquad \cdots\cdots (5)$$

ここで(4)を考慮して

$$\left.\begin{aligned} \phi(w_1)\frac{dw_1}{ds} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\sqrt{s}}s^{\frac{n}{2}} \\ \phi(w_2)\frac{dw_2}{ds} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^{n+1}\frac{a_n}{2\sqrt{s}}s^{\frac{n}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (6)$$

とおくと係数 a_n は次の如く与へられる。

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int^{(0+,0+)}\left\{\phi(w)\frac{dw}{ds}\right\}\frac{ds}{s^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2\pi i}\int^{w_0+}\frac{\phi(w)}{s^{\frac{n+1}{2}}}dw \qquad \cdots\cdots (7)$$

かくて(5)は次の(8)の如くなる。

$$F(x) = e^{-g(w_0)x}\left[\int_{L_1}e^{-xs}\phi(w_1)\frac{dw_1}{ds}ds + \int_{L_2}e^{-xs}\phi(w_2)\frac{dw_2}{ds}ds\right] \qquad \cdots\cdots (8)$$

ここに L_1 及び L_2 は路 L の s-平面上に於ける二つの分枝で、これら二分枝は鞍点によつて分離されてゐる。s は勿論 L_1+L_2 の上で実数である。a_n は(4)を用ひて(7)より

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int^{(w_0+)} c_0^{-\frac{n+1}{2}}(w-w_0)^{-(n+1)}\left\{1 + \frac{c_1}{c_0}(w-w_0) + \frac{c_2}{c_0}(w-w_0)^2 + \cdots\cdots\right\}^{-\frac{n+1}{2}} \times \phi(w)\,dw$$

であつて n の夫々の値に対して留数,即ち $(w-w_0)^{-1}$ の係数を求めれば決定出来る。斯くて a_n が定まれば(6)を(5)に代入して s に関する積分を遂行して $F(x)$ が求められる。尚詳細は次の $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ の算定の際に具体的に述べる。

2.

1° 先ず $I_\nu(z)$ について考へよう。z,ν 共に正の実数とし且非常に大きいとす。

$$I_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} e^{z\cosh w-\nu w}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{-zg(w)}\,dw$$

とすると、

$g(w)=\frac{\nu}{z}w-\cosh w$, $g'(w)=\frac{\nu}{z}-\sinh w=0$ として

$\sinh w_0=\nu/z$ である。

又 $s=g(w)-g(w_0)=\sinh w_0\cdot\varpi-\cosh w_0(\cosh\varpi-1)-\sinh w_0\sinh\varpi$

$$=-\frac{\cosh w_0}{2!}\varpi^2\left(1+\frac{1}{3}\mathrm{tgh}\,w_0\cdot\varpi+\frac{1}{12}\varpi^2+\cdots\cdots\right),$$

$$\varpi=w-w_0$$

であるから(4)より

$$c_0=\frac{1}{2!}\cosh w_0,\quad \frac{c_1}{c_0}=\frac{1}{3}\mathrm{tgh}\,w_0,\quad \frac{c_2}{c_0}=\frac{1}{12},\ \cdots\cdots$$

が得られる。かくて s に関する積分に変換して(8)に相当する次式を得る。

$$I_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}e^{-z\cdot g(w_0)}\int_0^\infty e^{-zs}\left(\frac{dw_1}{ds}-\frac{dw_2}{ds}\right)ds$$

ここに $\displaystyle\frac{dw_1}{ds}=\sum_{n=0}^\infty\frac{a_n}{2}s^{\frac{n-1}{2}}$, $\displaystyle\frac{dw_2}{ds}=\sum_{n=0}^\infty(-)^{n+1}\frac{a_n}{2}s^{\frac{n-1}{2}}$

及び

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{\left(1+\frac{c_1}{c_0}\varpi+\frac{c_2}{c_0}\varpi^2+\cdots\cdots\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{(-c_0)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\varpi^{n+1}}\,d\varpi$$

である。かくして

$$I_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}e^{z(\cosh w_0-w_0\sinh w_0)}\sum_{n=0}^\infty a_n\int_0^\infty e^{-zs}s^{n-\frac{1}{2}}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}e^{z(\cosh w_0-w_0\sinh w_0)}\sum_{n=0}^\infty a_{2n}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{z^{n+\frac{1}{2}}}$$

ここに $a_0=\dfrac{1}{\sqrt{-c_0}}=\dfrac{\sqrt{2}}{-i\sqrt{\cosh w_0}}$ *, $\dfrac{a_2}{a_0}=\dfrac{-1}{c_0}\left\{-\dfrac{3}{2}\dfrac{c_2}{c_0}+\dfrac{15}{8}\left(\dfrac{c_1}{c_0}\right)^2\right\}$

等々である。

故に

$$I_\nu(z)=e^{z(\cosh w_0-w_0\sinh w_0)}\frac{1}{\sqrt{2\pi z\cosh w_0}}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{8}\left(1-\frac{5}{3}\mathrm{tgh}^2w_0\right)\frac{1}{z\cosh w_0}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\}$$

但し $\nu=z\sinh w_0$

同様にして

---

* $s\to+0$ に対して $dw_1/ds\cong(a_0/2)(1/\sqrt{s})$ であるから a_0 の偏角は dw_1/ds の $s\to0$ に於ける偏角に等しい。これは第8.5図より明らかな様に $\pi/2$ であるから $\sqrt{-1}$ として $-i$ をとって a_0 の偏角を $\pi/2$ ならしめるのである。

$$K_\nu(z) = \frac{\pi e^{-z(\cosh w_0 - w_0 \sinh w_0)}}{\sqrt{2\pi z \cosh w_0}} \times$$

$$\times\left\{1-\frac{1}{8}\left(1-\frac{5}{3}\mathrm{tgh}^2 w_0\right)\frac{1}{z\cosh w_0}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\} \quad \cdots (10)$$

$$\nu = z\sinh w_0 \ *$$

が得られる。そして上の二つより

$$I_\nu(z)\cdot K_\nu(z) \sim \frac{1}{2z\cosh w_0}\left\{1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$

なる結果を得る。

2° 次に $I_\nu'(z)$ 及び $K_\nu'(z)$ について考へる。

$$I_m'\left(\frac{m}{\sinh t_0}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} e^{-m\left(t-\frac{\cosh t}{\sinh t_0}\right)}\cosh t\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{-mg(t)}\phi(t)\,dt$$

とすれば $\quad g(t) = t - \frac{1}{\sinh t_0}\cosh t, \quad g'(t_0) = 1 - \frac{\sinh t_0}{\sinh t_0} = 0$

$$\phi(t) = \cosh t$$

である。t_0 は鞍点である。

又 $s = g(t) - g(t_0) = t - t_0 - \frac{1}{\sinh t_0}(\cosh t - \cosh t_0)$

$$= (T - \sinh T) - \mathrm{ctgh}\, t_0(\cosh T - 1)$$

$$= -\frac{\mathrm{ctgh}\, t_0}{2!}\cdot T^2\left(1 + \frac{1}{3\,\mathrm{ctgh}\, t_0}T + \frac{1}{12}T^2 + \frac{1}{60\,\mathrm{ctgh}\, t_0}T^3 + \cdots\right)$$

$$= -C_0T^2\left(1+\frac{C_1}{C_0}T+\frac{C_2}{C_0}T^2+\frac{C_3}{C_0}T^3+\cdots\cdots\right).$$

ここに $\quad C_0 = \frac{1}{2}\mathrm{ctgh}\, t_0, \quad \frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{3\,\mathrm{ctgh}\, t_0}, \quad \frac{C_2}{C_0} = \frac{1}{12}, \quad \cdots\cdots$

である。

積分変数を t より s に変換して

$$I_m'\left(\frac{m}{\sinh t_0}\right) = \frac{1}{2\pi i}e^{-mg(t_0)}\int e^{-ms}\phi(t)\frac{dt}{ds}ds$$

となる。積分は実軸上で行はれる。

$$\phi(t_1)\frac{dt_1}{ds} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\sqrt{s}}s^{\frac{n}{2}}, \quad \phi(t_2)\frac{dt_2}{ds} = \sum_{n=0}^{\infty}(-)^{n+1}\frac{a_n}{2\sqrt{s}}s^{\frac{n}{2}}$$

であり

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int^{(t_0+)}\frac{\cosh t\left(1+\frac{C_1}{C_0}T+\frac{C_2}{C_0}T^2+\cdots\cdots\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{(-C_0)^{\frac{n+1}{2}}\ T^{n+1}}dT$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(-C_0)^{\frac{n+1}{2}}}\int^{(0+)}\frac{(\cosh t_0\cosh T + \sinh t_0\sinh T)\left(1+\frac{C_1}{C_0}T+\cdots\right)^{\frac{n+1}{2}}}{T^{n+1}}dT$$

である。かくして

* 便宜上 $1/\sinh w_0 = \mathrm{tg}\,\gamma$ とおくと $\mathrm{ctgh}\, w_0 = 1/\cos\gamma$, $\cosh w_0 = 1/\sin\gamma$, $e^{-w_0} = \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$ となるから $I_\nu(\nu/\sinh w_0)$, $K_\nu(\nu/\sinh w_0)$ を $I_\nu(\nu\,\mathrm{tg}\,\gamma)$, $K_\nu(\nu\,\mathrm{tg}\,\gamma)$ の形に表はす事も出来る。

$$a_0 = \frac{1}{(-C_0)^{1/2}} \cosh t_0 , \quad a_2 = \frac{1}{(-C_0)^{3/2}} \left\{ \frac{\cosh t_0}{2!} - \frac{3}{2} \frac{C_1}{C_0} \sinh t_0 - \frac{3}{2} \frac{C_2}{C_0} \cosh t_0 + \frac{3\cdot 5}{8} \left(\frac{C_1}{C_0} \right)^2 \cosh t_0 \right\}$$

- - - - - - - - - - -

即ち

$$2\pi i \cdot I_m'\left(\frac{m}{\sinh t_0}\right) \sim e^{-mg(t_0)} \int_0^\infty e^{-ms} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2s}\, s^{n-\frac{1}{2}} ds$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m}} e^{-mg(t_0)} \left\{ a_0 + \frac{1}{m} \frac{a_2}{2} + \cdots\cdots \right\}$$

故に

$$I_m'\left(\frac{m}{\sinh t_0}\right) \sim \frac{\cosh t_0}{\sqrt{2\pi m \operatorname{ctgh} t_0}} e^{-m(t_0 - \operatorname{ctgh} t_0)} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{3}{8m} \operatorname{tgh} t_0 \left(1 - \frac{7}{9} \operatorname{tgh}^2 t_0\right) + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right\} \quad \cdots(12)$$

全様に

$$K_m'\left(\frac{m}{\sinh t_0}\right) \sim \pi \frac{\cosh t_0}{\sqrt{2\pi m \operatorname{ctgh} t_0}} e^{m(t_0 - \operatorname{ctgh} t_0)} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{3}{8m} \operatorname{tgh} t_0 \left(1 - \frac{7}{9} \operatorname{tgh}^2 t_0\right) + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right\} \quad \cdots(13)$$

が得られる。従ってこれより又 $I_m'(m/\sinh t_0) K_m'(m/\sinh t_0)$ に対しては

$$I_m'\left(\frac{m}{\sinh t_0}\right) K_m'\left(\frac{m}{\sinh t_0}\right) \sim -\frac{\sinh 2t_0}{4m} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right\} \quad \cdots\cdots(14)$$

を得る。

又 $1/\sinh w_0 = \operatorname{tg}\gamma$ とおくと次の様な表示が得られる。

$$I_\nu(\nu \operatorname{tg}\gamma) \sim e^{z/\sin\gamma} \left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^{z/\operatorname{tg}\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi z/\sin\gamma}} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{\sin\gamma}{8z} \left(1 - \frac{5}{3}\cos^2\gamma\right) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right\}$$

$$K_\nu(\nu \operatorname{tg}\gamma) \sim e^{-z/\sin\gamma} \left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^{-z/\operatorname{tg}\gamma} \frac{\pi}{\sqrt{2\pi z/\sin\gamma}} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{\sin\gamma}{8z} \left(1 - \frac{5}{3}\cos^2\gamma\right) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right\}$$

$$I_\nu'(\nu \operatorname{tg}\gamma) \sim e^{\frac{\nu}{\cos\gamma}} \left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^{\nu} \sqrt{\cos\gamma/(2\pi\nu\sin^2\gamma)} \times$$

$$\times \left\{ 1 - 3\cos\gamma/(8\nu)\left(1 - \frac{7}{9}\cos^2\gamma\right) + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \right\}$$

$$K_\nu'(\nu \operatorname{tg}\gamma) \sim -\pi e^{-\nu/\cos\gamma} \left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^{-\nu} \sqrt{\cos\gamma/(2\pi\nu\sin^2\nu)} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{3\cos\gamma}{8\nu}\left(1 - \frac{7}{9}\cos^2\gamma\right) + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \right\}$$

$$I_\nu(\nu \operatorname{tg}\gamma)\, K_\nu(\nu \operatorname{tg}\gamma) \sim \frac{\sin\gamma}{2z}\left\{1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right\}$$

$$I_\nu'(\nu \operatorname{tg}\gamma)\, K_\nu'(\nu \operatorname{tg}\gamma) \sim -\frac{1}{2\nu \operatorname{tg}^2\gamma \cdot \cos\gamma}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right\}$$

$$z = \nu \operatorname{tg}\gamma \qquad \cdots\cdots (15)$$

第九章　間隙のある導板を通しての磁界の漏逸

第一節　問題の記述と仮定

これ迄は遮蔽体が完全な中空導体で従って始源界の漏逸は遮蔽体を構成してゐる導体の厚さが考察してゐる現象の浸透の深さ $\delta=(\omega\mu\sigma/2)^{-1/2}$ よりも薄いことから起るのであった。此処ではそうでなくて導体が構造上源を完全に包み得ないためその間隙を通して外界に逸脱する界について考へる。この場合にも一般的には導体部分をも透して漏出する界をも併せ考へるべきであらうが、そうすることは徒らに問題を複雑化し結果を不透明にするからここでは後者を除外するために導体を貫通しての界の逸脱はないものとする。即ち問題にしてゐる現象の侵入深さδは薄板導体の厚さに比べて極めて小さいものとする。この為には導体が完全導電性のものであるとしてもいいし、又現象の周波数が極めて大きいとしてもよい。たゞ周波数が非常に大きくなると電磁界はその伝送方向に於て減衰が増加しそのために場の模様が少し崩れる。そして伝送方向と直角の平面内に於ける場の模様、即ち今我々が考へ様としてゐる場の模様については準定常的な或は定常的な取扱いを許さなくなる。我々は事柄の取扱いを簡単にする為に問題が二次元の平面の問題として取扱い得る様な状態を仮定する。そして現象はその平面に直角な方向に沿って減衰なしに $\exp\{i\omega(z/v-t)\}$ なる因数により伝送されるものとす。ここに v は波の位相速度で真空中の光速を c とすると (ϵ,μ) なる媒質中では $v=c/\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ である。

界は電界と磁界が相伴ってゐるが、二次元の仮定のもとに界方程式は二つの群に分離される* ことが分ってゐる。これは (E_1,E_2,H_z) と (H_1,H_2,E_z) なる界であって我々の考察に必要なのは $E_1,E_2;H_1,H_2$ であって H_z,E_z は余り重要ではない。かゝる場合には E_1,E_2 はスカラポテンシャル ϕ を用ひて記述し、H_1,H_2 はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用ひて記述すると、$\mathbf{A},\phi$ は互に独立ではない。† 故にどちらか一方の群をのみ考へれば他方はそれより解決される。我々は本章に於て専ら (H_1,H_2,E_z) なる界について考へることにする。これは

---

* S.A. Schelkunoff: B.S.T.J., **13**, P.532 (1934)

† $\mathbf{A}$ 及び ϕ を用ひて $\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$, $\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ と表はすとす。$\mathbf{A}$ と ϕ とは $\nabla\cdot\mathbf{A}+\epsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$ で結ばれる。$\mathbf{A}$ は z 分値のみを有するから $\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{dA_z}{dz}=\frac{i\omega}{v}A_z$ である。故に上式は $\frac{i\omega}{v}A_z-i\omega\epsilon\mu\phi=0$ 即ち $A_z=\sqrt{\epsilon\mu}\,\phi$ となる。故に一方の群について解けば他の群はこの関係からすぐ求められる。

z一分値のみをもつ磁気的ベクトルポテンシャル$A_z(u_1 u_2)$によって記述することが出来る。

次に源としては單一線状電流源、又は双極線状電流源を考へることにする。その断面は系の他の寸法に比して極めて小さいものとする。従って考へてゐる平面内に於てこの様な源は一つの点で示される。又遮蔽体の断面も極めて薄いものとし考察面内に於てその断面は曲線で示されるものとする。

我々の問題は考察平面内のかゝる断面曲線（仮定）に沿って0又は一定値を有し、且つ源の存在する点に於て対数的に無限大になる様な函数即ち所謂グリーン函数を求めることにある。考察平面を複素数z*（$=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$）の平面と考へ、源の位置を$z_0$とする。グリーン函数はz及び$z_0$の函数でこれを$G(z;z_0)$と書く。すると磁界は

$$-\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dz}=H_y+iH_x=(H_\phi+iH_r)e^{-i\varphi}\ [A/m]\ \cdots\cdots(1)^{**}$$

で与へられ、又二点z_1, z_2の間を貫く磁束†Ψ及び磁位差は

$$G(z_1;z_0)-G(z_2;z_0)=\Psi+i\mu\int_{z_1}^{z_2}\mathbf{H}\cdot ds\quad [V\cdot s/m]\ \cdots(2)^{**}$$

で与へられる。つまりグリーン函数$G(z,z_0)$の実数部はベクトルポテンシャルA_zに等しいのである。換言するならばグリーン函数の実数部はベクトル**H**の場に対する流れの函数である。

我々は先づ簡単な單一空隙の場合について論じ、次いで領域が單一連結域でない場合を論じようと思ふ。尚斯かる種類の問題としてBuchholzが同軸ケーブルの縦裂を通して外部磁界が侵入する模様を論じたものもあるが筆者は少しく取扱を変へて、前述の様に單一線状電流又は双極線状電流源よりの磁界が薄板状導体によって如何に遮蔽されるかを考察せんとするのである。

第二節　線状電流の作る磁界の帯状間隙を通しての漏洩

第9.1図にその断面を示す様に無限に拡った薄板導体に巾2cなる帯状の間隙があるものとし、その上方の任意の位置に線状電流があり、これが間隙の中心線（即ち原点を通ってxy面に直角の直線）に平行に置かれてゐるとする。この源による磁界が間隙を通して板の下方に如何に拡がるであらうか。これを次に考へてみることにする。　第9.1図

---

* 波の伝送方向zと混同しない様注意を要する。

** H. Buchholz: E.N.T., 14, S. 408–443 (1937)

† 考察面に直角方向に単位長を有する如き、z_1, z_2間の任意の面を貫く磁束と云ふ意味である。

$$z = \frac{c}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) \qquad \cdots\cdots (1.1)$$

$$\left.\begin{matrix} w \\ \overline{w} \end{matrix}\right\} = \frac{z}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1} \qquad \cdots\cdots (1.2)$$

なる関係によってz－平面をw－平面に写像する。同一のzの値に対してw－平面上にはw－$\overline{w}$の二値が対応し$w\cdot\overline{w} = 1$である。薄板はw－平面上では1 2 3 4 1なる実軸全体となる。
第9.2図 （第9.2図）。薄板上で零になり、源に対数的に無限になるグリーン函数はw平面ではすぐ求められ次の様になる。

$$2\cdot G(w;\ w_0) = \frac{\mu I}{2\pi}\cdot \ln \frac{w - \overline{w_0}}{w - w_0} + \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\overline{w} - \overline{w}_0}{\overline{w} - \overline{w}_0}$$

然し第二項は$\overline{w} = 1/w$なることを考慮すれば常数項は別として第一項は同じであるから結局Gとして次式が得られる。

$$G(w;\ w_0) = \frac{\mu I}{2\pi}\cdot \ln \frac{w - \overline{w_0}}{w - w_0}$$

或は(1.2)を用いて次式の如くなる。

$$G(z; z_0) = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\left(z + \sqrt{(z/c)^2 - 1}\right) - \left(\overline{z}_0/c + \sqrt{(\overline{z}_0/c)^2 - 1}\right)}{\left(z/c + \sqrt{(z/c)^2 - 1}\right) - \left(z_0/c + \sqrt{(z_0/c)^2 - 1}\right)} \qquad \cdots\cdots (2)^*$$

これより磁界は前節(1)を用いて

$$H_y + i H_x = \frac{1}{\mu}\frac{dG}{dz} = \frac{I}{2\pi c}\cdot\left\{\frac{1 + (z/c)\sqrt{(z/c)^2 - 1}}{\left\{(z/c) + \sqrt{(z/c)^2 - 1}\right\} - \left\{(\overline{z}_0/c) + \sqrt{(\overline{z}_0/c)^2 - 1}\right\}}\right.$$

第9.3図.

$$\left. - \frac{1 + (z/c)\big/\sqrt{(z/c)^2 - 1}}{\left\{(z/c) + \sqrt{(z/c)^2 - 1}\right\} - \left\{(z_0/c) + \sqrt{(z_0/c)^2 - 1}\right\}}\right\} \qquad \cdots\cdots (3)$$

次に2 5 4 6 2が導体板の場合（第9.3図）にはグリーン函数

は(2)の代りに次の様に与へらる $2G(w, w_0) = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{w - 1/\overline{w}_0}{w - w_0} + \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\overline{w} - 1/\overline{w}_0}{\overline{w} - \overline{w}_0}$

故に $G(z; z_0) = \frac{\mu I}{4\pi} \ln \frac{\{w(z) - \overline{w}(\overline{z}_0)\}\{\overline{w}(z) - \overline{w}(\overline{z}_0)\}}{\{w(z) - w(z_0)\}\{\overline{w}(z) - \overline{w}(z_0)\}}$

となる。或は(1.2)を用いると

$$\cancel{G(z, z_0)} = \frac{\mu I}{4\pi} \ln \frac{1 - (z\overline{z}_0/c^2) - \sqrt{(\overline{z}_0/c)^2 - 1}\ \sqrt{(z/c)^2 - 1}}{1 - (z\cdot z_0/c^2) + \sqrt{(z_0/c)^2 - 1}\ \sqrt{(z/c)^2 - 1}} \qquad \cdots (4)$$

となる。これより

$$-\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dz} = -\frac{I}{4\pi}\left\{\frac{-\dfrac{\overline{z}_0}{c^2} - \dfrac{1}{c}\dfrac{z\sqrt{(\overline{z}_0/c)^2 - 1}}{\sqrt{(z/c)^2 - 1}}}{1 - (z\cdot\overline{z}_0/c^2) - \sqrt{(\overline{z}_0/c)^2 - 1}\cdot\sqrt{(z/c)^2 - 1}}\right.$$

$$\left. - \frac{-(z_0/c^2) + (1/c)\dfrac{(z/c)\sqrt{(z_0/c)^2 - 1}}{\sqrt{(z/c)^2 - 1}}}{1 - (z\,z_0/c^2) + \sqrt{(z_0/c)^2 - 1}\ \sqrt{(z/c)^2 - 1}}\right\}$$

---

* $R\,G(z; z_0) = R\,G(z_0; z)$なることが容易に証明出来て、源と考察点とに関するグリーン函数の対称性が認められる。

9-3

従って磁界は次の様になる。

$$H_y+iH_x=\frac{I}{4\pi c}\left\{\frac{(z_0/c)+(z/c)\sqrt{(z_0/c)^2-1}/\sqrt{(z/c)^2-1}}{1-(z_0z/c^2)-\sqrt{(z_0/c)^2-1}\cdot\sqrt{(z/c)^2-1}}-\frac{(z_0/c)-(z/c)\sqrt{(z_0/c)^2-1}/\sqrt{(z/c)^2-1}}{1-\frac{z_0z}{c^2}+\sqrt{(z_0/c)^2-1}\sqrt{(z/c)^2-1}}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

2. 特別な場合に於ける考察

2.1 線状電流源が第9.1図の虚軸上にある場合には(2)に於て $z_0/c=i\zeta_0$ と置くとグリーン函数は(6)の様になる。ここに ζ_0 は実数である。

$$G(z;z_0)=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{\left(\frac{z}{c}+\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}\right)+i\left(\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}\right)}{\left(\frac{z}{c}+\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}\right)-i\left(\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}\right)}\quad\cdots\cdots(6)$$

そして

$$-\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dz}=\frac{-I}{2\pi c}\left\{\frac{1+\left(\frac{z}{c}\right)/\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}}{\left(\frac{z}{c}+\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}\right)+i\left(\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}\right)}-\frac{1+(z/c)/\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}}{\left(\frac{z}{c}+\sqrt{(z/c)^2-1}\right)-i\left(\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}\right)}\right\}$$

従って磁界は次の様になる。

$$H_y+iH_x=\frac{iI}{\pi c}\left\{1+\left(\frac{z}{c}\right)/\sqrt{(z/c)^2-1}\right\}\frac{\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}}{\left(\frac{z}{c}+\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-1}\right)^2+\left(\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}\right)^2}\quad(7)$$

特に中心線上では $z/c=i\zeta$ とおくと $H_y=0$ となり, $H_x(\zeta)$ は(7.1)で与へられる。

$$H_x(\zeta)=\frac{I}{\pi c}\left(1+\zeta/\sqrt{1+\zeta^2}\right)\cdot\frac{\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}}{\left(\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}\right)^2-\left(\zeta+\sqrt{1+\zeta^2}\right)^2}\cdots\cdots(7.1)^*$$

又(7)に於て $z/c=\xi\gtrless1$ とおくと導板上の値が得られるが結果は勿論 H_x のみであり，之は次の(7.2)で与へられる。

導板の上側では

$$H_x^{+}(\xi)=\frac{I}{\pi c}\left(1+\xi/\sqrt{\xi^2-1}\right)\frac{\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}}{\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)^2+\left(\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}\right)^2}$$

導板の下側では

$$H_x^{-}(\xi)=\frac{I}{\pi c}\left(1-\xi/\sqrt{\xi^2-1}\right)\frac{\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}}{\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)^2+\left(\zeta_0+\sqrt{1+\zeta_0^2}\right)^2}\quad\cdots\cdots(7.2)$$

となる。両側の磁界の差は導板中を流れる電流であつて，これを $K_z(\xi)$ とすると

* z が導板の上側の或る点から間隙をぬけて板の下側の対応点に連続的に移行すると $\sqrt{(z+c)(z-c)}$ なる量は位相が π だけ変化することに注意する。特に虚軸の上ではこの量は一定位相 $\pi/2$ を有する。

$$K_z(\xi) = H_x^+(\xi) - H_x^-(\xi) \qquad \cdots\cdots(8)$$

である。$\xi=1$ で~~磁~~磁界は無限大である。

2.12 双極線状電流源の場合を考へよう。この場合はグリーン函数は先の結果から容易に得る事が出来る。即ちこの場合のグリーン函数を $G(z;\mathfrak{D})$ とすると

$$G(z;\mathfrak{D}) = G(z;z_0+dz_0) - G(z;z_0) = dz_0\,\partial G(z;z_0)/\partial z_0$$

$$= \frac{-\mu I dz_0}{2\pi c}\left\{\frac{1-(\frac{z_0}{c})/\sqrt{(z_0/c)^2-1}}{(\frac{z}{c}+\sqrt{(\frac{z}{c})^2-1})-(\frac{z_0}{c}+\sqrt{(\frac{z_0}{c})^2-1})} - \frac{1-(\frac{z_0}{c})/\sqrt{(\frac{z_0}{c})^2-1}}{(\frac{z}{c}+\sqrt{(\frac{z}{c})^2-1})-(\frac{z_0}{c}+\sqrt{(\frac{z_0}{c})^2-1})}\right\} \qquad \cdots(9)$$

磁界は之を更に z について微分すれば得られる。即ち

$$H_y + iH_x = -\frac{dz_0}{\mu}\,\partial^2 G(z;z_0)/(\partial z\,\partial z_0) \qquad \cdots\cdots(10)$$

~~磁界~~にである。

2.13 特に線電流が原点にある場合には(7.1)で $\zeta_0=0$ として

第9.4図

$$H_x(\zeta) = \frac{I}{\pi c}\left(1+\frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}\right)\frac{1}{1-(\zeta+\sqrt{1+\zeta^2})^2} = -\frac{I}{2\pi c\zeta}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} \qquad \cdots(11)$$

となる。(第9.4図) 又(7.2)より薄板の上下面のすぐ外側の磁界は夫々次の如くである。

$$\left.\begin{aligned} H_x^+(\xi) &= \frac{I}{\pi c}\left(1+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right)\frac{1}{1+(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^2} = \frac{I}{2\pi c\xi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}} \\ H_x^-(\xi) &= \frac{I}{\pi c}\left(1-\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\right)\frac{1}{1+(\xi-\sqrt{\xi^2-1})^2} = -\frac{I}{2\pi c\xi}\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}} \end{aligned}\right\} \cdots(12)$$

薄板中の電流 $K(\xi)$ は始源電流と逆方向でその大きさは(13)で与へられる。

$$K(\xi) = H_x^+(\xi) - H_x^-(\xi) = \frac{I}{2\pi c\xi}\frac{2}{\sqrt{\xi^2-1}} \qquad \cdots\cdots(13)$$

片方の薄板に流れる全電流は

$$\int_1^\infty K(\xi)c\,d\xi = \frac{I}{\pi}\left\{\cos^{-1}\frac{1}{\xi}\right\}_1^\infty = \frac{I}{2} \qquad \cdots\cdots(14)$$

であって電流 I は両薄板導体に等分されて還流する事が分る。第9.5図は薄板中の電流分布を示すものである。

第9.5図

第三節　一様磁界中に置かれた薄板　一様な磁界の中に巾$2C$なる帯状の薄板導体が置かれた場合薄板附近の磁界は如何になるか考へよう。一様な磁界は巾$2d$なる平行線状導体にIなる強さの電流が往復してゐるとし、その巾$2d$が無限に大きくなり同時にI/dが一定値を保つ様に電流Iも限りなく増大した極限として与へられる。従って問題はその様な往復平行二線條電流源によるグリーン函数を求めることに帰着する。既に第一導体による薄板の外側の領域のグリーン函数は第二節(4)で与へられてゐる。そして今考へんとする一様磁界の場合のグリーン函数は上述の所論より次の如く与へられるであらう。 9-4

$$G(z;z_0^{(1)};z_0^{(2)}) = G(z;z_0^{(1)}) - G(z;z_0^{(2)})$$

ここに $z_0^{(1)}$ 及び $z_0^{(2)}$ はz-平面に於ける平行線條電流源の位置であって、一様磁界の方向と薄板のなす角をαとすると $\pi/2-\alpha=\chi$ として、

$$z_0^{(1)} = de^{i\chi}, \quad z_0^{(2)} = -de^{i\chi}$$

と与へられる。そしてこのグリーン函数は第二節の公式(4)を用ひて

$$G(z;z_0^{(1)};z_0^{(2)}) = \frac{\mu I}{4\pi}\left\{ \ln\frac{c^2 - z\overline{z_0^{(1)}} - \sqrt{\overline{z_0^{(1)2}}-c^2}\cdot\sqrt{z^2-c^2}}{c^2 - z\overline{z_0^{(1)}} + \sqrt{\overline{z_0^{(1)2}}-c^2}\cdot\sqrt{z^2-c^2}} - \ln\frac{c^2 - z\cdot\overline{z_0^{(2)}} - \sqrt{\overline{z_0^{(2)2}}-c^2}\cdot\sqrt{z^2-c^2}}{c^2 - z\cdot\overline{z_0^{(2)}} + \sqrt{\overline{z_0^{(2)2}}-c^2}\sqrt{z^2-c^2}} \right\}$$

となる。扨

$$\sqrt{(z_0^{(1)2}-c^2)} \cong z_0^{(1)}\left(1-\frac{1}{2}\frac{c^2}{d^2}e^{-2i\chi}\right) \equiv z_0^{(1)}(1-\epsilon)$$

$$\sqrt{(z_0^{(2)2}-c^2)} \cong z_0^{(2)}\left(1-\frac{1}{2}\frac{c^2}{d^2}e^{-2i\chi}\right) \equiv z_0^{(2)}(1-\epsilon)$$

なる関係を上式に代入し、$1/d$ の冪に展開し、且$|u|$が1より小さい時 $\ln(1+u) \cong u$ なることを用ひて対数の附かない表現に直す。と、二三の計算の結果次の式が得られる。

$$G(z;z_0^{(1)};z_0^{(2)}) \cong \frac{\mu I}{4\pi}\frac{2c^2}{d}\left\{ \frac{e^{-i\chi}}{z-(1-\epsilon)\sqrt{z^2-c^2}} - \frac{e^{i\chi}}{z+(1-\bar{\epsilon})\sqrt{z^2-c^2}} \right\} + O\left(\frac{1}{d^2}\right)$$

括弧中の第一項の分母子に $z+(1-\epsilon)\sqrt{z^2-c^2}$ を乗じ、第二項に $z-(1-\bar{\epsilon})\sqrt{z^2-c^2}$ を乗じて分母を有理化すると分母は夫々 $c^2+2\epsilon(z^2-c^2)$ 及び $c^2+2\bar{\epsilon}(z^2-c^2)$ となるから$|u|$が小さい時 $1/(1+u) \cong 1-u$ なる近似関係を用ひて更に若干の計算を行ふと結局

$$G(z;z_0^{(1)};z_0^{(2)}) \cong \frac{\mu I}{2\pi}\cdot\frac{1}{d}\left\{ 2\sqrt{z^2-c^2}\cos\chi - 2iz\sin\chi + O\left(\frac{1}{d^2}\right)\right\}$$

$$= \mu H(\alpha)\left\{\sqrt{z^2-c^2}\cos\chi - iz\sin\chi\right\}, \quad H(\alpha) \equiv \frac{I}{\pi d} \qquad \cdots\cdots (1)$$

が得られる。これが一様磁界$H(\alpha)$の中の薄板に関する所要のグリーン函数である。磁界は$-\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dz}$によって求められ次の様になる。

$$H=-H(\alpha)\{z\cos x/\sqrt{z^2-c^2}-i\sin x\} \quad \cdots\cdots(2)$$

薄板上では$z=x<c$であってHは虚数分のみしか有しない。従ってH_xのみである。又次の式で与へられる点z_0では$H=0$となる。

$$\operatorname{tg} x = z_0/\sqrt{c^2-z_0^2} \quad \cdots\cdots(3)$$

z_0なる点は所謂停滞点(stagnation point ; Staupunkt)に外ならない。又$z\to\infty$では

$$H=-H(\alpha)\cdot e^{-ix}=-H(\alpha)\cdot\cos x+iH(\alpha)\cdot\sin x$$

才9.6圖

$$=H_y+iH_x$$

であって当然一様磁界となる。薄板近傍の磁界分布が才9.6図に示されてゐる。

才四節　一様磁界の中に切鋏を有する薄円柱導体殻を置いた場合の問題。　一様磁界は才三節と同じく往復平行線条電流によって与へられる。そして前節の一様磁界中に置かれた薄板のグリーン函数を用ひて、更に軸に沿って一つのスリットを有する薄円柱導体殻が一様磁界中に置かれた場合を考へる。この場合にはz平面の薄板をZ—平面のスリット附円柱殻に写像する関係式が必要で、これは

$$z=i\frac{a-Z}{a+Z} \qquad 或は \qquad Z=a\cdot\frac{i-z}{i+z} \quad \cdots\cdots(1)$$

で与へられる。そして$Z=ae^{i\alpha}$で$z=c$が対応するから上の関係より$c=\operatorname{tg}(\alpha/2)$が得られる。

Z-平面に一様磁界を得るために

才9.7圖

$$Z_0^{(1)}=de^{+ix} \quad 及び \quad Z_0^{(2)}=-de^{+ix} \quad \cdots\cdots(2)$$

に正,負の電流源をおく。この電流源の位置はz-平面では$z=-i$の近傍の二点$z_0^{(1)}, z_0^{(2)}$に対応するが両者の対応関係は(1)の才一式より

$$z_0^{(1)}=i\frac{a-de^{ix}}{a+de^{ix}}\sim -i\left(1-\frac{2a}{d}e^{-ix}\right)=-i(1-\epsilon)$$

$$z_0^{(2)}=i\frac{a+de^{ix}}{a-de^{ix}}\sim -i\left(1+\frac{2a}{d}e^{-ix}\right)=-i(1+\epsilon)$$

となる。こゝに$\epsilon=\frac{2a}{d}e^{-ix}$である。又

$$\sqrt{(z_0^{(1)2}-c^2)}=-\frac{i}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(1-\epsilon\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sqrt{(z_0^{(2)2}-c^2)}=-\frac{i}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(1+\epsilon\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

であるから、これらを用いてグリーン函数は前節と全様第二節(4)より次の如くである。

$$G(z;z_0^{(1)},z_0^{(2)})=\frac{\mu I}{4\pi}\Big\{\ln\frac{c^2-i(1-\epsilon)z-(i/\cos\frac{\alpha}{2})(1-\epsilon\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2})\sqrt{z^2-c^2}}{c^2+i(1-\epsilon)z-(i/\cos\frac{\alpha}{2})(1-\epsilon\cos^2\frac{\alpha}{2})\sqrt{z^2-c^2}}$$

$$-\ln\frac{c^2-i(1+\epsilon)z-(i/\cos\frac{\alpha}{2})(1+\epsilon\cos^2\frac{\alpha}{2})\sqrt{z^2-c^2}}{c^2+i(1+\epsilon)z-(i/\cos\frac{\alpha}{2})(1+\epsilon\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2})\sqrt{z^2-c^2}}\Big\}$$

ここで ϵ は小さい量であるから ϵ の冪に展開し $\ln(1+u)\triangleq u$ 等の関係を用いると

$$G(z;z_0^{(1)},z_0^{(2)})\sim\frac{\mu I}{4\pi}\cdot 2i\,\frac{2a}{d}\Big\{\frac{z-\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{z^2-c^2}}{c^2-(i/\cos\frac{\alpha}{2})\sqrt{z^2-c^2}+iz}\,e^{-ix}$$

$$+\frac{z+\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{z^2-c^2}}{c^2-(i/\cos\frac{\alpha}{2})\sqrt{z^2-c^2}-iz}\,e^{ix}\Big\}$$

となるが括弧内の第一項の分母子に $c^2+iz+(i/\cos\frac{\alpha}{2})\sqrt{z^2-c^2}$ を乗じ第二項の分母子に $c^2-iz+(i/\cos\frac{\alpha}{2})\sqrt{z^2-c^2}$ を乗じて整理すると上式は分母が夫々 $c^2(i+z)^2$ 及び $c^2(i-z)^2$ となる。ここで更に公分母 $c^2(z^2+1)^2$ で通分して分子を整理すると上式は次の様になる。

$$=\frac{\mu I}{4\pi}\cdot 2i\,\frac{2a}{d}\Big\{\frac{(i-z)^2(z-\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{z^2-c^2})(\zeta+iz)e^{-ix}+(i+z)^2(z+\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{z^2-c^2})(\zeta-iz)e^{-ix}}{c^2(z^2+1)^2}\Big\}$$

ここに $\zeta=c^2+(i/\cos\frac{\alpha}{2})\sqrt{z^2-c^2}$ である。
分子を整理すると上式は結局次の様になる。

$$G(z;z_0^{(1)},z_0^{(2)})=i\cdot 4a\cdot\frac{\mu H(x)}{2}\,\frac{1}{1+z^2}\Big\{z\cos x\,(1+i\cos\tfrac{\alpha}{2}\sqrt{z^2-c^2})-$$

$$-\sin x\,(1+i\cos\tfrac{\alpha}{2}\sqrt{z^2-c^2})\Big\}+O\left(\frac{1}{d^2}\right)\quad\cdots(3)$$

ここに $H(x)\equiv\dfrac{I}{2d}$ である。

上式は $z=i(a-Z)/(a+Z)$ を用いて Z-領域に直すことが出来る。

$$1+z^2=\frac{4aZ}{(a+Z)^2},\quad \sqrt{z^2-c^2}=\pm i\,\frac{\sqrt{(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha})}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot(a+Z)}$$

等であって、これらの関係を上式に代入することにより結局次式が得られる。

$$G\{Z;H(x)\}=-\frac{\mu}{2}\cdot H(x)\frac{1}{Z}\{(a-Z)\cos x+i(a+Z)\sin x\}\times$$

$$\times\Big\{a+Z-\sqrt{(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha})}\Big\}\quad\cdots\cdots(4)$$

これを基礎として領域の各点の磁界分布、スリットを通して円柱鉄内に入り込む磁束等を算定し得る。これについては既に

5 Buchholz の詳細な研究がある。筆者は次に一様場の代りに薄円柱の中心に置かれた双極線電流源による磁界がスリットを通して如何に外界に漏洩するかについて論じようと思ふ。尚オ9.8図は一様磁界中に於ける薄円柱殻による場の変容を示したものである。

オ9.8図

オ五節 単一スリット薄円柱殻の中心に置かれた双極線状電流による磁界のスリットを通しての逸脱

Z-平面に於ける双極線状電流の位置を次の如く置く

$$Z_0^{(1)} = \eta e^{i\chi}, \quad Z_0^{(2)} = -\eta e^{i\chi}$$

ここに η は極めて小さいものとす。これに対応して，源は z-平面では $+i$ 附近の矢張り双極線条電流源に変換される。前節(1)より

$$z_0^{(1)} = i\,\frac{a-\eta e^{i\chi}}{a+\eta e^{i\chi}} \sim i(1-\epsilon),$$

$$z_0^{(2)} = i\,\frac{a+\eta e^{i\chi}}{a-\eta e^{i\chi}} \sim i(1+\epsilon)$$

$$\epsilon = \frac{2\eta}{a}\, e^{i\chi}$$

となる。之を用ひて

$$\sqrt{(z_0^{(1)})^2 - c^2} \cong \frac{i}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(1-\epsilon\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\right), \quad \sqrt{(z_0^{(2)})^2 - c^2} \cong \frac{i}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(1+\epsilon\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

が得られる。そしてグリーン函数はオ二節の(4)を用ひ，$G(z;\, z_0^{(1)}, z_0^{(2)}) = G(z;\, z_0^{(1)}) - G(z;\, z_0^{(2)})$ として次式が得られる。

$$G(z;\, z_0^{(1)}, z_0^{(2)}) = \frac{\mu I}{4\pi}\left\{ \ln\frac{c^2 + i(1-\bar{\epsilon})z + i\sec\frac{\alpha}{2}\left(1-\bar{\epsilon}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{z^2-c^2}}{c^2 - i(1-\epsilon)z + i\sec\frac{\alpha}{2}\left(1-\epsilon\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{z^2-c^2}} - \ln\frac{c^2 + i(1+\bar{\epsilon})z + i\sec\frac{\alpha}{2}\left(1+\bar{\epsilon}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{z^2-c^2}}{c^2 - i(1+\epsilon)z + i\sec\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1+\epsilon\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{z^2-c^2}} \right\}$$

ここで $|\epsilon|$ は極めて小さいから，上式を ϵ の冪に展開すると少し長い計算の結果次の式が得られる。

$$\frac{4\pi}{\mu I}\, G(z;\, z_0^{(1)}, z_0^{(2)}) = -4i\cdot\frac{2\eta}{a(1+z^2)}(z\cdot\cos\chi - \sin\chi)\times \times\left\{1 - i\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{z^2-c^2}\right\}$$

上の結果を $z = i(a-Z)/(a+Z)$ の変換によって Z-平面に移すと

$$\frac{4\pi}{\mu I}\, G(Z;\, \zeta) = \frac{2\eta}{a^2 Z}\left\{(a-Z)\cos\chi + i(a+Z)\sin\chi\right\}\times \times\left\{(a+Z) + \sqrt{(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha})}\right\} \quad (2)^*$$

となる。

---

* 根号の符号は正をとるべきことは $Z=0$ で G が $1/Z$ の無限大となるべきことから分明である。

磁界の強さは

$$H = -\frac{I}{2\pi}\cdot\frac{\eta}{a^2}\cdot\frac{d}{dZ}\left[\left\{(a-Z)\cos\chi - i(a+Z)\sin\chi\right\}\left\{(a+Z) + \sqrt{(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha})}\right\}\frac{1}{Z}\right]$$

$$= \frac{I}{2\pi}\cdot\frac{\eta}{a^2}\left[e^{-i\chi}\left\{1+\frac{Z-a\cos\alpha}{\sqrt{(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha})}}\right\} + \frac{a^2}{Z^2}\cdot e^{i\chi}\left\{1+\frac{a-Z\cos\alpha}{\sqrt{(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha})}}\right\}\right] \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに $I\cdot 2\eta \equiv M$ とすると，M は双極線条電流源の双極能率である。

上式で $Z\to 0$ とすると

$$H \cong \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{Z^2}\cdot e^{i\chi}$$

となる。又 $Z = r\cdot e^{i\varphi}$ とすると

$$H = (H_\varphi + iH_r) = \frac{M}{2\pi r^2}\left\{\cos(\chi-\varphi) + i\sin(\chi-\varphi)\right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

なる双極線条電流の場となる。

扱薄円柱殻の上を考へよう。ここでは $Z = ae^{i\varphi}$ であるから磁界は上の(3)に於て $Z = ae^{i\varphi}$ として

$$(H_\varphi + iH_r)\cdot e^{-i\varphi} = \frac{M}{4\pi a^2}\left[e^{-i\chi}\left\{1\pm\frac{e^{i\varphi}-\cos\alpha}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\alpha)}}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right\} + e^{i(\chi-2\varphi)}\left\{1\pm\frac{1-e^{i\varphi}\cos\alpha}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\alpha)}}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right\}\right]^{*}$$

$$= 2\frac{M}{4\pi a^2}\cdot e^{-i\varphi}\left\{\cos(\varphi-\chi)\pm\frac{\cos(\frac{3}{2}\varphi-\chi)-\cos\alpha\cdot\cos(\frac{\varphi}{2}-\chi)}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\alpha)}}\right\}$$

即ち次の様になる。

$$H_\varphi = 2\cdot\frac{M}{4\pi a^2}\left\{\cos(\varphi-\chi)\pm\frac{\cos(\frac{3}{2}\varphi-\chi)-\cos\alpha\cdot\cos(\frac{\varphi}{2}-\chi)}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\alpha)}}\right\}$$

$$H_r \equiv 0 \qquad |\varphi|\leqq\alpha \quad \cdots\cdots(5)$$

複号の中 + の符合は遮蔽体内部の磁場を，− の符号は遮蔽体外部の磁場を与へる。

$|\varphi|>\alpha$ の時には $(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha}) = -2a^2e^{i\varphi}(\cos\alpha-\cos\varphi)$ であって $\sqrt{(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha})} = -ie^{i\frac{\varphi}{2}}a\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\varphi)}$ となるから

$$H_\varphi + iH_r = 2\cdot\frac{M}{4\pi a^2}\left\{\cos(\varphi-\chi) + i\frac{\cos(\frac{3}{2}\varphi-\chi)-\cos\alpha\cdot\cos(\frac{\varphi}{2}-\chi)}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\alpha)}}\right\}$$

$$|\varphi|\geqq\alpha \quad \cdots\cdots(6)$$

となる。H_r は円弧上に沿って $\cos(\frac{3}{2}\varphi-\chi)-\cos\alpha\cdot\cos(\frac{\varphi}{2}-\chi)=0$

即ち $\quad \mathrm{tg}(\varphi_0-\chi)\cdot\mathrm{tg}\frac{\varphi_0}{2} = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}, \quad (\varphi_0 \neq \pi) \quad \cdots\cdots(7)$

---

* $(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha}) = a^2(e^{i\varphi}-e^{i\alpha})(e^{i\varphi}-e^{-i\alpha}) = a^2e^{i\varphi}\{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}-e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\}$ $= 2a^2\cdot(\cos\varphi-\cos\alpha)e^{i\varphi}$ であるから $\sqrt{(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha})} = \pm ae^{i\frac{\varphi}{2}}\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\alpha)}$ となる。ここで ± の符号は各々のベクトル $(Z-ae^{i\alpha})$ 及び $(Z-ae^{-i\alpha})$ の位相から定められる。

を満足する点 φ_0 で0になりその前後で符号が反対になる。
$x=\pi/2$ の場合には上式は

$$-ctg\,\varphi_0\cdot tg\frac{\varphi_0}{2}=tg^2\frac{\alpha}{2}\qquad 即ち\quad \frac{1-ctg^2\frac{\varphi_0}{2}}{2\,ctg\frac{\varphi_0}{2}}\cdot tg\frac{\varphi_0}{2}=tg^2\frac{\alpha}{2}$$

即ち $tg^2\frac{\varphi_0}{2}\left(1-ctg^2\frac{\varphi_0}{2}\right)=2tg^2\frac{\alpha}{2}$ 即ち $tg^2\frac{\varphi_0}{2}=1+2tg^2\frac{\alpha}{2}$

即ち
$$\cos^2\frac{\varphi_0}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2}\qquad\cdots\cdots(8)$$

となる。又 $x=0$ の時には $2tg^2\frac{\varphi_0}{2}/\left(1-tg^2\frac{\varphi_0}{2}\right)=tg^2\frac{\alpha}{2}$ でこより

$$2\cos^2\frac{\varphi_0}{2}=1+\cos^2\frac{\alpha}{2}\qquad\cdots\cdots(9)$$

第9.9図

第9.10図 得られるが、この解は $|\varphi_0|<\alpha$ なる場合にのみ存在するから、今の場合の開口部には存在せぬことになる。大体の確界の模様は第9.9図及び第9.10図に示す様になる。

次に逸脱確率について考へる。(2)より G は

$$G(Z;D)=\frac{\mu M}{4\pi}\cdot\frac{1}{a^2Z}\{(a-Z)\cos x+i(a+Z)\sin x\}\times$$
$$\times\left\{(a+Z)+\sqrt{(Z-ae^{i\alpha})(Z-ae^{-i\alpha})}\right\}$$

であって $Z=-a$ の点の G は次の如くである。

$$G(-a;D)=\frac{\mu M}{4\pi}\frac{2}{a}\cdot\cos x\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\qquad\cdots\cdots(10)$$

そして4の点では G は純虚であるから $RG=0$ である。故に $x=\pi/2$ の場合には4P間に全体として確率の流入は無く、$x=0$ の場合には上の(10)で与へられる確率の逸脱がある。尤も $x=\pi/2$ の場合には $\varphi=\varphi_0$ の点で確率の方向が逆転するのであって、この点のグリーン函数は

$$RG(Q;D)=\frac{\mu M}{4\pi}\frac{2}{a}\sin\left(x-\frac{\varphi_0}{2}\right)\cdot\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\varphi_0)}\quad\cdots(11)$$

である。特に $x=\pi/2$ の場合には

$$RG(Q;D)=\frac{\mu M}{4\pi}\frac{2}{a}\cos\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{2(\cos\alpha-\cos\varphi_0)}$$
$$=\frac{\mu M}{4\pi}\cdot\frac{4}{a}\cos\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}$$

となる。そして $\cos(\varphi_0/2)=\cos\frac{\alpha}{2}/\sqrt{2}$ の関係(8)を用いると結局次の様になる。

$$RG(Q;D)=\frac{\mu M}{2\pi a}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\qquad\left(x=\frac{\pi}{2}\right)\qquad\cdots\cdots(12)$$

前述の如く $x=0$ の場合のP点のグリーン函数の実部は

$$RG(P;D)=\frac{\mu M}{\pi a}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\qquad(x=0)\qquad\cdots\cdots(13)$$

となる。

従って上式の結果より，≫単一スリット遮蔽体の中心に置かれた双極線条電流源の場の内で遮蔽体を通して外界に逸脱する確率は，$\alpha=\pi/2$ の場合には $\frac{\mu M}{\pi a}\cos^2\frac{\alpha}{2}$ であり，$\alpha=0$ の場合には $\frac{\mu M}{\pi a}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ である。従って $\alpha=0$ の場合の方が常に $\alpha=\pi/2$ の場合よりも逸脱確率が大きい。≪ といふ結論になる。又同じ構造の遮蔽体が一様磁界中におかれた場合の Buchholz の結果と比較して次のやうな事が云へよう。≫磁場の放射方向分 H_r が遮蔽体の円弧に沿ってその符号をかへる点は，一様外部磁界の場合と，中心に置かれた双極線条電流による場の場合とで全く等しく，$\alpha=\pi/2$ の場合には $\cos\frac{\varphi_0}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{2}$ で与へられ，$\alpha=0$ の場合には $2\cos^2\frac{\varphi_0}{2}=1+\cos^2\frac{\alpha}{2}$ で与へられる φ_0 なる位置に於て生ずる。≪ 9-7.

第六節　無限に拡がった平面導体上に平行に走る線状電流による場がこれらに平行におかれた薄板によって受ける影響について。

6.1.　第9.11図に示す様に無限に拡がった平面導体の上方の空間にこれと平行に巾 $2c$ の無限に長い薄板がおかれてある。此等に平行に走る線状電流源によって如何なる影響を受けるか，薄板に沿ふ磁界分布，薄板中の面電流分布は如何になるか，これ等がこれより考究せんとする対象である。薄板が存在しない時の磁界分布は極めて簡単で平面導体に対する線電流の鏡像を考へれば解決できる。そしてベクトルポテンシャル A_z は $\frac{\mu I}{2\pi}\ln\{(Z-Z_0)/(Z-\bar{Z}_0)\}$ の実数部である。ここに $\bar{Z}_0$ は Z_0 の共軛複素数とする。又磁界は $-\frac{1}{\mu}\,dA_z/dZ=H_y+iH_x$ によって求められる。　然し薄板の存在によって問題はしかく簡単ではなくなる。考察する平面（これを Z − 平面とする）の領域は二重連接域である。これを z 平面の円輪間の領域に写像し，この円輪間の領域に存在するグリーン函数を求めて問題を解決しようと思ふ。 第9.11図

二つの多角形に囲まれた領域を二つの同心円間の領域に写像する関係式* を用ひて此の場合は 第9.12図

$$\frac{dZ}{dw}=C\,\frac{\vartheta_0\left(w+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\vartheta_0\left(w-\frac{\alpha}{2\pi}\right)}{\left\{\vartheta_1\left(w-\frac{1}{2}\right)\right\}^2}\ ,\quad z=e^{2\pi i w}$$

となる。ϑ_0, ϑ_1 は Jacobi の ϑ 函数であって副変数は $\tau=\frac{1}{\pi i}\ln\rho=\frac{iK'}{K}$ である。

右辺の函数は $w=\frac{1}{2}$ に二位の極を有する偶楕円函数でこれを $C'\frac{d}{dw}\frac{\vartheta_1'(w-1/2)}{\vartheta_1(w-1/2)}$ とおく事が出来る。但し C' は函数を

---

* 附録5，参照

$w=1/2$ の近傍で展開した場合その展開の主要部が一致する様に選ばれねばならない。両辺を積分すると $Z=c'\dfrac{\vartheta_1'(w-\frac{1}{2})}{\vartheta_1(w-\frac{1}{2})}+$ $+c''w$ となるが Z が w の周期函数であることから $c''=0$ でなければならぬ。又 $Z=ih$ が $z=\rho$ に対応し、且この場合は w は $w=\frac{1}{2\pi i}\ln\rho=\frac{\tau}{2}$ となる。故に之を用ひれば上の式から $ih=c'\vartheta_1'(\frac{\tau}{2}-\frac{1}{2})/\vartheta_1(\frac{\tau}{2}-\frac{1}{2})=-i\pi c'$ を得る。これより $c'=-h/\pi$ となり結局

$$Z(w)=-\frac{h}{\pi}\frac{\vartheta_2'(w|\tau)}{\vartheta_2(w|\tau)}\qquad w=\frac{1}{2\pi i}\ln z\qquad\cdots\cdots(1)$$

又円輪領域のグリーン函数は

$$G(w;w_0)=\frac{\mu I}{2\pi}\left\{-\frac{\ln z}{\ln\rho}\ln|z_0|+\ln\frac{\vartheta_1(w-w_0|\tau)}{\vartheta_1(w-\overline{w_0}|\tau)}\right\}$$

$$z=e^{2\pi iw},\quad z_0=e^{2\pi iw_0},\quad \rho=e^{\pi i\tau}\qquad\cdots\cdots(2)$$

である。(1)(2)は w を仲介として G を Z の函数として表はしてゐると考へられる。後の便宜のために(1)(2)を少し変形して Jacobi の Θ 函数* を用ひて表はして置かう。(第9.13図参照)

第9.13図 $$Z(w)=-\frac{h}{\pi}\frac{\vartheta_2'(w)}{\vartheta_2(w)}=-2K\frac{h}{\pi}\cdot\frac{H_1'(2Kw)}{H_1(2Kw)}\equiv-2K\frac{h}{\pi}Z_{10}(2Kw)$$

$$=-2K\frac{h}{\pi}\left\{Zn(2Kw)-\frac{sn(2Kw)\,dn(2Kw)}{cn(2Kw)}\right\}\qquad\cdots\cdots(1.1)$$

$$G(w;w_0)=\frac{\mu I}{2\pi}\left\{-\frac{2Kw}{iK'}\ln|z_0|+\ln\frac{H(2Kw-2Kw_0)}{H(2Kw-2K\overline{w_0})}\right\}\cdots(2.1)$$

導板上では $w=\frac{\tau}{2}+\frac{\varphi}{2\pi}$ 即ち $2K\cdot w=iK'+2K\frac{\varphi}{2\pi}$ であって之を(1.1)に代入して

$$Z=-2K\frac{h}{\pi}\left\{Zn(iK'+2K\tfrac{\varphi}{2\pi})-\frac{sn(iK'+2K\frac{\varphi}{2\pi})\,dn(iK'+2K\frac{\varphi}{2\pi})}{cn(iK'+2K\frac{\varphi}{2\pi})}\right\}$$

$$=ih-2K\frac{h}{\pi}\left\{Zn(2K\tfrac{\varphi}{2\pi})-k^2\frac{cn(2K\frac{\varphi}{2\pi})sn(2K\frac{\varphi}{2\pi})}{dn(2K\frac{\varphi}{2\pi})}\right\}$$

即ち $$Z=ih-2K\frac{h}{\pi}\cdot Z_{00}(2K\tfrac{\varphi}{2\pi})\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ここに $$Z_{00}(2K\tfrac{\varphi}{2\pi})\equiv\frac{\Theta_1'(2K\frac{\varphi}{2\pi})}{\Theta_1(2K\frac{\varphi}{2\pi})}\quad **$$

である。$\varphi=\alpha$ に於ては $Z=ih+C$ であり、又ここが $Z_{00}(2K\cdot\varphi/2\pi)$ の極値を取る点であるから、この点では $Z_{00}'(2K\cdot\varphi/2\pi)_{\varphi=\alpha}=0$ である。即ち

$$(4)\left\{\begin{aligned}&C=-2K\cdot\frac{h}{\pi}\cdot Z_{00}(2K\cdot\alpha/2\pi)\\&Z_{00}'(2K\cdot\tfrac{\alpha}{2\pi})=1-\frac{E}{K}-k^2\frac{cn^2(2K\frac{\alpha}{2\pi})}{dn^2(2K\frac{\alpha}{2\pi})}=\frac{k'^2}{dn^2(2K\frac{\alpha}{2\pi})}-\frac{E}{K}\\&\qquad=0^{\dagger}\end{aligned}\right.$$

---

* 及び **, † の註は右の頁の下にあり

Z_{00} の曲線を種々の母数θについて描いたのが第9.14図である。尚母数θと $\ln\rho$ との関係は例へば Jahnke-Emde: Funktionen-tafeln, erste Aufl. (1909) S.65〜67 に与へられてある。 第9.14図

---

* H. Hancock: Lectures on the Theory of Elliptic Functions Vol I, New York, John Wiley & Sons, 1910. P.221

** $Z_{00}(w)=\Theta_1'(w)/\Theta_1(w)$, $Z_{01}(w)=\Theta'(w)/\Theta(w)$, $Z_{10}(w)=H_1'(w)/H_1(w)$, $Z_{11}(w)=H'(w)/H(w)$ は Thomae の定義である。

† H. Hancock, loc. cit. P.296

6.2. 扨 Z と w との対応を更に判然させる為に w−平面を考へよう。これは第9.15図の如くであつて 12341 の導体面は w−平面の 12341 なる線分となる。又 656 の面は図の如く w−平面の実軸上の $-\frac{1}{2}$ から $+\frac{1}{2}$ 迄の線分である。 第9.15図

(1.1)より Z の虚軸上の点は 1……5 間では $w=iv$ として

$$Z(iv)=i\left\{h\frac{2K}{K'}v+2K\frac{h}{\pi}\cdot Zn(2Kv,k')\right\}$$

$$0\le v\le\frac{K'}{2K}$$

である。又 3(6) の間では

$$Z\left(\pm\frac{1}{2}+iv\right)=i\left\{h\frac{2K}{K'}v+2K\frac{h}{\pi}\cdot Zn(2Kv,k')+2K\frac{h}{\pi}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{dn(2Kv,k')cn(2Kv,k')}{sn(2Kv,k')}\right\}$$ (参照第9.16図)

第9.16図

6.3. 磁界を考へよう。これは $-\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dZ}=-\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dw}\Big/\frac{dZ}{dw}$ で与へられる。そして(2.1)より

$$-\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dw}=-\frac{I}{2\pi}\cdot2K\left\{-\frac{\ln|z_0|}{iK'}+\frac{H'(2Kw-2Kw_0)}{H(2Kw-2Kw_0)}-\frac{H'(2Kw-2K\bar{w}_0)}{H(2Kw-2K\bar{w}_0)}\right\}$$

$$=-\frac{I}{2\pi}\cdot2K\left\{-\frac{\ln(z_0)}{iK'}+Z_{11}(2Kw-2Kw_0)-Z_{11}(2Kw-2K\bar{w}_0)\right\}$$

である。又(1.1)より

$$\frac{dZ}{dw}=-(2K)^2\frac{h}{\pi}\left\{Zn'(2Kw)-dn^2(2Kw)-dn^2(i\cdot2Kw,k')+1\right\}^{*}$$

$$=-(2K)^2\frac{h}{\pi}\left\{-\frac{E}{K}+k^2sn^2(i\,2Kw,k')\right\}^{\dagger}$$

$$=(2K)^2\frac{h}{\pi}\left\{\frac{E}{K}+k^2\frac{sn^2(2Kw,k)}{cn^2(2Kw,k)}\right\}$$

故に磁界は次の様になる。

---

*- H. Hancock: loc. cit P.263

† $Zn'(u)=dn^2u-\frac{E}{K}$, $1-dn^2u=k^2sn^2u$ を用いれば得られる。

$$H_y + iH_x = -\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dZ} = -\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dw}\Big/\frac{dZ}{dw}$$

$$= \frac{-\frac{I}{2\pi h}\cdot\frac{\pi}{2K}\left\{-\frac{\ln|\chi_0|}{iK'} + Z_n(2Kw - 2Kw_0) - Z_n(2Kw - 2K\bar{w}_0)\right\}}{\left\{\frac{E}{K} + k'^2\frac{sn^2(2Kw)}{cn^2(2Kw)}\right\}} \quad \cdots (5)$$

特に導板の上では $w = \frac{\tau}{2} + \frac{\varphi}{2\pi}$ $\left(2Kw = iK' + 2K\frac{\varphi}{2\pi} = iK' + 2Kx\right)$ である。又源電流の位置が $w_0 = iv_0$ $(2Kw_0 = i2Kv_0)$ であるとするならば導板に沿っては磁界は H_x のみであり、これは次の様になる。

$$iH_x = -\frac{I}{2\pi h}\cdot\frac{\pi}{2K}\left\{\frac{2\pi v_0}{iK'} + Z_n(2Kx - i\cdot 2Kv_0)\right.$$
$$\left.- Z_n(2Kx + i2Kv_0)\right\}\Big/\left\{\frac{E}{K} - \frac{k'^2}{dn^2(2Kx)}\right\} \ *$$

扨加法定理

$$Z_n(u+v) = Z_n(u) + Z_n(v) - k^2 sn\,u\cdot sn\,v\cdot sn(u+v)$$
$$sn(u+v) = (sn\,u\,cn\,v\,dn\,v + sn\,v\,cn\,u\,dn\,u)/(1-k^2 sn^2u\,sn^2v)$$

に於て u, v の代りに夫々 $2Ku$ 及び $\pm i\cdot 2Kv_0$ を代入し、少しく計算すると

$$Z_n(2Ku \pm 2Kv_0 i) = Z_n(2Ku) \pm iZ_n(2Kv_0) \mp i\frac{sn(2Kv_0)dn(2Kv_0)}{cn(2Kv_0)}$$

第9.17図

$$\pm ik^2\frac{sn(2Ku)sn(2Kv_0)}{cn(2Kv_0)}\cdot\frac{sn(2Ku)dn(2Kv_0) \mp i\,sn(2Kv_0)cn(2Kv_0)cn(2Ku)dn(2Ku)}{cn^2(2Kv_0) + k^2 sn^2(2Ku)sn^2(2Kv_0)}$$

となる。ここに $2Ku$ を変数とする楕円函数の母数は k であり、$2Kv_0$ を変数とする楕円函数の母数は k' であることに注意を要する。扨、この $Z_n(2Ku \pm 2Kv_0 i)$ の表示を用いて計算すると結局 H_x に対する次の表示が得られる。

$$H_x = \frac{I\pi}{2\pi h}\cdot\frac{4K}{(2K)^2}\left\{Z_n(2Kv_0) - \frac{sn(2Kv_0)cn(2Kv_0)dn(2Kv_0)}{1 - sn^2(2Kv_0)dn^2(2Ku)}dn^2(2Ku)\right\}\Big/\left\{\frac{k'^2}{dn^2(2Ku)} - \frac{E}{K}\right\}$$

ここに $0 \le 2Kv_0 \le K'$, $0 \le |2Ku| \le K$ $\cdots\cdots (5.1)$ **

---

* $H'(u \pm iK')/H(u \pm iK') = \Theta'(u)/\Theta(u) \mp \pi i/2K$ (Hancock; P. 288) 即ち $Z_n(u \pm iK') = Z_n(u) \mp (\pi i/2K)$ であるから之より容易に得られる。

** $Z_n(u + iv) - Z_n(u - iv) = 2Z_n(iv) - 2k^2\frac{sn(iv)cn(iv)dn(iv)sn^2(u)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(iv)}$

$\cdots$ (H. Hancock : P.350)

$$= 2Z_n(iv) - 2k^2\left\{\frac{i\,sn(v,k')dn(v,k')}{cn^3(v,k')}sn^2(u)\right\}\Big/\left\{1 + k^2\frac{sn^2(u)sn^2(v,k')}{cn^2(v,k')}\right\}.$$

$$= 2i\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}dn(v,k') - \frac{i\pi v}{KK'} - 2iZ_n(v,k') - 2ik^2\frac{sn(v,k')dn(v,k')}{cn(v,k')}\times$$
$$\times\frac{sn^2(u)}{cn^2(v,k') + k^2 sn^2(v,k')sn^2(u)} \quad \text{故に}$$

$$Z_n(u - iv) - Z_n(u + iv)$$
$$= 2i\left[Z_n(v,k') - \frac{sn(v,k')dn(v,k')}{cn(v,k')}\left\{1 - k^2\frac{sn^2(u)}{cn^2(v,k') + k^2 sn^2(v,k')sn^2(u)}\right\}\right] + \frac{i\pi v}{KK'}$$
$$= -\frac{i\pi v}{KK'} + 2i\left\{Z_n(v,k') - \frac{sn(v,k')dn(v,k')cn(v,k')}{1 - sn^2(v,k')dn^2(u,k)}dn^2(u,k)\right\}$$

である。この関係を用ひればよい。

である。特に $u=0$ では $dn\,0=1$ であるから $x=0$ では

$$H_x=\frac{I}{2\pi h}\frac{\pi}{K}\left\{Zn(2Kv_0)-\frac{sn(2Kv_0)\,dn(2Kv_0)}{cn(2Kv_0)}\right\}\Big/\left\{k'^2-\frac{E}{K}\right\} \quad \cdots\cdots(5.2)$$

であり、又 $u=\frac{1}{2}$ では $dn\,K=k'$ であるから $x=\frac{1}{2}$ では　　第9.18図

$$H_x=\frac{I}{2\pi h}\cdot\frac{\pi}{K}\left\{Zn(2Kv_0)-\frac{sn(2Kv_0)\,cn(2Kv_0)}{dn(2Kv_0)}\right\}\Big/\left\{1-\frac{E}{K}\right\} \quad \cdots\cdots(5.3)$$

となる。これは夫々薄板上の1及び 1/2 の点の切線磁界である。又その差はその点(即ち薄板の中央)に於ける面電流密度である。これを $K_z(0)$ とおけば次の様になる。

$$K_z(0)=\frac{I}{2\pi h}\cdot\frac{\pi}{K}\left\{\frac{Zn(2Kv_0)-sc(2Kv_0)\,dn(2Kv_0)}{k'^2-E/K}-\frac{Zn(2Kv_0)-sd(2Kv_0)\,cn(2Kv_0)}{1-E/K}\right\}$$
$$\cdots\cdots(5.4)$$

$$sc(2Kv_0)\equiv sn(2Kv_0)/cn(2Kv_0),\quad sd(2Kv_0)\equiv sn(2Kv_0)/dn(2Kv_0)$$

上の Jacobi の楕円函数の母数はすべて k' である。

6.4 次に $w_0=iv_0$ $(2Kw_0=i\cdot 2Kv_0)$ は前と全様として，$2Kw=2Ku$ とすると無限平面上の磁界が求められる。この場合にも磁界は H_x のみであり，これは(5)より次の様に与へられる。

$$iH_x=-\frac{I}{2\pi h}\frac{\pi}{2K}\left\{-\frac{2\pi v_0\cdot i}{K'}+\frac{H'(2Ku-2Kv_0\cdot i)}{H(2Ku-2Kv_0\cdot i)}\right.$$
$$\left.-\frac{H'(2Ku+2Kv_0\cdot i)}{H(2Ku+2Kv_0\cdot i)}\right\}\Big/\left\{\frac{E}{K}+k^2\frac{sn^2(2Ku)}{cn^2(2Ku)}\right\}$$

扨

$$\frac{\Theta^2(0)}{k}\cdot\frac{H(v-u)\,H(v+u)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(v)}=sn^2(v)-sn^2(u) \quad *$$

なる公式がある。これの両辺の対数的微分をとって

$$\frac{H'(v+u)}{H(v+u)}-\frac{H'(v-u)}{H(v-u)}=2\left\{Zn(u)-\frac{sn(u)\,cn(u)\,dn(u)}{sn^2(v)-sn^2(u)}\right\}$$

が得られる。ここで $v=2Ku$，$u=2Kv_0\cdot i$ とし Zn, sn, cn, dn 等が虚変換公式，即ち

$$Zn(iu,k)=i\frac{sn(u,k')}{cn(u,k')}dn(u,k')-\frac{i\pi u}{2K'K}-i\,Zn(u,k')$$

$$sn(iu,k)=i\,sc(u,k'),\quad cn(iu,k)=nc(u,k')\equiv 1/cn(u,k')$$
$$dn(iu,k)=dc(u,k')$$

を用いると

$$\frac{H'(v+iu)}{H(v+iu)}-\frac{H'(v-iu)}{H(v-iu)}=-2i\left\{\frac{\pi u}{2KK'}+Zn(u)-\frac{sn(u)\,cn(u)\,dn(u)\,cn^2(v)}{sn^2(u)+cn^2(u)\,sn^2(v)}\right\}$$

なる関係が得られる。之を利用して H_x は次の様になる。

---

* H. Hancock : P. 370

$$H_x = -\frac{I}{2\pi h}\cdot\frac{\pi}{K}\left\{Zn(2Kv_0) - \frac{sn(2Kv_0)cn(2Kv_0)dn(2Kv_0)cn^2(2Ku)}{sn^2(2Kv_0)+cn^2(2Kv_0)sn^2(2Ku)}\right\}\Big/\left\{\frac{E}{K}+k'^2\frac{sn^2(2Ku)}{cn^2(2Ku)}\right\}$$

但し，$2Kv_0$を変数とする楕円函数の母数はk'であり，$2Ku$を変数とする楕円函数はkであることを注意する。上式は少し変形すると(5.5)の様になる。

$$H_x = -\frac{I}{2\pi h}\cdot\frac{\pi}{K}\left\{Zn(2Kv_0) - \frac{sn(2Kv_0)cn(2Kv_0)dn(2Kv_0)cn^2(2Ku)}{1-cn^2(2Kv_0)cn^2(2Ku)}\right\}\Big/\left\{\frac{E}{K}+k'^2\frac{sn^2(2Ku)}{cn^2(2Ku)}\right\} \qquad \cdots\cdots(5.5)$$

特に $u=0$では $cn\,0=1$ $sn\,0=0$ であるから　H_xは次の様になる。

$$H_x = -\frac{I}{2\pi h}\frac{\pi}{K}\left\{Zn(2Kv_0) - \frac{cn(2Kv_0)dn(2Kv_0)}{sn(2Kv_0)}\right\}\Big/\left\{\frac{E}{K}\right\}$$
$$(x=0) \qquad \cdots\cdots(5.6)$$

又 $u=1/2$ では　$cn K=0$，$sn K=1$ であって

$$H_x = 0 \quad , \quad (x=1/2) \qquad \cdots\cdots(5.7)$$

となる。これは当然予想される結果である。又(5.6)は平面導体を流れる面電流でもある。

6.5　次に薄板の上のグリーン函数と逸脱磁束について考へる。即ちZ－平面の種々の特殊な点に対するグリーン函数を求め之を用ひて磁束分布を考察して見よう。先づ薄板の上では前述の如く　$w = \tau/2 + \varphi/2\pi$　即ち　$2Kw = iK' + 2K\,\varphi/2\pi$　である。源の位置は　$w_0 = u_0 + iv_0$　とおいて之を(2.1)に代入すると

$$G\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\varphi}{2\pi}; u_0+iv_0\right) = \frac{\mu I}{2\pi}\left\{-\frac{iK'+2K(\varphi/2\pi)}{iK'}(-2\pi v_0) + \right.$$
$$\left. + \ln\frac{H(iK'+2K\frac{\varphi}{2\pi}-2K\cdot w_0)}{H(iK'+2K\frac{\varphi}{2\pi}-2K\bar{w}_0)}\right\}$$

が得られる。然るに

$$H(v+iK') = i\,e^{\frac{\pi}{4}\frac{K'}{K}-\frac{\pi i v}{2K}}\,\Theta(v) \quad *$$

なる関係式があるから之を上式に代入し且Gの実数部のみをとると

$$\mathbf{R}\,G\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\varphi}{2\pi}; u_0+iv_0\right) = \frac{\mu I}{2\pi}(2\pi v_0 - 2\pi v_0) = 0$$

となる。又無限遠，即ち　$w = \pm\frac{1}{2}$ では　$H(K+v) = H_1(v)$を用ひると矢張り(2.1)より　$\mathbf{R}\,G(\pm\frac{1}{2}; u_0+iv_0) = 0$ が得られる。上の二つの結果より薄板と無限遠の間を貫く磁束は存在しないことが明らかとなった。即ち直線状電流は薄板及びそれに平行な平面を上表とする半無限導体に分れて還流し全体として系は平衡系(即ち系全体の電流の総和が零)を作ってゐる。

---

* H. Hancock　P. 288

6.6　Z-平面の虚軸上，即ち薄板の中心軸上のグリーン函数を求める。源もこの軸上にあるとして $w=iv$, $w_0=iv_0$ としよう。　つ-10.

(2.1)より

$$G(iv;iv_0)=\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\frac{2Kv_0\tau}{iK'}2\pi v_0+\ln\frac{H(2K(v-v_0)i)}{H(2K(v-v_0)i)}\right\}.$$

が得られる。公式*

$$H(iu,k)=i\sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}\cdot\frac{\Theta(0,k)}{\Theta(0,k')}H(u,k')$$

を用ひると上のグリーン函数の表示は次の如くなる。即ち 1.5 図では (6.1) の様になる。

$$G(iv;iv_0)=\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\ln\frac{H(2K(v-v_0),k')}{H(2K(v+v_0),k')}\right\}\quad\cdots\cdots(1\cdots5)\qquad\cdots(6.1)$$

若し，ここで $iv=\tau/2$ として薄板の部分を考へると $v=K'/(2K)$ であるから，上式は

$$\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\ln\frac{H(K'-2Kv_0,k')}{H(K'+2Kv_0,k')}\right\}=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\left\{\frac{H_1(-2Kv_0,k')}{H_1(2Kv_0,k')}\right\}=0$$

とであって当然の結果が得られる。

次に同様にして 3…(6) の図では $w=\pm\frac{1}{2}+iv$, $w_0=iv_0$ として次の (6.2)** が得られる。

$$G\left(\pm\tfrac{1}{2}+iv;iv_0\right)=\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\ln\frac{\Theta(2K(v-v_0),k')}{\Theta(2K(v+v_0),k')}\right\}\quad(3\cdots(6))\quad\cdots(6.2)$$

ここに $2Kv$, $2Kv_0$ 等の変化範囲は $0\sim K'$ である。

先づ 1……5 の図を考へる (6.1) は又次の様にも書くことが出来る。即ち $u=2Kv$, $a=2Kv_0$ として

$$G(iv;iv_0)=\frac{\mu I}{2\pi}\cdot 2\left\{\Pi(u,a+iK,k')-u\frac{cn(a)dn(a)}{sn(a)}-u\cdot Zn(a)\right\}\quad\cdots(6.11)^{\dagger}$$

ここに $\Pi(u,a,k)\equiv\int_0^a\frac{k^2sn(a)cn(a)dn(a)sn^2(u)}{1-k^2sn^2(a)sn^2(u)}du$ は Jacobi の第三種楕円積分であり，$sn(a)$, $cn(a)$, $dn(a)$ 及び $Zn(a)$ は皆 k'。

* H. Hancock： P.213.

** (2.1)で $w=\pm\frac{1}{2}+iv$, $w_0=iv_0$ として

$$G=\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\frac{\pm K+2Kv\cdot i}{iK'}\cdot 2\pi v_0+\ln\frac{H(\pm K+2Kv\cdot i-2Kv_0 i)}{H(\pm K+2Kv\cdot i+2Kv_0 i)}\right\}$$ であるから

$$RG=\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\frac{K}{K'}\cdot 4\pi v\cdot v_0+\ln\frac{H_1(2\pi(v-v_0)i)}{H_1(2\pi(v+v_0)i)}\right\}=\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\frac{K}{K'}4\pi v\cdot v_0+\right.$$

$$\left.+\ln\frac{H(2\pi(v-v_0)i+K)}{H(2\pi(v+v_0)i+K)}\right\}$$ である。そして $\ln\frac{H(\alpha i)}{H(\beta i)}=\frac{\pi}{4KK'}(\alpha^2-\beta^2)+$

$$+\ln\frac{H(\alpha,k')}{H(\beta,k')}$$ とし更に $H(v-iK')=-i\,e^{\frac{\pi}{4}\frac{K'}{K}+\frac{\pi i}{2K}v}\,\Theta(v)$

なる関係を用ひると得られる

† Hancock； P.426.

を母数とする。(6.11)は $u=0$, $u=K'$で共に0となる。そして

$$\frac{d}{du}\ln\frac{H(u-a)}{H(u+a)}=2\left\{\frac{sn(a)\,cn(a)\,dn(a)}{sn^2(u)-sn^2(a)}-Zn(a)\right\}\quad\cdots(6.12)^*$$

であるから $G(iv;iv_0)$ は $v=v_0\,(u=a)$ で微分係数が0になるそして前後では方向切線の符号が逆である。又(6.12)の $u=0$ 及び $u=K'$ に於ける値は夫々

$$-2\left\{\frac{cn(a)\,dn(a)}{sn(a)}+Zn(a)\right\}\quad 及び\quad 2\left\{\frac{sn(a)dn(a)}{cn(a)}-Zn(a)\right\}\quad\cdots(6.13)$$

である。

次に3…6間を考へる。(6.2)は又 $v=2Kv$; $a=2Kv_0$ として

第9.19図 $$G\left(\pm\tfrac{1}{2}+iv;\,iv_0\right)=\frac{\mu I}{2\pi}\cdot 2\{\Pi(u,a,k')-u\,Zn(a,k')\}$$

と書ける。** $u=0$. 及び K'では $\Pi(u,a)$ は夫々 0 及び $K'Zn(a,k')$ となるから $G=0$ である。そして

$$\frac{d}{du}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}=2\left\{\frac{d}{du}\Pi(u,a)-Zn(a)\right\}=Zn(u-a)-Zn(u+a)$$

第9.20図 である。† 故に $Zn(u-a)=Zn(u+a)$ になる様な点 $u=u_0$ に於ては G は極値をとる。この点は各母数 k' に対して $Zn(u)$ と u との関係を示す曲線を画けば容易に求められる。

第七節　中心に対して対称の位置に二條のスリットを有する薄円柱遮蔽体よりの磁界の逸脱

7.1. 薄円柱の中心に置かれた双極線状電流源の発生する磁界が円柱に存在するスリットから如何に漏洩するかを調べよう。スリットは円柱に対して対称の位置に二條あるものとする。(第9.21図参照)

Buchholz‡ は一様な外部磁界がこの様なスリットを通して円柱内に侵入する模様を »同軸導体の不完全な継目を通して外部擾乱の滲入する問題« として解いてゐる。ここで考察せんとする »双極源によって成起する磁界が遮蔽薄円柱殻のスリットを通して漏洩する問題については Buchholz は一言もふれてゐないが、同様の取扱ひが出来るのであり、且つ両者を比較してみると色々興味がある。故にここに少しく詳細に論ずることにする。

第9.21図 第9.21図は Z-平面に於ける系の断面図を示すものであって薄導体の断面1234及び1′2′3′4′に沿って平面に切断を入れると Z-平面は二重連接面である。問題は導体1234及1′2′3′4′の上で定値をとり源で特異点を持つ様なグリーン函数を求めることである。我々は同心円間の領域のグリーン函数を既

* Hancock; P.426　　** Hancock; P.420.　　† Hancock; P.422

‡ H. Buchholz: ENT, Bd 14, (1937) S.408～413

を知ってゐるから、適当な変換によってZ-平面の全領域をζ-平面の円輪領域に写像すればよい。

先づ $\eta = i\frac{b-Z}{b+Z}$, $Z = b\frac{i-\eta}{i+\eta}$ ……(1)

の変換によって、導体はη-平面の実軸の上に第9.22図の様に配置される。更に

$$\eta = \mathrm{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot dn\left(\frac{\ln\zeta}{2\pi i}2K, k\right) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\rho = q^{-2} = e^{-2\pi i\tau}, \quad \tau = \frac{iK'}{K}, \quad k^2 = 1 - tg^4\frac{\delta}{2} \quad \cdots\cdots(2.1)$$

の関係によって結局Z-平面はζ-平面の同心円領域に写像される。扨て、ζ-平面の円輪領域のグリーン函数は既に述べた様に

$$G(\zeta;\zeta_0) = \frac{\mu I}{2\pi}\left\{-\frac{\ln|\zeta_0|}{\ln\rho}\ln\zeta + \ln\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln(\zeta\bar{\zeta}_0)}{2\pi i}\middle|2\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln(\zeta/\zeta_0)}{2\pi i}\middle|2\tau\right)}\right\}$$

$$|\arg\zeta| \leq 2\pi$$

第9.22図

第9.23図

である。之は又

$$2\vartheta_1^2(u|2\tau) = \vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(u|\tau) - \vartheta_4(0|\tau)\vartheta_3(u|\tau)$$

の関係を用ひて、τを副変数とする函数に直し、且つ

$$dn(2Ku) = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}\cdot\frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_4(u)}$$

なる関係を用いると結局次の(3)の様になる。

$$G(\zeta;\zeta_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\ln\frac{\vartheta_4\left(\frac{\ln(\zeta\cdot\bar{\zeta}_0)}{2\pi i}\middle|\tau\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\ln(\zeta/\zeta_0)}{2\pi i}\middle|\tau\right)} - \ln\frac{1-dn\left[\frac{\ln(\zeta\cdot\bar{\zeta}_0)}{2\pi i}\cdot 2K, k\right]}{1-dn\left[\frac{\ln(\zeta/\zeta_0)}{2\pi i}\cdot 2K, k\right]} - 2\frac{\ln|\zeta_0|}{\ln\rho}\ln\zeta\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$

§2. Z-平面の双極線状電流源の位置を次の様に与へる。

$$Z_1 = \epsilon\cdot e^{i\alpha}, \quad Z_2 = -\epsilon\, e^{i\alpha}$$

但しεは非常に小さい正の数とする。此等に対応するζ-平面上の点を夫々ζ_1, ζ_2とするとこれらは次の様に与へられる。

$$\zeta_1 = i\sqrt{\rho}(1+\Delta\zeta), \quad \zeta_2 = i\sqrt{\rho}(1-\Delta\zeta)$$

これに対するηを$\eta_{(1)}$及び$\eta_{(2)}$とすると此等は次の様になる。

$$\eta_{(1)} = \mathrm{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot dn\left(\frac{\ln\zeta_1}{2\pi i}\cdot 2K, k\right)$$

$$\eta_{(2)} = \mathrm{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot dn\left(\frac{\ln\zeta_2}{2\pi i}\cdot 2K, k\right)$$

扨 $\frac{\ln(\zeta_1)}{2\pi i}\cdot 2K \cong \frac{2K}{2\pi i}\left\{i\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln\rho \pm \Delta\zeta + O(\Delta\zeta)^2\right\} = \frac{K}{2} - iK' + \frac{\Delta\zeta}{2\pi i}2K$

であり従って $dn\left(\frac{\ln\zeta_1}{2\pi i}\cdot 2K\right) \cong dn\left(\frac{K}{2} - iK'\right) + \frac{\Delta\zeta}{2\pi i}2K\cdot dn'\left(\frac{K}{2} - iK'\right)$

となる。一方 $dn(\frac{K}{2}-iK')=-i\sqrt{k'}$ であり、$dn'(u)=-k^2\times sn(u)\,cn(u)$ を用いると $dn'(\frac{K}{2}-iK')=-k^2\frac{-i\sqrt{k'}}{1-k'}$ となるから結局 $dn(\frac{\ln z}{2\pi i}\cdot 2K)\cong -i\sqrt{k'}(1-\frac{k^2}{1-k'}\cdot\frac{\Delta z}{2\pi i}\cdot 2K)$ となり、k,k' に(2.1)の値を用いると

$$\eta_{(1)} = \mathrm{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot i\,\mathrm{tg}\frac{\delta}{2}\left\{1-\frac{1-\mathrm{tg}^4\frac{\delta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\delta}{2}}\cdot\frac{\Delta z}{2\pi i}\cdot 2K\right\}$$
$$= i\left\{1-\frac{2K}{\cos^2\frac{\delta}{2}}\cdot\frac{\Delta z}{2\pi i}+O(\Delta z)^2\right\}$$

となる。同様に

$$\eta_{(2)} = i\left\{1+\frac{2K}{\cos^2\frac{\delta}{2}}\cdot\frac{\Delta z}{2\pi i}+O(\Delta z)^2\right\}$$

が得られる。
一方

$$\eta_{(1)} = i\frac{b-\epsilon e^{ix}}{b+\epsilon e^{ix}} \cong i\left\{1-\frac{2\epsilon}{b}e^{ix}+O\left(\frac{\epsilon^2}{b^2}\right)\right\}$$
$$\eta_{(2)} = i\frac{b+\epsilon e^{ix}}{b-\epsilon e^{ix}} \cong i\left\{1+\frac{2\epsilon}{b}e^{ix}+O\left(\frac{\epsilon^2}{b^2}\right)\right\}$$

であるから、$\eta_{(1)}$ 及び $\eta_{(2)}$ に対する上の夫々の表現を等しいとおくことにより

$$\Delta z = i\cdot\frac{2\epsilon}{b}\cdot\frac{\pi}{K}\cos^2\frac{\delta}{2}\cdot e^{ix}+O\left(\frac{\epsilon^2}{b^2}\right) \equiv i\,m\,e^{ix}$$
$$m=\frac{2\epsilon}{b}\cdot\frac{\pi}{K}\cos^2\frac{\delta}{2}$$

が得られる。かくて Δz が得られたからこれを用いて

$$\frac{1}{2\pi i}(\ln z-\ln z_1)=A_1-\frac{\Delta z}{2\pi i},\quad \frac{1}{2\pi i}(\ln z-\ln z_2)=A_1+\frac{\Delta z}{2\pi i}$$
$$\frac{1}{2\pi i}(\ln z+\ln\bar z_1)=(A_1-\tau)+\frac{\Delta\bar z}{2\pi i},\quad \frac{1}{2\pi i}(\ln z+\ln\bar z_2)=(A_1-\tau)-\frac{\Delta\bar z}{2\pi i}$$
$$A_1\equiv\frac{\ln z}{2\pi i}-\frac14+\frac{\tau}{2}$$

とおいて双極子状電流に関するグリーン函数を計算する。これは、$G(z;z_1,z_2)=G(z;z_1)-G(z;z_2)$
で与へられる。$G(z;z_1)$ 及び $G(z;z_2)$ に(3)の表現を代入しその第一項及び第二項並びに第三項に相当するものを夫々次に計算しよう。先づ第一項は

$$\text{第一項}=\frac12\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\ln\frac{\vartheta_4(A_1-\tau+\frac{\Delta\bar z}{2\pi i})}{\vartheta_4(A_1-\frac{\Delta z}{2\pi i})} - \ln\frac{\vartheta_4(A_1-\tau-\frac{\Delta\bar z}{2\pi i})}{\vartheta_4(A_1+\frac{\Delta z}{2\pi i})}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\ln \frac{\vartheta_4(A_1-\tau+\frac{\Delta\bar{z}}{2\pi i})}{\vartheta_4(A_1-\tau-\frac{\Delta\bar{z}}{2\pi i})}\,\frac{\vartheta_4(A_1+\frac{\Delta z}{2\pi i})}{\vartheta_4(A_1-\frac{\Delta z}{2\pi i})}\right\}^{*}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{-q\cdot\exp 2\pi i(A_1-\tau+\Delta\bar{z}/2\pi i)\cdot\vartheta_4(A_1+\Delta\bar{z}/2\pi i)\,\vartheta_4(A_1+\Delta z/2\pi i)}{-q\cdot\exp 2\pi i(A_1-\tau-\Delta\bar{z}/2\pi i)\,\vartheta_4(A_1-\Delta\bar{z}/2\pi i)\,\vartheta_4(A_1-\Delta z/2\pi i)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\ln\exp(2\Delta\bar{z})+2\cdot\frac{\Delta\bar{z}}{2\pi i}\cdot\frac{\vartheta_4'(A_1)}{\vartheta_4(A_1)}+2\frac{\Delta z}{2\pi i}\cdot\frac{\vartheta_4'(A_1)}{\vartheta_4(A_1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu I}{2\pi}\left\{2\cdot\Delta\bar{z}+\frac{2}{2\pi i}(\Delta z+\Delta\bar{z})\cdot 2K\cdot Zn(u,k)\right\},\quad u\equiv 2K\cdot A_1$$

次に第二項を考へる。これは $dn(u+2iK')=-dn(u)$ の関係を用いて

$$\text{第2項} = \frac{1}{2}\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{1+dn(u)+\frac{\Delta\bar{z}}{2\pi i}\cdot 2K\cdot dn'(u)}{1+dn(u)-\frac{\Delta\bar{z}}{2\pi i}\cdot 2K\cdot dn'(u)}\cdot\frac{1-dn(u)-\frac{\Delta z}{2\pi i}\cdot 2K\,dn'(u)}{1-dn(u)+\frac{\Delta z}{2\pi i}\cdot 2K\cdot dn'(u)}$$

であるから分母子を夫々 $\{1+dn(u)\}\{1-dn(u)\}$ で除して $\ln(1+\epsilon)\doteqdot\epsilon-\cdots\cdots$ の関係を用いて対数函数のつかない表現に直すと次の様になる。

$$\text{第2項} = \frac{1}{2}\frac{\mu I}{2\pi}\left\{\frac{\Delta\bar{z}}{2\pi i}\,\frac{4K\,dn'(u)}{1+dn(u)}-\frac{\Delta z}{2\pi i}\,\frac{4K\,dn'(u)}{1-dn(u)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mu I}{2\pi}\,\frac{\frac{4K}{2\pi i}dn'(u)}{1-dn^2(u)}\left[\{1-dn(u)\}\Delta\bar{z}-\{1+dn(u)\}\Delta z\right]$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi}\cdot\frac{2K}{2\pi i}\,\frac{dn'(u)}{1-dn^2(u)}\left\{(\Delta\bar{z}-\Delta z)-dn(u)\cdot(\Delta\bar{z}+\Delta z)\right\}$$

最後に第三項は $v_{1,2}=i\sqrt{p}\{1\pm im\exp(ix)\}$ であるから

$$|v_{1,2}|=\sqrt{p}\,(1\mp m\sin x),\quad m\equiv\frac{2\epsilon}{b}\cdot\frac{\pi}{K}\cos^2\frac{\delta}{2}$$

であってこれより

$$\text{第3項} = \frac{\mu I}{2\pi}\cdot\frac{\ln z}{\ln\rho}\cdot 2m\sin x$$

が得られる。以上より求めるグリーン函数は次の様になる。

$$G(z;z_1,z_2) = \frac{\mu I}{2\pi}\left\{\Delta\bar{z}+\frac{2K}{2\pi i}(\Delta z+\Delta\bar{z})\,Zn(u,k)+\right.$$

$$\left.+\frac{2K}{2\pi i}[(\Delta\bar{z}-\Delta z)-dn(u)(\Delta\bar{z}+\Delta z)]+\frac{\ln z}{\ln\rho}\cdot 2m\sin x\right\}$$

故 $\Delta\bar{z}+\Delta z=-2m\sin x$, $\Delta\bar{z}-\Delta z=-2im\cos x$,
$\ln z=(u+\frac{K}{2}-iK')\frac{2\pi i}{2K}$ であるからこれらを上式に代入して整頓すると結局次の(A)式を得る。

---

* $\vartheta_4(u-\tau)=-q\cdot\exp\{2\pi i(u-\tau)\}\,\vartheta_4(u)$ なる関係を用い，且つ $\vartheta_4(A_1\pm\Delta\bar{z}/2\pi i)$ は大体 $\vartheta_4(A_1)\pm\frac{\Delta\bar{z}}{2\pi i}\cdot\vartheta_4'(A_1)$ に等しいと考へて且つ $\ln(1+\epsilon)\doteqdot\epsilon$ なる関係を用いると次の行の式が得られる。

9-12. $$G(z;z_1,z_2)=\frac{\mu I}{2\pi}\cdot\frac{i2\epsilon}{b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\Big\{\frac{\pi}{2}\frac{\cos\psi}{K\cdot K'}(2u+K)+\frac{\pi}{K}\sin\psi+$$
$$+2\cos\psi\Big[Zn(u)+\frac{cn(u)\,dn(u)}{sn(u)}\Big]+2i\sin\psi\frac{cn(u)}{sn(u)}\Big\}$$
$$\psi+\frac{\pi}{2}=\chi \qquad \cdots\cdots(4) \qquad \cancel{(4)}$$

ここに $sn(u)$, $cn(u)$, $dn(u)$ および $Zn(u)$ の副変数は k である。

一方 u と Z との関係は (1), (2) より
$$Z=b\cdot\frac{i-\mathrm{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot dn(u+\frac{K}{2}-iK')}{i+\mathrm{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot dn(u+\frac{K}{2}-iK')}=b\,\frac{\sqrt{k'}\,sn(u+\frac{K}{2})-cn(u+\frac{K}{2})}{\sqrt{k'}\,sn(u+\frac{K}{2})+cn(u+\frac{K}{2})} \qquad \cdots\cdots(5)$$
である。

かくして u を仲介変数とする Z と G との関係をもう一度次に書く
$$G(z;z_1,z_2)\equiv G(z;\mathfrak{D})=i\frac{\mu M}{2\pi b}\cos^2\frac{\delta}{2}\Big\{\frac{\pi}{2}(2u+K)\frac{\cos\psi}{KK'}+$$
$$+2\cos\psi\Big[Zn(u,k)+\frac{cn(u,k)\,dn(u,k)}{sn(u,k)}\Big]+\frac{\pi}{K}\sin\psi+\cancel{2i}$$
$$+2i\sin\psi\frac{cn(u,k)}{sn(u,k)}\Big\},\quad M\equiv 2\epsilon I^{*},\quad \psi+\frac{\pi}{2}=\chi \qquad \cdots\cdots(4.1)$$
$$Z=b\cdot\frac{\sqrt{k'}\cdot sn(u+\frac{K}{2})-cn(u+\frac{K}{2})}{\sqrt{k'}\,sn(u+\frac{K}{2})+cn(u+\frac{K}{2})} \qquad \cdots\cdots(5)$$
之で所要のグリーン函数が求められたわけである。次に二、三の特別の場合を考へることによつてこれらの式が妥当であることを立証しよう。

先づ $Z\to\infty$ の場合を考へよう。この場合に対応する u の値は $-K$ であって之を (4.1) に代入すると
$$G(u;\mathfrak{D})=i\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\cdot\Big(-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos\psi}{K'}+\frac{\pi}{K}\sin\psi\Big)$$
となって一定である。従って磁界は $(H_\varphi+iH_r)\exp(-i\varphi)=-dG/dZ=0$ となって無限遠に於ける磁界が消滅する事を示してゐる。

次に $Z\to 0$ の場合を考へる。この場合に対応する u の値は 0 であつてグリーン函数は (4.1) より
$$G(u;\mathfrak{D})\cong i\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\ \frac{2}{u}\cdot e^{i\psi}+O(1) \qquad \cdots\cdots(6)$$
となる。又 (5) で $u\to 0$ として u の1次だけ残すと
$$Z\cong b\cdot\frac{\sqrt{k'}(sn\frac{K}{2}+u\,sn'\frac{K}{2})-(cn\frac{K}{2}+u\,cn'\frac{K}{2})}{\sqrt{k'}\,sn\frac{K}{2}+cn\frac{K}{2}}=$$

* M は双極線状電流のモーメントである。

$$= b\frac{\sqrt{k'}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k'}} + u\frac{k'}{\sqrt{1+k'}}\right) - \left(\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}} - u\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}\right)}{2\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}}$$

$$= \frac{bu}{2}(k'+1) = \frac{bu}{2}\left(1+tg^2\frac{\delta}{2}\right)$$

故に $\frac{2}{u} = \frac{b}{Z}\left(1+tg^2\frac{\delta}{2}\right)$ が得られる。之を用ひて

$$G(u;\mathfrak{D}) = i\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\cdot\frac{b}{Z}\left(1+tg^2\frac{\delta}{2}\right)\cdot e^{i\psi}$$

$$= i\frac{\mu M}{2\pi}\cdot\frac{1}{Z}e^{i\psi} \quad \cdots\cdots(6.1)$$

故に磁界は次の如くなる。

$$(H_\varphi + iH_r)e^{-i\varphi} = -\frac{1}{\mu}\frac{dG}{dZ} = \frac{iM}{2\pi}\cdot\frac{1}{Z^2}\cdot e^{i\psi} = \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{Z^2}e^{i(\psi+\frac{\pi}{2})}$$

故に $Z = re^{i\varphi}$ として

$$H_r = \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{r^2}\sin(\chi-\varphi), \quad H_\varphi = \frac{M}{2\pi}\frac{1}{r^2}\cos(\chi-\varphi) \quad \cdots\cdots(7)$$

となる。これが $Z\to 0$ の附近の磁界で勿論之は原点に置かれたモーメント M なる双極線状電流による磁界に外ならぬ。

次に導体の表面の模様を調べよう。ここでは $u = u_1 \pm iK'$ $\begin{pmatrix}1234\\1'2'3'4'\end{pmatrix}$ である。u_1は実数で $-\frac{3}{2}K \leqq u_1 \leqq \frac{1}{2}K$ である。計算の結果

$$\mathfrak{R}G(u_1\pm iK';\mathfrak{D}) = \mp\frac{\mu M}{2\pi}\cdot\frac{1}{b}\frac{\pi}{K}\cos^2\frac{\delta}{2}\cdot\cos\psi, \quad \begin{pmatrix}1234\\1'2'3'4'\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(8)$$

となつて、従つて導体表面ではグリーン函数の実部は u_1 に無関係に一定となり、従つてそこでは磁界の法線分値は零となる。

7.3. 一般の磁界を求めよう。これは屢々述べた様に

$$H_y + iH_x = (H_\varphi + iH_r)\cdot e^{-i\varphi} = \frac{-1}{\mu}\cdot\frac{dG}{dZ} = -\frac{1}{\mu}\frac{dG}{du}\Big/\frac{dZ}{du}$$

で与へられる。(4.1)及び(5)より

$$\frac{dG}{du} = i\frac{\mu M}{2\pi b}\cos^2\frac{\delta}{2}\left\{\pi\frac{\cos\psi}{KK'} + \cos\psi\left[Z n'(u) + dn^2(u+iK') - dn^2(u)\right] + 2i\sin\psi\left[-\frac{dn(u)}{sn^2(u)}\right]\right\}$$

$$= i\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\left\{\pi\frac{\cos\psi}{KK'} - 2\cos\psi\left[\frac{E}{K} + \frac{cn^2(u)}{sn^2(u)}\right] - 2i\sin\psi\frac{dn(u)}{sn^2(u)}\right\}$$

$$= -2\frac{i\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\left\{\frac{1}{sn^2(u)}\cos\psi - \frac{E'}{K'}\cos\psi + i\sin\psi\frac{dn(u)}{sn^2(u)}\right\}$$

である。又

3.
$$\frac{dZ_1}{du} = i\,\frac{-\{\sqrt{k'}\,sn'(u+\frac{K}{2}) + cn'(u+\frac{K}{2})\}\{\sqrt{k'}\,sn(u+\frac{K}{2}) - cn(u+\frac{K}{2})\} + \triangle}{\{\sqrt{k'}\,sn(u+\frac{K}{2}) + cn(u+\frac{K}{2})\}^2}$$
$$\triangle\frac{+\{\sqrt{k'}\,sn'(u+\frac{K}{2}) - cn'(u+\frac{K}{2})\}\{\sqrt{k'}\,sn(u+\frac{K}{2}) + cn(u+\frac{K}{2})\}}{\#}$$

$$= b\,\frac{2\sqrt{k'}\,dn(u+\frac{K}{2})}{\{\sqrt{k'}\,sn(u+\frac{K}{2}) + cn(u+\frac{K}{2})\}^2}$$

であるから結局磁界は
$$H_y + iH_x = i\frac{M}{2\pi b^2}\cdot\frac{\sin\delta}{2k'}\,nd(u+\tfrac{K}{2})\,ns^2(u)\times$$
$$\times\{\sqrt{k'}\,sn(u+\tfrac{K}{2}) + cn(u+\tfrac{K}{2})\}^2\{\cos\psi + i\sin\psi\,dn(u) -$$
$$-\frac{E'}{K'}\,sn^2(u)\cos\psi\} \quad \cdots\cdots(9)$$

才9.24図

となる。この式より特定の点の磁界を算定する前にZとuの関係(5)を判然たらしめるために両平面に於けるその対応関係を図示すれば才9.24図の如くなる。Z-平面の全領域(∞も含む)はu-平面の矩形内の領域に写像され、そしてZ平面の原点はu-平面の原点に、Z-平面の無限遠は$u=-K$に、そして導体断面はu-平面の実軸に平行な二直線1234及び1'2'3'4'に写像される。

扨 $u=\pm\frac{K}{2}$ とおくとI, IIIの点の磁界が分る。先づ$u=-\frac{K}{2}$即ちIIIの点では
$$H_x = \frac{M}{2\pi b^2}\cdot\cos\psi\cdot\frac{1+k'}{2k'}\left(1-\frac{1}{1+k'}\,\frac{E'}{K'}\right)\sin\delta$$
$$H_y = \frac{-M}{2\pi b^2}\sin\psi\,\frac{1+k'}{2\sqrt{k'}}\cdot\sin\delta, \quad \text{at } u=-\frac{K}{2}\ (\mathrm{III}) \quad \cdots(10.1)$$
となり、又$u=\frac{K}{2}$即ちIの点では
$$H_x = \frac{M}{2\pi b^2}\cdot\cos\psi\cdot\frac{1+k'}{2k'}\left(1-\frac{1}{1+k'}\,\frac{E'}{K'}\right)\sin\delta$$
$$H_y = -\frac{M}{2\pi b^2}\cdot\sin\psi\,\frac{1+k'}{2\sqrt{k'}}\sin\delta \quad \text{at } u=\frac{K}{2}\ (\mathrm{I}) \quad \cdots(10.2)$$
となってIIIの点に於けると全く同じ磁界を作る。

次に33'及び11'の間隙を通して外部に逸脱する磁束について考へよう。その為にI及びIIIの点のグリーン函数の値を求める。(4.1)に於て$u=\pm\frac{K}{2}$とおくと
$$G(\pm\tfrac{K}{2};\mathfrak{D}) = i\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\{\pm 2i\sin\psi\sqrt{k'} \pm \cos\psi(1+k') +$$
$$+\frac{\pi}{K}\sin\psi + \frac{\pi}{K'}\cos\psi\} \quad \cdots(11)$$

となる。(8)と(11)より I1, III3 間を貫く磁束が求められる。即ち二つのグリーン函数の差の実部は磁束Φに等しいのであるから

$$\Phi(\mathrm{I},1)=R\left\{G\left(\frac{K}{2}+iK'\right)-G\left(\frac{K}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\cdot 2\sin\psi\sqrt{k'}-\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\cdot\frac{\pi}{K}\cos\psi$$

$$\Phi(\mathrm{III},3)=R\left\{G\left(\frac{-K}{2}+iK'\right)-G\left(-\frac{K}{2}\right)\right\}$$
$$=-\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\,2\sin\psi\sqrt{k'}-\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\cdot\frac{\pi}{K}\cdot\cos\psi$$

故に

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\mathrm{I},1)&=-\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\left(\frac{\pi}{K}\cos\psi-2\sqrt{k'}\cdot\sin\psi\right)\\ \Phi(\mathrm{III},3)&=-\frac{\mu M}{2\pi b}\cos^2\frac{\delta}{2}\left(\frac{\pi}{K}\cos\psi+2\sqrt{k'}\sin\psi\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

同様に I1′ 及び III3′ 間の磁束は

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\mathrm{I},1')&=-\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\left(\frac{\pi}{K}\cos\psi+2\sqrt{k'}\cdot\sin\psi\right)\\ \Phi(\mathrm{III},3')&=-\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\left(\frac{\pi}{K}\cos\psi-2\sqrt{k'}\sin\psi\right)\end{aligned}\right\}\cdots(12.1)$$

即ち $\psi=0$ の場合には I1 間の磁束と I1′ 間の磁束は相等しく、又 III3 間と III3′ 間の磁束も亦相等しい。又 $\psi=\frac{\pi}{2}$ の時は I1 間と I1′ 間の磁束は相等しく且逆符号である。又 III3 間と III3′ 間の磁束も同量且逆符号である。

次に 1234 又は 1′2′3′4′ と $Z\to\infty$ との間の磁束即ち遮蔽体外に逸脱する磁束は $Z\to\infty$ の場合のグリーン函数は前述の如く

$$G(u;\infty)=i\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos\psi}{K'}+\frac{\pi}{K}\cdot\sin\psi\right)$$

であつてその実部は零である。そしてこれと(8)とから

$$\Phi=R\{G(u,\pm iK')-G(-K)\}=\mp\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\frac{\pi}{K}\cos^2\frac{\delta}{2}\cos\psi\cdots(13)$$

であつて $\psi=\frac{\pi}{2}$ の時には $\Phi=0$ であり、$\psi=0$ の時には $\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\frac{\pi}{K}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}$ なる大さをもつ。ここで更に $\delta=0$ とすれば之はスリットが存在しない場合で、この時は $k=1$ となる。之に対応する K は ∞ となり $\Phi=0$ となる。スリットが無ければ遮蔽体は完全導体であるから磁界が逸脱することが無いから当然の結果である。

又 $\delta\to\pi/2$ とすると遮蔽体は 2.4. の矢の筋状導体に縮退する。そしてその場合には $K\to\frac{\pi}{2}$ となるから(13)は $\Phi=\pm\mu M/(2\pi b)\cdot\cos\psi$ となる。両者の場合の磁束の比 $\pi/K\cos^2(\delta/2)$ はスリット巾 δ によつて定まる。

-14 更に 1234 又は 1'2'3'4' と導体中心を貫く磁束は(8)及び(6)より次の様になる。

$$\Phi = \mathfrak{R}\{G(u_1 \pm iK') - G(0)\} =$$
$$= \mp \frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\frac{\pi}{K}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2}\cdot\cos\psi - \frac{\mu M}{2\pi r}\sin(\psi-\varphi) \quad \cdots\cdots(14)$$

次に遮蔽体が24及び2'4'の点に於ける線状導体に縮退した場合、その24及び2'4'点に於ける線状導体と無限遠との間を貫く磁束は

$K_{\delta\to\pi/2} = \frac{\pi}{2}$ だから(13)より次の様になる。

$$\Phi_{\delta\to\pi/2} = \mp\frac{\mu M}{2\pi b}\cdot\cos\psi \begin{pmatrix}1234\\1'2'3'4'\end{pmatrix} \quad \cdots(13\cdot1)$$

(13)と(13·1)との比をとつて

$$A_s(\delta) = \frac{\pi}{K}\cdot\cos^2\frac{\delta}{2} \quad \cdots\cdots(14)$$

なる量を考へると、これはスリットの巾 δ によつて変化する数値的漏洩磁束と考へられるものでこれを漏洩係数と名付けよう。

Buchholz はスリットを通して同軸導体内に浸入する一様場の磁束に関して浸入係数(Durchgriff)を定義してゐる*がこれと比較することにより次の事が結論される。

»2重スリットを有する遮蔽体に於て、一様外部磁界に対する浸入係数と、遮蔽体中心軸におかれた双極線状電流源に基因する磁界の漏洩係数とは相等しく、共に(14)式で与へられる。«

扨、実軸 $y=0$ 上の磁界をみるために $\psi=0$ 及び $\psi=\pi/2$ の2つの場合をとつて考へよう。先づ

1° $\psi=0$ の場合 には(9)に於て $\psi=0$ として

$$H_x = \frac{M}{2\pi b^2}\cdot\frac{\sin\delta}{2k'}\cdot nd\left(u+\frac{K}{2}\right)\cdot ns^2(u)\times$$
$$\times\left\{\sqrt{k'}\,sn\left(u+\frac{K}{2}\right)+cn\left(u+\frac{K}{2}\right)\right\}^2\left\{1-\frac{E'}{K'}sn^2(u)\right\}$$

$$H_y = 0$$

が得られる。次に

2° $\psi=\pi/2$ の場合 には逆に H_x が 0 になる。

$$H_x = 0$$
$$H_y = -\frac{M}{2\pi b^2}\frac{\sin\delta}{2k'}nd\left(u+\frac{K}{2}\right)ns^2(u)\cdot dn(u)\times$$
$$\times\left\{\sqrt{k'}\,sn\left(u+\frac{K}{2}\right)+cn\left(u+\frac{K}{2}\right)\right\}^2$$

そして z と u との間の関係は前述の如く

* H. Buchholz: loc. cit. S. 440 eq.(20)

$$Z = b\,\frac{\sqrt{k'}\,sn(u+\frac{K}{2}) - cn(u+\frac{K}{2})}{\sqrt{k'}\,sn(u+\frac{K}{2}) + cn(u+\frac{K}{2})}$$

である。

7.4. 最後に、遮蔽体上に於ける面電流分布を考へよう。遮蔽体の両面に於ては

$$u = -\frac{K}{2} \pm u_1 + iK', \quad 0 \le u_1 \le K, \quad \binom{341}{123}$$

であるからこの u の値を(9)に代入して

$$(H_\varphi + iH_r)\cdot e^{-i\varphi} = i\frac{M}{2\pi b^2}\cdot\frac{\sin\delta}{2k'}\cdot nd(\pm u_1 + iK')\times$$

$$\times\, ns^2(-\tfrac{K}{2} \pm u_1 + iK')\left\{\sqrt{k'}\,sn(\pm u_1 + iK') + cn(\pm u_1 + iK')\right\}^2\times$$

$$\times\left\{\cos\psi + i\sin\psi\cdot dn(-\tfrac{K}{2} \pm u_1 + iK') - \frac{E'}{K'}\cos\psi\cdot sn^2(-\tfrac{K}{2} \pm u_1 + iK')\right\} = \mp\frac{M}{2\pi b^2}\cdot\frac{\sin\delta}{2k'}\,sc(u_1)\cdot k^2 sn^2(-\tfrac{K}{2} \pm u_1)\times$$

$$\times\left\{\cos\psi \pm \sin\psi\cdot cs(-\tfrac{K}{2} \pm u_1) - \frac{E'}{K'}\cos\psi\,\frac{1}{k^2}\cdot ns^2(-\tfrac{K}{2} \pm u_1)\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{\sqrt{k'}}{k}\,ns(u_1) - \frac{i}{k}\,ds(u_1)\right\}^2$$

$$= \mp\frac{M}{2\pi b^2}\,\frac{\sin\delta}{2k'}\cdot sc(u_1)\cdot k'\cdot sn^2(-\tfrac{K}{2} \pm u_1)\left\{\cos\psi \pm \sin\psi\cdot cs(-\tfrac{K}{2} \pm u_1) - \frac{E'}{K'}\cos\psi\cdot\frac{1}{k^2}\,ns^2(-\tfrac{K}{2} \pm u_1)\right\} ns^2(u_1)\left\{1 - \frac{i}{\sqrt{k'}}\,dn(u_1)\right\}^2$$

又(5)より

$$Z = b\,\frac{\pm\frac{\sqrt{k'}}{k}\,ns(u_1) \pm \frac{i}{k}\,ds(u_1)}{\pm\frac{\sqrt{k'}}{k}\,ns(u_1) \mp \frac{i}{k}\,ds(u_1)} = b\,\frac{1 + i\,\frac{dn(u_1)}{\sqrt{k'}}}{1 - i\,\frac{dn(u_1)}{\sqrt{k'}}} \equiv b\cdot e^{i\varphi}$$

とすれば $\left\{1 - \frac{i}{\sqrt{k'}}\,dn(u_1)\right\}^2 = e^{-i\varphi}$

であってこれを上の関係式中に代入して H_φ に関する次式を得る。

$$H_\varphi = \pm\frac{M}{2\pi b^2}\cdot\frac{\sin\delta}{2k'}\,\frac{k'}{sn(u_1)\,cn(u_1)}\cdot sn^2(-\tfrac{K}{2} \pm u_1)\times$$

$$\times\left\{\cos\psi \pm \sin\psi\cdot cs(-\tfrac{K}{2} \pm u_1) - \frac{E'}{K'}\cos\psi\,ns^2(-\tfrac{K}{2} \pm u_1)\,\frac{1}{k^2}\right\} \quad \binom{341}{123}$$

点2の磁界を求めよう。$u_1 = -K/2$ で

$$H_\varphi = -\frac{M}{2\pi b^2}\,\frac{\sin\delta}{2k'}\,\frac{k'(1+k')}{\sqrt{k'}}\left\{\cos\psi - \frac{E'}{K'}\cos\psi\,\frac{1}{k^2}\right\}$$

$$= -\frac{M}{2\pi b^2}\,\frac{\sin\delta}{2\sqrt{k'}}\,\frac{1}{1-k'}\left(k^2 - \frac{E'}{K'}\right)\cos\psi$$

又点4では $u_1 = K/2$ であって

5-15
$$H\varphi = -\frac{M}{2\pi b^2}\frac{\sin\delta}{2k'}\frac{k'(1+k')}{\sqrt{k'}}\cdot\frac{E'}{K'}\frac{\cos\psi}{k^2}$$
$$= -\frac{M}{2\pi b^2}\frac{\sin\delta}{2\sqrt{k'}}\cdot\frac{1}{1-k'}\frac{E'}{K'}\cos\psi$$

となる。

以上の結果を綜合して二重スリット遮蔽体の中心に置かれた双極線状電流源に基因する磁界を，双極の二つの特別なOrientationに対して描いてみると大体第9.25図及第9.26図の如くなる事が予想される。遮蔽の見地から云ふと $\psi=\pi/2$ の場合は最も遮蔽の有効な場合であり，$\psi=0$ の場合は最も好ましくない場合である。

第25図
第9.26図

第八節　第九章の總括

円柱状遮蔽体がその軸に沿ってスリットを有する場合の如きはスリットの存在のために遮蔽体に沿ふ磁界分布，従って遮蔽体内部の電流分布が完全遮蔽体の場合に比して非常に複雑になる。そして薄板の端に於ては磁界及び面電流密度が無限大になる。遮蔽体の間隙を通して外界に漏洩する磁界の算定も遮蔽効果の考察に当って欠くことの出来ない問題である。本章は斯る問題について遮蔽体を完全導体と仮想して考察した。

先づ第二節に於ては極めて基礎的な問題であるが重要な無限平面の帯状間隙を通して逸脱する，線状電流源による磁界について論じ，各点の磁界及び薄板中の電流分布を求めた。

次に第三節で一様な磁界中におかれた薄板の反作用について論じ，更に第四節及び第五節に於て一様磁界及び双極線状電流源の場の中の単一スリット薄円柱殼の作用について考察を加へた。

第六節に於ては無限平面とそれと平行に走る線状電流の場が，これらに平行におかれた有限巾の薄板の存在によって如何になるかを詳細に論じ各点の場の模様，薄板中の電流分布を求めた。

最後に第七節で二重スリットを有する薄円柱殼の中心に置かれた双極線状電流源による磁界がスリットを通じて如何に漏洩するかを論じた。これを同構造の円柱殼を一様磁界中において場合を論じたBuchholzの論文と対比してみると事態は更に明瞭になると思ふ。

第九章に対する附録

第九章に於て使用した円領域，円輪領域に於けるグリーン函数について，その概略を説明し，このグリーン函数を用ひて円領域及び円輪領域に於ける調和函数——即ちラプラス方程式を満足する函数——を求め，これを応用して多角形領域を円領域に，

二つの多角形の間の領域を二つの同心円間の円輪領域に写像する問題について述べる。これに関しては境界値問題，偏微分方程式論，流体力学等に関する著書，文献中に散見するが本文の説明に必要な程度を要約するつもりである。これを離れた数学的の問題，例へば存在定理の如き問題には触れない。

1.1 円領域のグリーン函数* ※9.27

単位円を考へる。この円内の領域のある特定の点$Q(z_1)$を除いた円内の他の任意の点で二次元のラプラス方程式$\Delta K=0$を満足し，円周上では$K=0$を満足する様な函数Kがあって，この特定の点Qに於てはKが対数的に∞になる様な場合にはこのKの事を単位円領域内のグリーン函数と云ふが今この函数Kがどの様な形に表はされるかを考へる。

Qの座標を(x_1,y_1)とする。そして円に対するQの影像点をQ'とするとこれは$\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, \frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)$なる座標を有する。そして$Q$, Q'の二点から円周上の任意の点$P_0(x_0,y_0)$に到る距離の比r_{10}/r_{20}は

$$\sqrt{\{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2\}} \Big/ \sqrt{\left(x_0-\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\right)^2+\left(y_0-\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)^2} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

であるから

$$K(x,y;\ x_1,y_1) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

なる函数を考へると，この函数はQの点に於て対数的な特異点を有し，円内のその他の点では到る所$\Delta K=0$を満足し，円周上では$K=0$となる事がすぐ云へるから，之は求めるグリーン函数である。複素数による表現を用ひると$z=x+iy$, $z_1=x_1+iy_1$としKの代りにグリーン函数であることを示すGなる記号を用ひると

$$G(Q;Q') = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{z\bar{z}_1-1}{z-z_1}\right) \qquad \cdots\cdots(1)$$

と書くことが出来る。このGは$z=z_1$に於て対数的特異点を有し，円内の其他の点では到る所ラプラス方程式を満足し，且つその実数部は円周上で零になることが云へる。即ちグリーン函数の複素記法である。

1.2 円輪領域のグリーン函数**

次に二つの同心円$|z|=1$, $|z|=\rho<1$で囲まれたリング領

* Riemann-Weber; Differentialgleichungen der Physik. Bd. I, S.550-551, Braunschweig (1925)

** R. Courant u. D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik Bd. I. Berlin, Julius Springer S.312～314 (1924) この書に与へられてゐる結果を我々の取扱ふ問題に適する様に少し変へた。即ち円輪の内外径がρ, $1/\rho$となってゐるが我々の場合には内外半径をρ, 1として居る。従って結果の表現法も多少異ってゐる。

9-16

域の内部の一点Qに於て対数的な特異点を有し、両円上で零に
第9.28図なる様なポテンシャル函数即ちグリーン函数を求めよう。その
ために前項の単位円の場合に行ったのと同様の方法で内外の
円に対するQ点の鏡像系をとるとその位置はQ点にある正の
単位源に対して、

外円に対しては $1/\bar{z}_1$, $1/\rho^2\bar{z}_1$, …… …… に負像
z_1/ρ^2, z_1/ρ^4, …… …… に正像

並びに内円に対しては

$\rho^2/\bar{z}_1$, $\rho^4/\bar{z}_1$, …… に負像
$\rho^2 z_1$, $\rho^4 z_1$, …… に正像

が並ぶ。即ち z_1 の点にある単位正強さの源に対する鏡像点系は
$1/\bar{z}_1$, $(1/\bar{z}_1)\rho^{\pm2}$, $(1/\bar{z}_1)\rho^{\pm4}$ ……, に負像があり

$z_1\rho^{\pm2}$ $z_1\rho^{\pm4}$ ……… に正像がある様な
系列である。是等の全鏡像による綜合ポテンシャルは

$$\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_1|-\frac{1}{2\pi}\ln\left|z-\frac{1}{\bar{z}_1}\right|+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\left(z-\frac{z_1}{\rho^{2n}}\right)(z-z_1\rho^{2n})\right|$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\left(z-\frac{1}{\rho^{2n}\bar{z}_1}\right)\left(z-\frac{\rho^{2n}}{\bar{z}_1}\right)\right|$$

である。~~是等の鏡像による綜合ポテンシャルは~~
故に之は適当に変形すると常数項は別としてポテンシャル函数は

$$K(z;z_1)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\rho^{2n}\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\rho^{2n}\frac{z_1}{z}\right)}{(1-z\bar{z}_1)\prod_{n=1}^{\infty}(1-\rho^{2n}z\cdot\bar{z}_1)\left(1-\rho^{2n}\frac{1}{z\cdot\bar{z}_1}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{z_1\bar{z}_1}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln\frac{z}{z_1}}{2\pi i}\middle|\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln z\cdot\bar{z}_1}{2\pi i}\middle|\tau\right)}=\frac{1}{2\pi}\ln F(z)$$

となる。但し $\rho=e^{\tau\pi i}<1$ $\tau=\frac{1}{\pi i}\ln\rho$ である。
扨 $|z|=1$ なる円周上では $z=e^{i\theta}$ と置き、且つ
$z_1=ce^{i\Gamma}$ とおくと

$$F(e^{i\theta})=\frac{1}{c}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\theta}{2\pi}-\frac{\Gamma}{2\pi}+i\frac{\ln c}{2\pi}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\theta}{2\pi}-\frac{\Gamma}{2\pi}-i\frac{\ln c}{2\pi}\right)}$$

であって $R\ln F(e^{i\theta})=-\ln c$ となる。又 $|z|=\rho$
なる円周上では $z=\rho e^{i\theta}$ とおくと $\ln z=\ln\rho+i\theta$ であ
り

$$F(\rho e^{i\theta})=\frac{1}{c}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\theta}{2\pi}-\frac{\Gamma}{2\pi}+i\frac{\ln c}{2\pi}+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\theta}{2\pi}-\frac{\Gamma}{2\pi}-i\frac{\ln c}{2\pi}+\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{c}e^{\ln c}\frac{\vartheta_4\left(\frac{\theta}{2\pi}-\frac{\Gamma}{2\pi}+i\frac{\ln c}{2\pi}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\theta}{2\pi}-\frac{\Gamma}{2\pi}-i\frac{\ln c}{2\pi}\right)}$$

となる。故に $\Re \ln F(\rho e^{i\theta}) = 0$ である。

そこで，$F(z)$ の代りに $f(z) = a\cdot z^b\cdot F(z)$ なる $f(z)$ をとって $\ln f(z)$ が両円周上で所要の条件を満足する様に a, b を定める。

$|z| = 1$ の円上では

$$\Re \ln f(z) = \Re(\ln a + b\cdot i\theta - \ln c) = 0$$

又 $|z| = \rho$ の円上では

$$\Re \ln f(z) = \Re(\ln a + b\cdot \ln\rho + b\cdot i\theta) = 0$$

これより $b = -\frac{\ln c}{\ln\rho}$, $a = c$ が得られ，結局 $f(z) = e^{-\frac{\ln c}{\ln\rho}}\vartheta_1\left(\frac{\ln z/z_1}{2\pi i}\middle|\tau\right)\Big/\vartheta_1\left(\frac{\ln z\bar{z}_1}{2\pi i}\middle|\tau\right)$ となる。そして△

△これより，グリーン函数*は

$$G(z;z_1) = \frac{1}{2\pi}\ln f(z) = \frac{1}{2\pi}\left\{\ln\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln z/z_1}{2\pi i}\middle|\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln z\bar{z}_1}{2\pi i}\middle|\tau\right)} - \frac{\ln|z_1|}{\ln\rho}\ln z\right\} \quad \cdots\cdots(2.1)$$

或は $z = e^{2\pi i v}$, $z_1 = e^{2\pi i\alpha}$ とおくと $\bar{z}_1 = e^{-2\pi i\bar{\alpha}}$ であるから上のグリーン函数は

$$G(v;\alpha) = \frac{1}{2\pi}\left\{\ln\frac{\vartheta_1(v-\alpha|\tau)}{\vartheta_1(v-\bar{\alpha}|\tau)} - \frac{\pi i(\alpha-\bar{\alpha})}{\ln\rho}2\pi i v\right\} \quad \cdots(2.2)$$

となる。ここに $\tau = \frac{1}{\pi i}\ln\rho$ である。

3. 円領域の調和函数

領域のグリーン函数が解っている場合には，これより領域の調和函数はその領域の周辺の値を用いて次の様に表はし得る。即ち $u(x,y)$ をその調和解析函数とし，その周辺の値を u_0 とすれば

$$u(x,y) = -\oint_{\mathscr{L}} u_0\frac{\partial G}{\partial n}\,ds \quad \cdots\cdots(3)^{**}$$

である。積分は周辺 L に沿っての周積分を示す。

これによって，単位円領域の調和函数をグリーン函数によって導こう。グリーン函数は前述の如く

$$G(Q;Q') = \frac{1}{2\pi}\Re\ln\left(\frac{z\bar{z}_1-1}{z-z_1}\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z\bar{z}_1-1}{z-z_1}\right|$$

となる。$|z\bar{z}_1-1| = |\bar{z}z_1-1|$ であるから，これは

$$G(Q;Q') = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\bar{z}z_1-1}{z_1-\bar{z}}\right| = \frac{1}{2\pi}\Re\ln\left(\frac{\bar{z}z_1-1}{z_1-\bar{z}}\right)$$

と書く事も出来る。即ちグリーン函数の特徴である所の核の対称性が示されてゐる。このGを Q' 点の座標について円周の法線の方向に微分して（オ9.29図参照）　オ9.29図

* 若し外円半径が $\rho>1$，内円半径が 1 の場合にはグリーン函数は次の如くなる。

$$G(z;z_1) = \frac{1}{2\pi}\left\{\ln\frac{\vartheta_1\left(\frac{\ln z/z_1}{2\pi i}\middle|\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln z\bar{z}_1}{2\pi i}\middle|\tau\right)} + \frac{\ln|z_1|}{\ln\rho}\ln z\right\},\quad \rho^{-1} = e^{\tau\pi i}$$

** Riemann-Weber: Differentialgleichung der Physik, I, S.545 (1925)

$$R\frac{\partial G(Q;Q')}{\partial n_Q}=R\{n\cdot\nabla_Q G(Q;Q')\}=-R z_1\frac{\partial G}{\partial z_1}$$

であるから

$$R z_1\frac{\partial G}{\partial z_1}=R\frac{z_1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\ln\left(\frac{\bar{z}\cdot z_1-1}{z_1-z}\right)=\frac{1}{2\pi}R\left\{\frac{\bar{z}\cdot z_1}{\bar{z}z_1-1}+\frac{z_1}{z-z_1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}R\left\{\frac{z\cdot\bar{z}_1}{z\cdot\bar{z}_1-1}+\frac{z_1}{z-z_1}\right\}$$

となる。最後の式の第一項の分母分子に夫々z_1を乗じ且z_1が円周上にありとすれば$z_1\cdot\bar{z}_1=1$であるから これより上式は

$$\frac{1}{2\pi}R\left\{\frac{z}{z-z_1}+\frac{z_1}{z-z_1}\right\}=\frac{1}{2\pi}R\left\{\frac{z+z_1}{z-z_1}\right\}=\frac{1}{2\pi}R\left\{\frac{z_1+z}{z_1-z}\right\}$$

となり，$u(x,y)$は次の様になる。

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R\left\{\frac{z+z_1}{z-z_1}\right\}u_0(\theta)\,d\theta$$

$$z=x+iy,\qquad z_1=e^{i\theta}\qquad\cdots\cdots(4)$$

上式を複素記号法に変更して

$$W(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z_1+z}{z_1-z}u_0\,d\theta+iC\qquad\cdots\cdots(5)$$

と書くと，$W(z)$はz平面の単位円内で解析函数でその実部$u(x,y)$は同じ領域内での調和函数であり，円周上ではu_0なる値をとる。

$z=re^{i\varphi}$として上式を実部及び虚部に分けると夫々次の様になる。

$$u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}u_0(\theta)\,d\theta\qquad\cdots\cdots(6.1)$$

$$v(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2r\sin(\theta-\varphi)}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}u_0(\theta)\,d\theta+C\qquad\cdots\cdots(6.2)^{*}$$

(6.1)は単位円領域内のポテンシャルに関するPoissonの積分である。又(6.2)は単位円の周辺のポテンシャルを与へてその内部の流れを求める場合に用いて便利である。$r=0$に於けるvの値を$v(0)$とおれば $C=v(0)$ なることがすぐ分る。又領域が単位円でなくて半径Rの円なる時は上式でrの代りにr/Rを用いればよろしい。

4. 円輪領域の調和函数

上の単連領域の場合と殆んど同様の考察を円輪間について行ふことが出来る。扨円輪領域のグリーン函数は

---

* この式の応用に関しては例へば H. Buchholz; Beitrag zur Theorie der Reaktanzspulen mit offenenem Eisenkern [Arch. f. Elekt., **24**, s. 285—304 (1930)]がある。

$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi} R\left\{\frac{2\pi^2 v(\alpha-\bar{\alpha})}{\ln\rho} + \ln\frac{\vartheta_1(v-\alpha|\tau)}{\vartheta_1(v-\bar{\alpha}|\tau)}\right\}$$ 9-1

$$= \frac{1}{2\pi} R\left\{\frac{2\pi^2 \alpha(v-\bar{v})}{\ln\rho} + \ln\frac{\vartheta_1(v-\alpha|\tau)}{\vartheta_1(\bar{v}-\alpha|\tau)}\right\}$$

である。ここに $P(z)$ 及 $Q(z_1)$ は夫々考察点及び源点であつて v 及 α は夫々

$$v = \frac{1}{2\pi i}\ln z,\quad \alpha = \frac{1}{2\pi i}\ln z_1,\quad 0 \leq \arg z;\ \arg z_1 \leq 2\pi$$

で与へられる。そしてこのグリーン函数を用ひて円輪領域内で $\Delta u(x,y)=0$ を満足し、外円 $(|z|=1)$ の上で $u_1(\theta)$ となり内円の上で $u_2(\theta)$ となる様な函数 $u(x,y)$ は

$$u(x,y) = \sum_{\nu}\oint u_\nu(\theta)\frac{\partial G}{\partial n_Q}\,ds,$$

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

で与へられる。$\partial G/\partial n_Q$ は源の座標について領域の周辺でその周辺に垂直に微分することを意味しベクトル的に $\mathbf{n}\cdot\nabla_Q G$ とも書ける。$\mathbf{n}$ は周辺に於ける内向法線であり ∇_Q は Q についての勾配を意味する。

そして才の30図に示す様に

$$\frac{\partial G}{\partial n_Q} = \mathbf{n}\cdot\nabla_Q G = \begin{cases} -z_1\dfrac{\partial G}{\partial z_1} & (\text{外円上}) \\ \dfrac{z_1}{\rho}\dfrac{\partial G}{\partial z_1} & (\text{内円上}) \end{cases}$$ 才9·30図.

である。$z_1 = e^{2\pi i\alpha}$ であるから、$z_1\,\partial G/\partial z_1 = (2\pi i)^{-1}\partial G/\partial\alpha$ であつて結局

$$\frac{\partial G}{\partial n_Q} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\partial G}{\partial\alpha} & (\text{外円上}) \\ \dfrac{1}{2\pi i\rho}\dfrac{\partial G}{\partial\alpha} & (\text{内円上}) \end{cases}$$

である。故に外円上では、

$$\frac{\partial G}{\partial n_Q} = \frac{1}{2\pi}R\left\{\frac{2\pi i v}{\ln\rho} + \frac{1}{\pi i}\frac{\vartheta_1'(v-t)}{\vartheta_1(v-t)}\right\},\qquad t = \frac{\theta}{2\pi}$$

であり内円上では $\vartheta_1\left(v-t-\dfrac{\ln\rho}{2\pi i}\right) = -i\rho^{1/4}e^{\pi i(v-t)}\vartheta_0(v-t)$ を用ひると

$$\frac{\partial G}{\partial n_Q} = \frac{1}{2\pi}R\left\{-\frac{2\pi i v}{\rho\ln\rho} - \frac{1}{\pi i\rho}\frac{\vartheta_0'(v-t)}{\vartheta_0(v-t)}\right\},\quad t = \frac{\theta}{2\pi}.$$

を得るから、今、$w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ として次の函数 $w(z)$ を考へる。

$$w(z) = \int_0^{2\pi}\frac{iv}{\ln\rho}\{u_1(\theta)-u_2(\theta)\}\,d\theta + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}u_1(\theta)\frac{\vartheta_1'(v-t)}{\vartheta_1(v-t)}\,d\theta$$

$$+ -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}u_2(\theta)\frac{\vartheta_0'(v-t)}{\vartheta_0(v-t)}\,d\theta$$

或は $\int_0^{2\pi}\{u_1(\theta)-u_2(\theta)\}\,d\theta = 2\pi C$ とすると次の様に表してよい。

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\frac{\ln z}{\ln\rho}\,2\pi C-\frac{1}{2\pi^2 i}\int_0^{2\pi}u_1(\theta)\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\ln z}{2\pi i}-\frac{\theta}{2\pi}\middle|\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\ln z}{2\pi i}-\frac{\theta}{2\pi}\middle|\tau\right)}d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 i}\int_0^{2\pi}u_2(\theta)\frac{\vartheta_0'\left(\frac{\ln z}{2\pi i}-\frac{\theta}{2\pi}\middle|\tau\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\ln z}{2\pi i}-\frac{\theta}{2\pi}\middle|\tau\right)}d\theta, \quad \cdots\cdots(7)^*$$

$$\tau=\frac{1}{\pi i}\ln\rho$$

これは円輪の領域で z の解析函数であり、領域の限界を示す二つの円周上でその実部が夫々 $u_1(\theta)$ 及び $u_2(\theta)$ なる値をとる事が認められる。換言するならば半径1なる外円周上で $u_2(\theta)$ なる値をとり、半径 $\rho=e^{\pi i\tau}$ $[R(\tau)=0]$ の内円周上で $u_2(\theta)$ なる値をとる調和函数(即ちラプラス方程式を満足する函数)は上の(7)の解析函数 $w(z)$ の実数部で与へられるのである。この函数の虚数部は C が零で無い限り多価函数であるが実数部は一価函数である。(7)の関係は Villat によって与へられたもので境界値問題の解決に屢々応用†されて著名なものである。

5. 多角形の内部を単位円の内部に写像する問題について考へる。Z—平面の多角形 $Z_1\cdots Z_n$ を z—平面の単位円 $z_1,\cdots z_n$ に写像するとしよう。そして多角形の内部は単位円の内部に、又多角形の外部は単位円の外部に写され $Z\to\infty$ は $z\to\infty$ に対応するものとする。

第9.31 9.32図

$$w(z)=\frac{1}{i}\ln\left(i\frac{dZ}{dz}\right) \quad \cdots\cdots(8)$$

なる函数を考へると $w(z)$ は z の解析函数であり、単位円上の $z_{\nu-1}, z_\nu$ 間の円弧上では

$$R\,w(z)=\arg\left(i\frac{dZ}{dz}\right)=\frac{\pi}{2}+\arg\frac{dZ}{dz}=\frac{\pi}{2}+\varphi_\nu-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\varphi_\nu-\theta \qquad \theta_{\nu-1}<\theta<\theta_\nu$$

で従って円周上の与へられた点では $R\,w(z)$ は既知であると考へられる。故に前項の(5)により円内の任意の点では

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi_\nu-\theta)\frac{z+e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}}\,d\theta$$

で与へられる。しかるに

$$\frac{z+e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}}=\frac{d}{d\theta}\left\{\theta+2i\ln(z-e^{i\theta})\right\}$$ であるから上式は

---

* H. Villat: Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo, **33**, p. 134—175 (1912)

† 友近晋: 楕円函数論 第VIII、第IX章(昭和17年)河出書房
H. Buchholz: Die mechanischen Kräfte auf exzentrische rotierenden Zylindrischen Läufer einer zweipoligen Drehfeldmaschine mit flächenhaft verteilten Strombelägen [Arch. f. Elek., **27**, S. 423—447 (1933)] 其の他

部分積分によって

$$w(z) = 2i \ln z - \frac{i}{\pi}\sum_\nu (\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu)\ln(z-e^{i\theta_\nu}) \quad \cdots\cdots(9)$$

となる。$\varphi_{\nu+1}-\varphi_\nu = \kappa_\nu \cdot \pi$ と置く。$\sum_\nu \kappa_\nu = 2$ であって(8), (9)より次の関係式得られる。*

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{A}{z^2}(z-z_1)^{\kappa_1}(z-z_2)^{\kappa_2}\cdots\cdots(z-z_n)^{\kappa_n}$$

即ち $$\frac{dZ}{dz} = A\left(1-\frac{z_1}{z}\right)^{\kappa_1}\left(1-\frac{z_2}{z}\right)^{\kappa_2}\cdots\cdots\left(1-\frac{z_n}{z}\right)^{\kappa_n} \quad \cdots\cdots(10)$$

これは普通Schwartzの変換と云ふ。

次に前節と同様の考察を円輪領域に行つて 第9.33, 9.34図

$$w(z) = \frac{1}{i}\ln\left(i\frac{dZ}{dz}\right)$$

をとつて考へると前述の如くその実部が外円周上又は内円周上で一夫々 $\varphi_{1\nu}-\theta$ 又は $\varphi_{2\nu}-\theta$ の既知の値をとる。そして $z_{1\nu}$, $z_{2\nu}$ を適当にとつて

$$\int_0^{2\pi}(\varphi_{1\nu}-\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(\varphi_{2\nu}-\theta)\,d\theta$$

の関係を満足させ得るならば Villat の式 (7) を用いて

$$w(z) = \frac{1}{2\pi^2 i}\int_0^{2\pi}(\varphi_{2\nu}+\theta)\frac{\vartheta_0'(v-t)}{\vartheta_0(v-t)}\,d\theta - \frac{1}{2\pi^2 i}\int_0^{2\pi}(\varphi_{1\nu}-\theta)\frac{\vartheta_1'(v-t)}{\vartheta_1(v-t)}\,d\theta$$

$$t = \theta/2\pi$$

によつて与へられる $w(z)$ を上の $w(z)$ に用いることにより二つの多角形で囲まれた領域の円輪領域への写像函数が求められる。その結果は (11) の如くである。**

$$\frac{dZ}{dz} = A\cdot\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\vartheta_0(v-t_{2\nu})^{\kappa_{2\nu}}}{\prod_{\mu=1}^{n}\vartheta_1(v-t_{1\mu})^{\kappa_{1\mu}}}$$

$$z = e^{2\pi i v},\quad t_{2\nu} = \theta_{2\nu}/(2\pi),\quad \kappa_{2\nu} = (\varphi_{2,\nu+1}-\varphi_{2,\nu})/\pi$$
$$t_{1\mu} = \theta_{1\mu}/(2\pi),\quad \kappa_{1\mu} = (\varphi_{1,\mu+1}-\varphi_{1,\mu})/\pi \quad \cdots\cdots(11)$$

ϑ函数の母数は $\tau = \frac{1}{\pi i}\ln\rho$ である。ここに ρ は内円の半径で、又外円の半径は 1 である。

6. Jacobiの楕円函数の計算

$k = \sin\theta$ として $\theta = 5°, 15°, 45°, 55°, 70°, 75°, 80°, 85°$ の各々の値に対して Jacobi の楕円函数を計算したものを第9.35図に示してゐる。之は Smithsonian Mathematical Formulare and Tables of Elliptic Functions (1922) の中に収められてゐる楕円函数表を基にして計算したものである。 第9.35図 (a) (b). (c)

*, ** 詳細な導出を省略する。

第十章　總括

本論文は電磁界内に於て導体が呈する諸種の作用、殊にその遮蔽作用について論じたものである。

遮蔽論は誘導防止問題其他に関して工学的に甚だ重要な問題であるに拘はらず充分研究し盡されたと云い難い。殊に最近は問題が高周波域に及ぶに至つて従来の考方では処理し得ぬものも現はれる様になつた。高周波同軸ケーブルの漏話の如きはその一例に過ぎない。然しかくの如き問題に対しても電磁界の基礎方程式、即ちMaxwellの方程式は厳密に適用される。十章に亘る著者の本報告は一貫してこの方程式にその基礎をおいてゐる。

先づ第一章に於ては誘導問題に関する従来の研究が如何なる程度になされてゐるかを述べ現在研究の余地が那辺に存するかを説明し以下の著者の研究の概略を説明して序章とした。

第二章及び第三章では実際問題として最も重要である線状源とこれに平行な筒状導体との相互作用について論じた。先づ一般筒状座標による基礎方程式とその解を与へ特に平行往復線電流(磁流)による界と、直円筒殻による遮蔽作用について論じ、完全導電性空洞内の往復線及びクワッドによる電磁界について詳論しその電磁界分布を多くの場合につき計算して描いた。別に特異な結果は得てゐないが従来漠然とかくあるべしと予想されてゐた場の分布を明確に示してゐる。第三章は前章の特別な場合として直円柱が若干歪んでゐる場合の場の変化について考へた。即ち楕円柱座標系を用いて、前章と同様な問題について考察した。周波数が高い場合には電磁界はMathieu方程式の解として表はされるが、この方程式は現在の所、我々の問題について詳細な数値的計算を許す程度に充分には論ぜられておらず数表も不足である。著者は考察を進めるのに必要な程度の数表を新らしく作りながら直円柱の場合からの相違について考察した。

第四章は遮蔽函として実際上重要な球殻導体、扁(長)球殻導体等について論じたものであつて従来は球殻の場合について二、三の文献が発表されてゐただけであつた。そしてここでも複素数を変数とする球函数表を新らしく作製し結果を具体的に示し得たと思ふ。

以上の諸結果は伝送回路との類推によつて一層明確になし得ることは最近のSchelkunoff氏等の論文の指摘する処であるがこの考方を用いて各種座標系に於ける空間インピーダンスを求め、これを用いて多重遮蔽の問題を論じたのが第五章である。

第六章、七章は直線状導体と共に最も普通な源と考へられる單一ループコイル電流による場を円柱殻或は無限平面板で遮蔽した場合の遮蔽場、反作用場、遮蔽体中の渦電流、過渡遮蔽等について論じたものであつて Ollendorf 氏等によつて行はれた断片的研究を更に一般的な立場から厳密に解いたものである。
第八章には源として撚られた導体を用ひた場合について考へた。ラセン導体については Buchholz 氏等の最近の一、二の研究があるが、是等はラセン回路と遮蔽体が同軸の場合に限られてゐる。著者はこれを両者が偏心的に配置された一般的の場合に拡張し同軸の場合に生ずる場を主要項として発生する高調波電磁界について論じた。尚近似的に計算するに必要な変形ベッセル函数の漸近表示を鞍点法によつて計算し数値計算に便ならしめた。
第九章は有限の巾の溝又は切欠のある円柱殻が電磁界中にある場合、その切欠が如何なる作用を呈するかを写像法によつて考察した。主として双極線状源について考へたのであるが、同様の問題を一様な場の場合について考察せる Buchholz 氏の論文と対比さるべきものである。
以上の数章で考察した導体又は導体系は Maxwell の基礎方程式が厳密に解かれ得る形態に限つた。斯くして結果は具体的であり且定量的である。工学上重要な実際の場合も大体以上の範囲を出でないものが多い。然し亦遮蔽函の如きものでは最も普通の形態と考へられる直六面体の遮蔽函の如きものが解かれてゐないのは遺憾である。これに対して或は一般の任意の複雑な形態の導体に関して適当な近似算定法が案出さるべきである。これらに関しては又実験的な研究を行ふ必要がある。蓋しかくの如き複雑な形態のものではその電流場を理論的に求めることは多くの場合不可能に近いことであり半ば実験によつて求められる資料によつて理論を補ふのが最も妥当な方法だからである。

(1948年5月)

(完)