

直列蓄電器補償系統における  
異常現象の基礎的研究

木 嶋 昭

# 直列蓄電器補償系統における 異常現象の基礎的研究

昭和 34 年 12 月

木 嶋 昭

北  
見  
秋  
ヶ  
堂  
印

DOC
1960
6
電気系

# 直列蓄電器補償系統における 異常現象の基礎的研究

## 目 次

内容梗概 .....	1
序 論 .....	3
第1部 直列蓄電器にかかる過電圧 .....	4
第1節 緒 言 .....	4
第2節 短絡現象の解析法 .....	4
第3節 遮断現象の解析法 .....	8
第4節 最大値と駆動力の位相との関係 .....	11
第5節 三相短絡時における過電圧 .....	12
第6節 投入時における過電圧 .....	17
(1) 同時投入時における端子電圧 .....	17
(2) 非同時投入時における端子電圧 .....	20
(3) 非同時投入時における端子電圧の直流成分と零相成分の関係 .....	25
(4) 非同時投入時における端子電圧の数値計算例 .....	27
(5) 現場試験に対する考察 .....	36
第2部 直列蓄電器補償系統の $\frac{1}{3}$ 調波振動 .....	37
第1節 緒 言 .....	37
第2節 等価伝達関数法による分数調波振動の解析 .....	37
(1) 等価伝達関数による解析法 .....	38
(2) 非線型特性が露で表わされる場合 .....	44
(3) $\frac{1}{3}$ 調波振動の解析 .....	48
(4) 線型要素の特性と解析法 .....	58
第3節 可飽和リアクトルを含む電気回路に対する応用 .....	61
第4節 直列蓄電器補償系統の $\frac{1}{3}$ 調波振動 .....	65

(1) 変圧器が無負荷の場合	65
(2) 変圧器が軽負荷の場合	70
(3) 実システムに対する考察	77
オ3部 同期発電機の自己励磁現象	79
オ1節 緒言	79
オ2節 同期発電機の基礎微分方程式	79
オ3節 不平衡容量負荷による自励現象	82
(1) 界磁回路が開かれている場合	83
(2) 界磁回路が閉ぢられている場合	88
(3) 外部インダクタンス分を考慮する場合	94
(4) 実験的考察	95
(5) 平衡容量負荷の場合との比較	96
オ4節 系統の不平衡故障時および耐圧試験回路に対する考察	98
(1) 不平衡故障時に対する考察	98
(2) 耐圧試験回路に対する考察	100
結論	104
附 録	
1. 非同時投入時における零相成分	107
2. 非同時投入時における端子電圧の計算式	110
3. 等価伝達関数法による基本波共振現象の解析	116
4. $\{a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t\}^{2\nu+1}$ の展開	127
5. $(2\nu+1) \{a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t\}^{2\nu}$ の展開	131
6. $1 / (1 - \frac{2z}{1+z^2} \cos \varphi)$ などの展開	135
7. 静止法 (同期機リアクタンスの測定法)	136
8. 平衡容量負荷による自励現象	137
参考文献	140

## 内 容 梗 概

直列蓄電器補償系統とは、送電容量の増大、潮流分布の按配、電圧変動の軽減等を目的として、線路に直列に蓄電器を挿入して線路リアクタンスを補償している系統で、幾多の利点をもっているが、また幾多の問題点も有しているものである。本研究はそのうち、特に基礎的なものを明らかにせんとするもので、つぎの3部よりなる。

オ1部 直列蓄電器にかかる過電圧

オ2部 直列蓄電器補償系統の  $\frac{1}{3}$  調波振動

オ3部 同期発電機の自己励磁現象

オ1部においては直列蓄電器の設計にあたって問題となる蓄電器にかかる過電圧について述べているのであるが、かかる問題は線型回路網における過渡現象の解析に帰することより、まづ、回路網における短絡現象ならびに遮断現象に対する重畳の理の適用を演算子法をもつてしめしている。つぎにこのような場合、駆動力が正弦波であることよりその位相と応答の最大値との関係について考察し、それを求める因式的解法を手えている。以上のことを応用して、直列蓄電器補償系統において蓄電器にかかる過電圧について研究している。すなわち、まず三相短絡時における蓄電器にかかる過電圧を解析するとともに、アナログ・コンピュータで演算を行い、系統常数をパラメータにして過電圧倍数を与えている。次に投入時において直列蓄電器にかかる過電圧を蓄電器が三相同時に投入されるものとして解析するとともにアナログ・コンピュータで演算し、系統常数をパラメータにして過電圧倍数を与えている。さらに、蓄電器が非同時に投入されるとして、その端子にかかる過電圧を解析し、系統の零相インピーダンスが非常に大きいときには、端子電圧に直流分の発生することを明らかにし、数値計算ならびにアナログ・コンピュータで同時投入としたときより過大な電圧の発生することしめしている。

第2部においては直列蓄電器補償系統に発生する  $1/3$  調波振動について述べているのであるが、まず、はじめに、非線型自動制御系の解析において用いられている等価伝達関数法を用いる分数調波振動の解析法をしめし、等価伝達関数で周期的平衡状態、変分に対する等価伝達関数によりその安定性が求められることを明らかにし、非線型特性が霧で表わされる場合について等価伝達関数、変分に対する等価伝達関数を求め、前者より  $1/3$  調波振動の発生域を求める方法をしめしている。

つぎに可飽和リアクトルを含む電気回路に対する上記の解析法の適用について述べ、変圧器に対する  $1/3$  調波発生域をもとめ、しかる後、直列蓄電器補償系統の  $1/3$  調波振動について、変圧器が無負荷の場合、軽負荷の場合について、その発生域を解析するとともに、アナログ・コンピュータ演算し、系統常数をパラメータにしてしめしている。

第3部においては同期発電機に単相容量負荷がかかった場合の自己励磁現象は界磁が開かれている場合、および閉ぢられている場合ともに、円関数を係数にもつ微分方程式の解を求めるに帰することしめして、それを前述の等価伝達関数法により解析し、基本波ならびに高調波に対する自己励磁現象の発生域をもとめ、外部にインダクタンスのある場合の検討ならびに平衡容量負荷の場合との比較するとともに実験的考察を行っている。

さらに、直列補償系統における一線地絡時など不平衡故障時、送電線の耐圧試験時においても結局上記の場合に帰することをしめしている。

## 序 論

直列蓄電器補償系統とは、線路に直列に蓄電器を挿入して線路リアクタンスを補償して、送電容量の増大、潮流分布の按配、電圧変動の改善、定態安定度の増進等を行っている系統で、動作の速応性、設置の容易で低廉であることなど、幾多の利点をもっているが、また、一方、系統故障時の蓄電器の保護方式、過渡安定度、特殊現象の発生等の見地からいえば、幾多の問題点を有しているものである。

ここでは、これら問題点のうち、特に基礎的なもの、すなわち、直列蓄電器にかかる過電圧、系統に発生する  $4/3$  調波振動、同期発電機の自己励磁現象を対象とする。

## 第1部 直列蓄電器にかかる過電圧

### 才1節 緒言

直列蓄電器補償系統では、系統の故障時においても直列蓄電器が接続されていると過渡安定度は増大するが、直列蓄電器に故障電流が流れるとその端子電圧は過大となり、耐圧の大なる蓄電器が必要となり、極めて高価となるためその具体化は困難となる。故に、そこに妥協が必要となり、蓄電器設備の設計にあたっては直列蓄電器にかかる過電圧の性質を明らかにする必要がある。<sup>(1)</sup>

直列蓄電器にかかる過電圧として、先づ考えられるのは投入時に発生する過電圧である。蓄電器を系統に投入するとは、それに並列にいれられた遮断器を開放することであつて、これは平常は運転上の必要により行われ、また、過渡安定度の向上のために故障除去直後に行われる。このときは投入時の過電圧によつて直列蓄電器の保護間隙が動作しない様に設計されなければならない。

次に線路故障時に蓄電器にかかる過電圧であるが、その設置点近傍における短絡故障においては故障電流は定格値の数倍以上となるから、蓄電器の端子電圧は更にそれ以上になることがある。かかる過電圧に対しては経済性より考えて、保護間隙によつて蓄電器を短絡させるのが普通である。しかし遠方における故障に対しては過電圧値はさ程大とならないから、これには耐えるよう設計されるのが通常である。

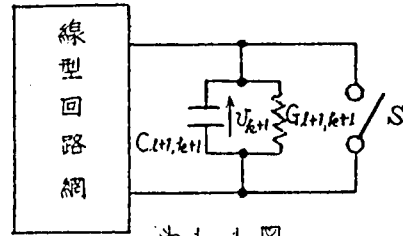
また、故障にともなう相差角変動によつて蓄電器にかかる過電圧は、系統の定格送電容量の大なることを考えると過電圧倍数はさ程大きくない。<sup>(2),(3)</sup>しかし時間的には相当長時間継続するものである。

### 才2節 短絡現象の解析法

線型回路網においては重畳の理が成り立つことはよく知られているが、



ここでは短絡現象に対する重畳の理の適用について述べる。オ1.1図のような回路で  $t=0$  においてスイッチ  $S$  を閉じる現象について考える。いま、 $S$  が開いているときの回路の基礎微分方程式は行列形式でしめせば



オ1.1図

$$\left[ Z \left( \frac{d}{dt} \right) \right] [i(t)] + [\lambda] [v(t)] = [e(t)] \quad (1.1)$$

$$[\mu] [i(t)] + \left[ Y \left( \frac{d}{dt} \right) \right] [v(t)] = [S(t)] \quad (1.2)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} \left[ Z \left( \frac{d}{dt} \right) \right] &= [L] \frac{d}{dt} + [R] = \left[ \begin{array}{ccc} L_{11} & \cdots & L_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{l1} & \cdots & L_{lk} \end{array} \right] \frac{d}{dt} + \left[ \begin{array}{ccc} R_{11} & \cdots & R_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{l1} & \cdots & R_{lk} \end{array} \right] \\ \left[ Y \left( \frac{d}{dt} \right) \right] &= [C] \frac{d}{dt} + [G] = \left[ \begin{array}{ccc} C_{l+1, k+1} & \cdots & C_{l+1, n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n, k+1} & \cdots & C_{nn} \end{array} \right] \frac{d}{dt} + \left[ \begin{array}{ccc} G_{l+1, k+1} & \cdots & G_{l+1, n} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{n, k+1} & \cdots & G_{nn} \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$[\lambda] = \left[ \begin{array}{ccc} \lambda_{l, k+1} & \cdots & \lambda_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{l, k+1} & \cdots & \lambda_{ln} \end{array} \right], \quad [\mu] = \left[ \begin{array}{ccc} \mu_{l+1, 1} & \cdots & \mu_{l+1, k} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{n, 1} & \cdots & \mu_{nk} \end{array} \right] \quad (1.4)$$

$$[i(t)] = \left[ \begin{array}{c} i_l(t) \\ \vdots \\ i_k(t) \end{array} \right], \quad [v(t)] = \left[ \begin{array}{c} v_{k+1}(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{array} \right] \quad (1.5)$$

$$[e(t)] = \left[ \begin{array}{c} e_l(t) \\ \vdots \\ e_k(t) \end{array} \right], \quad [S(t)] = \left[ \begin{array}{c} S_{l+1}(t) \\ \vdots \\ S_n(t) \end{array} \right] \quad (1.6)$$

(1.3)式における  $L_{11} \cdots L_{lk}, R_{11} \cdots R_{lk}$  は自己あるいは相互インダクタンスおよび抵抗,  $C_{l+1, k+1} \cdots C_{nn}, G_{l+1, k+1} \cdots G_{nn}$  は静電容量および

びコンダクタンスであり、(1.4)式における  $\lambda_{1, k+1} \dots \lambda_{1n}, \mu_{k+1, 1} \dots \mu_{nk}$  は 0, -1 または +1 であり、(1.5)式における  $i_1(t) \dots i_k(t), v_{k+1}(t) \dots v_n(t)$  はインダクタンスを流れる電流、コンデンサの端子電圧であり、 $e_1(t) \dots e_l(t), S_{k+1}(t) \dots S_n(t)$  は起電力および強制電流である。<sup>(4)</sup>

故に、(1.1), (1.2) 式よりスイッチ  $S$  を閉じたときの微分方程式は

$$[Z(\frac{d}{dt})][i] + [\lambda] \begin{bmatrix} 0 \\ v_{k+2} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [e(t)] \quad (1.7)$$

$$[\mu][i] + [Y(\frac{d}{dt})] \begin{bmatrix} 0 \\ v_{k+2} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [S(t)] \quad (1.8)$$

となる。ただし (1.8) 式の第 1 式

$$\mu_{k+1, 1} i_1 + \dots - \mu_{k+1, k} i_k + (C_{k+1, k+2} \frac{d}{dt} + G_{k+1, k+2}) v_{k+2} + \dots + (C_{k+1, n} \frac{d}{dt} + G_{k+1, n}) v_n = S_{k+1}(t)$$

なる微分方程式は附加的なものである。

(1.7), (1.8) 式をラプラス変換すると

$$[Z(p)][I(p)] + [\lambda] \begin{bmatrix} 0 \\ V_{k+2}(p) \\ \vdots \\ V_n(p) \end{bmatrix} = [E(p)] + p[L][i^{+0}] \quad (1.9)$$

$$[\mu][I(p)] + [Y(p)] \begin{bmatrix} 0 \\ V_{k+2}(p) \\ \vdots \\ V_n(p) \end{bmatrix} = [S(p)] + p[C] \begin{bmatrix} 0 \\ v_{k+2}^{+0} \\ \vdots \\ v_n^{+0} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

ただし、 $V_{k+2}(p), \dots, V_n(p), [I(p)], [E(p)]$  および  $[S(p)]$  はそれぞれ

$v_{k+2}(t) \dots v_n(t)$ ,  $[i(t)]$  および  $[S(t)]$  の  $p$ -関数であつて,  $v_{k+2}^{+0} \dots v_n^{+0}$  および  $[i^{+0}]$  は  $v_{k+2}(t) \dots v_n(t)$  および  $[i(t)]$  の第2種初期値である。

いま,  $[I(p)] = [I'(p)] + [I''(p)]$  (1.11)

$$\left. \begin{aligned} V_{k+2}(p) &= V'_{k+2}(p) + V''_{k+2}(p) \\ &\vdots \\ V_n(p) &= V'_n(p) + V''_n(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

とし, それぞれを

$$[Z(p)][I''(p)] + [\lambda] \begin{bmatrix} -V_{k+1}(p) \\ V''_{k+2}(p) \\ \vdots \\ V''_n(p) \end{bmatrix} = [0] \quad (1.13)$$

$$[\mu][I''(p)] + [\gamma(p)] \begin{bmatrix} -V_{k+1}(p) \\ V''_{k+2}(p) \\ \vdots \\ V''_n(p) \end{bmatrix} = [0] \quad (1.14)$$

なる式をみたすように  $[I''(p)] V''_{k+2}(p) \dots V''_n(p)$  をえらぶと  $[I'(p)] V'_{k+2}(p) \dots V'_n(p)$  は次式を満足せねばならない。

$$[Z(p)][I'(p)] + [\lambda] \begin{bmatrix} V_{k+1}(p) \\ V'_{k+2}(p) \\ \vdots \\ V'_n(p) \end{bmatrix} = [E(p)] + p[L][i^{+0}] \quad (1.15)$$

$$[\mu][I'(p)] + [\gamma(p)] \begin{bmatrix} V_{k+1}(p) \\ V'_{k+2}(p) \\ \vdots \\ V'_n(p) \end{bmatrix} = [S(p)] + p[C] \begin{bmatrix} 0 \\ v_{k+2}^{+0} \\ \vdots \\ v_n^{+0} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

しかるに (1.13), (1.14) 式はスイッチ  $S$  を開いた状態で与えられた回路網において起電力源および強制電流源を除いて, 回路網を等価  $p$ -回路網に

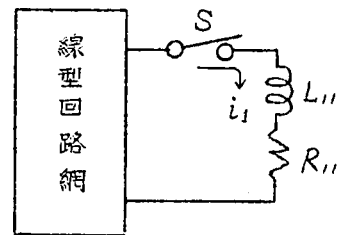
変換し、スイッチ  $S$  の端子電圧の逆方向にとつて  $-\nabla_{k+1}(p)$  とし、他の電流、電圧の  $p$  関数を  $[I''(p)]$ ,  $\nabla_{k+2}''(p) \dots \nabla_n''(p)$  としたとき成立する式である。故にこれらを  $\nabla_{k+1}(p)$  の関数として求めることができる。この  $\nabla_{k+1}(p)$  は後述するように (1.15), (1.16) 式から得られるものである。

次に (1.15), (1.16) 式はスイッチ  $S$  を開いた状態で与えられた回路網の微分方程式をたて、それをラプラス変換し、電流電圧の  $p$  関数を  $[I'(p)]$ ,  $\nabla_{k+1}'(p)$ ,  $\nabla_{k+2}'(p) \dots \nabla_n'(p)$  とした結果と一致する。ただし、 $V_{k+1}^{+0} = 0$  と仮定している。このことはスイッチ  $S$  により短絡されるコンデンサ  $C_{k+1, k+1}$  のインパルスの放電電流を考慮しないことに対応する。もしコンデンサ  $C_{k+1, k+1}$  がなくコンダクタンス  $G_{k+1, k+1}$  だけなら  $V_{k+1}^{+0} \neq 0$  でもよく、その場合にも (1.15), (1.16) 式は成立する。

以上のことと (1.11), (1.12) 式とより次のようにいうことができる。回路網においてスイッチ  $S$  を閉じたときの現象は  $S$  が開かれたときとされたとき継続するであろう現象と回路網の起電力源、強制電流源をのぞきスイッチ  $S$  を閉じなければその端子に現れるであろう電圧を逆方向に加えたときにおこる現象を重畳すればよい。

### 第3節 遮断現象の解析法

前節につづき、ここでは遮断現象に対する重畳の理の適用について述べる。第1.2図のような回路で  $\sigma = 0$  においてスイッチ  $S$  を開く現象について考える。いま  $S$  が閉じているときの回路の微分方程式を行列式で



第1.2図

(1.1), (1.2) 式で与えられるものとすれば、これよりスイッチ  $S$  を開いたときの微分方程式は、

$$\left[ Z \left( \frac{d}{dt} \right) \right] \begin{bmatrix} 0 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} + [\lambda][v] = [e(t)] \quad (1.17)$$

$$[\mu] \begin{bmatrix} 0 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_k \end{bmatrix} + \left[ Y \left( \frac{d}{dt} \right) \right] [v] = [S(t)] \quad (1.18)$$

となる。ただし (1.17) 式の第 1 式

$$\left( L_{12} \frac{d}{dt} + R_{12} \right) i_2 + \dots + \left( L_{1k} \frac{d}{dt} + R_{1k} \right) i_k + \lambda_{1,k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_{1n} v_n = e_1(t)$$

なる微分方程式は附加的なものである。

(1.17), (1.18) 式をラプラス変換すると

$$[Z(p)] \begin{bmatrix} 0 \\ I_2(p) \\ \vdots \\ I_k(p) \end{bmatrix} + [\lambda] [V(p)] = [E(p)] + p [L_i] \begin{bmatrix} 0 \\ i_2^{+0} \\ \vdots \\ i_k^{+0} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$[\mu] \begin{bmatrix} 0 \\ I_2(p) \\ \vdots \\ I_k(p) \end{bmatrix} + [Y(p)] [V(p)] = [S(p)] + p [C] [v^{+0}] \quad (1.20)$$

となる。いま

$$\left. \begin{aligned} I_2(p) &= I_2'(p) + I_2''(p) \\ &\vdots \\ I_k(p) &= I_k'(p) + I_k''(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

$$[V'(p)] = [V'(p)] + [V''(p)] \quad (1.22)$$

とし、

$$[Z(p)] \begin{bmatrix} -I_1(p) \\ I_2''(p) \\ \vdots \\ I_k''(p) \end{bmatrix} + [\lambda] [V''(p)] = [0] \quad (1.23)$$

$$[\mu] \begin{bmatrix} -I_1(p) \\ I_2''(p) \\ \vdots \\ I_k''(p) \end{bmatrix} + [Y(p)] [V'(p)] = [0] \quad (1.24)$$

をみたすように  $I_2''(p) \dots I_k''(p) [V''(p)]$  をえらぶと  $I_2'(p) \dots I_k'(p) [V'(p)]$  は次式を満足せねばならない。

$$[Z(p)] \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2'(p) \\ \vdots \\ I_k'(p) \end{bmatrix} + [\lambda][V'(p)] = [E(p)] + p[L] \begin{bmatrix} 0 \\ i_2^{+0} \\ \vdots \\ i_k^{+0} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$[\mu] \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2'(p) \\ \vdots \\ I_k'(p) \end{bmatrix} + [Y(p)][V'(p)] = [S(p)] + p[C][v^{+0}] \quad (1.26)$$

ここで(1.23), (1.24)式はスイッチ  $S$  を閉じた状態で与えられた回路網において起電力源, 強制電流源を除いて回路網を等価  $p$ -回路網に変換し, スイッチ  $S$  を流れる電流のみ逆方向にとって  $-I_1(p)$  とし, 他の電流, 電圧の  $p$ -関数を  $I_2''(p) \dots I_k''(p) [V''(p)]$  としたとき, 成立する式である。故に, これらを  $I_1(p)$  の関数として求めることができる。この  $I_1(p)$  は(1.25), (1.26)式よりえられるものである。

次に(1.25), (1.26)式はスイッチ  $S$  を閉じた状態で, 与えられた回路網の微分方程式をたて, それをラプラス変換し各部の電流, 電圧の  $p$ -関数を  $I_1(p), I_2'(p), \dots, I_k'(p), [V'(p)]$  とした結果である。ただし,  $i_1^{+0} = 0$  と仮定している。このことはインダクタンスを含む回路の遮断は電流値が0のときのみ理論的に可能であるからである。もし, インダクタンスがなければ  $i_1^{+0} \neq 0$  でもよいが, その場合にも(1.25), (1.26)式は成立する。

以上のことから次のようにいうことができる。

回路網においてスイッチ  $S$  を遮断したときの現象は  $S$  が閉じられているとしたときに継続するであろう現象と, 回路網の起電力源, 強制電流源をのぞき, スイッチ  $S$  を遮断しなければ流れるであろう電流を逆方向に流した現象を重ねればよい。

## 才4節 最大值と駆動力の位相との関係 (5), (6)

交流回路の過渡現象を解析するときは駆動力は正弦波関数になることが殆どである。すなわち、

$$x(t) = \mathcal{R} F(p) \mathcal{R}^{-1} \sin(\omega t + \theta) \tag{1.27}$$

なる式を解かなければならない\*。ここではいかなる  $\theta$  において  $x(t)$  の最大値が得られるかについて考察する。

(1.27) 式を表わされる  $x$  は  $t$  および  $\theta$  の関数であるから最大値は  $\frac{\partial x}{\partial t} = 0, \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0$  なる式を解くことによつて与えられる。(1.27) 式を相乗定理によつて書きかえると

$$x(t) = f(0) \sin(\omega t + \theta) + \int_0^t f'(\tau) \sin(\omega t - \tau + \theta) d\tau \tag{1.28}$$

ただし  $f(t)$  は  $p$ -関数  $F(p)$  の  $t$ -関数であつて、 $f'(t)$  はその導関数である。(1.28) 式より  $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial \theta}$  を求め、これを零とおいた式を解くことにより

$$f'(t) \sin \theta = 0 \tag{1.29}$$

をうる。故に  $f'(t) \neq 0$ ;  $t = t$  ならば  $\theta = 0$  のときに  $x(t)$  の最大値が得られる。すなわち、系のインデイシアル応答が単調に増大あるいは減小するときは、駆動力  $\sin(\omega t + \theta)$  に対する応答は位相  $\theta$  が零のとき最大値をしめすといふことができる。

次に図式的にこの問題を解く手段について考察する。いま、(1.27) 式に対応して

$$y(t) = \mathcal{R} F(p) \mathcal{R}^{-1} \cos(\omega t + \theta) \tag{1.30}$$

を考え、

$$z(t) = y(t) + jx(t) = \mathcal{R} F(p) \mathcal{R}^{-1} \mathcal{E}^{j(\omega t + \theta)} \tag{1.31}$$

とする。いま

註.  $\mathcal{R}, \mathcal{R}^{-1}$  なる記号はラプラス変換および逆ラプラス変換をしめす。すなわち

$$\mathcal{R} F(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{F(p)}{p} \mathcal{E}^{pt} dp, \quad \mathcal{R}^{-1} f(t) = p \int_0^{\infty} f(t) \mathcal{E}^{-pt} dt$$

$$\mathcal{L}^{-1} F(p) \mathcal{L}^{-1} \mathcal{E}^{j\omega t} = f_c(t) + j f_s(t) \quad (1.32)$$

とすると  $f_c(t)$ ,  $f_s(t)$  は (1.30), (1.27) 式において  $\theta = 0$  すなわち、駆動力が  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$  であるときの応答であるということが出来る。これを用いると (1.31) 式は

$$Z(t) = \{f_c(t) \cos \theta - f_s(t) \sin \theta\} + j \{f_c(t) \sin \theta + f_s(t) \cos \theta\} \quad (1.33)$$

となる。いま

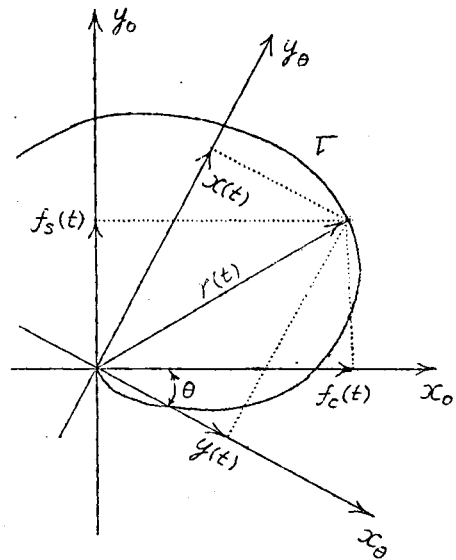
$$r(t) = f_c(t) + j f_s(t)$$

を複素平面 ( $x_0$ - $y_0$  軸) 上でしめすと (変数  $t$  を消去すると) 1 つの曲線  $\Gamma$  がえられる (第 1.3 図)。いま、 $x_0$ - $y_0$  軸を時計方向に  $\theta$  だけ回転した座標軸  $x_\theta$ - $y_\theta$  軸への曲線  $\Gamma$  の射影を求めると、それぞれ

$$f_c(t) \cos \theta - f_s(t) \sin \theta,$$

$$f_c(t) \sin \theta + f_s(t) \cos \theta$$

となるから、これは (1.31) 式より、それぞれ駆動力が  $\cos(\omega t + \theta)$ ,  $\sin(\omega t + \theta)$  のときの応答、すなわち (1.30) 式, (1.27) 式の解となっていることがわかる。



第 1.3 図

故に  $r(t)$  の最大値が (1.27) 式の  $x(t)$  の最大値を与えることになり、そのときの  $\theta$  は最大値を与える  $r(t)$  が  $y_0$  軸となす角によつて与えられる。

(7)

## 第 5 節 三相短絡時における過電圧

前述したように、系統に発生する短絡電流により発生する過電圧は定格電圧の数倍以上に達することがある。三相短絡時における蓄電器過電圧は、いま、故障が直列蓄電器の負荷側においておこつたものとするば



オ2節に述べたよう故障点にもし故障が発生しなければ現れるであろう電圧を回路の起電力源を除いて逆方向に加えた場合の現象と故障が発生しなければ継続するであろう現象を重ねることによって求めることができる。

系統の正相、逆相インピーダンスが等しいものとし、故障点にもし故障が発生しなければ現れるであろう電圧を故障発生時を時間の原点として、 $E \sin(\omega t + \theta)$  で表わされるものとすれば、これによる蓄電器の端子電圧 ( $p$ -関数) は

$$V_c(p) = \frac{1}{Cp} \cdot \frac{1}{Z_1(p) + \frac{1}{Cp}} \int_0^{-1} E \sin(\omega t + \theta) \quad (1.34)$$

で与えられる。ただし、 $Z_1(p)$  は線路、電源をふくめた回路の正相インピーダンスであって、 $C$  は蓄電器の静電容量である。故に故障が発生しなければ現れるであろう蓄電器の端子電圧を  $V_0(p)$  とすれば、故障後に現れる端子電圧

$$V(p) = V_c + V_0(p) \quad (1.35)$$

となる。

いま

$$Z_1(p) = pL + R \quad (1.36)$$

$$\omega t = \tau, \quad \frac{1}{\omega^2 LC} = k, \quad \frac{R}{\omega L} = m \quad (1.37)$$

とすれば (1.34) 式より

$$\begin{aligned} V_c(\tau) &= \int_0^{-1} \frac{k}{p^2 + mp + k} \int_0^{-1} E \sin(\tau + \theta) \\ &= \tilde{V}_c \sin(\tau + \theta) - \tilde{V}_c e^{-\alpha\tau} \left\{ \left( \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau + \cos \omega_0 \tau \right) \sin \varphi + \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \cos \varphi \right\} \quad (1.38) \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \tilde{V}_c &= k \sqrt{(k-1)^2 + m^2} \cdot E \\ \tan \varphi &= \frac{(k-1) \sin \theta - m \cos \theta}{(k-1) \cos \theta + m \sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

$$\omega_0^2 = k - \left(\frac{m}{2}\right)^2, \quad \alpha = \frac{m}{2} \quad (1.40)$$

故障前に無負荷であったとすれば,  $V_0(p) = 0$  であるから (1.38) 式が故障後に蓄電器にかかる端子電圧となる。

$m \cong 0$  なるときは (1.38) 式はつぎのようになる。

$$V_c(\tau) = E(1-k) \left\{ \sin(\tau + \theta) - \left( \cos\sqrt{k}\tau \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\sqrt{k}\tau \cos\theta \right) \right\} \quad (1.41)$$

(1.38) 式の最大値を  $V_{cmax}$  とすればそれと蓄電器の定格電圧の比, すなわち過電圧倍数  $\eta$  は

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2, \quad \eta_1 = V_{cmax} / \tilde{V}_c \quad (1.42)$$

で与えられる。ただし  $\eta_2$  は三相短絡時の定常最大値  $\tilde{V}_c$  と定格電圧の比であつて, 蓄電器リアクタンスが一定であることより

$$\eta_2 = \frac{\text{定格三相短絡電流}}{\text{定格蓄電器電流}} \quad (1.43)$$

で容易に求めることができる。 $\eta_1$  は  $m \cong 0$  のときは  $k < 1$  ならば  $\theta = 0$  のとき最大の値がえられ

$$\eta_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (1.44)$$

となるが,  $m \neq 0$  のときは簡単に求められない。

$V_0(p) = 0$  のときの蓄電器負荷側の電圧を  $E \sin(\omega t + \theta)$  とすることは, かかる系統において電源をかく仮定することになり,  $V_0(p) \neq 0$  のときは (1.35) 式より計算すると定常項は同じであるが, 過渡項の振幅は少となり位相角が異なってくる。

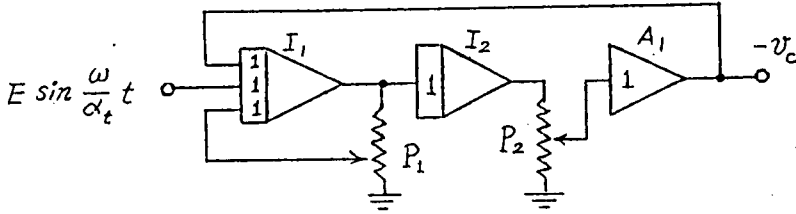
$\eta_1$  を求めるには第4節に述べた図式計算法に, したがつてアナログコンピュータを用いて行っている。

(1.34) 式において  $Z_1(p)$  が (1.35) 式であらわされるものとし, コンピュータの時間換算係数を  $\alpha_t$  とすれば, 第4節 (1.27) 式の  $F(p)$  は

$$F(p) = \frac{k \left( \frac{\omega}{\alpha_t} \right)^2 \frac{1}{p} \frac{1}{p + m \left( \frac{\omega}{\alpha_t} \right)}}{1 + k \left( \frac{\omega}{\alpha_t} \right)^2 \frac{1}{p} \frac{1}{p + m \left( \frac{\omega}{\alpha_t} \right)}} \quad (1.45)$$

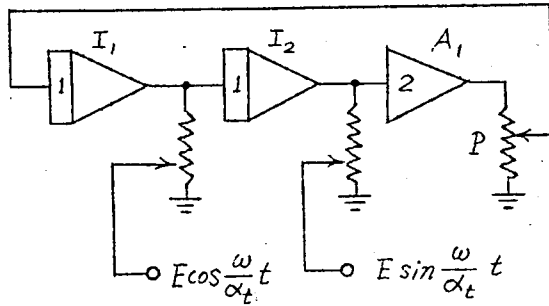
となるから, 第1.4図の演算回路を構成することができる。なお, この場

合の駆動力  $\cos \frac{\omega}{\alpha_t} t$ ,  $\sin \frac{\omega}{\alpha_t} t$  は才1.5図の回路により発生すること



$$P_1 = \left(\frac{\omega}{\alpha_t}\right) m, \quad P_2 = \left(\frac{\omega}{\alpha_t}\right)^2 l$$

才1.4図\*

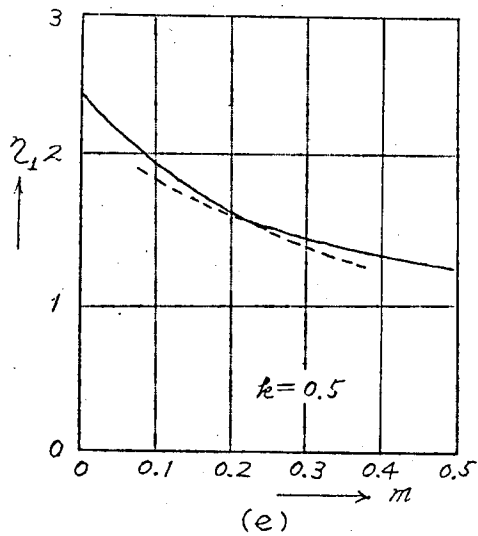
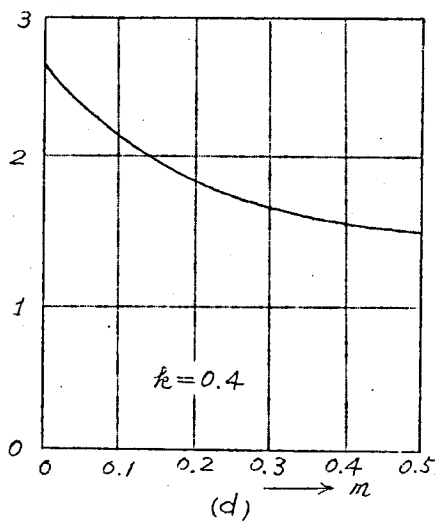
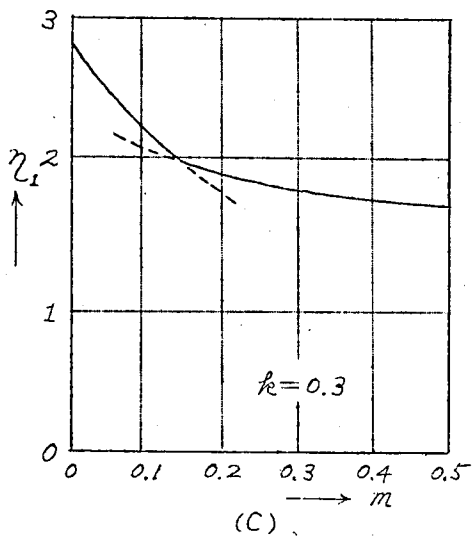
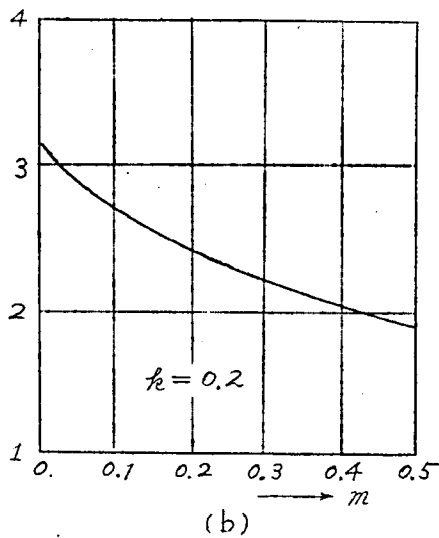
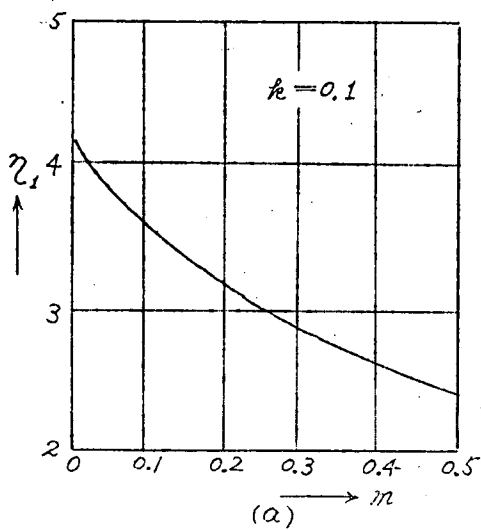


$$P = \left(\frac{\omega}{\alpha_t}\right)^2$$

才1.5図\*

ができる。才4節で述べた計算法を適用するために才1.4図のような演算回路を2つつくり、それぞれに  $\cos \frac{\omega}{\alpha_t} t$ ,  $\sin \frac{\omega}{\alpha_t} t$  を加えその応答をXYレコーダのX軸およびY軸に加えてX-Y平面で曲線Γを画かせることにより  $v_c(t)$  の最大値を求めた(演算では  $\frac{\omega}{\alpha_t} = 0.4\pi$  として行った)。演算結果をまとめたものが才1.6図である。大略  $\theta \cong 0$  のときに  $\gamma_1$  の最大値がおこる。 $l = 0.1, 0.2$  のときは  $v(t)$  の時間的に最初の極値が最大値となるが、 $l = 0.3$  のときは  $m$  が大なるときは  $v(t)$  の最初の極値が最大値となるが、 $m$  が小となると時間的に2番目の極値が最大値となり、 $l = 0.4$  のときは2番目、 $l = 0.5$  のときは  $m$  が小なる

\*註. 図において  $\nabla$  は積分器,  $\triangle$  は加算器をしめし, 数字は倍率をあらわす。



\* 1.6 图

ときは時間的に3番目の極値が $m$ が大になると2番目の極値が最大値となる。

一般的にいえば補償度 $\epsilon$ の小さいほど、また系統の誘導リアクタンスに対する抵抗の値が小さいほど $\omega_2$ は大となり5倍近くになることもある。通常2〜3程度と考えてよい。

また、この結果を  $N. Knudsen$  の計算した結果と比較すると $m$ が小さいところでは比較的一致しているが、 $m$ が大となると30%程度以上も大となっている。これより  $N. Knudsen$  の近似式は $m$ が少なくなるときのみ有効であることがわかる。

## 第6節 投入時における過電圧

### (1) 同時投入時における端子電圧 <sup>(6)</sup>

蓄電器を系統に投入することは、それに並列に設けられた短絡用遮断器を開放することである。この遮断器が各相、同時に動作するものとし、投入前に各相にそれぞれ  $I_a^0(p)$ ,  $I_b^0(p)$ ,  $I_c^0(p)$  なる電流 ( $p$ -関数) が流れていたものとすれば、第3節に述べた方法によれば、この場合には投入前には各相の蓄電器端子電圧は零であるから、各相の遮断器を通して今まで流れていた方向と逆に  $I_a^0(p)$ ,  $I_b^0(p)$ ,  $I_c^0(p)$  を強制的に、起電力源を除いて系統に流したとき、蓄電器の端子にあらわれる電圧が蓄電器を同時投入したときに現れる端子電圧となる。

いま、系統の正相インピーダンス関数と逆相インピーダンス関数が等しいものとすれば、各相の蓄電器端子電圧の  $p$ -関数  $V_a(p)$ ,  $V_b(p)$  および  $V_c(p)$  は次のようになる。

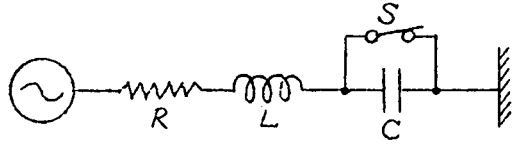
$$\left. \begin{aligned} V_a(p) &= \frac{\{pC + Y_0(p)\} I_a^0(p) - \{Y_0(p) - Y_1(p)\} I_0^0(p)}{\{pC + Y_0(p)\} \{pC + Y_1(p)\}} \\ V_b(p) &= \frac{\{pC + Y_0(p)\} I_b^0(p) - \{Y_0(p) - Y_1(p)\} I_0^0(p)}{\{pC + Y_0(p)\} \{pC + Y_1(p)\}} \\ V_c(p) &= \frac{\{pC + Y_0(p)\} I_c^0(p) - \{Y_0(p) - Y_1(p)\} I_0^0(p)}{\{pC + Y_0(p)\} \{pC + Y_1(p)\}} \end{aligned} \right\} (1.46)$$

ただし、上式において  $Y_0(p)$ ,  $Y_1(p)$  は系統の零相および正相アドミッタンス関数で、 $C$  は投入蓄電器の静電容量であつて、

$$I_0^\circ(p) = \frac{1}{3} \{ I_a^\circ(p) + I_b^\circ(p) + I_c^\circ(p) \} \quad (1.47)$$

である。

発電機が線路を通して無限大母線につながれている系統を考えよう。その等価回路として線路の対地容量を省略し、



※ 1.7 図

系統は抵抗、インダクタンスおよび直列蓄電器よりなる回路、すなわち

$$1/Y_1(p) = pL + R \quad (1.48)$$

とし、投入前には線路には平衡三相電流が流れていたものとする。

(1.46) 式より投入前に遮断器を流れていた電流を  $I \sin(\omega t + \theta)$  とすれば端子電圧は

$$V(p) = \frac{pL + R}{pC(pL + R) + 1} \int_0^{-1} I \sin(\omega t + \theta) \quad (1.49)$$

となる。いま、

$$\tau = \omega t, \quad m = \frac{R}{\omega L}, \quad k = \frac{1}{\omega^2 LC} \quad (1.50)$$

$$\eta(\tau) = \frac{\omega C}{I} \int_0^{-1} V(p) \quad (1.51)$$

とすれば、すなわち周波数を規格化し、端子電圧を考える代わりに、蓄電器投入前に流れていた線路電流がそのまま蓄電器に投入後も流れたものと考えたときの蓄電器端子電圧の定常最大値に対する比について考える。(1.49)式は

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= \frac{p+m}{p^2+mp+k} \int_0^{-1} \sin(\tau+\theta) \\ &= \rho \sin(\tau+\varphi) + \rho_0 e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_0\tau+\varphi_0) \end{aligned} \quad (1.52)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \varphi &= \frac{1}{D_0} (mk \cos \theta + \mu_0^2 \sin \theta) \\ \rho \sin \varphi &= \frac{1}{D_0} (mk \sin \theta - \mu_0^2 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \cos \varphi_0 &= \frac{1}{D_0 \omega_0} \left\{ \frac{m}{2} (\mu_0^2 - 2k) \cos \theta - k \left( \mu_0^2 - \frac{m^2}{2} \right) \sin \theta \right\} \\ \rho_0 \sin \varphi_0 &= \frac{1}{D_0} \left\{ \mu_0^2 \cos \theta - m k \sin \theta \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\alpha = \frac{m}{2}, \quad \omega_0^2 = k - \frac{m^2}{4}, \quad D_0 = (1-k)^2 + m^2, \quad \mu_0^2 = 1 - k + m^2 \quad (1.54)$$

$m \cong 0$  なるときは

$$\rho = \frac{1}{1-k}, \quad \rho_1 = \frac{1}{1-k} \sqrt{k \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$$

であるから、 $m=0$  に対する最大値は  $k < 1$  ならば  $\theta=0$  のときにおこり

$$\eta_{max} = \frac{2}{1-k} \quad (1.55)$$

となる。 $\eta(\tau)$  は前述のように定義したから投入後の定常最大値に対する倍数は

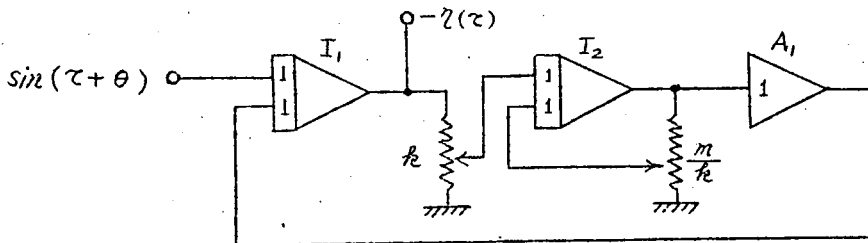
$$\bar{v}_{max} = \eta_{max} \frac{\sqrt{(1-k)^2 + m^2}}{\sqrt{1+m^2}} \quad (1.56)$$

となる。

$m \neq 0$  のとき、 $\eta_{max}$  を求めるには第4節に述べた図式計算法にしたがい数値計算によってもよいが、アナログ・コンピュータで求めた。(1.52)式より、第4節(1.27)式の  $F(p)$  は

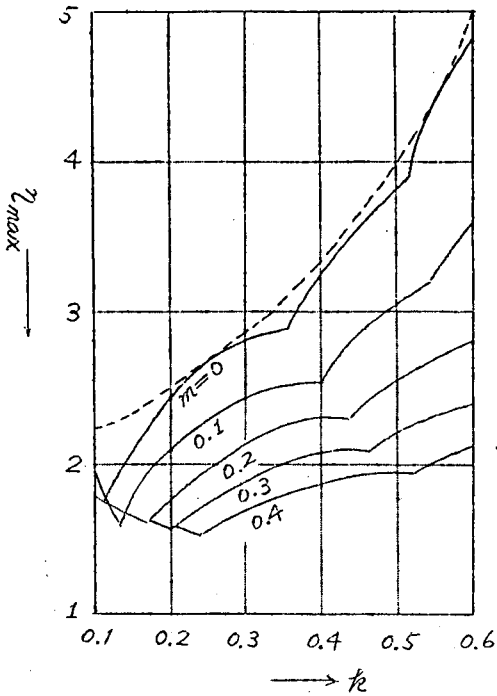
$$F(p) = \frac{p+m}{p^2+mp+k} = \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{k}{p(p+m)}} \quad (1.57)$$

となるから、第1.8図のようなアナログ・コンピュータの演算回路をう

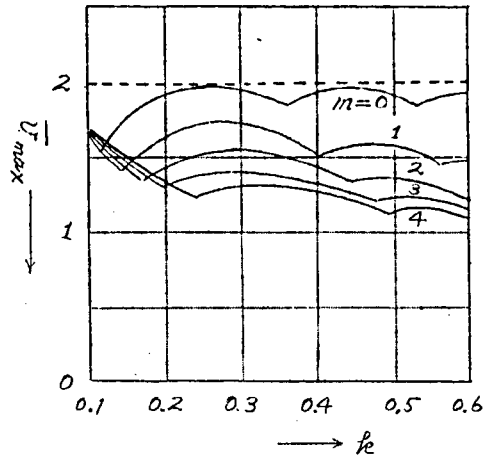


第1.8図

る。第4節で述べたように位相  $\theta$  に無関係に最大値を求めるために強制



※1.9 図



※1.10 図

めす。※1.9 図は  $I_{max}$  の値をしめし、※1.10 図は投入したときの定常最大値に対する端子電圧の値  $V$  の最大値をしめしたものである。ただし、 $m=0$  に対しては投入後最初の数サイクル程度に現れる最大値を実線でしめし、点線は (1.55) 式よりの理論的な最大値をしめしている。

演算結果をまとめた曲線群は 3~4 個の不連続な曲線よりなるが、 $t$  が小なるときは最初の極値が  $t$  が大きくなるにつれ二番目、三番目、四番目の極値が最大値となることをしめしている。又、最大値のおこる位相は  $\theta \cong 0$  である。

この結果より投入時の端子電圧の最大値は通常の状態では定常最大値の大略 1.5~1.7 倍程度をみなすことができる。

(5)

## (2) 非同時投入時における端子電圧

直列蓄電器を線路へ投入することは前述したように、蓄電器短絡用遮断器を開放するのであるが、前項で解析演算したように各相の遮断器が



同時に開放されることは殆んど考えられず、非同時に動作すると考える方が一般的である。ここでは直列蓄電器の投入が非同時に行われた場合の端子電圧について考える。

投入前に線路には  $I_{a_0}^{\circ}(p)$ ,  $I_{b_0}^{\circ}(p)$ ,  $I_{c_0}^{\circ}(p)$  なる電流 ( $p$ -関数) が各相に流れていたものとし、最初  $a$  相の蓄電器が投入され、それより  $t_1$  秒後に  $b$  相のそれが投入され、更にそれより  $t_2$  秒後に  $C$  相のそれが投入されるものとする。すなわち、最初  $a$  相の遮断器  $S_a$  を開き、それより  $t_1$  秒後に  $b$  相のそれ  $S_b$  を開き、更にそれより  $t_2$  秒後に  $C$  相のそれ  $S_c$  を開く場合の現象を解析する。

お3節にのべたように、 $S_a$  を開く場合は  $S_a$  を通して今まで流れていた方向と逆に電流  $I_{a_0}^{\circ}(p)$  を強制的に流したときの現象を元の現象に重畳すれば求める現象がえられる。

いま、蓄電器の両端子よりみた系統の零相、正相および逆相アドミタンス ( $p$ -関数) を  $Y_0(p)$ ,  $Y_1(p)$ ,  $Y_2(p)$  とし、投入蓄電器の静電容量を  $C$  とする。  $S_a$  を開くことにより  $a$  相の蓄電器に生ずる端子電圧を  $V_{a_0}(p)$  とすれば、 $a$  相の遮断器に強制的に流すべき電流は

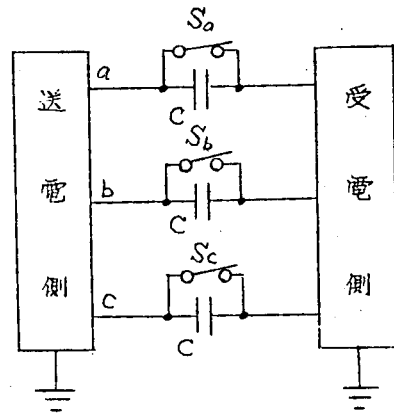
$$CpV_{a_0}(p) + \frac{1}{3}Y_a(p)V_{a_0}(p)$$

となるから ( $Y_a(p)$  は (1.61) 式にしめすものである), これを  $I_{a_0}^{\circ}(p)$  と等置すれば  $V_{a_0}(p)$  が求まる,

$$V_{a_0}(p) = \frac{1}{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)} I_{a_0}^{\circ}(p) \tag{1.58}$$

また、 $S_a$  を開くことによる線路電流の擾乱成分  $I_{a_0}'(p)$ ,  $I_{b_0}'(p)$ ,  $I_{c_0}'(p)$

$$I_{a_0}'(p) = \frac{1}{3}Y_a(p)V_{a_0}(p) = \frac{\frac{1}{3}Y_a(p)}{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)} I_{a_0}^{\circ}(p)$$



お1.11 図

$$\left. \begin{aligned} I_{L'_b}(p) &= \frac{1}{3} Y_b(p) V_{a_0}(p) = \frac{\frac{1}{3} Y_b(p)}{Cp + \frac{1}{3} Y_a(p)} I_{a_0}^{\circ}(p) \\ I_{C'_c}(p) &= \frac{1}{3} Y_c(p) V_{a_0}(p) = \frac{\frac{1}{3} Y_c(p)}{Cp + \frac{1}{3} Y_a(p)} I_{a_0}^{\circ}(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

故に  $S_a$  開放後の各相における実際の電流は方向を考えて重畳すると

$$\left. \begin{aligned} I_{a_0}(p) &= I_{a_0}^{\circ}(p) - I_{a_0}'(p) \\ I_{b_0}(p) &= I_{b_0}^{\circ}(p) - I_{b_0}'(p) \\ I_{c_0}(p) &= I_{c_0}^{\circ}(p) - I_{c_0}'(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} Y_a(p) &= Y_0(p) + Y_1(p) + Y_2(p) \\ Y_b(p) &= Y_0(p) + a^2 Y_1(p) + a Y_2(p) \\ Y_c(p) &= Y_0(p) + a Y_1(p) + a^2 Y_2(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

$$a = \varepsilon^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (1.62)$$

次に  $t$  秒後に  $S_b$  を開く場合を考える。この場合  $S_b$  を通して逆方向に流すべき電流は  $\int_0^t I_{b_0}(p) \cdot H(t-t_1) dt_1$  である。これを  $I_{bt_1}^{\circ}(p)$  とすれば、<sup>(8)</sup> 並相乗定理を用いると

$$I_{bt_1}^{\circ}(p) = \frac{p}{2\pi j} \oint \frac{\varepsilon^{-(p-\xi)t_1}}{p-\xi} \frac{I_{b_0}^{\circ}(\xi)}{\xi} d\xi \quad (1.63)$$

ただし、積分路内には  $\xi = p$  は含まれないものとする。

前と全く同様にして  $b$  相の蓄電器に生ずる端子電圧を  $V_{bt_1}(p)$ 、 $a$  相のそれに生ずる擾乱電圧を  $V_{at_1}(p)$  とし、 $a$  相の遮断器を流すべき電流を零と、 $b$  相の遮断器を流すべき電流を  $I_{bt_1}^{\circ}(p)$  と等置すれば  $V_{at_1}(p)$ 、 $V_{bt_1}(p)$  が求まる。すなわち

$$\begin{aligned} \left\{ Cp + \frac{1}{3} Y_a(p) \right\} V_{at_1}(p) + \frac{1}{3} Y_c(p) V_{bt_1}(p) &= 0 \\ \frac{1}{3} Y_b(p) V_{at_1}(p) + \left\{ Cp + \frac{1}{3} Y_a(p) \right\} V_{bt_1}(p) &= I_{bt_1}^{\circ}(p) \end{aligned}$$

より

$$\left. \begin{aligned} V_{at_1}(p) &= \frac{-\frac{1}{3}Y_c(p)}{\left\{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{3}Y_b(p)\right\}\left\{\frac{1}{3}Y_c(p)\right\}} I_{bt_1}^{\circ}(p) \\ V_{bt_1}(p) &= \frac{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)}{\left\{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{3}Y_b(p)\right\}\left\{\frac{1}{3}Y_c(p)\right\}} I_{bt_1}^{\circ}(p) \end{aligned} \right\} (1.64)$$

となる。

また、 $S_b$  を開くことによる線路電流の擾乱成分は

$$\left. \begin{aligned} I_{at_1}'(p) &= \frac{Cp \cdot \frac{1}{3}Y_c(p)}{\left\{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{3}Y_b(p)\right\}\left\{\frac{1}{3}Y_c(p)\right\}} I_{bt_1}^{\circ}(p) \\ I_{bt_1}'(p) &= \frac{\frac{1}{3}Y_a(p)\left\{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)\right\} - \left\{\frac{1}{3}Y_b(p)\right\}\left\{\frac{1}{3}Y_c(p)\right\}}{\left\{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{3}Y_b(p)\right\}\left\{\frac{1}{3}Y_c(p)\right\}} I_{bt_1}^{\circ}(p) \\ I_{ct_1}'(p) &= \frac{\frac{1}{3}Y_b(p)\left\{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)\right\} - \left\{\frac{1}{3}Y_c(p)\right\}^2}{\left\{Cp + \frac{1}{3}Y_a(p)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{3}Y_b(p)\right\}\left\{\frac{1}{3}Y_c(p)\right\}} I_{bt_1}^{\circ}(p) \end{aligned} \right\} (1.65)$$

故に  $S_b$  開放後の各相の線路電流は

$$\left. \begin{aligned} I_{at_1}(p) &= I_{a0}(p) - I_{at_1}'(p) \\ I_{bt_1}(p) &= I_{b0}(p) - I_{bt_1}'(p) \\ I_{ct_1}(p) &= I_{c0}(p) - I_{ct_1}'(p) \end{aligned} \right\} (1.66)$$

次に更にそれより  $t_2$  秒後に  $S_c$  を開く場合を考える。

$$I_{ct_2}^{\circ}(p) = \frac{p}{2\pi j} \oint \frac{\bar{\varepsilon}^{-(p-z)(t_1+t_2)}}{p-z} \frac{I_{ct_1}(z)}{z} dz \quad (1.67)$$

とすれば全く上と同様にして、 $a$ 、 $b$ 相の蓄電器の端子電圧の擾乱成分  $V_{at_2}(p)$ 、 $V_{bt_2}(p)$  および  $c$ 相の蓄電器の端子電圧  $V_{ct_2}(p)$  は

$$\left. \begin{aligned} V_{at_2}(p) &= \frac{1}{\Delta} \left[ \left\{ \frac{1}{3}Y_c(p) \right\}^2 - \left\{ Cp + \frac{1}{3}Y_a(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3}Y_b(p) \right\} \right] I_{ct_2}^{\circ} \\ V_{bt_2}(p) &= \frac{1}{\Delta} \left[ \left\{ \frac{1}{3}Y_b(p) \right\}^2 - \left\{ Cp + \frac{1}{3}Y_a(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3}Y_c(p) \right\} \right] I_{ct_2}^{\circ} \\ V_{ct_2}(p) &= \frac{1}{\Delta} \left[ \left\{ Cp + \frac{1}{3}Y_a(p) \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{3}Y_b(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3}Y_c(p) \right\} \right] I_{ct_2}^{\circ} \end{aligned} \right\} (1.68)$$

$$\Delta = \left\{ C_p + \frac{1}{3} Y_a(p) \right\}^3 + \left\{ \frac{1}{3} Y_b(p) \right\}^3 + \left\{ \frac{1}{3} Y_c(p) \right\}^3 - 3 \left\{ C_p + \frac{1}{3} Y_a(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3} Y_b(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3} Y_c(p) \right\} \quad (1.69)$$

また、線路電流の擾乱成分は

$$\left. \begin{aligned} I_{at_2}'(p) &= \frac{1}{\Delta} C_p \left[ \left\{ C_p + \frac{1}{3} Y_a(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3} Y_b(p) \right\} - \left\{ \frac{1}{3} Y_c(p) \right\}^2 \right] I_{ct_2}^{\circ} \\ I_{bt_2}'(p) &= \frac{1}{\Delta} C_p \left[ \left\{ C_p + \frac{1}{3} Y_a(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3} Y_c(p) \right\} - \left\{ \frac{1}{3} Y_b(p) \right\}^2 \right] I_{ct_2}^{\circ} \\ I_{ct_2}'(p) &= \frac{1}{\Delta} \left[ C_p \left\{ \frac{1}{3} Y_a(p) \right\} \left\{ C_p + \frac{2}{3} Y_a(p) \right\} - 2 C_p \left\{ \frac{1}{3} Y_b(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3} Y_c(p) \right\} + \left\{ \frac{1}{3} Y_a(p) \right\}^3 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{3} Y_b(p) \right\}^3 + \left\{ \frac{1}{3} Y_c(p) \right\}^3 - 3 \left\{ \frac{1}{3} Y_a(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3} Y_b(p) \right\} \left\{ \frac{1}{3} Y_c(p) \right\} \right] I_{ct_2}^{\circ} \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

故に a, b, c 相の蓄電器の投入された後における端子電圧ならびに線路電流は

$$\left. \begin{aligned} V_a(p) &= V_{a0}(p) + V_{at_1}(p) + V_{at_2}(p) \\ V_b(p) &= V_{bt_1}(p) + V_{bt_2}(p) \\ V_c(p) &= V_{ct_2}(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

$$\left. \begin{aligned} I_a(p) &= I_{a0}^{\circ}(p) - I_{a0}'(p) - I_{at_1}'(p) - I_{at_2}'(p) \\ I_b(p) &= I_{b0}^{\circ}(p) - I_{b0}'(p) - I_{bt_1}'(p) - I_{bt_2}'(p) \\ I_c(p) &= I_{c0}^{\circ}(p) - I_{c0}'(p) - I_{ct_1}'(p) - I_{ct_2}'(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

となる。故に以上の各式より各相蓄電器が非同時的に投入されたときの現象が求められる。

系統において回転機のインピーダンスが他のインピーダンスに比べて大きくないときなどは系統の正相インピーダンスと逆相インピーダンスは等しいと考えてよい。すなわち、このときは

$$Y_a(p) = Y_0(p) + 2Y_1(p), \quad Y_b(p) = Y_c(p) = Y_0(p) - Y_1(p) \quad (1.73)$$

となる。また受電端の中性点が接地されてをらないとき（高インピーダンス接地も含む）とか、送電端が接地されず線路長の短いときのように系統の零相インピーダンスが非常に大きいときは

$$Y_a(p) = 2Y_1(p), \quad Y_b(p) = Y_c(p) = -Y_1(p) \quad (1.74)$$

となる。

(3) 非同時投入時における端子電圧の直流成分と零相成分の関係<sup>(5)</sup>

系統の正相および逆相インピーダンスが等しく、零相インピーダンスが非常に大きいときは(1.68)式に(1.74)式を代入すると

$$\begin{aligned} V_{at_2}(p) = V_{bt_2}(p) &= \frac{\frac{1}{3}Y_1(p)}{Cp\{Cp+Y_1(p)\}} I_{ct_2}^{\circ}(p) \\ &= \left\{ \frac{1}{3Cp} - \frac{1}{3} \frac{1}{Cp+Y_1(p)} \right\} I_{ct_2}^{\circ}(p) \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} V_{ct_2}(p) &= \frac{Cp + \frac{1}{3}Y_1(p)}{Cp\{Cp+Y_1(p)\}} I_{ct_2}^{\circ} \\ &= \left\{ \frac{1}{3Cp} + \frac{2}{3} \frac{1}{Cp+Y_1(p)} \right\} I_{ct_2}^{\circ}(p) \end{aligned} \quad (1.76)$$

となる。いま

$$I_{ct_2}^{\circ}(p) = \left\{ I_0 \sin(\omega t - t_1 - t_2 + \varphi) + \sum_{n=1}^n I_n \varepsilon^{-\alpha_n t - t_1 - t_2} \sin(\omega_n t - t_1 - t_2 + \varphi_n) \right\} H(t - t_1 - t_2) \quad (1.77)$$

とすれば(1.75), (1.76)式に代入すると

$$V_{dc} = \frac{1}{3C} \left\{ \frac{I_0}{\omega} \cos \varphi + \sum_{n=1}^n \frac{I_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \omega_n^2}} (\alpha_n \sin \varphi_n + \omega_n \cos \varphi_n) \right\} H(t - t_1 - t_2) \quad (1.78)$$

なる直流成分をうる。すなわち、かかる系統においては最後の蓄電器が投入されると共に端子電圧に同じ大いさの直流成分の発生することをしてしめしている。もちろん(1.77)式における $I_0, I_n, \varphi, \varphi_n, \alpha_n$ および $\omega_n$ は系統の常数ならびに投入時間間隔 $t_1, t_2$ の関数である。かかる系統における端子電圧の零相成分は

$$V_0(p) = V_{00}(p) + V_{0t_1}(p) + V_{0t_2}(p) \quad (1.79)$$

ただし、 $V_{00}(p)$ は $t=0 \sim t_1$ における零相成分で、それは(1.58)式より

$$V_{00}(p) = \frac{1}{3} \frac{1}{Cp + \frac{2}{3}Y_1(p)} I_{a0}^{\circ}(p) \quad (1.80)$$

また、 $V_{0t_1}(p), V_{0t_2}(p)$ はそれぞれ $t=t_1 \sim t_2, t > t_2$ における零相成分の擾乱成分であって、これは(1.64)式(1.68)式より求められる。

$$V_{ot_1}(p) = \frac{1}{3} \frac{1}{Cp + \frac{1}{3} Y_1(p)} I_{bt_1}^{\circ}(p) \quad (1.81)$$

$$V_{ot_2}(p) = \frac{1}{3} \frac{1}{Cp} I_{ct_2}^{\circ}(p) \quad (1.82)$$

また、 $I_{bt_1}^{\circ}(p)$ ,  $I_{ct_2}^{\circ}(p)$  を求めるに必要な  $I_{bo}'(p)$ ,  $I_{co}'(p)$ ,  $I_{ct_1}'(p)$  はそれぞれ (1.59), (1.65) 式より

$$I_{bo}'(p) = I_{co}'(p) = \frac{-\frac{1}{3} Y_1(p)}{Cp + \frac{2}{3} Y_1(p)} I_{ao}^{\circ}(p) \quad (1.83)$$

$$I_{ct_1}'(p) = \frac{-\frac{1}{3} Y_1(p)}{Cp + \frac{1}{3} Y_1(p)} I_{bt_1}^{\circ}(p) \quad (1.84)$$

いま、直列蓄電器の投入前には三相平衡電流が流れていたものとする。  
すなわち、

$$\left. \begin{aligned} I_{ao}^{\circ}(p) &= \mathcal{F}^{-1} I \sin(\omega t - \theta) \\ I_{bo}^{\circ}(p) &= \mathcal{F}^{-1} I \sin(\omega t + \theta \pm \frac{2\pi}{3}) \\ I_{co}^{\circ}(p) &= \mathcal{F}^{-1} I \sin(\omega t + \theta \mp \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

とすれば (複号同順)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{1}{Cp + \frac{2}{3} Y_1(p)} &= \frac{1}{3Cp} \left\{ 1 + 2 \frac{-\frac{1}{3} Y_1(p)}{Cp + \frac{2}{3} Y_1(p)} \right\} \\ \frac{1}{3} \frac{1}{Cp + \frac{1}{3} Y_1(p)} &= \frac{1}{3Cp} \left\{ 1 + \frac{-\frac{1}{3} Y_1(p)}{Cp + \frac{1}{3} Y_1(p)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

なる関係を用いて計算すると

$$\mathcal{F}^{-1} V_o(p) = v_{dc} \quad t > t_1 + t_2 \quad (1.87)$$

となる (附録 1. 参照)。

すなわち、最後の蓄電器が投入された後は零相電圧は振動成分はなく、直流成分のみよりなり、その大きさは最後の蓄電器が投入されて後に各相の蓄電器に生ずる端子電圧の直流成分に等しいことがわかる。

また、(1.82)式より  $\{ \int \nabla_{ot_2}(p) \}_{t=t_1+t_2+0} = 0$  であるから、この直流成分の大きさは最後の蓄電器が投入される寸前の零相電圧の大きさに等しい。それ故また直流成分は最後の蓄電器の投入される寸前の他の2相の端子電圧の和の  $\frac{1}{3}$  の大きさをもってその寸後から発生するということができる。

故にかかる系統においては直列蓄電器の非同時投入により不変的は中性点電位の浮動をうけることなる。

零相インピーダンスがそれほど大でないときは、 $Y_0(p) \neq 0$  のときはこの成分は零相回路を通じて放電しかかる現象は生じない。

(5), (6)

#### (4) 非同時投入時における端子電圧の数値計算例

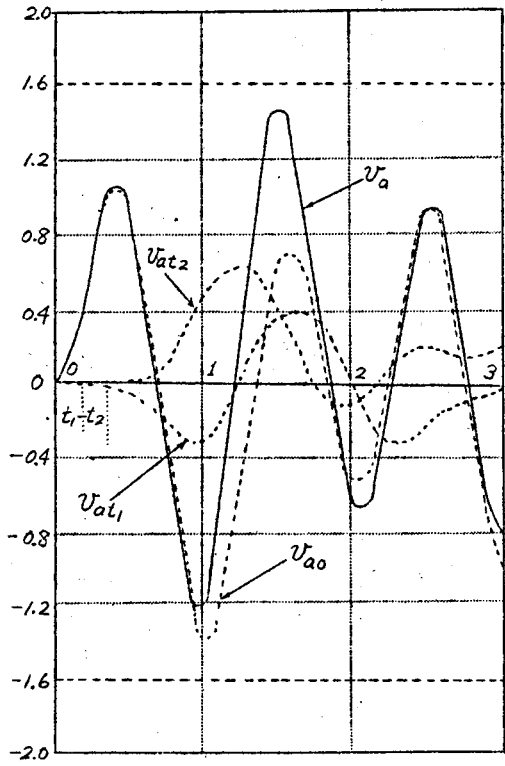
オ6節(2)、附録2.で述べた計算式によつた数値計算例をしめす。

$Y_1(p) = 1/Lp + R$  としている。

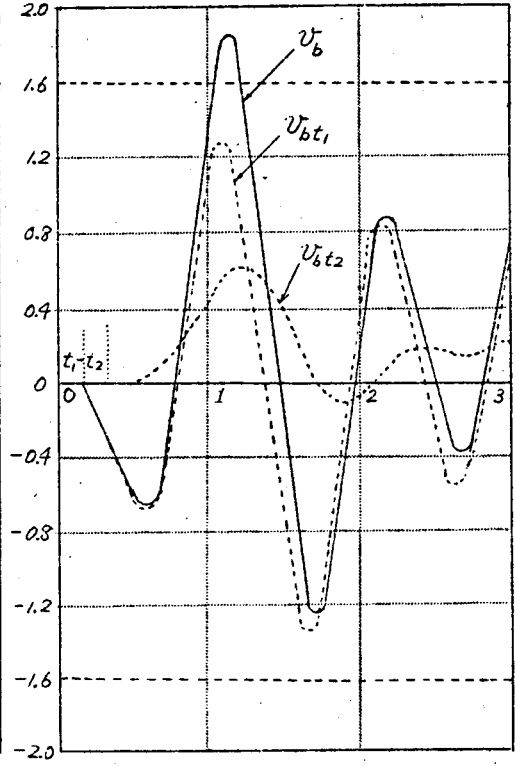
(a)  $L = 0.578 (H)$ ,  $R = 28 (\Omega)$ ,  $C = 35.6 (\mu F)$ ,  $\omega = 377$

として、投入前に対称3相交流が流れていたものとしたときの計算結果をオ1.12図(a), (b), (c), (d)にしめす。図において縦軸は蓄電器が同時に投入されたものとしたときの定常最大値に対する倍数でしめしてをり、縦軸  $\cong \pm 1.6$  の点線は同時投入としたときの最大値である。横軸は時間を周波数でしめしたものである。なお、 $t_1$  の上肩の +, - の意味はオ2番目に投入され、3相が最初の相より進んでいるか、おくれているかをしめしている。これら数値計算例によると、同時投入としたときの最大電圧より25%程度高い電圧が発生することがあることがわかる((c)図参照)。

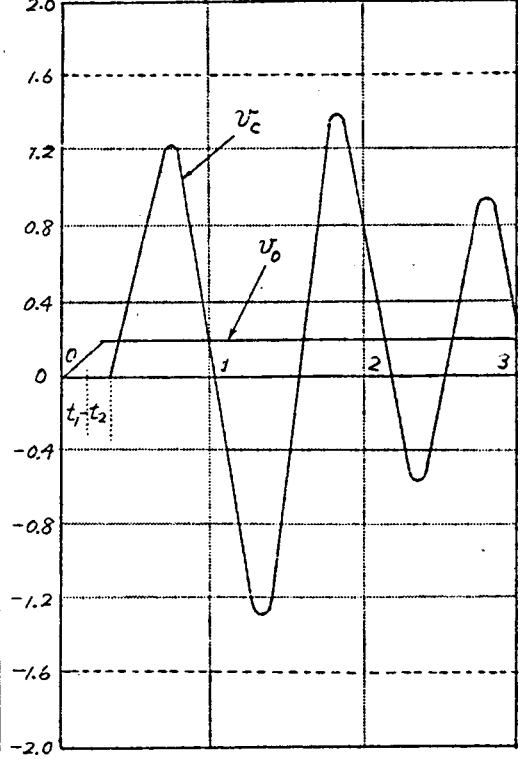
オ1.13図は非同時投入時に発生する直流成分を  $\theta$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  をパラメータにしてしめしたもので、縦軸、横軸は前図と同じ尺度をもっている。これからこの系統は端子電圧の定常値の50%近くの直流成分が発生することがわかる。



(i)



(ii)



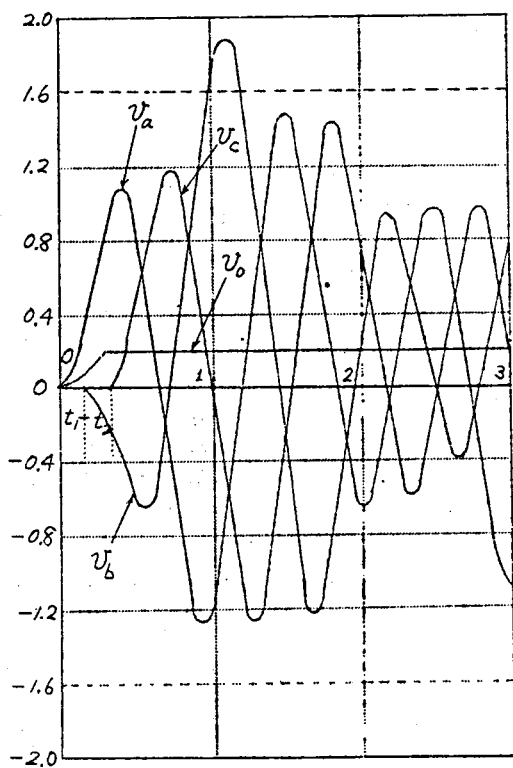
(iii)

(a)

$\theta = 0, \quad t_1^+ = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{60} \text{ 秒} \quad t_2 = \frac{1}{6.7} \cdot \frac{1}{60} \text{ 秒}$

\* 1.12 图

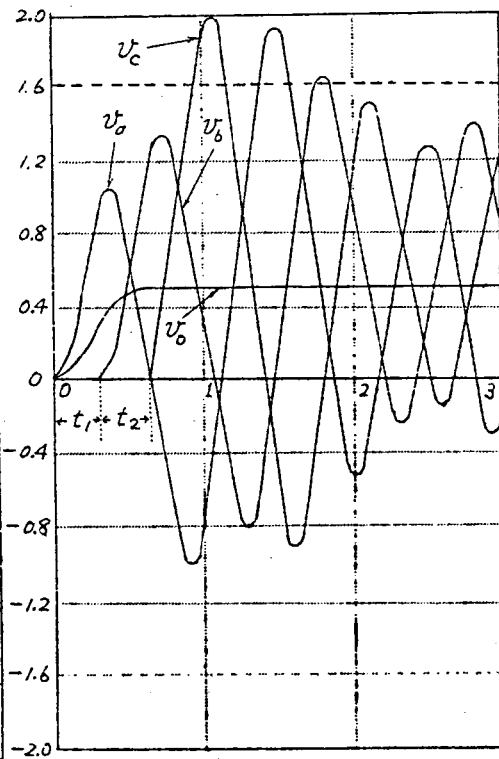




$\theta = 0$

(b)  $t_1^+ = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{60}$  秒

$t_2 = \frac{1}{6.3} \cdot \frac{1}{60}$  秒

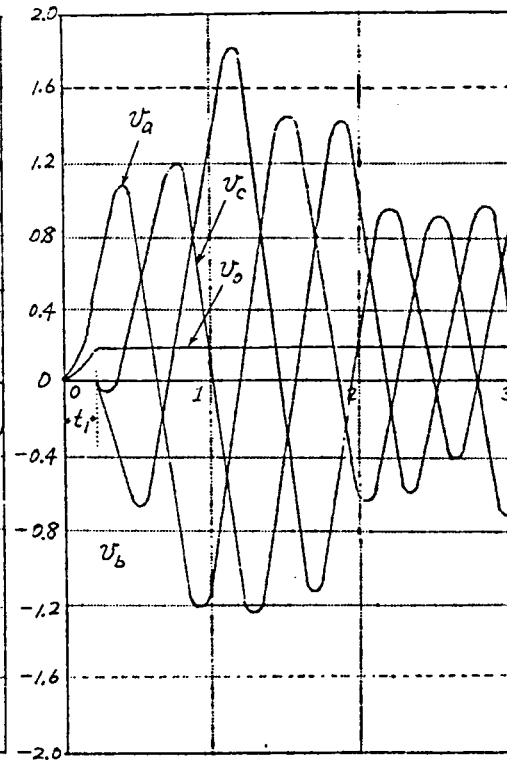


$\theta = 0$

(c)  $t_1^+ = \frac{1}{3.2} \cdot \frac{1}{60}$  秒

$t_2 = \frac{1}{3.15} \cdot \frac{1}{60}$  秒

为 1.12 图



$\theta = 0$

(d)  $t_1^+ = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{60}$  秒

$t_2 = 0$

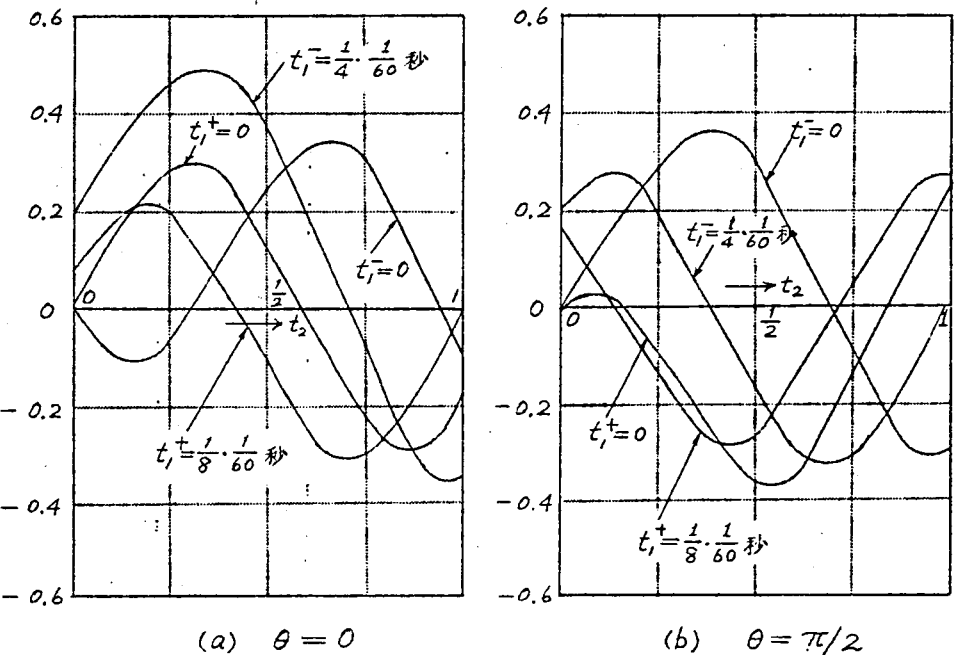
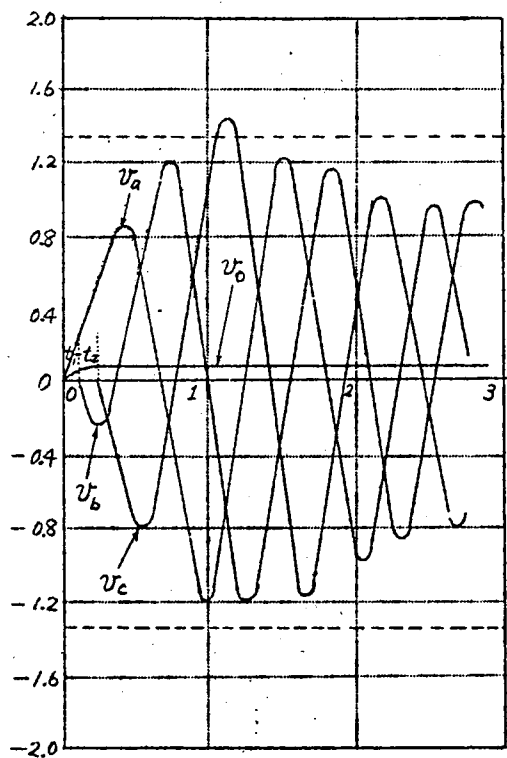


図 1.13 \*

(b)  $L = 0.239$  (H),  $R = 24.2$  ( $\Omega$ ),  $C = 73.7$  ( $\mu\text{F}$ ),  $\omega = 377$  として, 投入前に対称 3 相交流が流れていたものとした計算結果をオ 1.14 図 (a), (b), (c), (d), (e) にしめす (1.35  $\mu\text{F}$  の対地容量を考慮した)。

縦軸, 横軸はオ 1.12 図と同じ意味をもち, このときの同時投入としたときの最大電圧は点線でしめすように, 1.35 倍である。故に計算例によると非同時投入により, 前の例と同様, 25% 程度高い電圧の発生することがある (e) 図参照)。オ 1.15 図の場合非同時投入により発生する直流成分をしめす。この系統でも前の例と同じく 50% 近くの電圧が

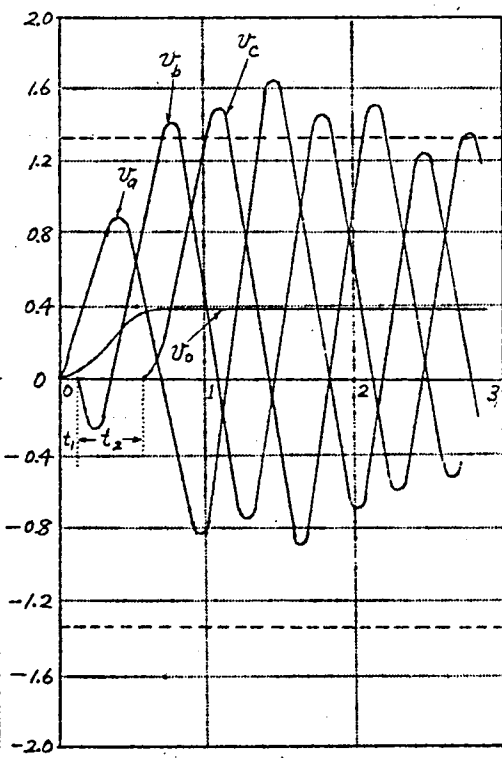


(a)

$$\theta = 0$$

$$t_1^- = \frac{1}{8} \frac{1}{60} \text{ 秒}$$

$$t_2 = \frac{1}{8} \frac{1}{60} \text{ 秒}$$

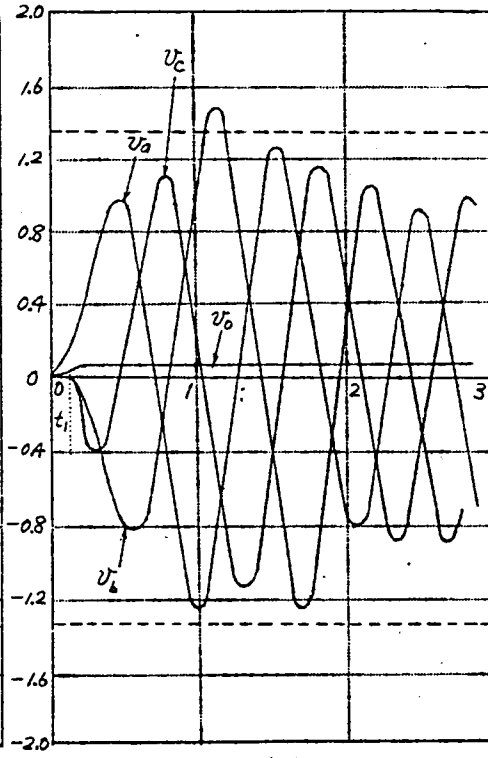


(b)

$$\theta = 0$$

$$t_1^- = \frac{1}{8} \frac{1}{60} \text{ 秒}$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{60} \text{ 秒}$$



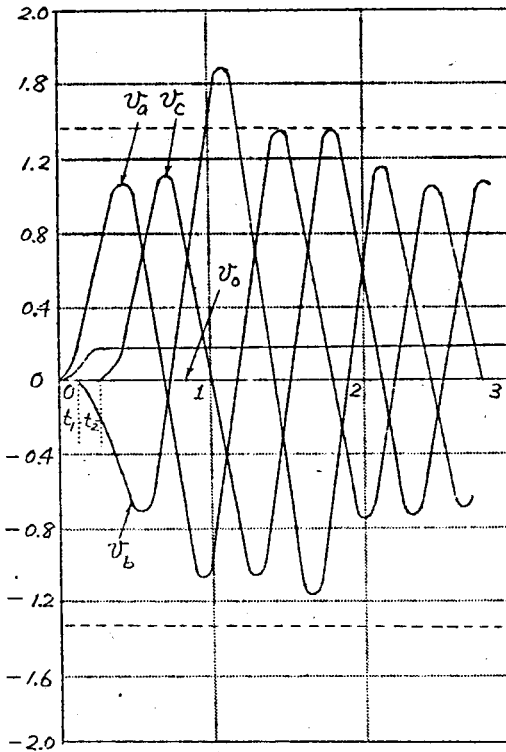
(c)

$$\theta = 0$$

$$t_1^+ = \frac{1}{8} \frac{1}{60} \text{ 秒}$$

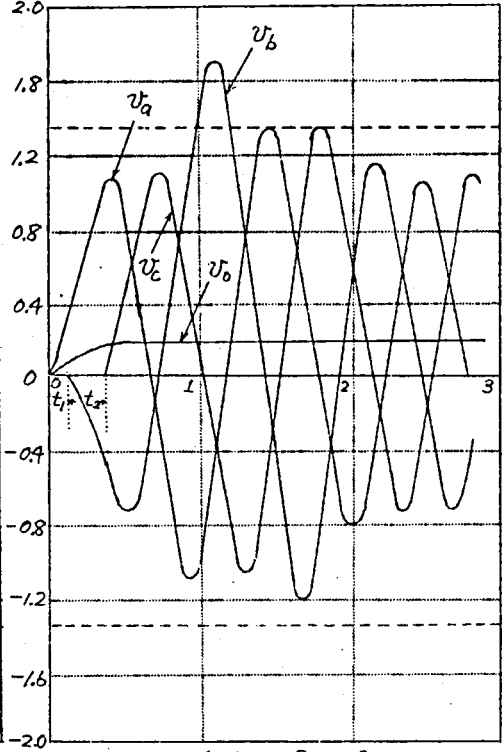
$$t_2 = 0$$

图 1.14



(d)  $\theta = 0$

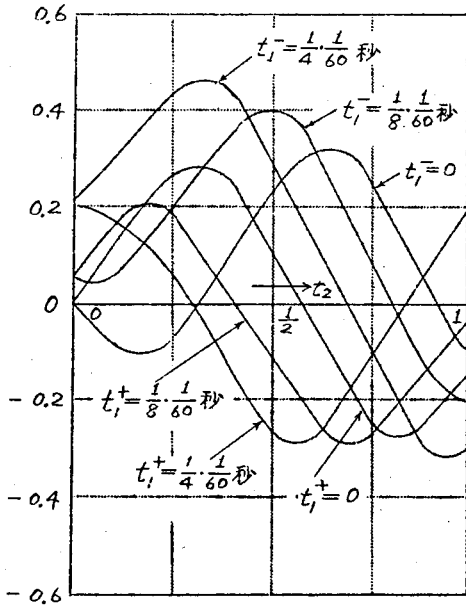
$t_1^+ = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{60}$  秒     $t_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{60}$  秒



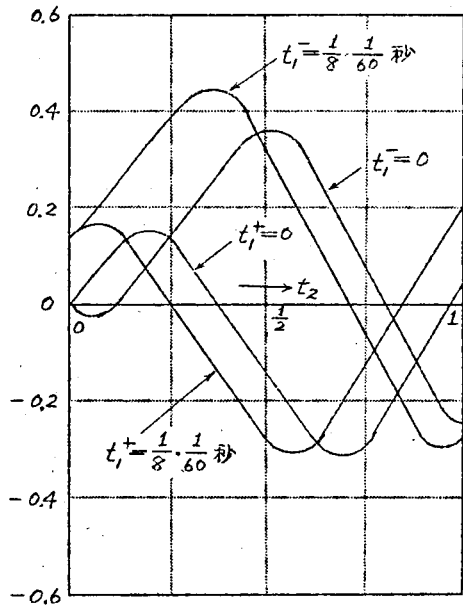
(e)  $\theta = 0$

$t_1^+ = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{60}$  秒     $t_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{60}$  秒

※ 1.14 图



(a)  $\theta = 0$



(b)  $\theta = \frac{\pi}{4}$

※ 1.15 图

発生することがわかる。

(C) アナログ・コンピュータによる演算

以上、述べた数値計算結果をさらに検討するために、アナログ・コンピュータを用いた。対象とした系統は正相、逆相インピーダンスが等しく、零相インピーダンスが非常に大きい系統で、その正相アドミッタンスが  $Y_1(p) \frac{1}{Lp+R}$  であらわされるものとしている。

$$\omega t = \tau, \quad \frac{R}{\omega L} = m, \quad \frac{1}{\omega^2 LC} = k \quad (1.88)$$

とし、端子電圧に対しては蓄電器投入前の電流がそのまま蓄電器に流れたものとしたときの定常最大値に対する比でしめし、電流に対しては投入前の最大値に対する比でしめせば、

(1.58)式より

$$V_{a0}(\tau) = \int_0^\infty \frac{p+m}{p^2+mp+\frac{2}{3}k} I_{a0}^{\circ}(p) \quad (1.89)$$

また、(1.64)式より

$$\left. \begin{aligned} V_{at_1}(\tau) &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \left\{ \frac{p+m}{p^2+mp+\frac{1}{3}k} - \frac{p+m}{p^2+mp+k} \right\} I_{bt_1}^{\circ}(p) \\ V_{bt_1}(\tau) &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \left\{ \frac{p+m}{p^2+mp+\frac{1}{3}k} + \frac{p+m}{p^2+mp+k} \right\} I_{bt_1}^{\circ}(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

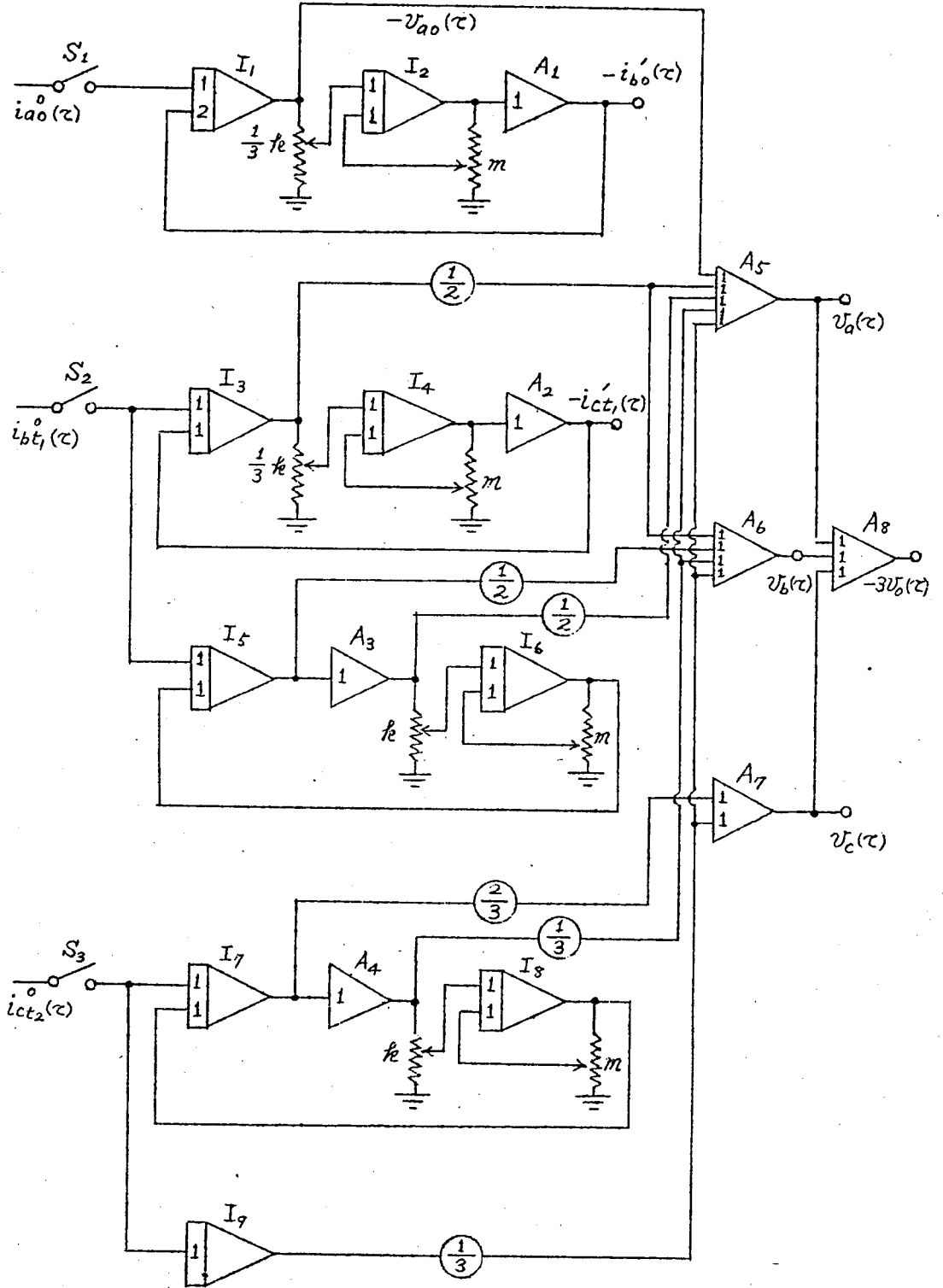
ただし、上式における  $I_{bt_1}^{\circ}(p)$  の  $t$ -関数は (1.59), (1.60) 式より

$$i_{bt_1}^{\circ}(\tau) = \left[ \int_0^\infty \left\{ I_{b0}^{\circ}(p) + \frac{\frac{1}{3}k}{p^2+mp+\frac{2}{3}k} I_{a0}^{\circ}(p) \right\} H(\tau-\tau_1) \right] \quad (1.91)$$

また、(1.68)式より

$$\left. \begin{aligned} V_{at_2}(\tau) &= V_{bt_2}(\tau) = \int_0^\infty \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{p+m}{p^2+mp+k} \right\} I_{ct_2}^{\circ}(p) \\ V_{ct_2}(\tau) &= \int_0^\infty \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{p} + 2 \frac{p+m}{p^2+mp+k} \right\} I_{ct_2}^{\circ}(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

ただし、上式における  $I_{ct_2}^{\circ}(p)$  の  $t$ -関数は (1.59), (1.60), (1.65), (1.66)



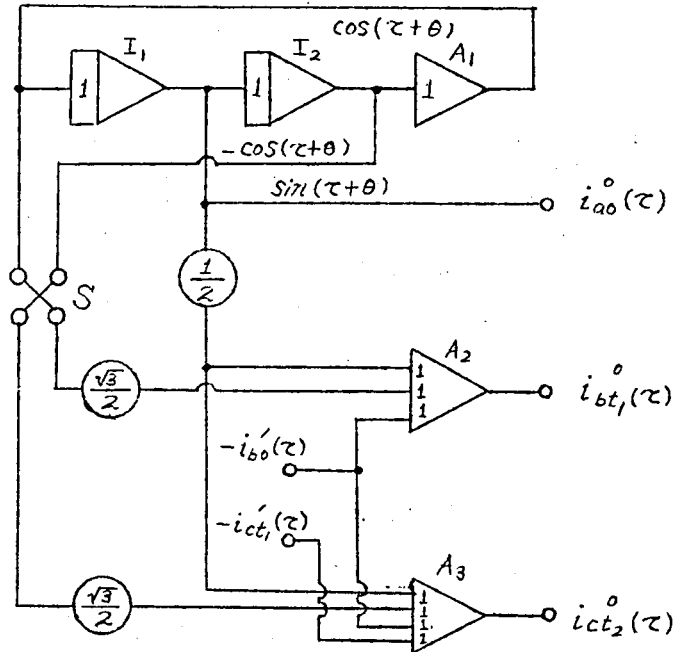
\* 1.16 图 \*

式より

$$i_{ct_2}^{\circ}(\tau) \left[ \int_2 \left\{ I_{co}^{\circ}(p) + \frac{\frac{1}{3}k}{p^2+mp+\frac{2}{3}k} I_{ao}^{\circ}(p) + \frac{\frac{1}{3}k}{p^2+mp+\frac{1}{3}k} I_{bt_1}^{\circ}(p) \right\} H(\tau-\tau_1+\tau_2) \right] \quad (1.93)$$

以上の関係式を参照すると才1.16図の様な演算回路をつくることができる。図においてスイッチ  $S_1, S_2, S_3$  は投入スイッチで非同時時間間隔に従って順次投入するものとする。実際、演算にあたっては手動でおこなった。

線路電流について投入前に三相平衡電流が流れていたものとし、才1.17図の演算回路を用いて発生した。図においてスイッチ  $S$  は才2番目に



才1.17図 \*

投入される相を選択するスイッチである。

$t_a = 0.1 \sim 0.5$  とし  $t_1, t_2$  を1サイクル以下として演算した結果から、

\*注 図において○はポテンショメータをしめし、円内の数値はその設定値である。

このときは同時投入として演算したのをまとめた才1.10図の結果より20～30%程度高い過電圧が発生することがあるということができる。

### (5) 現場試験に対する考察

昭和26年1月北陸幹線祖山発電所～伊丹変電所間において実施された直列蓄電器投入試験において投入後1～位で定常値の2.5倍以上の過電圧が発生したことが報告されている。<sup>(9)</sup>(1)で述べたように同時投入とすると定常値の2倍以上の電圧が発生することはない。発電機のインピーダンスの変化を考慮しても、その時定数より考えて充分説明されないが、非同時的に投入されたとすると、前述したようにこれを説明することができる。(4)(a)の数値例はこの試験系統を対象として計算したものである。実際にオシログラフも非同時的に投入されたことをしめしている。零相電圧についてはこの場合記録はしていない。

昭和27年1月九州電力九州東幹線耳川変電所～上津役変電所間において実施された直列蓄電器投入試験においては1.4倍以上の過電圧の発生されている。<sup>(10)</sup>この試験においては非同時投入の様相をあきらかにするために零相電圧を測定されているが、それによると(3)の解析結果がしめすように、最後の蓄電器が投入されると共に零相電圧は直流成分のみよりなり、5サイクル程経て減小している。これは計算では略した高い零相インピーダンスを通じて放電するためである。なお、実測結果によると直流成分が大なるほど大なる過電圧が発生してをり、零相電圧に相当するだけ中性点電位が浮動している。(4)(b)数値例はこの系統を対象として行ったものである。

昭和27年7月関西電力京福線安曇変電所～中舞鶴変電所間で行われた直列蓄電器投入試験<sup>(11)</sup>、昭和27年10月関西電力摺子新宮線の直列蓄電器投入試験<sup>(12)</sup>においても解析結果を裏書きする報告がされている。



## 第2部 直列蓄電器補償系統の $\frac{1}{3}$ 調波振動

### 才1節 緒言

直列蓄電器補償系統において無負荷変圧器を投入すると変圧器の定格励磁電流をはるかに越え、かつ周波数も電源周波数よりも低い周波数(分数調波)をもつ線路電流が流れることがある。<sup>(12)</sup>これにより機器にかかる電圧は大したものではないが、この過大な電流のため放置することはできない。

かかる現象は変圧器が全然無負荷でなく、軽負荷のときも当然発生することが予想される。この現象は無負荷変圧器投入時の位相、変圧器の励磁特性、系統の定数等によって左右されるものであつて、古くより研究されているが、<sup>(13)(14)(15)(16)</sup>直列蓄電器補償系統を対象として定量的に取扱われた研究は殆どない。<sup>(17)</sup>

この現象を防止するためには、直列蓄電器に並列に抵抗あるいはリアクトルをつなぐか、系統の操作上、直列蓄電器を通じて無負荷変圧器をつなぐことを避け、それを短絡して行うようにする方法がとられている。また、分数調波電流により動作する継電器によつて直列蓄電器を短絡して防止する方法もある。<sup>(18)</sup>

### 才2節 等価伝達関数法による分数調波振動の解析

等価伝達関数法は通常 *describing function method* とよばれているもので、非線型制御系の解析に用いられている。この方法の基礎が与えられたのは古い<sup>(19)</sup>が、<sup>(20)</sup>*R. J. Kochenburger* により非線型部分を *describing function* により線型部分を周波数伝達関数であらわすことにより制御系の解析、シンセシスを簡便にされてより広く用いられるようになったものである。*J. C. West* 等は制御系に周期的外力を加えた場合にこの方法を拡張して用い、基本波共振現象、分数調波振動を取扱つて

(21)(22) いる。しかし、その理論的考察は不完全である。

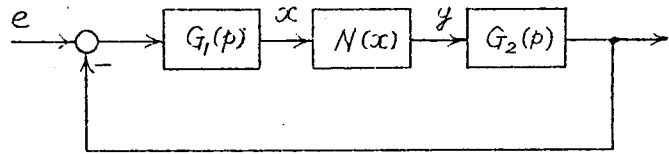
ここでは、上記の方法を拡張して等価伝達関数 (describing function はこの逆数に負号をつけたものである。) を用いて分数調波振動を解析する方法について述べる。なお、基本波共振現象については附録3. で述べている。

(23)(24) (1) 等価伝達関数による解析法

対象とする系は非線型要素を1つだけ含み、他は線型要素よりなり、次の微分方程式が成り立つものとする。

$$\left. \begin{aligned} x &= G_1(p) \{ e - G_2(p) y \} \\ y &= N(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし、 $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$  は  $p (= \frac{d}{dt})$  の有理関数で  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$  は低域濾波特性をもつもの (そう



※ 2.1 図

でない場合は (4) で述べる) とし、 $N(x)$  は非線型特性をあらわすもので  $x$  の一価の連続な奇関数とする。さらに系は条件付安定であるような系ではなく、外力  $e$  が階段状に変化したときは安定で持続振動は発生しないものとする。

かかる系に周期的外力を加えたときに発生する安定な振動のうち、その周期が外力の周期の整数倍となる分数調波振動を解析する。

ここでは特に奇数次の分数調波、すなわち、角周波数  $1/2m+1$  ( $m=1, 2, \dots$ ) について考える。

系の入力を

$$e = E \cos(\overline{2m+1}t + \sigma) \quad (2.2)$$

としたとき、非線形要素への入力は分数調波振動が発生するものとして

$$x = a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \quad (2.3)$$

とおくことができる。

(a) 等価伝達関数

基本波のみ考えるとき(附録3,参照)と同様にして, 等価伝達関数を次のように定義する。非線形要素への入力が(2.3)式のように変化するものとすれば, その出力は

$$y = N \{ a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \quad (2.4)$$

となるが, これをフーリエ級数に展開し, 入力と同じ周波数成分のみを考えると,

$$\left. \begin{aligned} y &\cong \sqrt{a_{2m+1}^2 + b_{2m+1}^2} \cos(\overline{2m+1}t + \varphi - \theta_{2m+1}) + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos(t - \theta_1) \\ \tan \theta_{2m+1} &= \frac{b_{2m+1}}{a_{2m+1}}, \quad \tan \theta_1 = \frac{b_1}{a_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N \{ a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) dt \\ b_{2m+1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N \{ a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \sin(\overline{2m+1}t + \varphi) dt \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N \{ a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \cos t dt \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N \{ a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \sin t dt \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

となるが, 基本波共振現象のときと同様に

$$N_{2m+1} = \frac{\sqrt{a_{2m+1}^2 + b_{2m+1}^2}}{a} \varepsilon^{-j\theta_{2m+1}} \quad (2.8)$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{b} \varepsilon^{-j\theta_1} \quad (2.9)$$

なる量をそれぞれ非線形要素の基本波(角周波数  $2m+1$ ), 分次調波(角周波数 1)に対する等価伝達関数と定義すると, (2.6), (2.8) 式より

$$N_{2m+1} = \frac{1}{a} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} N \{ a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \varepsilon^{-j(\overline{2m+1}t + \varphi)} dt \quad (2.10)$$

また (2.7), (2.9) 式より

$$N_1 = \frac{1}{b} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} N \{ a \cos(2m+1t+\varphi) + b \cos t \} \varepsilon^{-jt} dt \quad (2.11)$$

となる。

一般にこの場合の等価伝達関数は振幅  $a$ ,  $b$  および位相  $\varphi$  の関数で複素量となる。

b) 周期的平衡状態の決定

系の微分方程式 (2.1) 式より

$$x = G_1(p) \{ e - G_2(p) N(x) \} \quad (2.12)$$

なる関係式が成立する。基本波および分数調波のみ優勢としているから

$$x = R_e \{ a \varepsilon^{j(2m+1t+\varphi)} + b \varepsilon^{jt} \} \quad (2.13)$$

とすれば ( $R_e$  なる記号は複素量の実数部をしめす) 等価伝達関数を用いることにより

$$N(x) = R_e \{ N_{2m+1} a \varepsilon^{j(2m+1t+\varphi)} + N_1 b \varepsilon^{jt} \} \quad (2.14)$$

とすることができる。故に (2.12) 式に代入すると

$$a \varepsilon^{j(2m+1t+\varphi)} + b \varepsilon^{jt} = G_1(j2m+1) \left\{ E \varepsilon^{j(2m+1t+\sigma)} - G_2(j2m+1) N_{2m+1} a \varepsilon^{j(2m+1t+\varphi)} \right\} - G_1(j) G_2(j) N_1 b \varepsilon^{jt} \quad (2.15)$$

各周波数成分に対してこれを解くと周期的平衡状態は次の式で決定される。

$$\left. \begin{aligned} a^2 \{ (\xi_{2m+1} - N_{2m+1,r})^2 + (\zeta_{2m+1} + N_{2m+1,j})^2 \} &= \frac{E^2}{r^2 + x^2} \\ \tan(\sigma - \varphi) &= \frac{(N_{2m+1,r} - \xi_{2m+1})x + (N_{2m+1,j} + \zeta_{2m+1})r}{(N_{2m+1,r} - \xi_{2m+1})r - (N_{2m+1,j} + \zeta_{2m+1})x} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$$\xi_1 = N_{1,r} \quad , \quad \zeta_1 = -N_{1,j} \quad (2.17)$$

ただし

$$\left. \frac{1}{G_1(2m+1j) G_2(2m+1j)} = \xi_{2m+1} - j\zeta_{2m+1} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{G_1(j)G_2(j)} &= \xi_1 - j\zeta_{2m+1} \\ G_2(\overline{2m+1}j) &= r + jx \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{2m+1} &= N_{2m+1,r} + jN_{2m+1,j} \\ N_1 &= N_{1,r} + jN_{1,j} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

## (C) 分数調波発生条件

分数調波の周期的平衡状態は(2.17)式すなわち

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = N_{1,r} &= \frac{1}{b} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi N \{ a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \cos t dt \\ \zeta_1 = -N_{1,j} &= \frac{1}{b} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi N \{ a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \sin t dt \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

で決定される。上式の左辺の  $\xi_1, \zeta_1$  は系の線型部分のパラメータにより決定される量であるが、右辺は  $a, b, \varphi$  の関数である。故に  $a, b, \varphi$  を種々かえたときの右辺の値を求め、これが(2.20)式を充すとき分数調波振動が発生するということができる。このことは次のようにいうことができる。

(2.11)式より  $\varphi$  を消去して  $N_1$  が複素平面上にえがく軌跡を  $a, b$  の関数として求め、さらにこの軌跡の  $a, b$  をかえたときの包絡線を求めその内部に  $\xi_1 - j\zeta_1$  なる点があれば分数調波が発生すると。

## (d) 変分に対する等価伝達関数

周期的平衡状態の安定条件の吟味に用いる変分に対する等価伝達関数を定義しよう。周期解は(2.3)式で表わされるとし、充分小さい外乱によってひき起される周期解よりの変分  $\Delta x$  を考え

$$\Delta x = \delta \cos(nt + \theta) \quad \delta \ll a, b \quad (2.21)$$

とし、変分  $\Delta x$  に基因する出力成分  $N'(x)\Delta x$  (ただし  $N'(x) = \frac{dN(x)}{dx}$ ) をフーリエ級数に展開し、入力と同じ周波数成分のみを考えて、前述の等価伝達関数と同様周波数伝達関数を導き、これを変分に対する等価伝

逆関数  $N_s$  と定義すると

$$\left. \begin{aligned}
 N_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N' \{ a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \{ 1 + \varepsilon^{-j(2nt+2\theta)} \} dt \\
 & \qquad \qquad \qquad n=1, 2, 3, \dots \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N' \{ a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} dt \\
 & \qquad \qquad \qquad n \neq \text{integer}
 \end{aligned} \right\} (2.22)$$

となる。すなわち、変分に対する等価伝達関数は変分の周波数が整数であるときは複素量となり、そうでないときは実数となる。

複素平面 ( $u$ - $v$ 平面) 上で考えると  $\theta$  は変分の発生する位相であるから (2.22) 式の上の式より  $\theta$  を消去すると

$$\begin{aligned}
 & \left[ u - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N' \{ a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} dt \right]^2 + v^2 \\
 &= \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N' \{ a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \cos 2nt dt \right]^2 \\
 & \quad + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N' \{ a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \sin 2nt dt \right]^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad n=1, 2, 3, \dots \qquad (2.23)
 \end{aligned}$$

また (2.22) の下の式より

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N' \{ a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} dt \quad n \neq \text{integer} \quad (2.24)$$

となる。すなわち、変分に対する等価伝達関数の複素平面上の軌跡は変分の周波数が整数のときは実軸上に中心をもつ円となるが、そうでないときは実軸上の点となる。

(e) 周期的平衡状態の安定条件

(2.16), (2.17) 式で求めた周期平衡状態は必ずしも定常状態として実際に存在するとは限らない。ここでは (d) で述べた変分に対する等価伝達関数を用いて、その安定条件を吟味し実在する定常状態を求めよう。

周期解  $x$  は (2.3) 式で表わされるとし、充分小さい外乱  $\Delta e$  によって  $v$

き起される定常的な周期解よりの変分を  $\Delta x$  とすれば  $x$  は (2.12) 式をみたすから

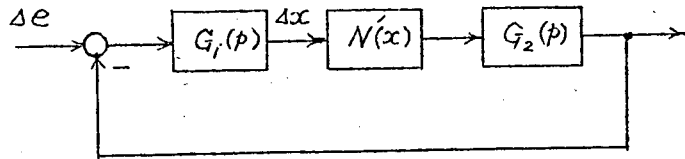


図 2.2

$$\Delta x = G_1(p) \{ \Delta e - G_2(p) N'(x) \Delta x \} \quad (2.25)$$

ここで、充分小さい外乱  $\Delta e$  が取除かれた後  $\Delta x$  が時間の経過と共に零に収斂すれば  $x$  なる周期状態は漸近安定である。

$\Delta x$  が (2.21) 式であらわされるとすれば、前述の変分に対する等価伝達関数を用いると (2.25) 式であらわされる系の安定、不安定を決定する特性方程式は

$$1 + G_1(p) G_2(p) N_G = 0 \quad (2.26)$$

となる。系は前述した特性をもっているから、ナイキストの判定法を用いることにより次のようにいうことができる。

$N_G$  は  $n$  が整数であるときは複素平面上において (2.23) 式であらわされる円となるが、 $\xi_n - j\eta_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) が対応する円の中にあるれば系は角周波数  $n$  なる振動を併発して不安定となる。ただし

$$\left\{ -1/G_1(p)G_2(p) \right\}_{p=jn} = \xi_n - j\eta_n \quad (2.27)$$

$n=1, 2, \dots$

とする。すなわち (2.23) 式を用いると、不安定条件は

$$\begin{aligned} & \left[ \xi_n - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N' \{ a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} dt \right]^2 + \eta_n^2 \\ & < \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N' \{ a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \cos 2nt dt \right]^2 \\ & + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N' \{ a \cos(\sqrt{2m+1}t + \varphi) + b \cos t \} \sin 2nt dt \right]^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$n=1, 2, 3, \dots$

となる。 $n=1$  に対する不安定条件、すなわち、主として発生する分数調波と同じ周期の自励振動と併発して不安定となる条件は (2.28) 式より

$$\begin{aligned} & \left[ \xi_1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N' \{ a \cos(2m+1t+\varphi) + b \cos t \} dt \right]^2 + \eta_1^2 \\ & < \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N' \{ a \cos(2m+1t+\varphi) + b \cos t \} \cos 2t dt \right]^2 \\ & + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N' \{ a \cos(2m+1t+\varphi) + b \cos t \} \sin 2t dt \right]^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

(2) 非線形特性が繰り表わされる場合

非線形特性が

$$N(x) = x^{2\nu+1} \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

と表わされるとき

$$\begin{aligned} & \{ a \cos(2m+1t+\varphi) + b \cos t \}^{2\nu+1} \\ & = -\frac{1}{2^{2\nu}} \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2\nu-r+1}{x-r} \binom{2r}{r} \cos\{(2\nu-x+1)(2m+1)t + (2\nu-x+1)\varphi\} \\ & + \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=y}^x \sum_{y=0}^x a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2\nu-r+1}{x-r} \binom{2r}{r-y} \\ & \times \left[ \cos\{((2m+1)(2\nu-x+1)+2y)t + (2\nu-x+1)\varphi\} \right. \\ & \left. + \cos\{((2m+1)(2\nu-x+1)-2y)t + (2\nu-x+1)\varphi\} \right] \\ & - \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2r+1}{r-x} \binom{2\nu-r}{\nu-r} \cos(2x+1)t \\ & + \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=y}^x \sum_{y=0}^x a^{2r} b^{2(\nu-r)+1} \binom{2\nu+1}{2\nu-r+1} \binom{2\nu-r+1}{x-r} \binom{2r}{r-y} \\ & \times \left[ \cos\{(2y(2m+1)+(2\nu-x+1))t + 2y\varphi\} + \cos\{(2y(2m+1)-(2\nu-x+1))t + 2y\varphi\} \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

となるから (附録4 参照) (2.10) 式により角周波数  $2m+1$  に対する等価伝達関数  $N_{2m+1}$  を計算すると

$$N_{2m+1} = \frac{1}{a} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ a \cos(2m+1t+\varphi) + b \cos t \right\}^2 \frac{e^{-j(2m+1)t+\varphi}}{\varepsilon} dt$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_i \sum_{r=y'_i}^{x'_i} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2\sqrt{\nu-r}+1}{x'_i-r} \binom{2r}{r-y'_i} \varepsilon^{j2(\nu-x'_i)\varphi} \\
 &+ \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_j \sum_{r=y'_j}^{x'_j} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2\sqrt{\nu-r}+1}{x'_j-r} \binom{2r}{r-y'_j} \varepsilon^{-j2(\nu-x'_j+1)\varphi} \\
 &- \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_{r=m}^{\nu} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2r+1}{r-m} \binom{2\sqrt{\nu-r}}{\nu-r} \varepsilon^{-j\varphi} \\
 &+ \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_k \sum_{r=y'_k}^{x'_k} a^{2r-1} b^{2(\nu-r)+1} \binom{2\nu+1}{2\sqrt{\nu-r}+1} \binom{2\sqrt{\nu-r}+1}{x'_k-r} \binom{2r}{r-y'_k} \varepsilon^{j(2y'_k-1)\varphi} \\
 &+ \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_l \sum_{r=y'_l}^{x'_l} a^{2r-1} b^{2(\nu-r)+1} \binom{2\nu+1}{2\sqrt{\nu-r}+1} \binom{2\sqrt{\nu-r}+1}{x'_l-r} \binom{2r}{r-y'_l} \varepsilon^{j(2y'_l-1)\varphi} \\
 &+ \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_p \sum_{r=y'_p}^{x'_p} a^{2r-1} b^{2(\nu-r)+1} \binom{2\nu+1}{2\sqrt{\nu-r}+1} \binom{2\sqrt{\nu-r}+1}{x'_p-r} \binom{2r}{r-y'_p} \varepsilon^{-j(2y'_p+1)\varphi} \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

ただし,  $x'_i, y'_i, x'_j, y'_j, \dots, x'_p, y'_p$  は

$$\left. \begin{aligned}
 y'_i &= (2m+1)(\nu-x'_i) & , & \quad 0 \leq x'_i \leq \nu, \quad 0 \leq y'_i \leq x'_i, \\
 y'_j &= (2m+1)(\nu-x'_j+1) & , & \quad 0 \leq x'_j \leq \nu, \quad 0 \leq y'_j \leq x'_j, \\
 y'_k &= \frac{m-(\nu-x'_k)}{2m+1} & , & \quad 0 \leq x'_k \leq \nu, \quad 0 \leq y'_k \leq x'_k, \\
 y'_l &= \frac{m+1+\nu-x'_l}{2m+1} & , & \quad 0 \leq x'_l \leq \nu, \quad 0 \leq y'_l \leq x'_l, \\
 y'_p &= \frac{\nu-x'_p-m}{2m+1} & , & \quad 0 \leq x'_p \leq \nu, \quad 0 \leq y'_p \leq x'_p,
 \end{aligned} \right\} \tag{2.33}$$

なる関係をもたす整数である。

また, 角周波数 1 に対する等価伝達関数  $N_1$  は (2.11) 式より

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{b} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ a \cos(2m+1t + \varphi) + b \cos t \right\} \varepsilon^{2\nu+1-jt} dt \\
 &= \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_i \sum_{r=y'_i}^{x'_i} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r-1} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2\sqrt{\nu-r}+1}{x'_i-r} \binom{2r}{r-y'_i} \varepsilon^{j(2\nu-x'_i+1)\varphi} \\
 &+ \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_j \sum_{r=y'_j}^{x'_j} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r-1} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2\sqrt{\nu-r}+1}{x'_j-r} \binom{2r}{r-y'_j} \varepsilon^{-j(2\nu-x'_j+1)\varphi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_k \sum_{r=y_k}^{x_k} a^{2r} b^{2(\nu-r)} \binom{2\nu+1}{2\nu-r+1} \binom{2\nu-r+1}{x_k-r} \binom{2r}{r-y_k} \varepsilon^{j2y_k\varphi} \\
 & + \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_l \sum_{r=y_l}^{x_l} a^{2r} b^{2(\nu-r)} \binom{2\nu+1}{2\nu-r+1} \binom{2\nu-r+1}{x_l-r} \binom{2r}{r-y_l} \varepsilon^{-j2y_l\varphi} \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

ただし  $x_i, y_i, \dots, x_l, y_l$  は

$$\left. \begin{aligned}
 y_i &= (2m+1)(\nu-x_i)+m, & 0 \leq x_i \leq \nu, & 0 \leq y_i \leq x_i \\
 y_j &= (2m+1)(\nu-x_j)+m+1, & 0 \leq x_j \leq \nu, & 0 \leq y_j \leq x_j \\
 y_k &= \frac{\nu-x_k+1}{2m+1}, & 0 \leq x_k \leq \nu, & 0 \leq y_k \leq x_k \\
 y_l &= \frac{\nu-x_l}{2m+1}, & 0 \leq x_l \leq \nu, & 0 \leq y_l \leq x_l
 \end{aligned} \right\} (2.35)$$

なる関係をみたす整数である。

もし、 $m > \nu$  ならば (2.35) 式をみたす  $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$  はなく  $x_l = \nu, y_l = 0$  のみ考えればよいことになり

$$N_1 = \frac{1}{2^{2\nu}} \sum_{r=0}^{\nu} a^{2r} b^{2(\nu-r)} \binom{2\nu+1}{2\nu-r+1} \binom{2\nu-r+1}{\nu-r} \binom{2r}{r} \quad (2.36)$$

となり実数量となる。故に (2.20) 式よりわかるように、かかる場合は  $\varphi_1 = 0$  の場合を除き、分数調波振動が発生しないことがわかる。

次に変分に対する等価伝達関数について考える。

$$\begin{aligned}
 & (2\nu+1) \left\{ a \cos(2m+1)t + \varphi + b \cos t \right\}^{2\nu} \\
 &= -\frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_{r=0}^{\nu} a^{2r} b^{2(\nu-r)} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\nu-r}{\nu-r} \binom{2r}{r} \\
 & \quad - \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu-1}} \sum_{x=0}^{\nu-1} \sum_{r=0}^x a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\nu-r}{x-r} \cos \left\{ 2(\nu-x)(2m+1)t + 2(\nu-x)\varphi \right\} \\
 & \quad + \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu-1}} \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\nu-r}{\nu-r} \binom{2r}{r-x} \cos(2xt) \\
 & \quad + \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu-1}} \sum_{x=0}^{\nu-1} \sum_{y=0}^x \sum_{r=y}^x a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\nu-r}{x-r} \binom{2r}{r-y} \\
 & \quad \times \left[ \cos \left\{ 2(\nu-x)(2m+1+y)t + 2(\nu-x)\varphi \right\} + \cos \left\{ 2(\nu-x)(2m+1-y)t + 2(\nu-x)\varphi \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu-1}} \sum_{x=0}^{\nu-1} \sum_{y=0}^x \sum_{r=y}^x a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \binom{2\nu}{2r+1} \binom{2\bar{\nu}-r-1}{x-r} \binom{2r+1}{r-y} \\
 & \times \left[ \cos \left\{ ((2\sqrt{\nu-1-x}+1)(2m+1) + (2y+1)t + (2\sqrt{\nu-1-x}+1)\varphi) \right\} \right. \\
 & \left. + \cos \left\{ ((2\sqrt{\nu-1-x}+1)(2m+1) - (2y+1)t + (2\sqrt{\nu-1-x}+1)\varphi) \right\} \right] \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

となる (附録 5 参照) から変分に対する等価伝達関数は (2.22) 式より

$$\begin{aligned}
 N_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2\nu+1) \left\{ a \cos(2m+1)t + \varphi + b \cos t \right\}^{2\nu} \left\{ 1 + \varepsilon^{-j(2nt+2\theta)} \right\} dt \\
 &= \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_{r=0}^{\nu} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\bar{\nu}-r}{\nu-r} \binom{2r}{r} \\
 &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu-1}} \sum_i \sum_{r=\zeta_i}^{\xi_i'} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\bar{\nu}-r}{\xi_i'-r} \binom{2r}{r-\zeta_i'} \cos 2(\nu-\xi_i')\varphi \\
 &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu-1}} \sum_j \sum_{r=\zeta_j}^{\xi_j'} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \binom{2\nu}{2r+1} \binom{2\bar{\nu}-r-1}{\xi_j'-r} \binom{2r+1}{r-\zeta_j'} \cos(2\sqrt{\nu-1-\xi_j'+1})\varphi \\
 &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_{r=n}^{\nu} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\bar{\nu}-r}{\nu-r} \binom{2r}{r-n} \varepsilon^{-j2\theta} \\
 &- \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_{r=0}^{\nu-\frac{n}{2m+1}} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2r}{r} \binom{2\bar{\nu}-r}{\nu-\frac{n}{2m+1}-r} \varepsilon^{j(\frac{2n}{2m+1}\varphi-2\theta)} \\
 &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_i \sum_{r=\zeta_i}^{\xi_i} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\bar{\nu}-r}{\xi_i-r} \binom{2r}{r-\zeta_i} \varepsilon^{j(2\sqrt{\nu-\xi_i}\varphi-2\theta)} \\
 &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_j \sum_{r=\zeta_j}^{\xi_j} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\bar{\nu}-r}{\xi_j-r} \binom{2r}{r-\zeta_j} \varepsilon^{j(2\sqrt{\nu-\xi_j}\varphi-2\theta)} \\
 &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_k \sum_{r=\zeta_k}^{\xi_k} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\bar{\nu}-r}{\xi_k-r} \binom{2r}{r-\zeta_k} \varepsilon^{-j(2\sqrt{\nu-\xi_k}\varphi+2\theta)} \\
 &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_l \sum_{r=\zeta_l}^{\xi_l} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \binom{2\nu}{2r+1} \binom{2\bar{\nu}-r-1}{\xi_l-1} \binom{2r+1}{r-\zeta_l} \varepsilon^{j\{(2\sqrt{\nu-1-\xi_l+1})\varphi-2\theta\}} \\
 &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_p \sum_{r=\zeta_p}^{\xi_p} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \binom{2\nu}{2r+1} \binom{2\bar{\nu}-r-1}{\xi_p-1} \binom{2r+1}{r-\zeta_p} \varepsilon^{j\{(2\sqrt{\nu-1-\xi_p+1})\varphi-2\theta\}}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_{\xi} \sum_{r=\xi}^{\xi} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \binom{2\nu}{2r+1} \binom{2\nu-r-1}{\xi-r} \binom{2r+1}{r-\xi} \varepsilon^{-j} \{(2\nu-1-\xi+1)\varphi+2\theta\}$$

----- (2.38)

となる。ただし  $\xi'_i, \eta'_i, \dots, \xi_i, \eta_i, \dots, \xi_g, \eta_g$  は

$$\left. \begin{aligned} \eta'_i &= (\nu - \xi'_i)(2m+1) & , & \quad 0 \leq \xi'_i \leq \nu-1, \quad 0 \leq \eta'_i \leq \xi'_i, \\ \eta'_j &= (\nu - \xi'_j)(2m+1) - (1+m) & , & \quad 0 \leq \xi'_j \leq \nu-1, \quad 0 \leq \eta'_j \leq \xi'_j, \\ \eta_i &= n - (\nu - \xi_i)(2m+1) & , & \quad 0 \leq \xi_i \leq \nu-1, \quad 0 \leq \eta_i \leq \xi_i, \\ \eta_j &= (\nu - \xi_j)(2m+1) - n & , & \quad 0 \leq \xi_j \leq \nu-1, \quad 0 \leq \eta_j \leq \xi_j, \\ \eta_k &= n + (\nu - \xi_k)(2m+1) & , & \quad 0 \leq \xi_k \leq \nu-1, \quad 0 \leq \eta_k \leq \xi_k, \\ \eta_l &= n - (\nu - 1 - \xi_l)(2m+1) - (1+m) & , & \quad 0 \leq \xi_l \leq \nu-1, \quad 0 \leq \eta_l \leq \xi_l, \\ \eta_p &= (\nu - 1 - \xi_p)(2m+1) - n + m & , & \quad 0 \leq \xi_p \leq \nu-1, \quad 0 \leq \eta_p \leq \xi_p, \\ \eta_g &= (\nu - 1 - \xi_g)(2m+1) + n + m & , & \quad 0 \leq \xi_g \leq \nu-1, \quad 0 \leq \eta_g \leq \xi_g, \end{aligned} \right\} (2.39)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

なる関係をみたす整数である。

また、 $n$ が整数でないときは

$$\begin{aligned} N_g &= \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \sum_{r=0}^{\nu} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\nu-r}{\nu-r} \binom{2r}{r} \\ &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu-1}} \sum_{r=\eta'_i}^{\xi'_i} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\nu-r}{\xi'_i-r} \binom{2r}{r-\eta'_i} \cos 2(\nu - \xi'_i)\varphi \\ &+ \frac{(2\nu+1)}{2^{2\nu-1}} \sum_j \sum_{r=\eta'_j}^{\xi'_j} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \binom{2\nu}{2r} \binom{2\nu-r}{\xi'_j-r} \binom{2r+1}{r-\eta'_j} \cos(2\nu-1-\xi'_j+1)\varphi \end{aligned} \quad (2.40)$$

となる。

$n$ が整数でももし  $n > \nu(2m+1)$  ならば  $N_g$  は (2.40) 式であらわされる。

### (3) $1/3$ 調波振動の解析

$m=1$  なる  $1/3$  調波振動のときを考えると、等価伝達関数を求めるに

必要な(2.33)式をみたす  $x'_i, y'_i, \dots, x'_p, y'_p$ , (2.35)式をみたす  $x_i, y_i, \dots, x_l, y_l$  を求めると表2.1表となる。また、変分に対する等価伝達関数を求めるに必要な  $\xi'_i, \zeta'_i, \dots, \xi'_j, \zeta'_j, \dots$  を(2.39)式より求めると表2.2表をうる。

表 2.1 表

	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$		$\nu=5$	
$x'_i$	1	2	3	4	3	5	4
$y'_i$	0	0	0	0	3	0	3
$x'_j$	/	/	3	4		5	
$y'_j$	/	/	3	3		3	
$x'_k$	0	1	2	3		4	
$y'_k$	0	0	0	0		0	
$x'_l$	/	1	2	3		4	
$y'_l$	/	1	1	1		1	
$x'_p$	0	1	2	3		4	1
$y'_p$	0	0	0	0		0	1
$x_i$	1	2	3	4		5	4
$y_i$	1	1	1	1		1	4
$x_j$	/	2	3	4		5	
$y_j$	/	2	2	2		2	
$x_k$	/	/	1	2		3	
$y_k$	/	/	1	1		1	
$x_l$	1	2	3	4	1	5	2
$y_l$	0	0	0	0	1	0	1

表 2.2 表 (a)

	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=4$	$\nu=5$
$\xi'_i$	/	/	/	3	4
$\zeta'_i$	/	/	/	3	3
$\xi'_j$	/	1	2	3	4
$\zeta'_j$	/	1	1	1	1

\*2.2表 (b)

		$\xi_i$	$\zeta_i$	$\xi_j$	$\zeta_j$	$\xi_k$	$\zeta_k$	$\xi_l$	$\zeta_l$	$\xi_p$	$\zeta_p$	$\xi_g$	$\zeta_g$
$\nu=1$	$n=1$	/	/	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/
	2	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/	/	/
	3	0	0	0	0	/	/	/	/	/	/	/	/
$\nu=2$	$n=1$	/	/	/	/	/	/	/	/	1	0	/	/
	2	/	/	1	1	/	/	1	0	/	/	/	/
	3	1	0	1	0	/	/	1	1	/	/	/	/
	4	1	1	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/
	5	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/	/	/
	6	0	0	0	0	/	/	/	/	/	/	/	/
$\nu=3$	$n=1$	/	/	2	2	/	/	/	/	2	0	2	2
	2	/	/	2	1	/	/	2	0	/	/	/	/
	3	2	0	2	0	/	/	2	1	1	1	/	/
	4	2	1	/	/	/	/	2	2	1	0	/	/
	5	2	2	1	1	/	/	1	0	/	/	/	/
	6	1	0	1	0	/	/	1	1	/	/	/	/
	7	1	1	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/
	8	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/	/	/
	9	0	0	0	0	/	/	/	/	/	/	/	/
$\nu=4$	$n=1$	/	/	3	2	/	/	/	/	3	0	3	2
	2	/	/	3	1	/	/	3	0	2	2	3	3
	3	3	0	3	0	/	/	3	1	2	1	/	/
	4	3	1	2	2	/	/	3	2	2	0	/	/
	5	3	2	2	1	/	/	3 2	3 0	/	/	/	/
	6	3 2	3 0	2	0	/	/	2	1	1	1	/	/
	7	2	1	/	/	/	/	2	2	1	0	/	/
	8	2	2	1	1	/	/	1	0	/	/	/	/

		$\xi_i$	$z_i$	$\xi_j$	$z_j$	$\xi_k$	$z_k$	$\xi_l$	$z_l$	$\xi_p$	$z_p$	$\xi_g$	$z_g$
	$n=9$	1	0	1	0	/	/	1	1	/	/	/	/
	10	1	1	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/
	11	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/	/	/
	12	0	0	0	0	/	/	/	/	/	/	/	/
$\nu=5$	$n=1$	/	/	4	2	4	4	/	/	$\frac{4}{3}$	$\frac{0}{3}$	4	2
	2	/	/	4	1	/	/	4	0	3	2	4	3
	3	4	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{0}{3}$	/	/	4	1	3	1	4	4
	4	4	1	3	2	/	/	4	2	3	0	/	/
	5	4	2	3	1	/	/	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{0}$	2	2	/	/
	6	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{0}$	3	0	/	/	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{1}$	2	1	/	/
	7	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{1}$	2	2	/	/	3	2	2	0	/	/
	8	3	2	2	1	/	/	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{0}$	/	/	/	/
	9	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{0}$	2	0	/	/	2	1	1	1	/	/
	10	2	1	/	/	/	/	2	2	1	0	/	/
	11	2	2	1	1	/	/	1	0	/	/	/	/
	12	1	0	1	0	/	/	1	1	/	/	/	/
	13	1	1	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/
	14	/	/	/	/	/	/	0	0	/	/	/	/
15	0	0	0	0	/	/	/	/	/	/	/	/	

(a) 3乗特性の場合

非線形特性が

$$N(x) = x^3 \tag{2.41}$$

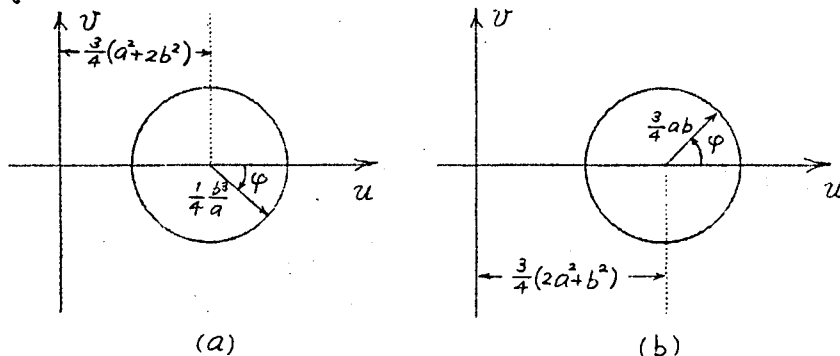
のときの  $\frac{1}{3}$  調波振動について考える。

$m=1, \nu=1$  として (2.32), (2.34) 式および表 2.1 表より等価伝達関数を計算すると

$$N_3 = \frac{3}{4} (a^2 + 2b^2) + \frac{1}{4} \frac{b^3}{a} \epsilon^{-j\varphi} \tag{2.42}$$

$$N_1 = \frac{3}{4}(2a^2 + b^2) + \frac{3}{4}ab\epsilon^{j\varphi} \quad (2.43)$$

となる。すなわち、複素平面上では実軸上に中心をもつ円となる（オ2.3図）。



オ 2.3 図

(1)で述べたように  $1/3$  調波振動の発生域について考えるために  $N_1$  の複素平面 ( $u-v$ 平面) 上の軌跡について考える。

(2.43)式を書きなおして

$$\frac{N_1}{a^2} = \frac{3}{4}(2+m^2) + \frac{3}{4}m\epsilon^{j\varphi}, \quad m = \frac{b}{a} \quad (2.44)$$

$N_1/a^2$  は複素平面上では

$$f(u, v, m) = \left\{ u - \frac{3}{4}(2+m^2) \right\}^2 + v^2 - \left( \frac{3}{4}m \right)^2 = 0 \quad (2.45)$$

となるが、(2.45)式において  $m$  を種々かえたときの包絡線を求めると

$$v^2 = \frac{3}{4} \left( u - \frac{21}{16} \right) \quad (2.46)$$

なる放物線となる。これより、 $b$  を変化させたときの  $N_1$  のえがく複素平面上の円群の包絡線は

$$v^2 = \frac{3}{4} a^2 \left( u - \frac{21}{16} a^2 \right) \quad (2.47)$$

なる放物線となる。さらに(2.47)式において  $a$  を変化させたときの放物線群の包絡線を求めると

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{7}} u \quad (2.48)$$



となる。以上のことより次のようにいうことができる。

$a$  があらかじめ判つているときは (2.47) 式のあらゆる放物線の内部に  $\xi_1 - j\zeta_1$  なる点があれば  $1/3$  調波振動が発生することがある。また、(2.48) 式のしめす二直線にはさまれた領域内に  $\xi_1 - j\zeta_1$  なる点があればある  $a$ 、すなわちある  $\omega$  の値により  $1/3$  調波振動が発生することがある。

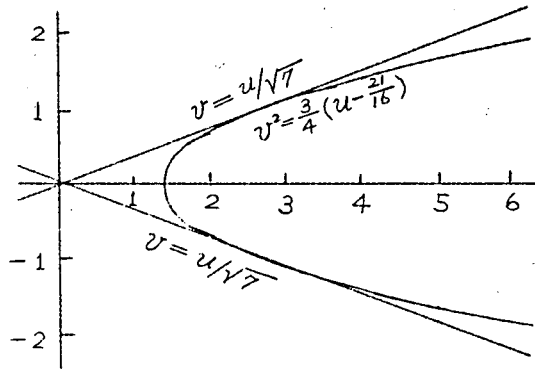


図 2.4

次に平衡状態を決定する式 (2.17) をこの場合に適用すると

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{3}{4}(2a^2 + b^2) + \frac{3}{4}ab \cos \varphi \\ \zeta_1 &= -\frac{3}{4}ab \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

となるが、書きなおすと、

$$\left\{ \xi_1 - \frac{3}{4}(2a^2 + b^2) \right\}^2 + \zeta_1^2 - \left( \frac{3}{4}ab \right)^2 = 0 \quad (2.50)$$

となる。これより (2.50) 式をみたす  $a, b$  の値は  $a^2 - b^2$  平面で楕円となることがわかる。この楕円の実在性より式 (2.48) より導いた条件を求めることができる。

つぎに (2.38), (2.39) 式および表 2.2 表より変分に対する等価伝達関数を計算すると

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \frac{3}{2}(a^2 + b^2) & n &= 1, 2, 3 \\ &= \frac{3}{2}(a^2 + b^2) + \frac{3}{4}b^2 \varepsilon^{-j2\theta} + \frac{3}{2}ab \varepsilon^{j(\varphi - 2\theta)} & n &= 1 \\ &= \frac{3}{2}(a^2 + b^2) + \frac{3}{2}ab \varepsilon^{j(\varphi - 2\theta)} & n &= 2 \\ &= \frac{3}{2}(a^2 + b^2) + \frac{3}{4}a^2 \varepsilon^{j(2\varphi - 2\theta)} & n &= 3 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

すなわち、 $N_0$  は複素平面上では  $n \neq 1, 2, 3$  のときは  $\frac{3}{2}(a^2+b^2)+j0$  なる実軸上の点となるが、 $n=1, 2, 3$  のときは中心が  $\frac{3}{2}(a^2+b^2)+j0$  であり、半径がそれぞれ  $\sqrt{(\frac{3}{2}ab)^2+(\frac{3}{4}b^2)^2+\frac{9}{4}ab^3\cos\varphi}$ ,  $\frac{3}{2}ab$ ,  $\frac{3}{4}a^2$  であるような円となる。

故に、 $n=1$  なる自励振動を併発して不安定となる条件は (2.29) 式より

$$\left\{ \xi_1 - \frac{3}{2}(a^2+b^2) \right\}^2 + \zeta_1^2 < \left( \frac{3}{2}ab \right)^2 + \left( \frac{3}{4}b^2 \right)^2 + \frac{9}{4}ab^3\cos\varphi \quad (2.52)$$

(2.49) 式を用いて整理すると

$$\frac{9}{8}a^2 + \frac{3}{4}b^2 < \xi_1 \quad (2.53)$$

となる。一方、平衡状態を与える式 (2.50) は  $a^2-b^2$  平面では前並したように楕円とあらわすが  $a^2$  に関する最大値の最小値を通る直線を探ると

$$\frac{9}{8}a^2 + \frac{3}{4}b^2 = \xi_1 \quad (2.54)$$

となる。故に次のようにいうことができる。

平衡状態の与える  $a^2-b^2$  平面上的楕円のうち  $a^2$  に関する最大値と最小値を結ぶ直線を境界線として、それより原点側の部分は  $1/3$  調波の自励振動を併発して定常状態として実在しえない。

また、等価伝達関数  $N_1$  よりは等価伝達関数の逆数  $1/N_1$  を用いて考察する方が便利ながある。この場合  $1/N_1$  の複素平面上の表示は  $N_1$  の逆数をとればよいのであるから (2.43) 式よりやはり実軸上に中心をもつ円であることがわかる。

(2.47) 式に対応するかような円群の  $b$  をかえたときの包絡線は (2.47) 式のしめす放物線の逆数をとればよい。すなわち、

$$a^4v^2 = \frac{3}{4}(u^2+v^2) \left\{ a^2u - \frac{21}{16}(u^2+v^2) \right\} \quad (2.55)$$

として求められるが、実際には (2.47) 式より図式的に計算する方が簡単となる。才 2.5 図は  $a=1$  なる場合をしめす。

また、(2.48) 式に対応する (2.55) 式の包絡線は (2.48) 式と一致する。

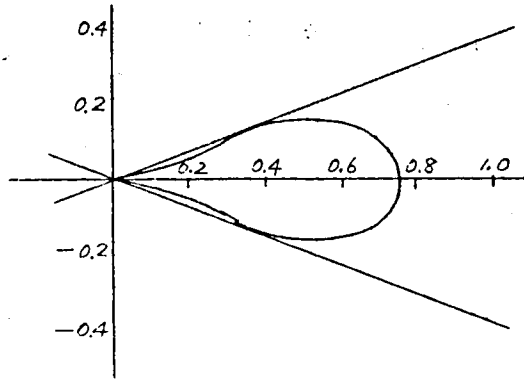
次に非線形特性が

$$N(x) = C_1 x + C_3 x^3 \quad (2.56)$$

で表わされるときは、線形項  $C_1 x$  を線形部分の伝達関数に  
 かくめ

$$G_1(p) \rightarrow \frac{G_1(p)}{1 + C_1 G_1(p) G_2(p)}$$

$$N(x) \rightarrow C_3 x^3$$

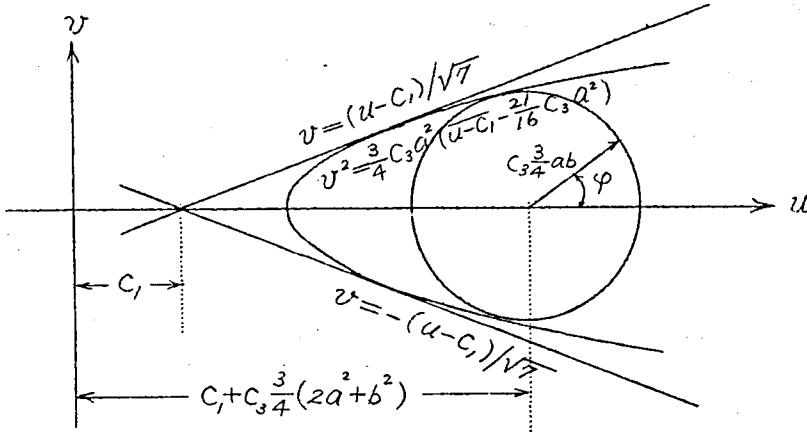


※2.5図

と考えることにより前述の方

法を用いて論ずることができるが、(2.56)式そのものの等価伝達関数より考察すると、この場合、等価伝達関数  $N_1$  は(2.43)式の  $C_3$  倍に  $C_1$  を加えたものとなる。すなわち、複素平面上ではやはり実軸上に中心をもつ円となる。(2.47)式に対応する  $b$  を変化させたときの包絡線は

$$v^2 = \frac{3}{4} C_3 a^2 \left( \overline{u - C_1} - \frac{21}{16} C_3 a^2 \right) \quad (2.57)$$



※2.6図

すなわち、(2.47)式のしめす図形を  $C_3$  倍して  $u$  軸に平行に右へ  $C_1$  だけずらせばよい。また(2.48)式に対応する  $a$  を変化させたときの(2.57)式の包絡線は

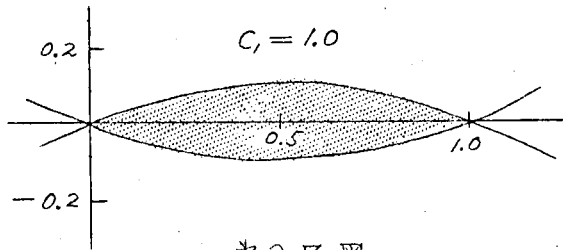
$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{7}} (u - C_1) \quad (2.58)$$

すなわち、(2.47)式のしめす図形をu軸に平行に右へ  $C_1$  だけずらせばよく、 $C_3$ の値には無関係である。

また、等価伝達関数の逆数について前と同様に包絡線を考えると(2.58)式に対応する式は

$$\left\{ \left( u - \frac{1}{2C_1} \right)^2 + \left( v + \frac{\sqrt{7}}{2C_1} \right)^2 - \frac{2}{C_1^2} \right\} \left\{ \left( u - \frac{1}{2C_1} \right)^2 + \left( v - \frac{\sqrt{7}}{2C_1} \right)^2 - \frac{2}{C_1^2} \right\} = 0 \quad (2.59)$$

となる2つの円となる。故に領域は円弧で囲まれた部分である(※2.7図)。



(b) 高次の冪であらわされる特性の場合

$1/3$  調波振動の発生域の決定に必要な等価伝達関数  $N_1$  を  $v > 1$  について(2.34)式および※2.1表を用いて計算すると次のようになる。

$$N(x) = x^5 \quad (2.60)$$

に対しては

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{5}{8} (3a^4 + 6a^2b^2 + b^4) + \frac{5}{16} (6a^3b + 5ab^3) \cos \varphi \\ & + j \frac{5}{16} (6a^3b + 3ab^3) \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.61)$$

これは複素平面上では中心が  $\frac{5}{8} (3a^4 + 6a^2b^2 + b^4) + j0$  に中心をもつ楕円となる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{5}{8} (3 + 6m^2 + m^4) + \frac{5}{16} (6m + 5m^3) \cos \varphi \\ v &= \frac{5}{16} (6m + 3m^3) \sin \varphi \quad m = \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

として  $m$  を変化したときの包絡線を求め、これより(2.61)式のしめす等価伝達関数の包絡線を求めることができる。

また、

$$N(x) = x^7 \quad (2.63)$$

に対しては

$$N_1 = \frac{35}{64}(4a^6 + 18a^4b^2 + 12a^2b^4 + b^6) + \frac{21}{64}(10a^5b + 25a^3b^3 + 7ab^5) \cos \varphi \\ + \frac{21}{64}a^4b^4 \cos 2\varphi + j \left\{ \frac{21}{64}(10a^5b + 15a^3b^3 + 3ab^5) \sin \varphi + \frac{21}{64}a^4b^4 \sin 2\varphi \right\} \quad (2.64)$$

上と同様

$$u = \frac{35}{64}(4 + 18m^2 + 12m^4 + m^6) + \frac{21}{64}(10m + 25m^3 + 7m^5) \cos \varphi + \frac{21}{64}m^4 \cos 2\varphi \\ v = \frac{21}{64}(10m + 15m^3 + 3m^5) \sin \varphi + \frac{21}{64}m^4 \sin 2\varphi \quad (2.65)$$

よりその包絡線を求めることができる。

$$N(x) = x^9 \quad (2.66)$$

に対しては、同様にして

$$u = \frac{63}{128}(5 + 40m^2 + 60m^4 + 20m^6 + m^8) \\ + \frac{63}{64}(5m + 25m^3 + 21m^5 + 3m^7) \cos \varphi + \frac{9}{32}(7m^4 + 4m^6) \cos 2\varphi \\ v = \frac{63}{64}(5m + 15m^3 + 9m^5 + m^7) \sin \varphi + \frac{9}{32}(7m^4 + 3m^6) \sin 2\varphi \quad (2.67)$$

より、また

$$N(x) = x^{11} \quad (2.68)$$

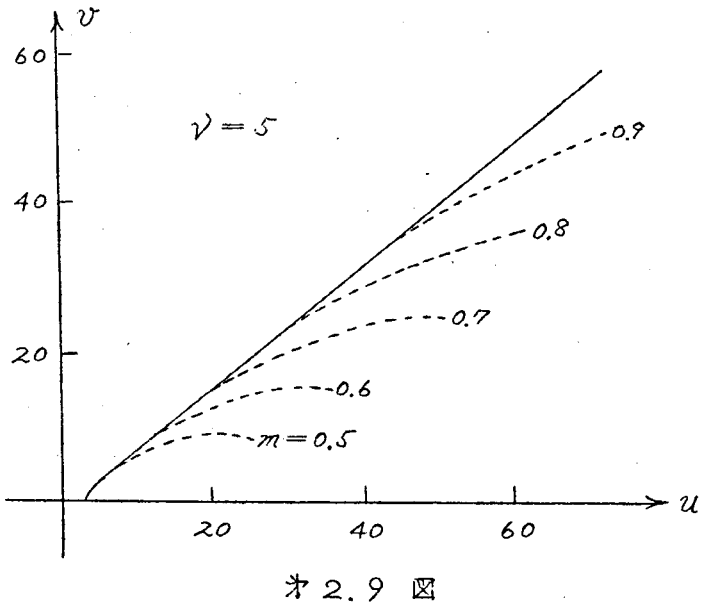
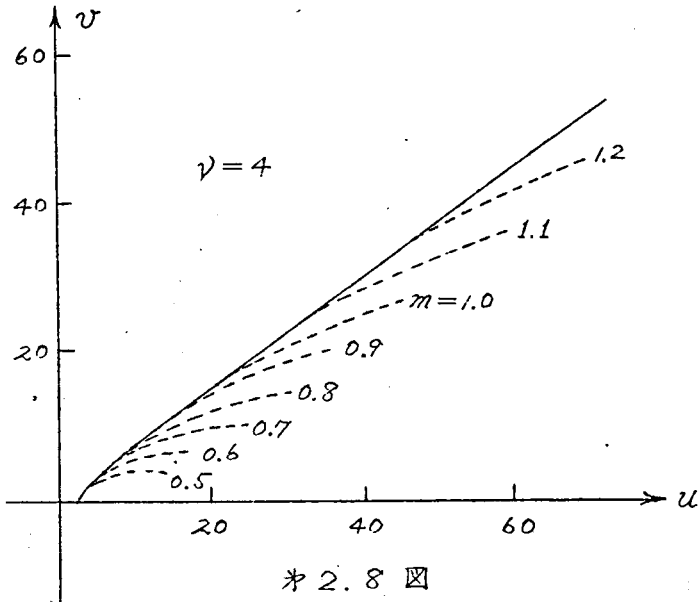
に対しては

$$u = \frac{231}{512}(6 + 75m^2 + 200m^4 + 150m^6 + 30m^8 + m^{10}) \\ + \frac{165}{512}(21m + 175m^3 + 294m^5 + 126m^7 + 11m^9) \cos \varphi \\ + \frac{165}{1024}(42m^4 + 64m^6 + 15m^8) \cos 2\varphi + \frac{165}{1024}m^7 \cos 3\varphi \\ v = \frac{495}{512}(7m + 35m^3 + 42m^5 + 14m^7 + m^9) \sin \varphi \\ + \frac{495}{1024}(14m^4 + 16m^6 + 3m^8) \sin 2\varphi + \frac{165}{1024}m^7 \sin 3\varphi \quad (2.69)$$

よりその包絡線を求めることができる。

※2.8図は  $\nu=4$ ， ※2.9図は  $\nu=5$  の場合の  $q=1$  するとき  $N_1$  の

軌跡(点線)およびその包絡線の計算例で  $u$  軸に対して対称である。



#### (4) 線型要素の特性と解析法

前項までに述べた解析法は系において線型要素をしめす  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$  が低域ゆ波特性をもつような, すなわち, 周期的信号がかかる線型要素

を通ればその周波数が高ければ充分なる減衰を与えるような場合にはかかる解析法は近似解法を与えるものであるということが出来るが、そうでない場合がしばしばある。かかる場合について考察しよう。

(a)  $G_1(p), G_2(p)$  が高域濾波特性をもつ場合

このときは非線型特性についてその逆関数をとると(2.1)式は

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{G_2(p)} \left\{ e - \frac{1}{G_1(p)} x \right\} \\ x &= N^{-1}(y) \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

と書くことができるから、( $N^{-1}$ は逆関数をしめす)  $1/G_1(p) G_2(p)$  は低域濾波特性をもつことになり、前項までに述べた解析法によって解くことができる。

(b)  $\lim_{p \rightarrow \infty} G_1(p) G_2(p) = K$  なる場合

$$G_1(p) G_2(p) = K + G(p) \quad (2.71)$$

とおけば  $G(p)$  は低域濾波特性をもつ関数である。(2.1)式において系の変数  $x$  の代りに

$$z = x + Ky \quad (2.72)$$

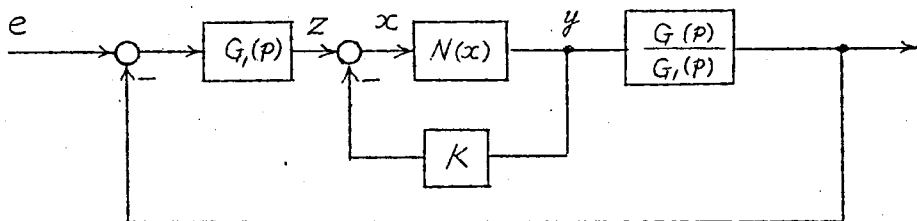
なる変数  $z$  を用いて(2.1)式を書きなおすと

$$z = G_1(p) \left\{ e - \frac{G(p)}{G_1(p)} y \right\} \quad (2.73)$$

$$y = N(z - Ky) \quad (2.74)$$

あるいはこれを解いて

$$y = n(z) \quad (2.75)$$



才 2.10 図

となる。この関係は才2.10図のプロック線図でしめすことができる。Zとyの関係すなわち(2.75)式を非線形特性と見なせばG(p)は低域濾波特性をもつから前と同様にして解析することができる。

才2.11図にN(x)よりn(z)を求める作図法をしめしている。

等価伝達関数あるいは変分に対する等価伝達関数を求めるに上述のようにN(x)をn(z)に修正して求めてよい

が、N(x)に対する等価伝達関数とn(z)に対するそれとの関係について考察する。N(x), n(z)に対する等価伝達関数をそれぞれN, nとすれば、(2.74), (2.75)式でしめされる関係を用いると

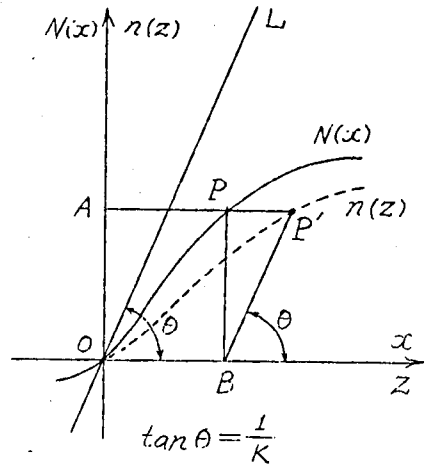
$$n = \frac{N}{1+KN} \quad (2.76)$$

なる関係が成立する。これより

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{N} + K \quad (2.77)$$

となる。すなわち、かかる場合は等価伝達関数そのものについて考えるより、その逆数について考える方が便利である。すなわち、Nに対する等価伝達関数の逆数にKを加えたものが、nに対する等価伝達関数の逆数になることを示している。故にこの場合は特性方程式において前項までの解析では等価伝達関数Nと $\{-1/G_1(p)G_2(p)\}_{p=j\omega}$ について考察したが、かかる場合は $1/n$ と $\{-G(p)\}_{p=j\omega}$ について考察すれば便利であることをしめしている。

分数調波の複素平面上における発生領域について考察するに(1)(c)で述べたように、等価伝達関数N<sub>1</sub>の複素平面上の軌跡について、分数調波振巾もあるいはさらに基本波振巾αをかえたときの包絡線内部が発生領域で、その内部に $-1/G_1(j\omega)G_2(j\omega) = \xi_1 - j\zeta$ なる点があれば分数



才2.11図



調波が発生することがあることを知ったが、この場合には同様に等価伝達関数の逆数  $1/n_1$  の複素平面上の軌跡について、 $b$  さらに  $a$  をかえたときの包絡線内部が発生領域でその内部に  $\mu_1 + j\nu_1$  なる点があれば、分数調波が発生することがあるといえることができる。ただし

$$\left\{ -G(p) \right\}_{p=j\omega_n} = \mu_n + j\nu_n \quad (2.78)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

しからに、(2.71) 式なる関係があるから

$$-K + \mu_n + j\nu_n = \frac{1}{\xi_n - j\zeta_n} \quad (2.79)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

となり、さらに (2.77) 式の関係に留意すると、この場合にもやはり (1) (C) で述べたことが適用されることがわかる。

変分に対する等価伝達関数を用いて周期解の安定、不安定を論ずる場合についても同様である。

### 第3節 可飽和リアクトルを含む電気回路に対する応用

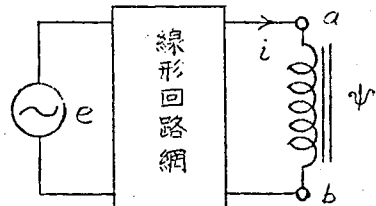
#### (a) 基礎微分方程式

電気回路においては非線型要素は可飽和リアクトルであることが多い。このような電気回路において (※2.12 図) リアクトルの全鎖交磁束を  $\psi$ 、それに流れる電流を  $i$ 、回路の起電力を  $e$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} p\psi &= M(p) \{ e - Z(p) i \} \\ i &= f(\psi) \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

なる微分方程式が成立する。ただし、 $M(p)$ 、 $Z(p)$  は  $p = \frac{d}{dt}$  の有理関数で、関数  $f$  は可飽和リアクトルの非線型特性をあらわすものとする。

いま、



※2.12 図

$$e = B \cos(\omega t + \sigma) \quad (2.81)$$

とし、 $\frac{1}{3}$ 調波振動を対象とするものとし

$$\tau = \frac{1}{3} \omega t \quad (2.82)$$

と時間をもよりに変換し単位法を用いると(2.80)式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} P x &= M \left( \frac{1}{3} \omega P \right) \left\{ E \cos(3\tau + \sigma) - \frac{Z \left( \frac{1}{3} \omega P \right)}{R_n} y \right\} \\ y &= N(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

となる。ただし  $P = \frac{d}{dt}$  であつて

$$x = \frac{\omega \Psi}{\sqrt{2} E_n}, \quad y = \frac{i}{\sqrt{2} I_n}, \quad E = \frac{B}{\sqrt{2} E_n}, \quad R_n = \frac{E_n}{I_n} \quad (2.84)$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2} I_n} f \left( \frac{\sqrt{2} E_n}{\omega} x \right) \quad (2.85)$$

である。 $E_n, I_n, R_n$  はそれぞれ電圧、電流、インピーダンスの基準量である。故に、第2節の基礎方程式(2.1)式と(2.83)式を比較すると

$$G_1(p) \rightarrow \frac{M \left( \frac{1}{3} \omega P \right)}{\frac{1}{3} P}, \quad G_2(p) \rightarrow \frac{Z \left( \frac{1}{3} \omega P \right)}{R_n} \quad (2.86)$$

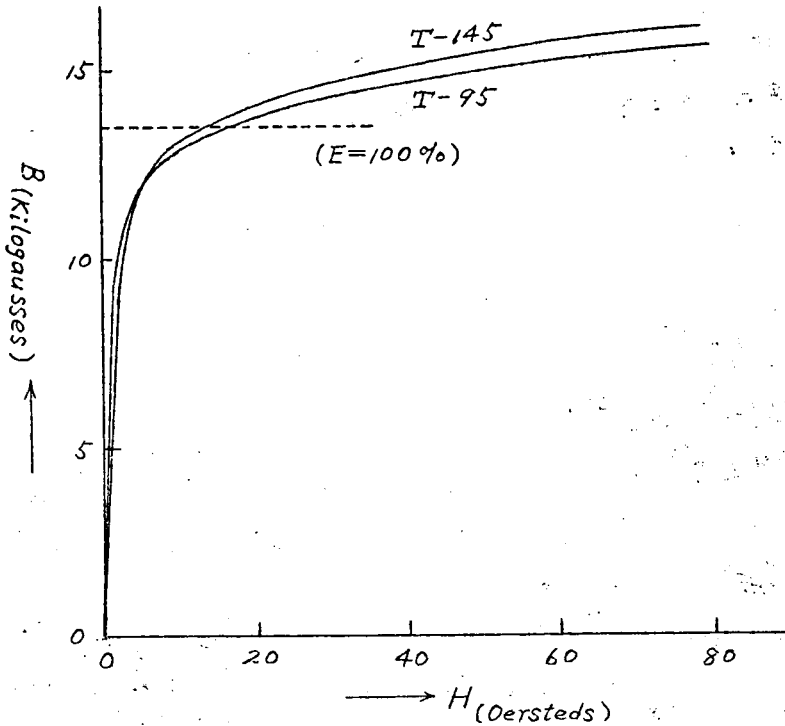
と見なせばよいことになる。

しかるに、 $M(p) \cdot Z(p)$  は回路の起電力を零として、可飽和リアクトルの端子  $a, b$  から見た回路のインピーダンス関数となるから、 $G_1(p), G_2(p)$  を求めることは容易となる

### (b) 変圧器の励磁特性

変圧器に使用されている硅素鋼板の磁束密度-起磁力特性、 $B-H$  曲線をしめすと第2.13図のようになる。<sup>\*</sup> 図において  $T-145$  は主に戦前の変圧器に、 $T-95$  は戦後の新しい変圧器に使用されているものであつて、点線は電圧  $E=100\%$  に対する磁束密度の設計基準をしめしたものである。いま、 $B-H$  特性が

註\* この特性曲線は日新電機 関章良氏の提供による。



※2.13図

$$H = a_1 B + a_n B^n \quad (2.87)$$

で表わされると仮定すると、※2.13図より定格近傍についてしらべると T-145 に対し  $n \cong 9$ 、T-95 に対し  $n \cong 11$  となる。(2.87)式における B, H の代りに変圧器の全鎖交磁束  $\psi$  と励磁電流  $i$  を用いると

$$i = C_1 \psi + C_n \psi^n \quad (2.88)$$

と書くことができる。(2.88)式を交流特性に書きなおすと  $n$  があまり大でなければ

$$I \cong \frac{1}{\sqrt{2}} C_1 \left( \frac{\sqrt{2} E}{\omega} \right) + \sqrt{\frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1)}} C_n \left( \frac{\sqrt{2} E}{\omega} \right)^n \quad (2.89)$$

となる<sup>(26)</sup>。

ただし、I, E は励磁電流、電圧の実効値、 $\omega$  は角周波数、 $\Gamma$  はガンマ関数をしめす。

すなわち、全鎖交磁束と励磁電流特性が(2.88)式のように比例する項と $n$ 乗に比例する項の和で示されるときは、その交流特性すなわち励磁電流と電圧の実効値の関係が(2.89)式からわかるように、やはり比例する項と $n$ 乗に比例する項の和で示されることがわかる。 $n=9, 11$  に対して(2.89)式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} I &= C_1 \left(\frac{E}{\omega}\right) + 9.75 C_9 \left(\frac{E}{\omega}\right)^9 & n=9 \\ I &= C_1 \left(\frac{E}{\omega}\right) + 18.6 C_{11} \left(\frac{E}{\omega}\right)^{11} & n=11 \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

関西電力、中舞鶴変電所の変圧器(30kV, 2,000kVA 60 $\sim$ )の励磁特性の実測結果<sup>\*</sup>より(2.89)式により $n$ を求めると $n \cong 9$ となる。

### (C) 変圧器の $\frac{1}{3}$ 調波発生域

変圧器の励磁特性は前述したように比例する項と、9乗あるいは11乗に比例する項の和であらわされるが、簡単のために、単位法で

$$N(x) = -0.2x + 0.25x^3 \quad (2.91)$$

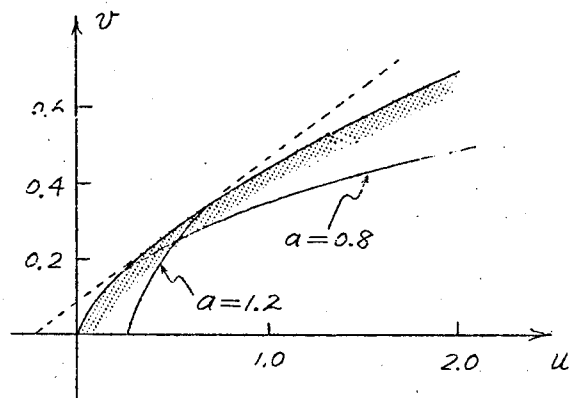
で表わされるものとすれば、 $\frac{1}{3}$ 調波振動が発生可能である複素平面上の領域は才4節(3)で述べたように基本波振幅 $a$ が0.8 $\sim$ 1.2まで変化するものとすれば、 $a=0.8, a=1.2$  に対する(2.57)式の放物線と(2.58)式の直線でかこまれた

才2.14図のような領域となる。(y軸に対し対称) また、励磁特性が単位法で

$$N(x) = 0.05x^9 \quad (2.92)$$

$$N(x) = 0.05x^{11} \quad (2.93)$$

で表わされるものとすれば、 $\frac{1}{3}$ 調波振動が発生が可能となる領域は $a \cong 1.0$ とすれば



才2.14図

註\* 関西電力 矢積貞雄氏の提供による。

オ4節, オ2.8図, オ2.9図より座標軸の目盛をかえることにより簡単に求められる。ここで問題としているような回路常数に対しては大略

$$N(x) = C_9 x^9 \text{ に対しては } v = \pm 0.75 u \quad (2.94)$$

$$N(x) = C_{11} x^{11} \text{ に対しては } v = \pm 0.8 u \quad (2.95)$$

なる2直線で囲まれる領域と考えることができる。

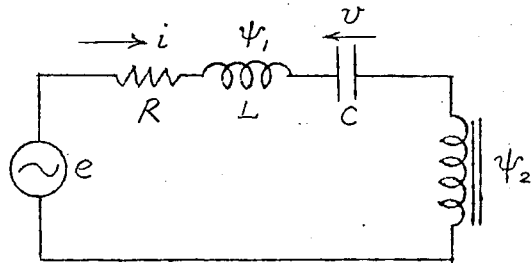
(27), (28), (29)

### オ4節 直列蓄電器補償系統の $\frac{1}{3}$ 調波振動

直列蓄電器補償系統における  $\frac{1}{3}$  調波振動の発生領域について考察する。以下においては系統を单相回路で近似している。

#### (1) 変圧器が無負荷の場合

直列蓄電器補償系統において無負荷の変圧器が繋がれた場合の等価回路としてオ2.15図をとる。図において  $L, R$  は送電線および電源のインダクタンス分、および抵抗分をしめし、



オ2.15図

$C$  は直列蓄電器、可飽和リアクトルは変圧器をしめすものとする。

#### (a) 等価伝達関数法による解析

オ3節で述べた方法に従って  $\frac{1}{3}$  調波の発生域を求める。この場合、可飽和リアクトルの両端子より見た回路のインピーダンス関数は

$$M(p)Z(p) = Lp + R + \frac{1}{Cp} \quad (2.96)$$

であるから、(2.86)式に従って

$$G_1(p)G_2(p) = \frac{M(\frac{1}{3}\omega p)}{\frac{1}{3}P} \frac{Z(\frac{1}{3}\omega p)}{R_n}$$

$$= \frac{(\frac{1}{3}P)^2 x_l + (\frac{1}{3}P)r + x_c}{(\frac{1}{3}P)^2} \quad (2.97)$$

となる。ただし

$$x_l = \frac{\omega L}{R_n}, \quad r = \frac{R}{R_n}, \quad x_c = \frac{1}{\omega C R_n} \quad (2.98)$$

であつて、 $R_n$  は変圧器の基準インピーダンス (normal impedance) とする。第2節に述べた線型部分についての系の特性をしめす  $\xi_1, \eta_1$  を (2.97) 式より求めると

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{x_c - (\frac{1}{3})^2 x_l}{\{x_c - (\frac{1}{3})^2 x_l\}^2 + (\frac{1}{3}r)^2} \\ \eta_1 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\frac{1}{3}r}{\{x_c - (\frac{1}{3})^2 x_l\}^2 + (\frac{1}{3}r)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

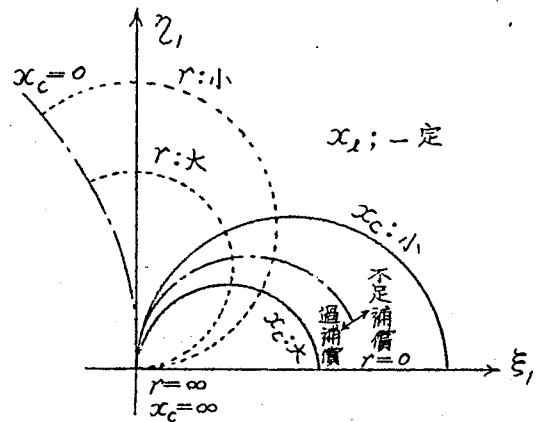
となるから、例えば  $x_l, x_c$  を一定、 $r$  を可変とすれば  $\xi_1, \eta_1$  の軌跡は  $\xi_1 - \eta_1$  平面で  $\xi_1$  軸上に中心をもち、 $1/2(9x_c - x_l)$  を半径とする原点を通る円、すなわち、

$$\left\{ \xi_1 - \frac{1}{2(9x_c - x_l)} \right\}^2 + \eta_1^2 = \left\{ \frac{1}{2(9x_c - x_l)} \right\}^2 \quad (2.100)$$

となり、また、 $x_l, r$  を一定、 $x_c$  を可変とすれば  $\eta_1$  軸上に中心をもち、 $1/6r$  を半径とする原点を通る円、すなわち

$$\xi_1^2 + \left( \eta_1 - \frac{1}{6r} \right)^2 = \left( \frac{1}{6r} \right)^2 \quad \text{--- (2.101)}$$

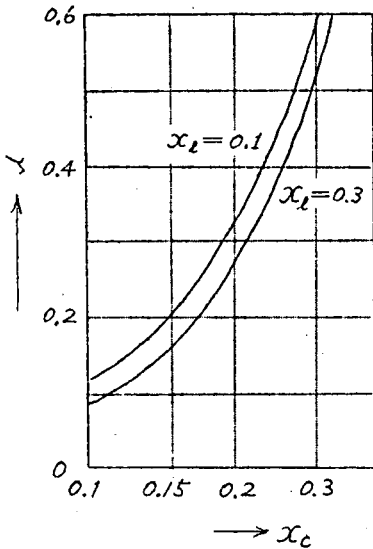
となつて、容易に  $x_c, x_l, r$  に対する  $\xi_1, \eta_1$  の値を求めることができる (第2.16図)。第3節、第2.14図、(2.94)、(2.95) 式あるいは第2節第28図、第2.9図を参照すると、以上のことより  $x_c$  が大なるほど、ま



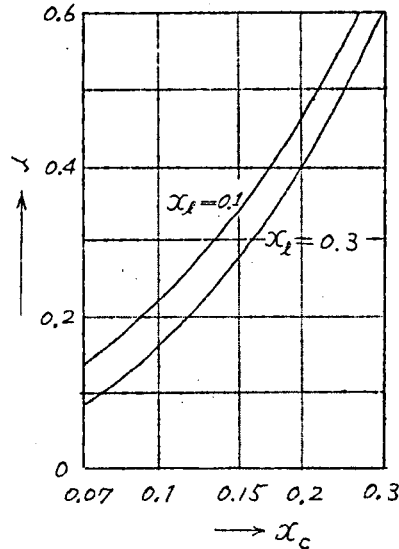
第2.16図

た $r$ は小なるほど、さらに $x_L$ が小なるほど一般的について $1/3$ 調波振動が発生しやすいといふことができる。

変圧器の特性をオ3節(2.91)式としたときオ2.14図を用いて $1/3$ 調波振動の発生域の境界線を求めたのがオ2.17図である。また、(2.95)式を用いたときの結果をオ2.18図に示す。何れの場合も曲線の下側



オ2.17図



オ2.18図

が発生域である。これより通常の系統では大略 $x_c$ が0.1以上になると $1/3$ 調波振動が発生するといふことができる。

(b) アナログ・コンピュータによる演算

オ2.15図に示したように電流を $i$ 、蓄電器の端子電圧を $v$ 、起電力を $e$ 、全鎖交磁束をそれぞれ $\psi_1$ 、 $\psi_2$ とするとつぎの関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} + Ri + v &= e, & e &= \sqrt{2} E \sin(\omega t + \sigma) \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2, & \psi_1 &= L i \\ i &= C \frac{dv}{dt}, & i &= f(\psi_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

ただし、電流 $i$ と全鎖交磁束 $\psi_2$ の関係をしめす関数 $f$ は変圧器の励磁

特性をしめすものである。

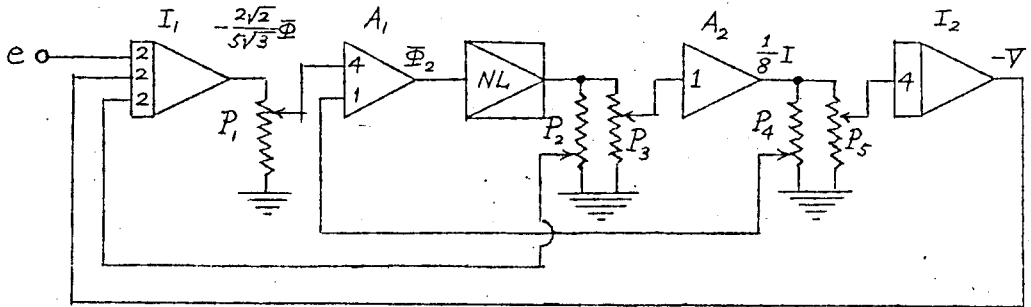
いま、 $e, v, i, \dots, t$  等に対する演算機変数 (machine variable) を  $E, V, I, \dots, \tau$  とする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} E &= \alpha_v e, \quad V = \alpha_v v, \quad I = \alpha_i i, \quad \Psi_1 = \alpha_\psi \psi_1, \quad \Psi_2 = \alpha_\psi \psi_2 \\ \tau &= \alpha_t t \end{aligned} \right\} (2.103)$$

とし、換算係数 (scale-factor) を

$$\alpha_v = \frac{10}{\sqrt{2} E_n}, \quad \alpha_i = \frac{25}{I_n}, \quad \alpha_\psi = 5\sqrt{3} \frac{\omega}{E_n}, \quad \alpha_t = \frac{1}{5} \omega \quad (2.104)$$

とえらば。ただし、 $E_n, I_n$  は変圧器の基準の電圧、電流である。以上の各式 (2.102) ~ (2.104) 式にしたがって演算回路をつくと図 2.19 図がえられる。ただし、図において  $N.L.$  は変圧器の励磁特性を模擬す



$$P_1 = 0.766 \quad P_2 = 1.57 \gamma \quad P_3 = 0.696 \quad P_4 = 2.77 x_L \quad P_5 = 2.83 x_C$$

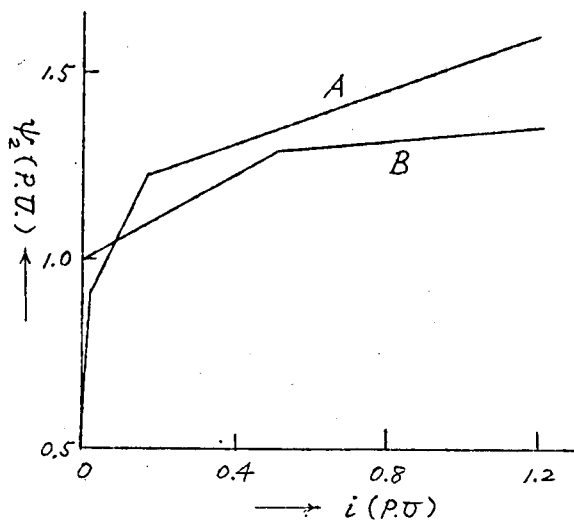
$$e = 10 \frac{E}{E_n} \sin(5\tau + \sigma)$$

図 2.19 図

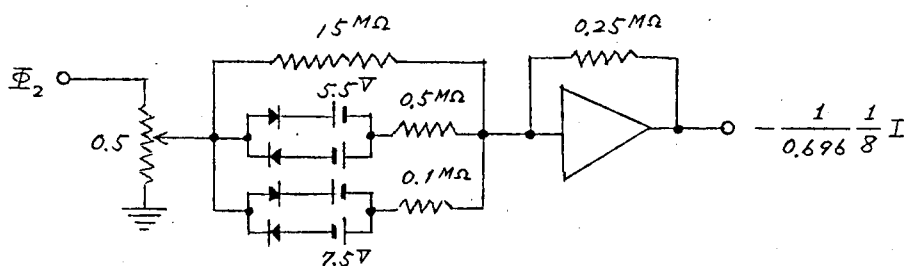
る非線型要素で、第 3 節で述べたことより図 2.20 図の特性を採用するものとして図 2.21 図のような回路構成をもつ。起電力は第 1 部第 5 節に述べたような方法により発生した。1/3 調波振動の発生状況についての演算結果をまとめたものが図 2.22 図である。図において  $x_L, x_C, \gamma$  は (2.98) 式で与えるように単位法を用いた値で、実線、点線、鎖線はそれぞれ  $E = 1.0, 1.1, 1.2$  (P.U.) に対する 1/3 調波振動の発生境界線をしめし、この線より上では 1/3 調波振動が発生する。図にしめし



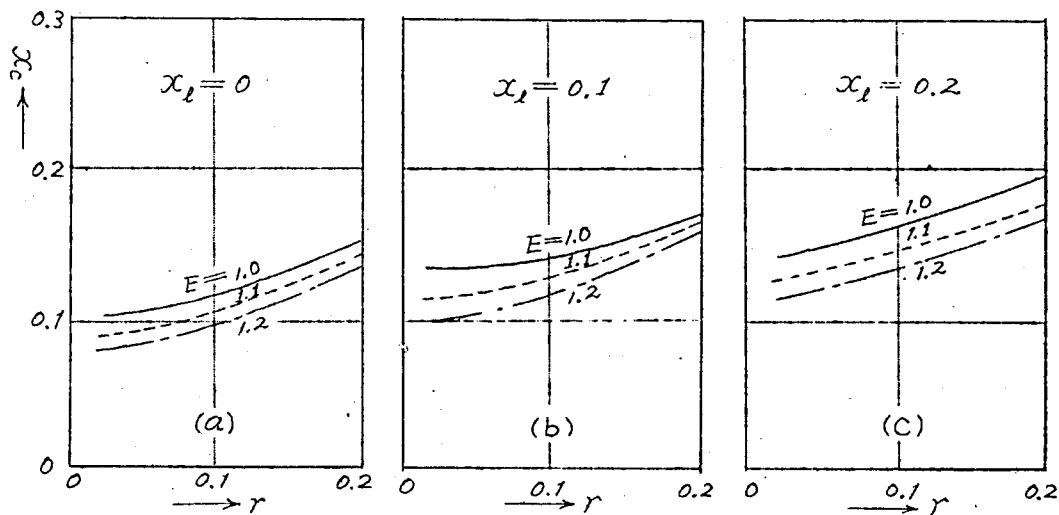
くないが、抵抗分の小なる  
ところでは概同期振動が発  
生しやすく、容量リアクタ  
ンスが大となると  $\frac{1}{2}$  調波  
振動が発生するようになる。  
この演算結果より系統の抵  
抗分  $r$  が少なるほど、リア  
クタンス分  $x_L$  が少なるほ  
ど、補償蓄電器のリアクタ  
ンスが大きいほど  $\frac{1}{3}$  調波  
振動が発生しやすく、この



\* 2.20 図



\* 2.21 図



\* 2.22 図

場合、電源電圧が大なるほど発生しやすいということが出来る。

通常の直列蓄電器補償系統の  $r$  は  $0.05 \sim 0.1$  程度であるから、大略  $x_c > 0.1$  程度になると  $1/3$  調波振動が発生するということができる。

つぎに、変圧器の励磁特性として  $\text{Fig. 2.20}$  の  $B$  なる特性を採用したときの  $1/3$  調波振動の発生限界を  $E=1.1$  (P.U.) として求めた結果を  $\text{Fig. 2.23}$  にしめす。この場合は  $E=1.0, 1.2$  (P.U.) としても  $A$  特性の

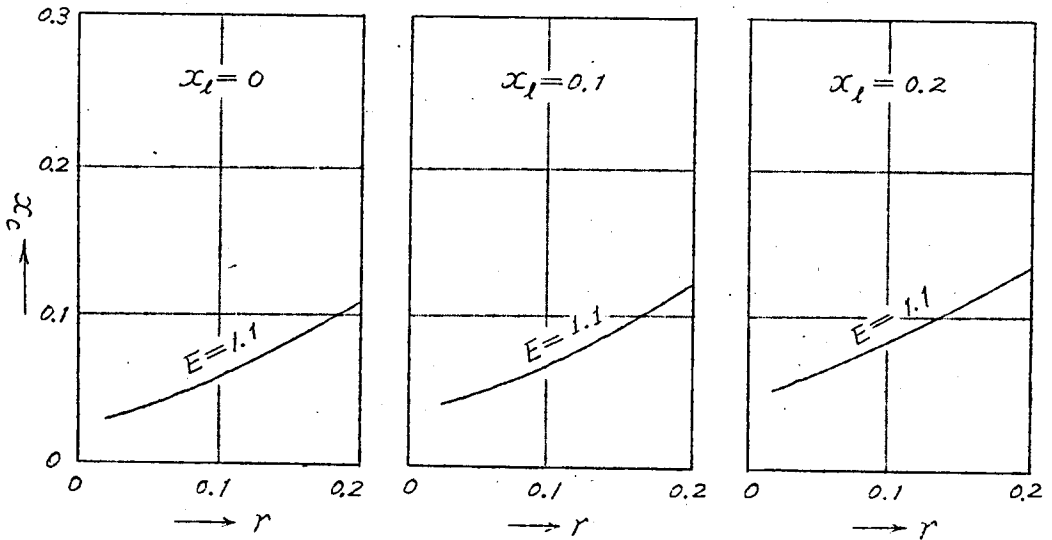


Fig. 2.23

場合ほど境界線は変化しない。 $1/2$  調波振動、概周期振動の発生の模様は上記の場合と傾向は同じである。

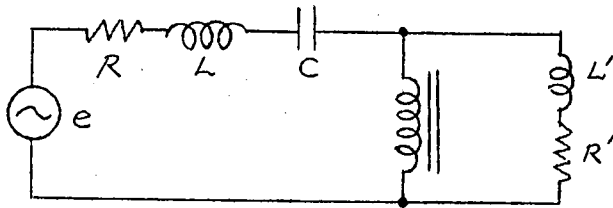
この様な特性をもつ変圧器につながる直列補償系統では  $x_c > 0.07$  程度になると、 $1/3$  調波振動が発生するということができる。

## (2) 変圧器が軽負荷の場合

直列補償系統において軽い誘導性負荷がつながれたときの等価回路として  $\text{Fig. 2.24}$  をとる。<sup>\*</sup> 図において  $L, R, C$  および可飽和リアクトルは (1) と同じものをあらわすものとし  $L', R'$  を負荷のインダクタンスお

註\* 容量分圧器回路が同じ等価回路でしめされる。<sup>(30)</sup>

よび抵抗とする。



※2.24図

(a) 等価伝達関数法による解析

この場合、可飽和リアクトルの両端子より見た回路のインピーダンス関数は

$$M(p)Z(p) = \frac{(Lp+R+\frac{1}{Cp})(L'p+R')}{(L+L')p+(R+R')-\frac{1}{Cp}} \quad (2.105)$$

であるから

$$G_1(p)G_2(p) = \frac{M(\frac{1}{3}\omega p)Z(\frac{1}{3}\omega p)}{\frac{1}{3}p R_n} = \frac{1}{\frac{1}{3}p} \frac{\{x_L(\frac{1}{3}p)^2+r(\frac{1}{3}p)+x_C\} \{ \sin\varphi(\frac{1}{3}p)+\cos\varphi \}}{(x_L+z\sin\varphi)(\frac{1}{3}p)^2+(r+z\cos\varphi)(\frac{1}{3}p)+x_C} Z \quad (2.106)$$

となる。ただし、上式において

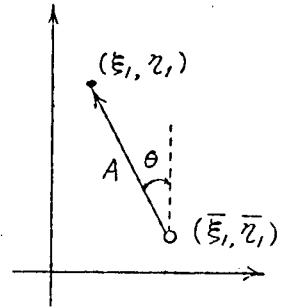
$$R' = Z \cos\varphi \quad \omega L' = Z \sin\varphi \quad \frac{Z}{R_n} = z \quad (2.107)$$

で、 $x_L, x_C, r$ は(2.98)式で与えたものである。 $R_n$ は前と同様変圧器の基準インピーダンスとする。この場合、※2節で述べた $\xi_1, \eta_1$ は

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{x_C - (\frac{1}{3})^2 x_L}{\{x_C - (\frac{1}{3})^2 x_L\}^2 + (\frac{1}{3}r)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{z} \frac{\frac{1}{3} \sin\varphi}{\cos^2\varphi + (\frac{1}{3})^2 \sin^2\varphi} \\ \eta_1 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\frac{1}{3}r}{\{x_C - (\frac{1}{3})^2 x_L\}^2 + (\frac{1}{3}r)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{z} \frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi + (\frac{1}{3})^2 \sin^2\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

となる。上式において※1項は無負荷のときの値であるから、負荷がか

かると第2項がつけ加わることになる。この値は負荷の大きさ力率のみに関係し、線路の常数には無関係となる。また、負荷の力率が1であるとき、すなわち、抵抗負荷であるときは  $\xi_1$  は無負荷のときとかわらず、 $\eta_1$  は無負荷のときの値に  $\frac{1}{3} \frac{1}{Z}$  だけ加わるという簡単な関係にある。いま、無負荷のときの  $\xi_1, \eta_1$  をそれぞれ  $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1$  とすれば負荷があるときの  $\xi_1, \eta_1$  は第2.25図のような関係で求められる。ただし

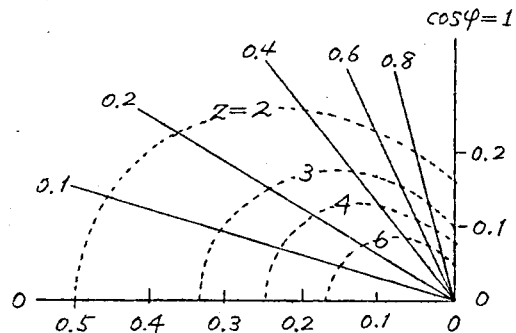


第2.25図

$$A = \frac{1}{3} \frac{1}{Z} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.109)$$

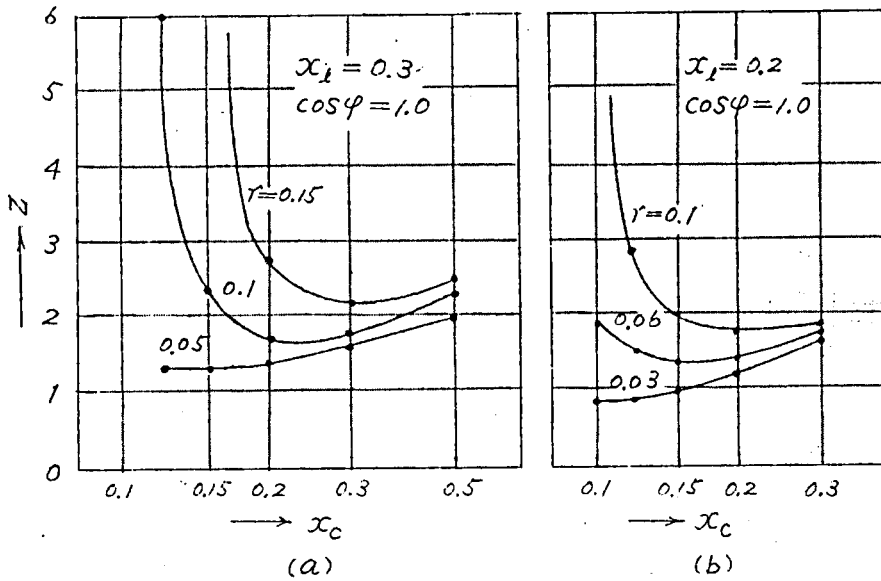
$$\tan \theta = \frac{1}{3} \tan \varphi$$

この結果の数値計算例第2.26図ならびに第3節で述べた変圧器の  $\frac{1}{3}$  調波振動の発生域より一般的に、負荷が軽くなるほど  $\frac{1}{3}$  調波振動は発生しやすく負荷の力率が小さいほど発生しにくいといえることができる。

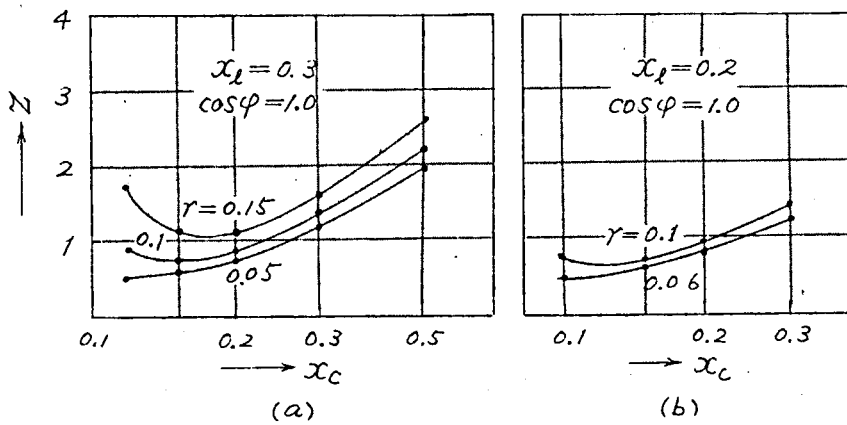


第2.26図

第2.27図、第2.28図は  $\cos \varphi = 1.0$  すなわち、抵抗負荷のときの  $\frac{1}{3}$  調波振動発生境界線をしめしたものであつて、この境界線より上の領域では  $\frac{1}{3}$  調波振動が発生することをしめしている。第2.27図は変圧器の励磁特性を(2.91)式と仮定し、第2.14図の領域図を用いて求めた結果で、第2.28図は(2.93)式と仮定し、(2.95)式を用いて求めた結果である。(2.92)式と仮定しても大した差異はない。第2.28図によると通常の系統常数を考慮しても定格負荷の近傍でも  $\frac{1}{3}$  調波振動が発生する可能性のあることになるが、第3節で述べたように(2.92)、(2.93)式



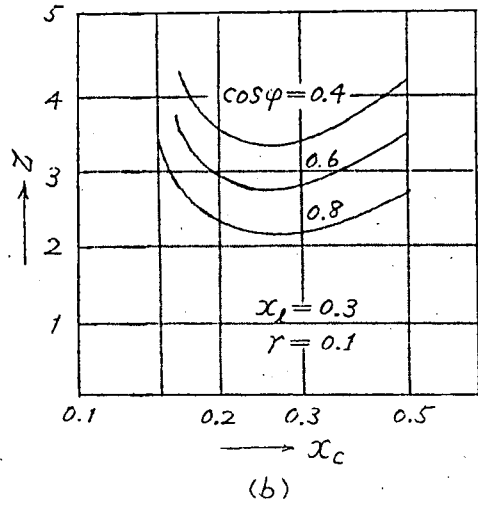
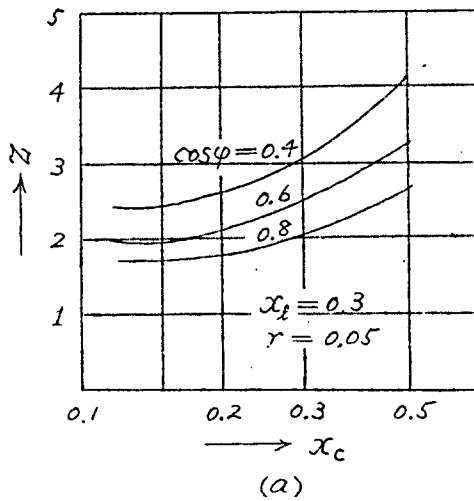
オ 2.27 図



オ 2.28 図

より実際の変圧器の励磁特性の飽和度は少く、かかることは実際にはおこることは少いと思われる。

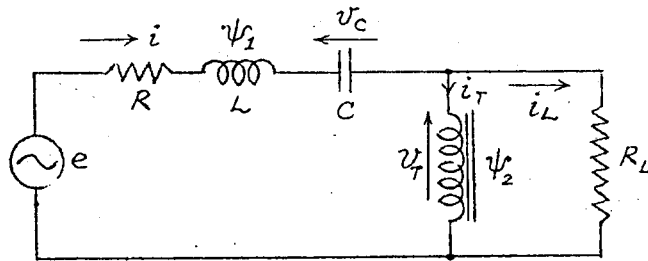
オ 2.29 図は誘導負荷の場合の  $1/3$  調波振動発生境界線を励磁特性を (2.91) 式と仮定し、オ 2.14 図の領域図を用いて求めた結果である。これによると負荷の力率が悪くなるほど  $1/3$  調波振動が発生しにくく、大略  $1/2 \sim 1/3$  程度以下の負荷で発生するということができる。



※2.29 図

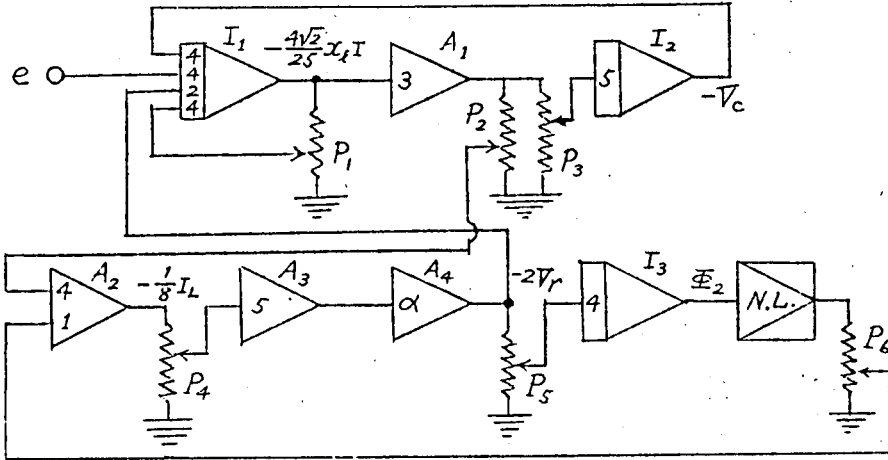
(b) アナログ・コンピュータによる演算

負荷は抵抗分のみとし、※2.30 図のように電流  $i$ ,  $i_T$ ,  $i_L$ , 端子電圧  $v_C$ ,  $v_T$ , 全鎖交磁束  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , 起電力  $e$  をえらぶと次の関係式が成立する。



※2.30 図

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\psi}{dt} + Ri + v_C &= e, & e &= \sqrt{2} E \sin(\omega t + \sigma) \\
 \psi &= \psi_1 + \psi_2, & \psi_1 &= Li \\
 i &= C \frac{dv_C}{dt}, & i_T &= f(\psi_2) \\
 i &= i_L + i_T, & v_T &= R_L i_L = \frac{d\psi_2}{dt}
 \end{aligned} \right\} (2.110)$$



$$P_1 = 1.25m \quad P_2 = 0.046/x_L \quad P_3 = 0.417k$$

$$P_4 = \frac{0.905}{\alpha} r' \quad P_5 = 0.766 \quad P_6 = 0.696$$

$$e = 10 \frac{E}{E_n} \sin(5\tau + \sigma)$$

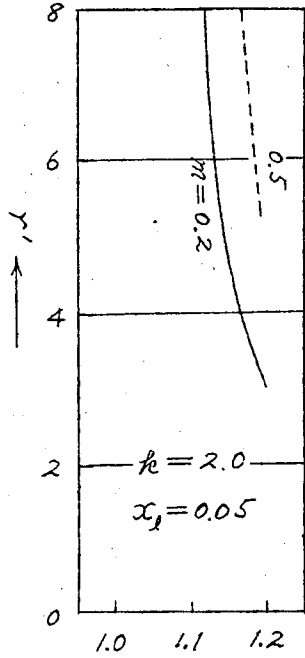
※2.31 図

ただし、 $i_T$  と  $\psi_2$  の関係をしめす関数  $f$  は変圧器の励磁特性をしめすもので、この場合は※2.20 図の折線 A で表わされるとし、前と同様に (2.104) 式のように換算係数をえらんで演算回路をつくと※2.31 図のようになる。図において N.L. は前述した変圧器の励磁特性を模擬する非線型要素で※2.21 図にしめす回路構成をもつ。 $r, x_c, x_L$  は (2.98) 式で与えられるもので

$$m = \frac{r}{x_L}, \quad k = \frac{x_c}{x_L}, \quad r' = \frac{R_L}{R_n} \quad (2.111)$$

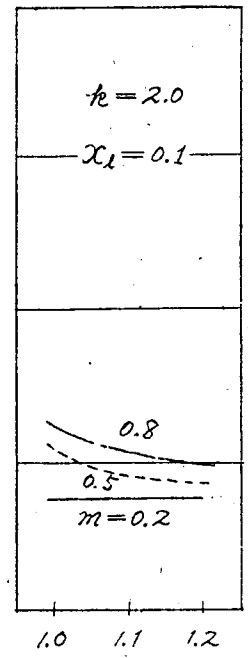
である。 $1/3$  調波振動の発生状況についての演算結果をまとめたものが※2.32 図である。

図において縦軸は負荷抵抗を単位法でしめし、横軸は電源電圧を単位法でしめし、 $k, x_L$  の値をかえ、 $m$  をパラメータとしてしめしている。実線は  $m=0.2$ 、点線は  $m=0.5$ 、鎖線は  $m=0.8$  に対する  $1/3$  調波振動の発生境界線をしめし、この線より大なる負荷抵抗値では  $1/3$  調波



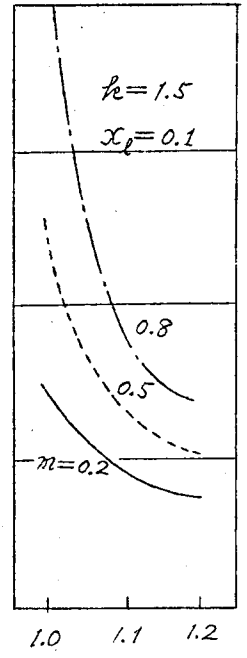
→ E (P.U.)

(a)



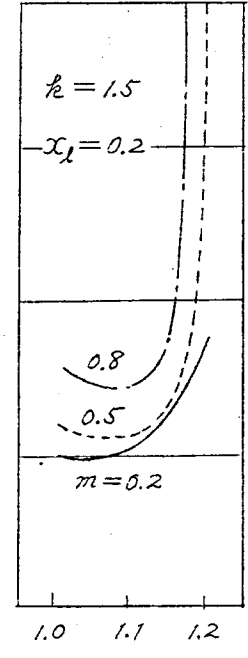
→ E (P.U.)

(b)



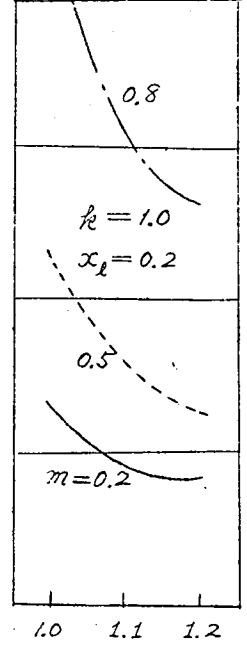
→ E (P.U.)

(c)



→ E (P.U.)

(d)



→ E (P.U.)

(e)

\* 2.32 □



振動が発生する。mが大なるほど発生しにくく、電源電圧の大きさの影響は系統で異り、一方向的でない。通常、直列補償を行っている送電線を対象として考えると、この図より大略  $\gamma'$  が2以上になると、すなわち、負荷が半分以下となると  $\frac{1}{3}$  調波振動がおこるようになるということが出来る。

### (3) 実系統に対する考察

関西電力摺子新宮線(30kV)における現場試験(昭28年)において蓄電器  $j36\Omega$  を通して無負荷変圧器を投入した結果、 $\frac{1}{3}$  調波振動が発生したことが報告されている。<sup>(2)\*</sup> 試験系統は

$$E_n = \frac{1}{\sqrt{3}} 30 \times 10^3 (V), \quad I_n = 81 (A), \quad R = 7.3\%, \quad X_L = 14.2\%$$

で直列蓄電器は  $j36\Omega$  の他に  $j30\Omega$  としても使用されることから

$$X_C = 16.8\% (j36\Omega), \quad 14\% (j30\Omega)$$

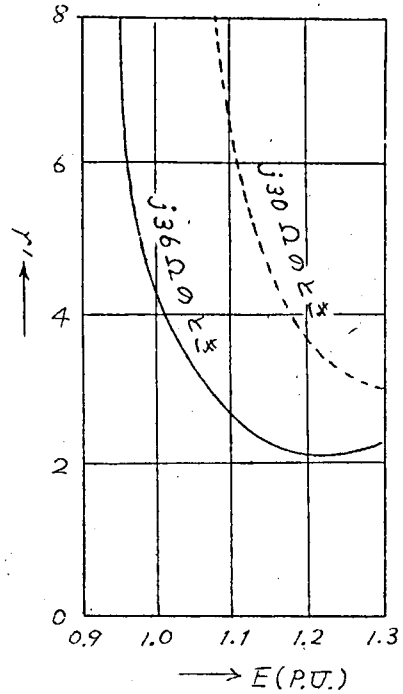
として表2.19図の演算回路を用いて演算した結果下表のようになった。

$X_C$	$E$ (P.U.)	分数調波	$V_C$ (P.U.)	$i$ (P.U.)
$j36\Omega$	0.9	$\frac{1}{3}$ 調波発生	0.87	2.74
	1.0	"	0.88	2.83
	1.1	"	0.87	2.91
	1.2	"	0.83	2.91
$j30\Omega$	0.9	発生せず		
	1.0	"		
	1.1	$\frac{1}{3}$ 調波発生	0.95	3.71
	1.2	"	0.96	3.80

すなわち、 $j36\Omega$  の直列蓄電器を用いたときは  $\frac{1}{3}$  調波振動が発生し、normal current の3倍近くの電流が流れる。

註\* "摺子新宮線直列蓄電器現場試験結果資料" 関西電力、天積貞雄氏の提供による。

$j30\Omega$  に対しては現場試験はされてないが、 $E=1.1, 1.2$  (P.U.) で発生するから送電端電圧の上昇分を考えると、 $1/3$  調波振動が発生するといえる。前項と同様、抵抗負荷についてこの系統について演算した結果を\* 2.33 図に示す。実線は  $j36\Omega$ 、点線は  $j30\Omega$  に対するものである。すなわち、 $1/2$  負荷程度になると  $1/3$  調波振動の発生することがわかる。



\* 2.33 図

## 第3部 同期発電機の自己励磁現象

### 才1節 緒言

直列蓄電器補償系統における回転機の自己励磁現象として、まず問題となるのは誘導電動機の自己励磁現象であるが、その発生範囲について多くの研究結果が発表されている。<sup>(31), (32)</sup>しかし、この現象は系統の送電電力に比し、電動機の定格容量が比較的大なるときに問題となるもので、配電線において遭遇する例が殆んどである。

同期機の自己励磁現象についても直列蓄電器を通して無限大母線につながれている系統に対してその発生範囲について研究されている。<sup>(33), (34)</sup>しかし、このように平衡容量負荷でなく、不平衡容量負荷がつながれた場合については、研究の対象を発電機の高調波共振現象においての研究はあるが、<sup>(35)</sup>解析的には不完全であり、自己励磁について何等考慮をほらっていない。

直列蓄電器補償系統において不平衡故障が発生した場合は丁度、発電機に不平衡容量負荷がかかった事となり、平衡容量負荷で問題となる自己励磁を問題としなければならない。しかし、実際において補償度、回路の抵抗ならびに現象の時間的推移を考えると、かかる自己励磁は問題となることは殆どないと考えられる。直接的には関係はないが、かかる自己励磁現象が問題となるのは送電線の耐圧試験においてであつて、この研究については概略的にされてはいるか<sup>(36)</sup>解析的に研究したものはない。

### 才2節 同期発電機の基礎微分方程式<sup>(37), (38)</sup>

発電機の各相巻線は対称的に正弦波状にまかれ、磁気回路の飽和、ヒステレシス等を省略すれば、発電機に対して、次の微分方程式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} v_d &= p\psi_d - \psi_g \cdot p\theta - r i_d \\ v_g &= p\psi_g + \psi_d \cdot p\theta - r i_g \\ v_o &= p\psi_o - r i_o \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ここで、 $p = \frac{d}{dt}$  であつて

$v_d, v_g, v_o$  ; 発電機端子電圧の直軸成分, 横軸成分, 零相成分

$i_d, i_g, i_o$  ; " 電機子電流 " " "

$\psi_d, \psi_g, \psi_o$  ; " 鎖交磁束 " " "

$r$  ; 電機子抵抗

$\theta = \tau + \theta_0$  ; 電気角で表わした回転子の角変位

である。また、直軸成分  $w_d$ 、横軸成分  $w_g$ 、零相成分  $w_o$  と各相成分

$w_a, w_b, w_c$  の関係は

$$\left. \begin{aligned} w_d &= \frac{2}{3} \left\{ w_a \cos \theta + w_b \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + w_c \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \\ w_g &= -\frac{2}{3} \left\{ w_a \sin \theta + w_b \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + w_c \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \\ w_o &= \frac{1}{3} (w_a + w_b + w_c) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

(3.1) 式における鎖交磁束  $\psi_d, \psi_g, \psi_o$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= G(p) e_{fa} - x_d(p) i_d \\ \psi_g &= -x_g(p) i_g \\ \psi_o &= -x_o i_o \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} G(p) &= \frac{(x_{11d} x_{afd} - x_{fid} x_{aid}) p + x_{afd} r_{id}}{(x_{ffd} x_{11d} - x_{fid}^2) p^2 + (x_{ffd} r_{id} + x_{11d} r_{fd}) p + r_{fd} r_{id}} \cdot \frac{r_{fd}}{x_{afd}} \\ x_d(p) &= x_d - \frac{(x_{afd}^2 x_{11d} - 2x_{afd} x_{aid} x_{fid} + x_{aid}^2 x_{ffd}) p^2 + (x_{afd}^2 r_{id} + x_{aid}^2 r_{fd}) p}{(x_{ffd} x_{11d} - x_{fid}^2) p^2 + (x_{ffd} r_{id} + x_{11d} r_{fd}) p + r_{fd} r_{id}} \\ x_g(p) &= x_g - \frac{x_{aig} p}{x_{11g} p + r_{ig}} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

ただし、

$x_d, x_g, x_o$  ; 発電機の直軸 (正相), 横軸, 零相リアクタンス

$X_{ffd}, X_{idd}, X_{iig}$  ; 界磁回路, 直軸制動回路, 横軸制動回路の自己リアクタンス

$r_{fd}, r_{id}, r_{ig}$  ; 界磁回路, 直軸制動回路, 横軸制動回路の抵抗

$X_{afd}, X_{aid}, X_{aig}, X_{fid}$  ; 電機子と界磁回路, 電機子と直軸制動回路, 電機子と横軸制動回路, 界磁回路と直軸制動回路との間の相互リアクタンス

$e_{fd}$  ; 界磁回路の印加電圧

もし, 制動巻線がないときや, 制動巻線効果(次過渡現象)を省略されるとき(3.4)式はつぎのように簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} G(p) &= \frac{X_{afd}}{X_{ffd}p + r_{fd}} \frac{r_{fd}}{X_{afd}} = \frac{1}{T_{d0}'p + 1} \\ X_d(p) &= X_d - \frac{X_{afd}^2 p}{X_{ffd}p + r_{fd}} = \frac{T_{d0}' X_d' p + X_d}{T_{d0}' p + 1} \\ X_g(p) &= X_g \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ただし

$$X_d' = X_d - \frac{X_{afd}^2}{X_{ffd}} ; \quad \text{直軸過渡リアクタンス}$$

$$T_{d0}' = \frac{X_{ffd}}{r_{fd}} ; \quad \text{界磁回路の時定数}$$

次に各相成分  $w_a, w_b, w_c$  と次の関係にある  $\alpha, \beta, 0$  成分を用いるときの基礎式を考える。

$$\left. \begin{aligned} w_\alpha &= \frac{1}{3}(2w_a - w_b - w_c) \\ w_\beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}(w_b - w_c) \\ w_0 &= \frac{1}{3}(w_a + w_b + w_c) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

(3.1)式は次のように変換される。

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha &= p\psi_\alpha - r i_\alpha \\ v_\beta &= p\psi_\beta - r i_\beta \\ v_0 &= p\psi_0 - r i_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

(3.3) 式は次のように変換される

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_{\alpha} &= -\left\{ \cos\theta x_d(p) \cos\theta + \sin\theta x_g(p) \sin\theta \right\} i_{\alpha} \\
 &\quad -\left\{ \cos\theta x_d(p) \sin\theta - \sin\theta x_g(p) \cos\theta \right\} i_{\beta} + \cos\theta G(p) e_{fd} \\
 \psi_{\beta} &= -\left\{ \sin\theta x_d(p) \cos\theta - \cos\theta x_g(p) \sin\theta \right\} i_{\alpha} \\
 &\quad -\left\{ \sin\theta x_d(p) \sin\theta + \cos\theta x_g(p) \cos\theta \right\} i_{\beta} + \sin\theta G(p) e_{fd} \\
 \psi_0 &= -x_0 i_0
 \end{aligned} \right\} (3.8)$$

ただし,

$v_{\alpha}, v_{\beta}, v_0$ ; 発電機端子電圧の  $\alpha, \beta, 0$  成分

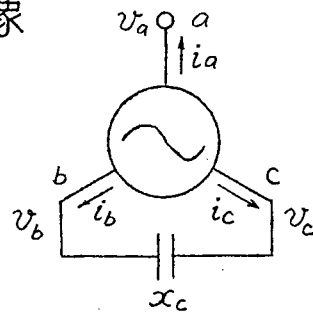
$i_{\alpha}, i_{\beta}, i_0$ ; " 電機子電流 "

$\psi_{\alpha}, \psi_{\beta}, \psi_0$ ; " 鎖交磁束 "

である。

### 第3節 不平衡容量負荷による自励現象

現象の本質的考察をするため第3.1図のような基本回路, すなわち, 発電機に単相容量負荷がかかった場合の自励現象について考察する。



第3.1図

発電機の基礎微分方程式は  $\alpha, \beta$  成分を用いると励磁のないときは (3.8) 式より

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_{\alpha} &= -\left\{ \cos\theta x_d(p) \cos\theta + \sin\theta x_g(p) \sin\theta \right\} i_{\alpha} - \left\{ \cos\theta x_d(p) \sin\theta - \sin\theta x_g(p) \cos\theta \right\} i_{\beta} \\
 \psi_{\beta} &= -\left\{ \sin\theta x_d(p) \cos\theta - \cos\theta x_g(p) \sin\theta \right\} i_{\alpha} - \left\{ \sin\theta x_d(p) \sin\theta + \cos\theta x_g(p) \cos\theta \right\} i_{\beta}
 \end{aligned} \right\} (3.9)$$

また, (3.7) 式より

$$v_{\alpha} = p \psi_{\alpha} - r i_{\alpha}, \quad v_{\beta} = p \psi_{\beta} - r i_{\beta} \quad (3.10)$$

第3.1図より端子条件として次式を得る。

$$i_a = 0, \quad i_b + i_c = 0, \quad v_b - v_c = \frac{x_c}{p} i_b \quad (3.11)$$

これを  $\alpha, \beta$  成分に変換すると

$$i_{\alpha} = 0, \quad 2v_{\beta} = -\frac{x_c}{p} i_{\beta} \quad (3.12)$$

となるから、基礎方程式は次のように変形される。

$$p^2 \{ \sin \theta \cdot 2x_{\alpha}(p) \sin \theta + \cos \theta \cdot 2x_{\beta}(p) \cos \theta \} i_{\beta} + 2rp i_{\beta} + x_c i_{\beta} = 0 \quad (3.13)$$

これがかかる現象を論ずる場合の基礎方程式である。この式は変係数の微分方程式であるので、正確に解析的に解くことは出来ないので近似的な解法を行う。

### (1) 界磁回路が開かれている場合

#### (a) 基礎方程式の変換

この場合には制動巻線の影響がないとすれば、すなわち、次過渡現象を省略すると(3.5)式より

$$x_d(p) = x_d, \quad x_g(p) = x_g \quad (3.14)$$

となるから(3.13)式は

$$p^2 \left( 1 - \frac{x_d - x_g}{x_d + x_g} \cos 2\theta \right) i_{\beta} + 2 \frac{r}{x_d + x_g} p i_{\beta} + \frac{x_c}{x_d + x_g} i_{\beta} = 0 \quad (3.15)$$

新しい変数として

$$i = \left( 1 - \frac{x_d - x_g}{x_d + x_g} \cos 2\theta \right) i_{\beta} \quad (3.16)$$

を導入すると、

$$i_{\beta} = \frac{1}{1 - \frac{x_d - x_g}{x_d + x_g} \cos 2\theta} i = \frac{1 + \alpha_1^2}{1 - \alpha_1^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_1^m \cos 2m\theta \right\} i \quad (3.17)$$

となるから(附録6参照)(3.15)式に代入すると

$$p^2 i + 2m_1 \frac{1 + \alpha_1^2}{1 - \alpha_1^2} p \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_1^m \cos 2m\theta \right\} i + k_1 \frac{1 + \alpha_1^2}{1 - \alpha_1^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_1^m \cos 2m\theta \right\} i = 0 \quad (3.18)$$

となる\*。ただし

$$a_1 = \frac{\sqrt{x_d} - \sqrt{x_g}}{\sqrt{x_d} + \sqrt{x_g}} \quad m_1 = \frac{r}{x_d + x_g} \quad k_1 = \frac{x_c}{x_d + x_g} \quad (3.19)$$

註\*  $r=0$  のときは Hill の微分方程式となる。

上式の解の不安定域を求めるために、以下においては非線型自動制御系に用いられている等価伝達関数法を用いよう。

(b) 等価伝達関数法による解析

(3.18)式をブロック線図で示すと図3.2図のようになる。図において  $\boxed{X}$  は掛算要素をしめし、2つの入力の積が出力となっていることをしめす。この要素を非線型要素として取扱うのである。また  $G_0(p)$  および  $A$  なる要素は

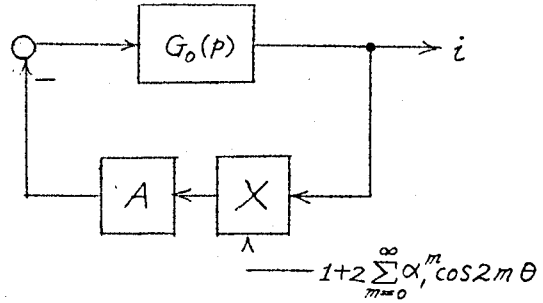


図3.2

$$G_0(p) = 2 \frac{m_1}{p} + \frac{f_0}{p^2}, \quad A = \frac{1 + \alpha_1^2}{1 - \alpha_1^2} \quad (3.20)$$

なる伝達関数をもつ線型要素をしめしている。この線型要素  $AG_0(p)$  の周波数特性について考えると、 $|G_0(j\omega)|$  は  $\omega$  について一様に減少する関数であることがわかる。

次に掛算要素の等価伝達関数について考える。定義より等価伝達関数とは入力を正弦波と仮定し、その出力のうち、入力と同じ周波数成分を考えて等価的な伝達関数を求めるのであるから、いま

$$i = a \cos(n\theta - \sigma) \quad (3.21)$$

と仮定する。  $a, n, \sigma$  は定数である。出力は

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_1^m \cos 2m\theta \right\} a \cos(n\theta - \sigma) \\ & = a \left[ \cos(n\theta - \sigma) + \sum \alpha_1^m \left\{ \cos(\overline{n+2m}\theta - \sigma) + \cos(\overline{n-2m}\theta - \sigma) \right\} \right] \end{aligned}$$

となるから、出力のうち入力と同じ周波数成分は

$$\begin{aligned} n=1 \quad \text{に対しては} & \quad a \{ \cos(\theta - \sigma) + \alpha_1 \cos(\theta + \sigma) \} \\ n=2 \quad \quad \quad \quad & \quad a \{ \cos(2\theta - \sigma) + \alpha_1^2 \cos(2\theta + \sigma) \} \end{aligned}$$



$$n=m \text{ に対しては } a \{ \cos(m\theta-\sigma) + \alpha^m \cos(m\theta+\sigma) \}$$

となる。しかるに

$$a \{ \cos(m\theta-\sigma) + \alpha^m \cos(m\theta+\sigma) \} = \left[ \{ 1 + \alpha^m \cos 2\sigma \} \cos(m\theta-\sigma) - \alpha^m \sin 2\sigma \times \sin(m\theta-\sigma) \right]$$

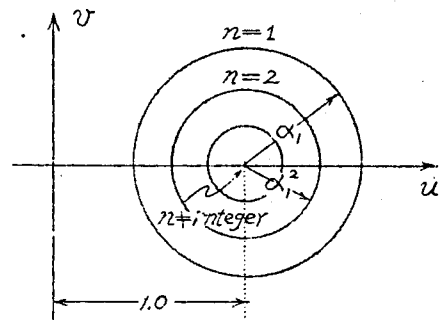
であるから、出力は振巾のみならず位相もすすむ。すなわち複素量表示を行うと、等価的な伝達関数は

$$\left. \begin{aligned} N &= 1 + \alpha, \cos 2\sigma + j\alpha, \sin 2\sigma & n=1 \\ &= 1 + \alpha^2, \cos 2\sigma + j\alpha^2, \sin 2\sigma & n=2 \\ &\vdots \\ &= 1 + \alpha^m, \cos 2\sigma + j\alpha^m, \sin 2\sigma & n=m \\ &= 1 & \neq \text{integer} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

となるから、 $n=1, 2, \dots$  に対する伝達関数は複素平面 ( $u-v$  平面) 上では  $\sigma$  は任意であるから消去すると

$$(u-1)^2 + v^2 = (\alpha^n)^2 \quad n=1, 2, \dots \quad (3.23)$$

となる。すなわち、掛算要素の等価伝達関数は  $n$  が整数であるとき、いかえると入力信号がこの掛算要素のもう1つの入力の基本波の高調波であるときは、その等価伝達関数は中心が  $(1, j0)$  にあり半径  $\alpha^n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) の円となり、 $n$  が整数でないときは実軸上の点  $1+j0$  となる。(オ3.3図)



オ3.3図

系の安定性の問題に関しては制御系におけると同様に特性方程式

$$1 + G_o(j\omega)N = 0 \quad (3.24)$$

について考察すればよい。すなわち、ナイキストの判定法によれば  $G_o(j\omega)N$  なるベクトル軌跡の内部に  $(-1+j0)$  なる点があれば系は不安定となる。

いま、周波数を規格化して考えて

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{G_o(jn)} &= \xi(n) - j\zeta(n) = \sqrt{\{\xi(n)\}^2 + \{\zeta(n)\}^2} \varepsilon^{-j \tan^{-1} \frac{\zeta(n)}{\xi(n)}} \\ N &= 1 + r_n \varepsilon^{j\varphi} \\ r_n &= r_n \quad ; \quad n = 1, 2, \dots \\ &= 0 \quad ; \quad n \neq \text{integer} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

とすれば、 $G_o(jn)N$  は

$$G_o(jn)N = \frac{1}{\sqrt{\{\xi(n)\}^2 + \{\zeta(n)\}^2}} \left\{ -\varepsilon^{j \tan^{-1} \frac{\zeta(n)}{\xi(n)}} + r_n \varepsilon^{j(\varphi + \tan^{-1} \frac{\zeta(n)}{\xi(n)} + \pi)} \right\} \quad (3.26)$$

となる。すなわち、 $G_o(jn)N$  は  $n$  が整数でないときは  $-\varepsilon^{j \tan^{-1} \frac{\zeta(n)}{\xi(n)}} / \sqrt{\{\xi(n)\}^2 + \{\zeta(n)\}^2}$  となり、 $n=1, 2, \dots$  のときは中心が  $-\varepsilon^{j \tan^{-1} \frac{\zeta(n)}{\xi(n)}} / \sqrt{\{\xi(n)\}^2 + \{\zeta(n)\}^2}$  であり半径が  $r_n / \sqrt{\{\xi(n)\}^2 + \{\zeta(n)\}^2}$  なる円となる。故に  $G_o(p)$  が前述したような周波数特性をもつから、不安定となる領域は

$$\frac{\{\xi(n)-1\}^2 + \{\zeta(n)\}^2}{\{\xi(n)\}^2 + \{\zeta(n)\}^2} < \frac{r_n^2}{\{\xi(n)\}^2 + \{\zeta(n)\}^2}$$

すなわち、

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\{\xi(n)-1\}^2 + \{\zeta(n)\}^2 < r_n^2 \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

となる。これは、すなわち  $\xi(n) - j\zeta(n)$  なる点が (3.23) 式の円の中に入れば不安定となることをしめしている。

### (C) 自励現象の発生域

以上の結果より (3.20) 式より

$$G_o(p) = \frac{1 + \alpha_1^2}{1 - \alpha_1^2} \left\{ 2 \frac{m_1}{p} + \frac{k_1}{p^2} \right\} \quad (3.28)$$

であるから

$$-\frac{1}{G_o(jn)} = \xi(n) - j\zeta(n) = \frac{1 - \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} \frac{n^2}{k_1 + j2m_1 n} = \frac{1 - \alpha_1^2}{1 + \alpha_1^2} \frac{n^2 k_1 - j2m_1 n^3}{k_1^2 + 4m_1^2 n^2} \quad (3.29)$$

上述の結果を適用することにより不安定域は

$$\left\{ \frac{1-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} \frac{n^2 \ell_1}{\ell_1^2 + 4m_1^2 n^2} - 1 \right\}^2 + \left\{ \frac{1-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} \frac{2m_1 n^3}{\ell_1^2 + 4m_1^2 n^2} \right\}^2 < \{\alpha_1^n\}^2 \quad (3.30)$$

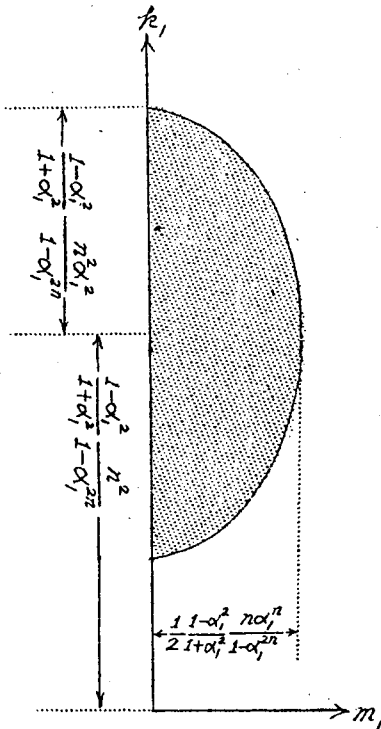
$\ell_1^2 + 4m_1^2 n^2 > 0$  なる事に注意して変形すると,

$$\frac{\left\{ \ell_1 - \frac{1-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} \frac{n^2}{1-\alpha_1^{2n}} \right\}^2}{\left\{ \frac{1-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} \frac{n^2 \alpha_1^n}{1-\alpha_1^{2n}} \right\}^2} + \frac{n_1^2}{\left\{ \frac{1}{2} \frac{1-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} \frac{n \alpha_1^n}{1-\alpha_1^{2n}} \right\}^2} < 1 \quad (3.31)$$

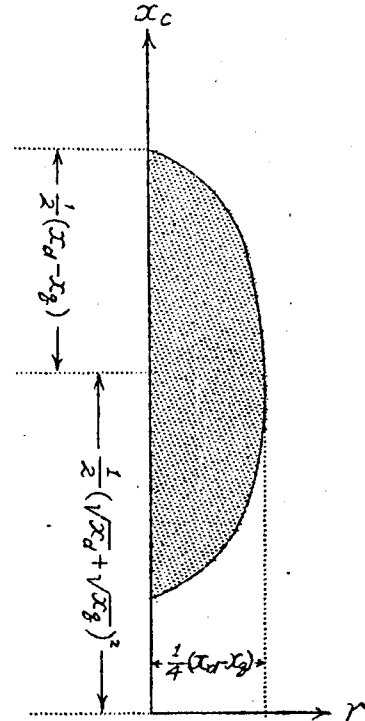
すなわち,  $m_1 - \ell_1$  平面で考えると中心が  $(0, \frac{1-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} \frac{n^2}{1-\alpha_1^{2n}})$  になり, 軸の長さがそれぞれ  $2 \frac{1-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} \frac{n^2 \alpha_1^n}{1-\alpha_1^{2n}}, \frac{1-\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2} \frac{n \alpha_1^n}{1-\alpha_1^{2n}}$  である楕円が境界線で, その内部が角周波数  $n$  の自励振動を発生して不安定となる領域である。(※3.4図) 特に  $n=1$  すなわち, 角周波数1の自励振動を発生して不安定となる場合について考えると

$$\frac{1}{1+\alpha_1^2} = \frac{(\sqrt{x_d} + \sqrt{x_g})^2}{2(x_d + x_g)} \quad \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2} = \frac{x_d - x_g}{2(x_d + x_g)}$$

であるから



※3.4図



※3.5図

$$\left\{ \frac{x_c - \frac{1}{2}(\sqrt{x_d} + \sqrt{x_g})^2}{\frac{1}{2}(x_d - x_g)} \right\}^2 + \left\{ \frac{r}{\frac{1}{4}(x_d - x_g)} \right\}^2 < 1 \quad (3.32)$$

$x_c - r$  平面で  $x_c$  軸上に中心をもつ楕円となる (才 3.5 図)。

(2) 界磁回路が閉ぢられている場合

(a) 基礎方程式の変換

この場合も次過渡現象を省略すると (3.5) 式より

$$x_d(p) = \frac{x_d' T_{do}' p + x_d}{T_{do}' p + 1} \quad x_g(p) = x_g \quad (3.33)$$

となるから

$$\sin \theta \cdot 2x_d(p) \sin \theta = \{x_d(p+j) + x_d(p-j)\} \sin^2 \theta + j \{x_d(p+j) - x_d(p-j)\} \sin \theta \cos \theta$$

であることに留意すると基礎方程式 (3.13) 式は次のようになる。

$$(x_d - x_d') T_2(p) \sin 2\theta \cdot i_\beta + \{x_g - x_d' - (x_d - x_d') T_1(p)\} \cos 2\theta \cdot i_\beta + \{x_g + x_d' + (x_d - x_d') T_1(p) + 2\frac{r}{p} + \frac{x_c}{p^2}\} i_\beta = 0 \quad (3.34)$$

ただし

$$T_1(p) = \frac{T_{do}' p + 1}{(T_{do}' p + 1)^2 + T_{do}'^2}, \quad T_2(p) = \frac{T_{do}'}{(T_{do}' p + 1)^2 + T_{do}'^2} \quad (3.35)$$

新しい変数として

$$i = \left(1 - \frac{x_d' - x_g}{x_d' + x_g} \cos 2\theta\right) i_\beta \quad (3.36)$$

を導入すると

$$i_\beta = \frac{1}{1 - \frac{x_d' - x_g}{x_d' + x_g} \cos 2\theta} i = \frac{1 + \alpha_2^2}{1 - \alpha_2^2} \left\{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_2^m \cos 2m\theta\right\} i \quad (3.37)$$

$$\sin 2\theta \cdot i_\beta = \frac{\sin 2\theta}{1 - \frac{x_d' - x_g}{x_d' + x_g} \cos 2\theta} i = \frac{1 + \alpha_2^2}{\alpha_2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_2^m \sin 2m\theta \cdot i \quad (3.38)$$

$$\cos 2\theta \cdot i_\beta = \frac{\cos 2\theta}{1 - \frac{x_d' - x_g}{x_d' + x_g} \cos 2\theta} i = \frac{1 + \alpha_2^2}{\alpha_2} \left\{ \frac{\alpha_2^2}{1 - \alpha_2^2} + \frac{1 + \alpha_2^2}{1 - \alpha_2^2} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_2^m \cos 2m\theta \right\} i \quad (3.39)$$

であるから(附録6参照), (3.34)式はつぎのようになる。

$$\left\{ 1 + G_1(p) \cdot 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_2^m \cos 2m\theta + G_2(p) \cdot 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_2^m \sin 2m\theta \right\} i = 0 \quad (3.40)$$

ただし

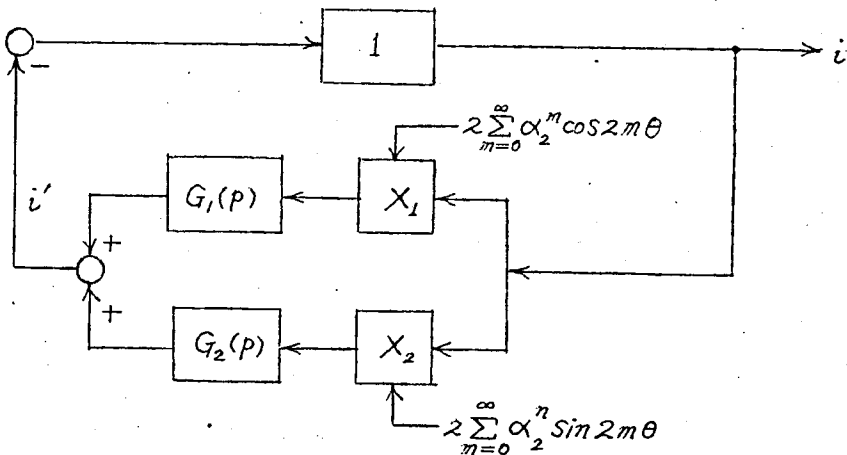
$$\left. \begin{aligned} G_1(p) &= \frac{2\mu\mu_2 p^2 T_1(p) + 2m_2 p + k_2}{2\mu(\mu_2 - 1)p^2 T_1(p) + 2p^2 + 2m_2 p + k_2} \\ G_2(p) &= \frac{-2\mu p^2 T_2(p)}{2\mu(\mu_2 - 1)p^2 T_1(p) + 2p^2 + 2m_2 p + k_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

$$\left. \begin{aligned} k_2 &= \frac{x_c}{\sqrt{x_d' x_g}}, \quad m_2 = \frac{r}{\sqrt{x_d' x_g}}, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{x_d'} - \sqrt{x_g}}{\sqrt{x_d'} + \sqrt{x_g}} \\ \mu &= \frac{x_d' - x_d}{x_d' - x_g}, \quad \mu_1 = \frac{x_d}{\sqrt{x_d' x_g}}, \quad \mu_2 = \frac{x_g}{\sqrt{x_d' x_g}} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

(b) 等価伝達関数法による解析

(1)の場合と同様, 不安定域を求めるために等価伝達関数法を用いる。

(3.40)式をブロック線図でしめすとオ3.6図のようになる。図において



オ3.6図

$X_1, X_2$  は前と同様に掛算要素をしめし,  $G_1(p), G_2(p)$  は (3.41) 式の伝達関数をもつ線型要素をしめす。  $T_1(p), T_2(p)$  の周波数特性を考えると,

そのゲインは周波数が高くなるほど減少する特性、いわゆる低域通過特性をもつことより  $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$  も同様周波数が高くなるほどゲインの減少する特性をもっていることがわかる。

次に掛算要素の等価伝達関数について考える。いま、(1)のときと同様

$$i = a \cos(n\theta - \sigma) \tag{3.34}$$

と仮定する。掛算要素  $X_1$  の出力は

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_2^m \cos 2m\theta \cdot a \cos(n\theta - \sigma) \\ &= a \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_2^m \{ \cos(\overline{n+2m}\theta - \sigma) + \cos(\overline{n-2m}\theta - \sigma) \} \end{aligned}$$

であるから、入力と同じ周波数成分は

$$n=1 \text{ に対しては } a\alpha_2 \cos(\theta + \sigma)$$

$$n=2 \text{ に対しては } a\alpha_2^2 \cos(2\theta + \sigma)$$

$$n=m \text{ に対しては } a\alpha_2^m \cos(m\theta + \sigma) = a\alpha_2^m \cos(m\theta - \sigma + 2\sigma)$$

となるから、これより等価的な伝達関数は

$$N_1 = \alpha_2^n \varepsilon^{j2\sigma}, \quad n=1, 2, \dots \tag{3.44}$$

$n$  が整数でないときは 0 である。また掛算要素  $X_2$  の出力は

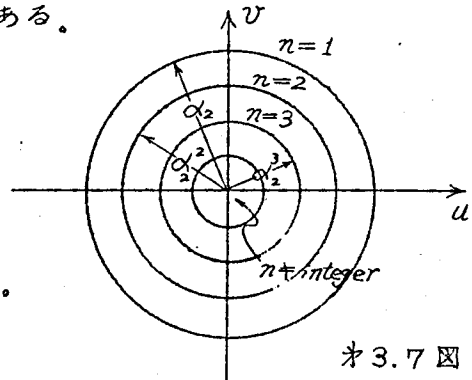
$$\begin{aligned} & 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_2^m \sin 2m\theta \cdot a \cos(n\theta - \sigma) \\ &= a \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_2^m \{ \sin(\overline{2m+n}\theta - \sigma) + \sin(\overline{2m-n}\theta + \sigma) \} \end{aligned}$$

であるから、等価的な伝達関数は上と同様にして

$$N_2 = \alpha_2^n \varepsilon^{j(2\sigma - \frac{\pi}{2})}, \quad n=1, 2, \dots \tag{3.45}$$

$n$  が整数でないときは上と同様 0 である。

すなわち、掛算要素の等価伝達関数は複素平面上では  $X_1$ ,  $X_2$  いずれの場合も  $n$  が整数であるときは原点を中心とする半径  $\alpha_2^n$  の円となり、整数がないときは零となる(オ3.7図)。しかし、位相関係は  $\pi/2$  だけの差が



オ3.7図

ある。

次に掛算要素と線型要素との直列結合の等価伝達関数について考える。  
周波数を規格化して

$$\{G_1(p)\}_{p=jn} = x_{1n} + jy_{1n}, \quad \{G_2(p)\}_{p=jn} = x_{2n} + jy_{2n} \quad (3.46)$$

とすれば

$$\begin{aligned} G_1(jn) \cdot N_1 &= \alpha_2^n \{ (x_{1n} \cos 2\sigma - y_{1n} \sin 2\sigma) + j(x_{1n} \sin 2\sigma + y_{1n} \cos 2\sigma) \} \\ &= \alpha_2^n \sqrt{x_{1n}^2 + y_{1n}^2} \epsilon^{j \tan^{-1} \frac{x_{1n} \sin 2\sigma + y_{1n} \cos 2\sigma}{x_{1n} \cos 2\sigma - y_{1n} \sin 2\sigma}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} G_2(jn) \cdot N_2 &= \alpha_2^n \{ (x_{2n} \sin 2\sigma + y_{2n} \cos 2\sigma) + j(-x_{2n} \cos 2\sigma + y_{2n} \sin 2\sigma) \} \\ &= \alpha_2^n \sqrt{x_{2n}^2 + y_{2n}^2} \epsilon^{j \tan^{-1} \frac{-x_{2n} \cos 2\sigma + y_{2n} \sin 2\sigma}{x_{2n} \sin 2\sigma + y_{2n} \cos 2\sigma}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

となるから、この場合の等価伝達関数はいずれも  $n$  が整数であるとき、  
原点を中心とする同心円である。

ブロック線図が 3.6 図において  $i$  と  $i'$  を結びつける等価伝達関数は

$$\begin{aligned} N_0 &= G_1(jn) N_1 + G_2(jn) N_2 = \alpha_2^n \{ (x_{1n} + y_{2n}) \cos 2\sigma + (x_{2n} - y_{1n}) \sin 2\sigma \} \\ &\quad + j\alpha_2^n \{ (x_{1n} + y_{2n}) \sin 2\sigma - (x_{2n} - y_{1n}) \cos 2\sigma \} \end{aligned} \quad (3.49)$$

となる。ここに  $\sigma$  は (3.43) 式からも判るように任意であるから、等価  
伝達関数  $N_0$  は複素平面上で  $n$  が整数であれば原点を中心として、半径、

$$R_n = \alpha_2^n \sqrt{(x_{1n} + y_{2n})^2 + (x_{2n} - y_{1n})^2} \quad (3.50)$$

なる円となり、整数でなければ原点となる不連続な軌跡を画くというこ  
とができる。

系の安定性の問題に関しては、この場合は特性方程式

$$1 + N_0 = 0 \quad (3.51)$$

について考察すればよい。ナイキストの判定法によれば  $N_0$  なるベクトル  
軌跡の内部に  $(-1, +j0)$  なる点があれば系は不安定となるから、

$$\begin{aligned} \alpha_2^{2n} \{ (x_{1n} + y_{2n})^2 + (x_{2n} - y_{1n})^2 \} &> 1 \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.52)$$

であるは系の不安定となる。

(C) 自励現象の発生域

(3.46)式で与えられる  $x_{1n}, y_{1n}, x_{2n}, y_{2n}$  は (3.41) 式より

$$\left. \begin{aligned} x_{1n} + jy_{1n} &= \frac{-2\mu\mu_2 n^2 T_1(jn) + j2m_2 n + k_2}{-2\mu(\mu_2 - 1)n^2 T_1(jn) - 2n^2 + j2m_2 n + k_2} \\ x_{2n} + jy_{2n} &= \frac{2\mu n^2 T_2(jn)}{-2\mu(\mu_2 - 1)n^2 T_1(jn) - 2n^2 + j2m_2 n + k_2} \end{aligned} \right\} (3.53)$$

また, (3.35)式より

$$T_1(jn) = \frac{1 + jnT'_{d0}}{(1 + jnT'_{d0})^2 + T'^2_{d0}}, \quad T_2(jn) = \frac{T'_{d0}}{(1 + jnT'_{d0})^2 + T'^2_{d0}} \quad (3.54)$$

いま,  $T'_{d0} \gg 1$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} T_1(jn) &\cong \begin{cases} \frac{1}{2} & n=1 \\ 0 & n=2, 3, \dots \end{cases} \\ T_2(jn) &\cong \begin{cases} -j\frac{1}{2} & n=1 \\ 0 & n=2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned} \right\} (3.55)$$

となるから, ここで  $n=1$  なる場合と  $n>1$  なる場合とに分けて考える。

(3.53) ~ (3.55)式より

$$\left. \begin{aligned} x_{11} &= \frac{1}{\Delta} \left[ (k_2 - \mu\mu_2) \{k_2 - \mu(\mu_2 - 1) - 2\} + (2m_2)^2 \right] \\ y_{11} &= \frac{1}{\Delta} 2m_2(\mu - 2) \\ x_{21} &= -\frac{1}{\Delta} 2\mu m_2 \\ y_{21} &= -\frac{1}{\Delta} \mu \{k_2 - \mu(\mu_2 - 1) - 2\} \end{aligned} \right\} (3.56)$$

ただし

$$\Delta = \{k_2 - \mu(\mu_2 - 1) - 2\}^2 + (2m_2)^2 \quad (3.57)$$

であるから (3.52)式は  $n=1$  なるとき

$$\alpha_2^2 \left[ \{ (k_2 + \mu - \mu\mu_2 - 2)(k_2 - \mu - \mu\mu_2) + 4m_2^2 \}^2 + \{ 4m_2(1 - \mu) \}^2 \right]$$



$$> \{(k_2 + \mu - \mu\mu_2 - 2)^2 + 4m_2^2\}^2$$

$$(k_2 + \mu - \mu\mu_2 - 2)^2 + 4m_2^2 > 0$$
 であるから上式は変形されて

$$(1 - \alpha_2^2) \{(k_2 + \mu - \mu\mu_2 - 2)^2 + 4m_2^2\} < 4(1 - \mu)(k_2 - \mu\mu_2 - 1)\alpha_2^2$$

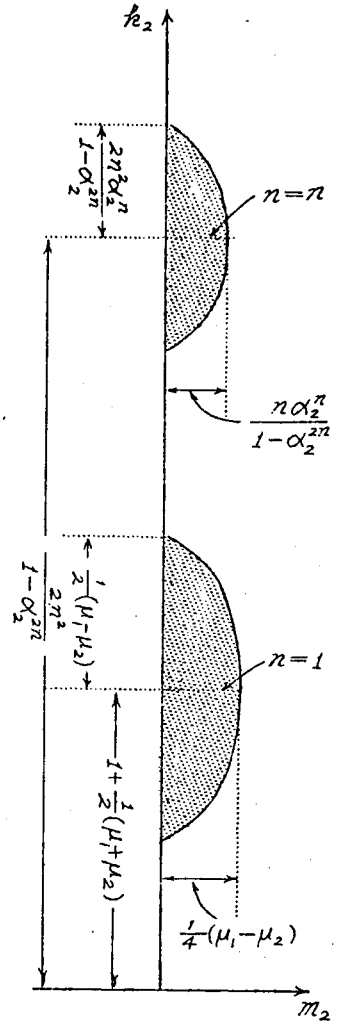
書きかえると

$$\left\{ \frac{k_2 - (\mu\mu_2 - \mu \cdot \frac{1 + \alpha_2^2}{1 - \alpha_2^2} + \frac{2}{1 - \alpha_2^2})}{2(1 - \mu) \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2^2}} \right\}^2 + \left\{ \frac{m_2}{(1 - \mu) \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2^2}} \right\}^2 < 1 \quad (3.58)$$

あるいは

$$\left\{ \frac{k_2 - (1 + \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2))}{\frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2)} \right\}^2 + \left\{ \frac{m_2}{\frac{1}{4}(\mu_1 - \mu_2)} \right\}^2 < 1 \quad (3.59)$$

すなわち、 $k_2 - m_2$  平面で境界線は楕円となり、その内部が角周波数 1 ( $n=1$ ) の自励振動を発生して不安定な領域である (※ 3.8 図)。



※ 3.8 図

次に  $n > 1$  なる場合について考える。(3.53) ~ (3.55) 式より

$$\left. \begin{aligned} x_{1n} &= \frac{k_2(k_2 - 2n^2) + (2m_2n)^2}{(k_2 - 2n^2)^2 + (2m_2n)^2} & y_{1n} &= \frac{-4m_2n^3}{(k_2 - 2n^2)^2 + (2m_2n)^2} \\ x_{2n} &= y_{2n} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

(3.52) 式にこの結果を代入して変形すると

$$\left\{ \frac{k_2 - \frac{2n^2}{1 - \alpha_2^{2n}}}{\frac{2n^2 \alpha_2^n}{1 - \alpha_2^{2n}}} \right\}^2 + \left\{ \frac{m_2}{\frac{n \alpha_2^n}{1 - \alpha_2^{2n}}} \right\}^2 < 1 \quad (3.61)$$

となる。すなわち、 $k_2-m_2$  平面でやはり境界線は楕円となり、内部が角周波数  $n$  ( $=integer, \neq 1$ ) なる自励振動を発生して不安定な領域である (オ3.8図)。

(3) 外部インダクタンス分を考慮する場合

変圧器のインダクタンス等、電機子回路のインダクタンス分を考慮するときは基礎方程式は

$$p^2 \{ 2x + \sin\theta 2x_d(p) \sin\theta + \cos\theta \cdot 2x_g(p) \cos\theta \} i_\beta + 2rpi_\beta + x_c i_\beta = 0 \quad (3.62)$$

となる。ただし外部につながれたインダクタンスを  $2x$  とする。界磁回路が開かれているときは (3.62) 式は

$$p^2 \left( 1 - \frac{x_d - x_g}{x_d + x_g + 2x} \cos 2\theta \right) i_\beta + 2 \frac{r}{x_d + x_g + 2x} p i_\beta + \frac{x_c}{x_d + x_g + 2x} i_\beta = 0 \quad (3.63)$$

となる。

$$\frac{x_d - x_g}{x_d + x_g + 2x} = \frac{(x_d + x) - (x_g + x)}{(x_d + x) + (x_g + x)}$$

であるから、(3.14) 式で  $x_d \rightarrow x_d + x$ ,  $x_g \rightarrow x_g + x$  と解釈すればよい。すなわち、このときの不安定域は (3.31) 式より

$$\frac{\left\{ \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_1'^2}{1 + \alpha_1'^2} \frac{n^2}{1 - \alpha_1'^{2n}} \right\}^2}{\left\{ \frac{1 - \alpha_1'^2}{1 + \alpha_1'^2} \frac{n^2 \alpha_1'^{2n}}{1 - \alpha_1'^{2n}} \right\}^2} + \frac{m_1'^2}{\left\{ \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha_1'^2}{1 + \alpha_1'^2} \frac{n \alpha_1'^{2n}}{1 - \alpha_1'^{2n}} \right\}^2} < 1 \quad (3.64)$$

ただし

$$k_1' = \frac{x_c}{x_d + x_g + 2x} \quad m_1' = \frac{r}{x_d + x_g + 2x} \quad \alpha_1' = \frac{\sqrt{x_d + x} - \sqrt{x_g + x}}{\sqrt{x_d + x} + \sqrt{x_g + x}} \quad (3.65)$$

特に  $n=1$  に対しては (3.32) 式より

$$\left\{ \frac{x_c - \frac{1}{2}(\sqrt{x_d + x} + \sqrt{x_g + x})}{\frac{1}{2}(x_d - x_g)} \right\}^2 + \left\{ \frac{r}{\frac{1}{4}(x_d - x_g)} \right\}^2 < 1 \quad (3.66)$$

(3.32) 式と比較すると変圧器等のインダクタンス分を考慮すると楕円の形は少しもわからず、その位置が変化するだけであることがわかる。

また、界磁回路が閉じられているときは (3.62) 式は

$$(x_d - x'_d) T_2(p) \sin 2\theta \cdot i_\beta + \{x_g - x'_d - (x_d - x'_d) T_1(p)\} \cos 2\theta \cdot i_\beta + \left\{x_g + x'_d + 2x + (x_d - x'_d) T_1(p) + 2 \frac{r}{p} + \frac{x_c}{p^2}\right\} i_\beta = 0 \quad (3.67)$$

となるから、上述と同様 (3.34) 式で  $x_d \rightarrow x_d + x$ ,  $x_g \rightarrow x_g + x$ ,  $x'_d \rightarrow x'_d + x$  と解釈すればよい。すなわち、このときの不安定域は  $n=1$  に対しては (3.59) 式より、

$$\left\{ \frac{x_c - (\sqrt{(x'_d + x)(x_g + x)} + \frac{1}{2} x'_d + x_g + 2x)}{\frac{1}{2} (x_d - x_g)} \right\}^2 + \left\{ \frac{r}{\frac{1}{4} (x_d - x_g)} \right\}^2 < 1 \quad (3.68)$$

すなわち、外部インダクタンスにより境界をしめす楕円の形は変化しないが、その位置が変化するだけであり

$$x_g + x + \sqrt{(x'_d + x)(x_g + x)} < x_c < x_d + x + \sqrt{(x_d + x)(x_g + x)} \quad (3.69)$$

のとき、基本波の自己励磁を発生する可能性があるといえることができる。

また、 $n > 1$  に対しては (3.61) 式より

$$\left\{ \frac{r'_2 - \frac{2n^2}{1 - \alpha_2'^{2n}}}{\frac{2n^2 \alpha_2'^n}{1 - \alpha_2'^{2n}}} \right\}^2 + \frac{m_2'^2}{\left\{ \frac{n \alpha_2'^n}{1 - \alpha_2'^{2n}} \right\}^2} < 1 \quad (3.70)$$

ただし

$$r'_2 = \frac{x_c}{\sqrt{(x'_d + x)(x_g + x)}} \quad m_2' = \frac{r}{\sqrt{(x'_d + x)(x_g + x)}} \quad \alpha_2' = \frac{\sqrt{x_d + x} - \sqrt{x_g + x}}{\sqrt{x_d + x} + \sqrt{x_g + x}} \quad (3.71)$$

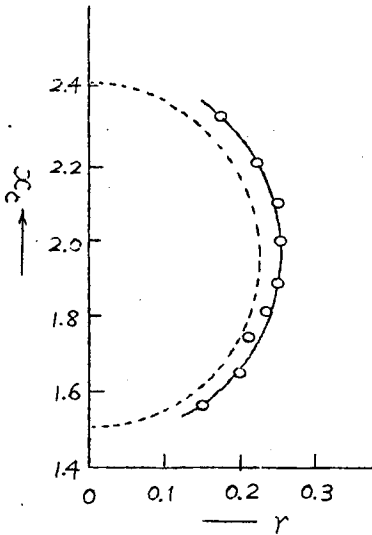
#### (4) 実験的考察

前記、解析的結果をたしかめるために電機子回路に単相容量負荷をつなぎ自己励磁発生領域を求めた。用いた同期機は

極数：4，定格速度：1800 rpm，相数：3，電圧：110 V，容量：5 kVA，である。 $x_d$  を三相短絡試験， $x_g$ ,  $x'_d$  を静止法（附録 7 参照）によって求めた結果は

$x_d = 1.79 \Omega$  (AIEE法)， $x_g = 0.907 \Omega$ ， $x'_d = 0.403 \Omega$  である。

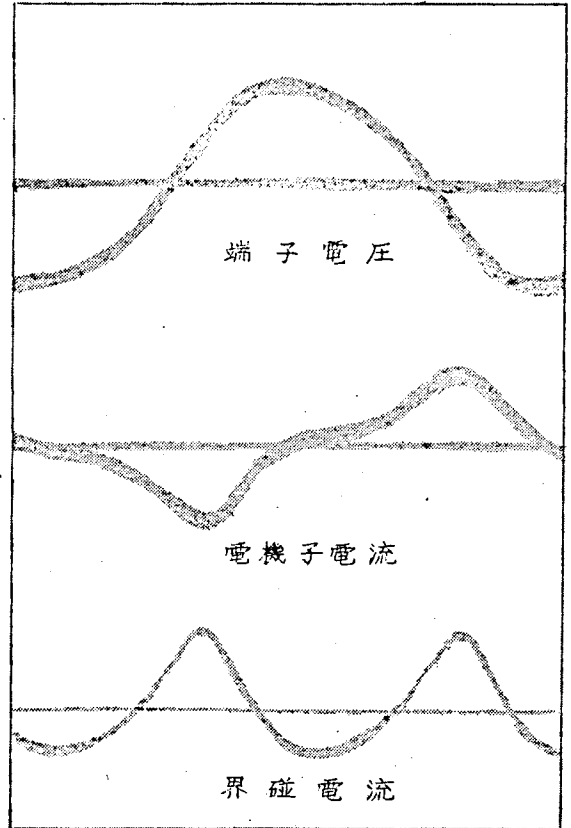
オ3.9図において実線は実験結果であつて、点線は上記の値を用いて(3.59)式より求めた自己励磁発生域である(実験においては発電機の回転数を変化させて容量リアクタンスを変化させることも行った)。なお、



オ3.9図

高調波の自己励磁現象の発生は実験ではみとめられなかつた。これは実験に使用した機械が小容量であるため回路の抵抗分が大きいた

めである。実験において観測されたオシロをオ3.10図にしめす。これによると解析結果がしめすように電機子電流はオ3高調波等の高調波成分を多く含んでいる。



オ3.10図

#### (5) 平衡容量負荷の場合との比較

平衡容量負荷と不平衡容量負荷の場合の自励現象を比較するに、その根本的な差異は平衡容量負荷の場合は基本波の自励振動だけがおこるに

すぎないが、<sup>\*</sup> 不平衡容量負荷の場合には基本波の外に高調波の自励振動が発生するという  
ことである。基本波の自己励振が発生する領域は平衡負荷のときは附録 8 の (8.6) 式、すなわち

$$\left\{ r^2 + \left( x_c - \frac{x_d' + x_g}{2} \right)^2 - \left( \frac{x_d' - x_g}{2} \right)^2 \right\} \times \left\{ r^2 + \left( x_c - \frac{x_d + x_g}{2} \right)^2 - \left( \frac{x_d - x_g}{2} \right)^2 \right\} < 0 \quad (3.72)$$

不平衡負荷の場合は (3.59) 式すなわち

$$\left\{ \frac{x_c - \left( \sqrt{x_d' x_g} + \frac{1}{2} (x_d + x_g) \right)}{\frac{1}{2} (x_d - x_g)} \right\}^2 + \left\{ \frac{r}{\frac{1}{4} (x_d - x_g)} \right\}^2 < 1 \quad (3.73)$$

となる。

KVA で比較するとすれば上の二つにおいて  $x_c$  は同一と考えてよいから、また一般に  $x_d' < x_g < x_d$  であるから、平衡容量負荷のときは

$$x_d' < x_c < x_d \quad (3.74)$$

のとき、不平衡容量負荷のときは

$$x_g + \sqrt{x_d' x_g} < x_c < x_d + \sqrt{x_d' x_g} \quad (3.75)$$

のとき基本波の自己励振が発生する可能性があるということができる。また、回路の抵抗分は自己励振を抑せいし、平衡容量負荷では  $\frac{1}{2} (x_d - x_g)$  不平衡容量負荷ではその半分

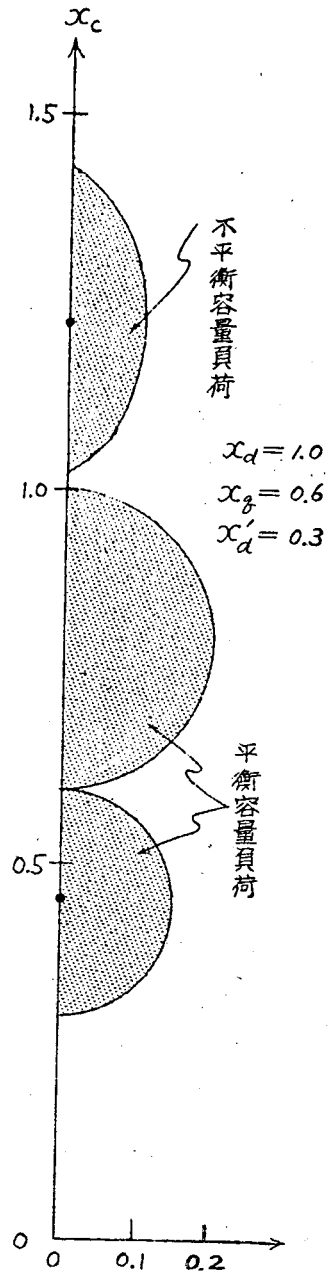


図 3.11

註\* 厳密にいうと自励振動の周波数は回路条件によつてきまるが、<sup>(34)</sup> 近似上にはかくいうことができる。(附録 8 参照)

$\frac{1}{4}(x_\alpha - x_\beta)$  だけ抵抗分があればいかなる  $x_c$  の値でも基本波の自己励磁が発生しないといふことができる。

## 第4節 系統の不均衡故障時および耐圧試験回路に対する考察

### (1) 不均衡故障時に対する考察

直列蓄電器補償系統における不均衡故障時の現象について考える。系統において変圧器は低圧側は  $\Delta$ 、高圧側は  $Y$  に結線されているものとし、変圧器の電位、電流を低圧側、高圧側についてそれぞれ、 $v, u$  および  $i, j$  なる記号をつかうものとするれば、 $\alpha, \beta, 0$  成分を用いるとそれ等の間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} i_0 = 0, \quad i_\alpha = \sqrt{3} n j_\beta, \quad i_\beta = -\sqrt{3} n j_\alpha \\ u_0 = u_o, \quad u_\alpha = -\sqrt{3} n v_\beta, \quad u_\beta = \sqrt{3} n v_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

なる関係がある。ただし、 $n$  は変圧器の巻線比である。

### (a) 一線接地故障時

いま、系統は無負荷とし直列蓄電器の負荷側において一線接地事故が発生したものとする。故障相を  $a$  相とし、 $x_c, x_L$  および  $r_L$  をそれぞれ直列蓄電器の容量リアクタンス、変圧器、送電線の誘導リアクタンスおよび抵抗とすれば

$$j_b = j_c = 0, \quad u_a = \left\{ p x_L + r_L + \frac{x_c}{p} \right\} j_a \quad (3.73)$$

で端子条件が与えられる。これを  $\alpha, \beta, 0$  成分に変換すると

$$\left. \begin{aligned} j_\alpha = \frac{2}{3} j_a, \quad j_\beta = 0, \quad j_0 = \frac{1}{3} j_a \\ u_\alpha + u_0 = \left\{ p x_L - r_L + \frac{x_c}{p} \right\} \{ j_0 + j_\alpha \} \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

となる。中性点インピーダンスを  $p x_n + r_n$  とし、変圧器の関係式(3.72)式を用いて(3.74)式を低圧側の諸量に変換すると

$$v_{\beta} = \frac{1}{2n^2} \left\{ p(x_l + x_n) + (r_l + r_n) + \frac{x_c}{p} \right\} i_{\beta}, \quad i_{\alpha} = 0 \quad (3.75)$$

この結果を基礎方程式 (3.7), (3.8) 式に代入すると現象を記述する微分方程式は

$$p^2 \left\{ \sin \theta 2X_{\alpha}(p) \sin \theta + \cos \theta 2X_{\beta}(p) \cos \theta + 2X \right\} i_{\beta} + 2Rp i_{\beta} + X_c i_{\beta} = 0 \quad (3.76)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} 2X &= \frac{1}{n^2} (x_l + x_n) + 2X' \\ 2R &= \frac{1}{n^2} (r_l + r_n) + 2R' + 2r \\ X_c &= \frac{1}{n^2} x_c \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

ここで  $X', r'$  は低圧測回路の 1 相当りの誘導リアクタンスおよび抵抗である。(3.76) 式において  $X \rightarrow x, R \rightarrow r, X_c \rightarrow x_c$  と見なせば (3.62) 式と一致するから不安定域は (3.64) 式で与えられる。

### (b) 線間短絡故障

前と同様に系統は無負荷とし、直列蓄電器の負荷側において線間短絡事故が発生したものとする。故障相を  $b, c$  相とし、 $x_l, r_l, x_c$  と前と同様に定義すれば端子条件は

$$\left. \begin{aligned} j_a &= 0, \quad j_b + j_c = 0 \\ u_b - u_c &= 2 \left\{ px_l + r_l + \frac{x_c}{p} \right\} j_b \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

となるから、これを  $\alpha, \beta, 0$  成分に変換すると

$$\left. \begin{aligned} j_0 = j_{\alpha} &= 0, \quad j_{\beta} = \frac{2}{\sqrt{3}} j_b \\ \sqrt{3} u_{\alpha} &= \sqrt{3} \left\{ px_l + r_l + \frac{x_c}{p} \right\} j_{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

(3.74) 式を用い低圧測の諸量に変換すると

$$v_{\alpha} = \frac{1}{3n^2} \left\{ px_l + r_l + \frac{x_c}{p} \right\} i_{\alpha}, \quad i_{\beta} = 0 \quad (3.80)$$

この結果を (3.7), (3.8) 式に代入すると現象を解析する基礎となる微分

方程式は

$$P^2 \{ \cos\theta \cdot 2X_d(P) \cos\theta + \sin\theta \cdot 2X_q(P) \sin\theta + 2X \} i_\alpha + 2R p i_\alpha + X_c i_\alpha = 0 \quad (3.81)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} 2X &= \frac{2}{3} \frac{1}{n^2} X_d + 2X' \\ 2R &= \frac{2}{3} \frac{1}{n^2} r_d + 2r' + 2r \\ X_c &= \frac{2}{3} \frac{1}{n^2} X_c \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

となる。ここで  $X'$ ,  $r'$  は前述と同様のものである。  $\theta = t + \theta_0$  であるが、時間の原点を変え  $\theta = t' + \theta_0' + \frac{\pi}{2}$  とし  $i_\alpha \rightarrow i_\beta$  とみなすと (3.81) 式は (3.76) 式と一致するから、前と同様  $X \rightarrow X$ ,  $R \rightarrow r$ ,  $X_c \rightarrow X_c$  と見なすと (3.62) 式と一致する。

## (2) 送電線の耐圧試験回路に対する考察

直列蓄電器系統とは直接に関係はないが、不平衡容量負荷による自己励磁が問題となるものとして送電線の耐圧試験がある。試験の際に用いられる変圧器の結線は種々あるが、多く用いられているのは図 3.12 図、図 3.13 図の結線である。

以下、この二種の結線方式について自己励磁現象を検討する。図 3.12 図の回路において、送電線および変圧器 1 相当りのリアクタンスおよび抵抗をそれぞれ  $X_d$ ,  $X_t$  および  $r_d$ ,  $r_t$  とし、送電線の容量リアクタン

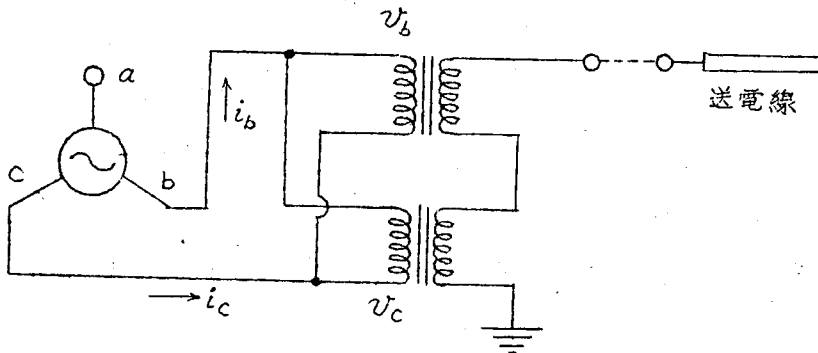
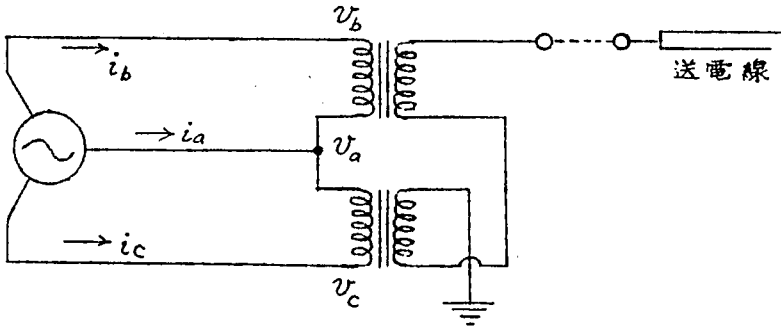


図 3.12 図





オ 3.13 図

スを  $x_c$  とすれば端子条件として

$$\left. \begin{aligned} i_a = 0, \quad i_b + i_c = 0 \\ 2n(v_b - v_c) = \left\{ p(x_l + 2x_t) + (r_l + 2r_t) + x_c \frac{1}{p} \right\} \frac{1}{2n} i_b \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

がえられる。ただし、 $n$  は変圧器の巻線比である。これを  $\alpha, \beta, 0$  成分に変換すると、

$$\left. \begin{aligned} i_0 = 0, \quad i_\alpha = 0 \\ \sqrt{3} v_\beta = \left\{ p(x_l + 2x_t) + (r_l + 2r_t) + x_c \frac{1}{p} \right\} \frac{1}{4n^2} \frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

であるから、(3.7), (3.8) 式よりこの場合の基礎方程式は

$$p^2 \{ \sin\theta \cdot 2X_d(p) \sin\theta + \cos\theta \cdot 2X_q(p) \cos\theta + 2X \} i_\beta + 2Rp i_\beta + X_c i_\beta = 0 \quad (3.85)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} 2X &= 2X' + \frac{1}{4n^2} (2x_t + x_l) \\ 2R &= 2r + 2r' + \frac{1}{4n^2} (2r_t + r_l) \\ X_c &= \frac{1}{4n^2} x_c \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

前と同様  $x', r'$  は低圧側回路 1 相当りの誘導リアクタンスおよび抵抗である。(3.86) 式において  $X \rightarrow x, R \rightarrow r_c$  と変なせばこれは (3.65) 式と一致する。また、オ 3.13 図の回路においては、前と同様  $x_l, x_t, r_l, r_t$  を定義すれば

$$i_a + i_b + i_c = 0, \quad i_b = i_c \quad \Bigg\}$$

$$n(v_b + v_c - 2v_a) = \left\{ p(x_t + 2x_l) + (r_t + 2r_l) + x_c \frac{1}{p} \right\} \frac{1}{n} i_b \quad (3.87)$$

なる関係がある。これを  $\alpha, \beta, 0$  成分に変換すると

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= 0, \quad i_\beta = 0 \\ -3v_\alpha &= - \left\{ p(x_t + 2x_l) + (r_t + 2r_l) + x_c \frac{1}{p} \right\} \frac{1}{2n^2} i_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.88)$$

となるから、(3.7), (3.8) 式よりこのときの基礎式は

$$p^2 \{ \cos\theta \cdot 2X_d(p) \cos\theta + \sin\theta \cdot 2X_B(p) \sin\theta + 2X \} i_\alpha + 2R p i_\alpha + X_c i_\alpha = 0 \quad (3.89)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} 2X &= 2X' + \frac{1}{3n^2} (2x_t + x_l) \\ 2R &= 2r + 2r' + \frac{1}{3n^2} (2r_t + r_l) \\ X_c &= \frac{1}{3n^2} x_c \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

(3.81) 式のと看と同様に考えると (3.62) 式と一致するから、このときの不安定域は (3.64) 式を与えられることになる。故にかような回路の自己励磁については第 3 節で述べた結論をそのまま用いることができる。すなわち、基本波の自己励磁については (界磁回路を開じたとき) 低圧側の  $r', x'$  を発電機常数にふくませると、第 3.12 図の回路では (3.69) 式より

$$\begin{aligned} x_B + \frac{1}{8n^2} (2x_t + x_l) + \sqrt{\left(x_d' + \frac{1}{8n^2} 2x_t + x_l\right) \left(x_B + \frac{1}{8n^2} 2x_t + x_l\right)} < \frac{1}{4n^2} x_{lc} \\ < x_d' + \frac{1}{8n^2} (2x_t + x_l) + \sqrt{\left(x_d' + \frac{1}{8n^2} 2x_t + x_l\right) \left(x_B + \frac{1}{8n^2} 2x_t + x_l\right)} \end{aligned} \quad (3.91)$$

のとき自己励磁が発生することがあり、

$$r + \frac{1}{8n^2} 2r_t + r_l > \frac{1}{4} (x_d - x_B) \quad (3.92)$$

なれば全く発生しない。

また、第 3.13 図の回路では

$$x_B + \frac{1}{6n^2} (2x_t + x_l) + \sqrt{\left(x_d' + \frac{1}{6n^2} 2x_t + x_l\right) \left(x_B + \frac{1}{6n^2} 2x_t + x_l\right)} < \frac{1}{3n^2} x_{lc}$$

$$\left\langle x_d + \frac{1}{6n^2} (2x_t + x_l) + \sqrt{\left(x_d' + \frac{1}{6n^2} (2x_t + x_l)\right) \left(x_g + \frac{1}{6n^2} (2x_t + x_l)\right)} \right\rangle \quad (3.93)$$

のとき自己励磁が発生することがあり、

$$r + \frac{1}{6n^2} (2r_t + r_l) > \frac{1}{4} (x_d - x_g) \quad (3.94)$$

となれば全く発生しない。

以上のことより、同じ送電線の耐圧試験を行うときは、一般に発電機のインダクタンス分は他の変圧器等のインダクタンス分にくらべて大であるから、図3.12の方が図3.13図より自己励磁を発生しやすく、また、抵抗分によるその抑制効果は図3.13図の方がより大であるといえることができる。

## 結 論 , 謝 辞

- 以上の研究結果を要約すれば次のようである。オ1部においては
- (1) 線型回路網の短絡現象ならびに遮断現象の解析に対する重畳の理の適用を回路網の基準微分方程式より出発し、演算子法を用いて行った。
  - (2) 線型回路網において正弦波駆動力の位相と応答の最大値との関係について考察し、系のインディシャル応答が単調なときは駆動力の位相が零値のとき最大値の発生することを明らかにした。また、一般に応答の最大値とそれを与える位相を関式的に求める方法を与えた。
  - (3) 直列蓄電器補償系統において三相短絡時に蓄電器にかかる過電圧を解析し、過電圧倍数をアナログ・コンピュータで上記の方法を適用して、系統の常数をパラメータにして求めた。
  - (4) 直列蓄電器補償系統において投入時の過電圧を蓄電器が三相同時に投入されるものとした解析結果をしめし、その場合の過電圧倍数をアナログ・コンピュータで上記の方法を適用し、系統の常数をパラメータにして求めた。
  - (5) 蓄電器の投入が非同時的に行われる場合について重畳の理を適用して解析し  $p$ -関数表示の計算式を手えると共に簡単な系統についても関数表示の計算式を与えた(附録2)。
  - (6) 計算式より系統の零相インピーダンスが非常に大きいときには最後の蓄電器が投入されるとともに端子電圧に直流成分が発生し、中性点の浮動することを明らかにした。この場合、端子電圧の零相成分は最後の蓄電器が投入されて後は直流成分のみよりなり、この値は端子電圧に発生する直流成分に等しいことをしめした(附録1)。
  - (7) 数値計算例ならびにアナログ・コンピュータによって非同時投入とすると、同時投入としたときより約25%程度高い過電圧の発生することを明らかにした。

オ2部においては

- (8) 非線型自動制御系の解析に用いられる等価伝達関数の考えを適用して、対称なる非線型特性を含む高階の微分方程式であらわされる系の基本波共振現象について解析し、非線型特性が暴および折線であらわされる場合につき共振現象発生域を求めた(附録3)。
- (9) 同様に等価伝達関数の考えを適用して、上述の系に発生する分数調波振動の解析法を述べた。すなわち、分数調波に対する非線型要素の等価伝達関数軌跡よりその発生域を、非線型要素の変分に対する等価伝達関数軌跡よりその安定度を線型要素の伝達関数軌跡の関連において求められることなどを明らかにした。
- (10) 非線型要素が暴で表わされる場合について上述の等価伝達関数、変分に対する等価伝達関数の一般式を導き、 $\frac{1}{3}$ 調波振動に対して、その等価伝達関数軌跡をもとめ発生域を明らかにした。
- (11) 系の線型要素の特性について検討し、この解析法の適用について述べた。
- (12) 可飽和リアクトルを含む電気回路に対する本解析法の適用方法について述べ、非線型特性が変圧器の励磁特性で与えられるとして上記の方法を用いて  $\frac{1}{3}$  調波振動発生域を求めた。
- (13) 直列蓄電器補償系統において変圧器が無負荷のときの  $\frac{1}{3}$  調波振動の発生域を本解析法を適用して計算し、また、アナログ・コンピュータで演算し、系統常数をパラメータとして求めた。
- (14) 同様に変圧器が重負荷のときについても本解析法ならびにアナログ・コンピュータによる演算で系統常数をパラメータとして  $\frac{1}{3}$  調波振動の発生域を求めた。

オ3部においては

- (15) 発電機が単相容量負荷をもつ基本的な回路の場合の自己励磁現象は変係数の常微分方程式を解くことになることをしめし、その解析を上述の自動制御系において用いられる等価伝達関数の考えを用いて行い、界磁回路が開かれている場合、界磁回路が閉ぢられている場合につい

- て、基本波ならびに高調波の自己励磁現象の発生する領域を求めた。
- (16) 上述の場合、外部にインダクタンスのある場合についての自励現象発生領域を検討するとともに、平衡容量負荷の場合の自励現象に対する領域と比較検討し、実験的考察を行なった。
- (17) 直列蓄電器補償系統における不平衡故障時ならびに送電線の耐圧試験時の場合も上述の基本的な回路に帰することしめし、同様に自励現象の発生域が求められることを明らかにした。

終りに臨み、本研究に対し終始御懇篤なる御指導を賜った京都大学 林重憲教授に厚く御礼を申し上げるとともに種々貴重なる御教示をいただいた 京都大学 近藤文治教授をはじめ電気工学教室、電子工学教室の方々、種々研究に対し資料その他で援助せられた矢積貞雄氏をはじめ関西電力の方々、関章良氏をはじめ日新電機の方々ならびに、アナログコンピュータの演算などに協力された長町恒資氏はじめ特別研究学生の方々に厚く御礼申し上げます。

## 附録 1. 非同時投入時における零相成分 第6節(3), (1.87)式の証明

蓄電器投入前には3相平衡電流が流れていたものとし、それを複素量  
でしめし

$$i_{a0}^{\circ} = \dot{I} \varepsilon^{j\omega t}, \quad i_{b0}^{\circ} = a \dot{I} \varepsilon^{j\omega t}, \quad i_{c0}^{\circ} = a^2 \dot{I} \varepsilon^{j\omega t} \quad (1.1)$$

ただし

$$\dot{I} = I \varepsilon^{j\theta}, \quad a = \varepsilon^{j\frac{2\pi}{3}} \text{ または } \varepsilon^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad (1.2)$$

とすれば、第6節(1.80)式より(1.86)式の関係を用いると  $V_{00}(p)$  の  $t$ -  
関数を  $v_{00}$  は

$$v_{00} = \frac{1}{3C} \dot{I} \left[ \frac{1}{j\omega} (\varepsilon^{j\omega t} - 1) - 2 \left\{ \frac{1}{j\omega} A(0) - \frac{1}{j\omega} A(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} - \sum_n \frac{A_n}{p_n} \varepsilon^{p_n t} \right\} \right] \quad (1.3)$$

$$A(p) = \frac{-\frac{1}{3} Y_1(p)}{C p + \frac{2}{3} Y_1(p)} \equiv \frac{N_1(p)}{M_1(p)} \quad (1.4)$$

$$A(0) = \{A(p)\}_{p=0}, \quad A(j\omega) = \{A(p)\}_{p=j\omega}, \quad A_n = \frac{N_1(p_n)}{(p_n - j\omega) \frac{dM_1(p_n)}{dp}} \quad (1.5)$$

となる。ただし、 $p_n$  は  $M_1(p) = 0$  の根で相異なるものと仮定している。

時間の原点を  $t = t_1 + t_2$  にうつすと(1.3)式は

$$v_{00}' = \frac{1}{3C} \dot{I} \left[ \frac{1}{j\omega} (\varepsilon^{j\omega t_1 + t_2} \varepsilon^{j\omega t} - 1) - 2 \left\{ \frac{1}{j\omega} A(0) - \frac{1}{j\omega} A(j\omega) \varepsilon^{j\omega t_1 + t_2} \varepsilon^{j\omega t} - \sum_n \frac{A_n}{p_n} \varepsilon^{p_n t_1 + t_2} \varepsilon^{p_n t} \right\} \right] \quad (1.6)$$

また、第6節(1.83)式より擾乱電流  $I_{b0}'(p)$ ,  $I_{c0}'(p)$  の  $t$ -関数を  $i_{b0}'$ ,  
 $i_{c0}'$  とすれば

$$i_{b0}' = i_{c0}' = \dot{I} \left\{ A(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} + \sum_n A_n \varepsilon^{p_n t} \right\} \quad (1.7)$$

故に  $a$  相蓄電器が投入されて後の  $b$ ,  $c$  相線路電流  $I_{b0}(p)$ ,  $I_{c0}(p)$  の  
 $t$ -関数を  $i_{b0}$ ,  $i_{c0}$  とすれば第6節(1.60)式より

$$\left. \begin{aligned} i_{bo} &= aI \varepsilon^{j\omega t} - I \left\{ A(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} + \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t} \right\} \\ i_{co} &= a^2 I \varepsilon^{j\omega t} - I \left\{ A(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} + \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

時間の原点を  $t=t_1$  にうつすと

$$i_{bt_1}^o = aI \varepsilon^{j\omega t_1} \varepsilon^{j\omega t} - I \left\{ A(j\omega) \varepsilon^{j\omega t_1} \varepsilon^{j\omega t} + \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1} \varepsilon^{P_n t} \right\} \quad (1.9)$$

故に、オ6節(1.81)式より(1.86)式の関係を用いると  $V_{ot_1}(p)$  の  $t$ -関数、

$V_{ot_1}$  は

$$\begin{aligned} V_{ot_1} &= \frac{1}{3C} I \left[ \frac{1}{j\omega} (\varepsilon^{j\omega t} - 1) \{ a - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} - \sum_n \frac{A_n}{P_n} \varepsilon^{P_n t_1} (\varepsilon^{P_n t} - 1) \right. \\ &\quad \left. - \{ a - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} \left\{ \frac{1}{j\omega} B(0) - \frac{1}{j\omega} B(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} + \sum_m \frac{B_m}{\delta_m} \varepsilon^{\delta_m t} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1} \left\{ \frac{1}{P_n} B(0) - \frac{1}{P_n} B(P_n) \varepsilon^{P_n t} - \sum_m \frac{B'_m}{\delta_m} \varepsilon^{\delta_m t} \right\} \right] \quad (1.10) \end{aligned}$$

$$B(p) = \frac{-\frac{1}{3} Y_1(p)}{Cp + \frac{1}{3} Y_1(p)} \equiv \frac{N_2(p)}{M_2(p)} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} B(0) &= \{ B(p) \}_{p=0}, \quad B(j\omega) = \{ B(p) \}_{p=j\omega}, \quad B(P_n) = \{ B(p) \}_{p=P_n} \\ B_m &= \frac{N_2(\delta_m)}{(\delta_m - j\omega) \frac{dM_2(\delta_m)}{d\delta_m}} \quad , \quad B'_m = \frac{N_2(\delta_m)}{(\delta_m - P_n) \frac{dM_2(\delta_m)}{d\delta_m}} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

となる。 $\delta_m$  は  $M_2(p)=0$  の根で前と同様に相異なるものと仮定している。

時間の原点をさらに  $t_2$  だけうつすと(1.10)式

$$\begin{aligned} V_{ot_1}' &= \frac{1}{3C} I \left[ \frac{1}{j\omega} (\varepsilon^{j\omega t_2} \varepsilon^{j\omega t} - 1) \{ a - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} - \sum_n \frac{A_n}{P_n} \varepsilon^{P_n t_1} (\varepsilon^{P_n t_2} \varepsilon^{P_n t} - 1) \right. \\ &\quad \left. - \{ a - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} \left\{ \frac{1}{j\omega} B(0) - \frac{1}{j\omega} B(j\omega) \varepsilon^{j\omega t_2} \varepsilon^{j\omega t} + \sum_m \frac{B_m}{\delta_m} \varepsilon^{\delta_m t_2} \varepsilon^{\delta_m t} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1} \left\{ \frac{1}{P_n} B(0) - \frac{1}{P_n} B(P_n) \varepsilon^{P_n t_2} \varepsilon^{P_n t} - \sum_m \frac{B'_m}{\delta_m} \varepsilon^{\delta_m t_2} \varepsilon^{\delta_m t} \right\} \right] \quad (1.13) \end{aligned}$$

また、C相の擾乱電流はオ6節(1.84)式より  $I_{ct_1}'(p)$  の  $t$ -関数を  $i_{ct_1}'$

とすれば

$$i_{ct_1}' = I \left[ \{ a - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} \{ B(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} + \sum_n B_m \varepsilon^{\delta_m t} \} \right]$$



$$-\sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1} \left\{ B(P_n) \varepsilon^{P_n t} + \sum_m B'_m \varepsilon^{\delta_m t} \right\} \quad (1.14)$$

故に,  $a, b$  相の蓄電器が投入された後の  $C$  相の線路電流  $I_{ct_1}(P)$  の  $t$ -関数  $i_{ct_1}$  は第6節(1.16)式より

$$\begin{aligned} i_{ct_1} = & \dot{I} \left[ \{ a^2 - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} \varepsilon^{j\omega t} - \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1} \varepsilon^{P_n t} \right. \\ & - \{ a - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} \left\{ B(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} + \sum_m B_m \varepsilon^{\delta_m t} \right\} \\ & \left. + \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1} \left\{ B(P_n) \varepsilon^{P_n t} + \sum_m B'_m \varepsilon^{\delta_m t} \right\} \right] \quad (1.15) \end{aligned}$$

時間原点をさらに  $t_2$  だけうつすと

$$\begin{aligned} i_{ct_2}^0 = & \dot{I} \left[ \{ a^2 - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1 + t_2} \varepsilon^{j\omega t} - \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1 + t_2} \varepsilon^{P_n t} \right. \\ & - \{ a - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} \left\{ B(j\omega) \varepsilon^{j\omega t_2} \varepsilon^{j\omega t} + \sum_m B_m \varepsilon^{\delta_m t_2} \varepsilon^{\delta_m t} \right\} \\ & \left. + \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1} \left\{ B(P_n) \varepsilon^{P_n t_2} \varepsilon^{P_n t} + \sum_m B'_m \varepsilon^{\delta_m t_2} \varepsilon^{\delta_m t} \right\} \right] \quad (1.16) \end{aligned}$$

故に第6節(1.82)式より

$$\begin{aligned} v_{ct_2} = & \frac{1}{3C} \dot{I} \left[ \{ a^2 - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1 + t_2} \cdot \frac{1}{j\omega} (\varepsilon^{j\omega t} - 1) \right. \\ & - \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1 + t_2} \cdot \frac{1}{P_n} (\varepsilon^{P_n t} - 1) \\ & - \{ a - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} \left\{ B(j\omega) \varepsilon^{j\omega t_2} \frac{1}{j\omega} (\varepsilon^{j\omega t} - 1) + \sum_m B_m \varepsilon^{\delta_m t_2} \frac{1}{\delta_m} (\varepsilon^{\delta_m t} - 1) \right\} \\ & \left. + \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1} \left\{ B(P_n) \varepsilon^{P_n t_2} \frac{1}{P_n} (\varepsilon^{P_n t} - 1) + \sum_m B'_m \varepsilon^{\delta_m t_2} \frac{1}{\delta_m} (\varepsilon^{\delta_m t} - 1) \right\} \right] \quad (1.17) \end{aligned}$$

3相の蓄電器が全部投入された後の零相成分は

$$1 + a + a^2 = 0, \quad A(0) = -\frac{1}{2}, \quad B(0) = 1$$

に留意して, (1.6), (1.13), (1.17)式より

$$\begin{aligned} v'_{o_0} + v'_{o_1} + v_{o_2} = & \frac{1}{3C} \dot{I} \left[ \frac{1}{j\omega} \{ A(j\omega) - a^2 \} \varepsilon^{j\omega t_1 + t_2} + \sum_n \frac{A_n}{P_n} \varepsilon^{P_n t_1 + t_2} \right. \\ & + \{ a - A(j\omega) \} \varepsilon^{j\omega t_1} \left\{ \frac{1}{j\omega} B(j\omega) \varepsilon^{j\omega t_2} + \sum_m \frac{B_m}{\delta_m} \varepsilon^{\delta_m t_2} \right\} \\ & \left. - \sum_n A_n \varepsilon^{P_n t_1} \left\{ \frac{B(P_n)}{P_n} \varepsilon^{P_n t_2} + \sum_m \frac{B'_m}{\delta_m} \varepsilon^{\delta_m t_2} \right\} \right] \quad (1.18) \end{aligned}$$

となり時間的に変化しない直流成分だけとなり、(1.17)式からわかるようにこれは最後に投入されるときに発生する直流成分に他ならない。

## 附録 2. 非同時投入時における端子電圧の計算式

簡単な場合として、発電機が線路を通じて無限大母線につながれている系統を考え、線路は抵抗およびインダクタンスの直列回路と考える。すなわち、

$$Y_0(p) = 0, \quad Y_1(p) = 1/Lp + R \quad (2.1)$$

とする。R, L はそれぞれ電源および送電線の抵抗分およびインダクタンス分とする。投入蓄電器の容量は3相等しく C であるとし、投入前には平衡3相電流が流れていたとものとする。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} I_{a0}^{\circ}(p) &= \mathcal{F}_2^{-1} I \sin(\omega t + \theta) \\ I_{b0}^{\circ}(p) &= \mathcal{F}_2^{-1} I \sin(\omega t + \theta \pm \frac{2\pi}{3}) \\ I_{c0}^{\circ}(p) &= \mathcal{F}_2^{-1} I \sin(\omega t + \theta \mp \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

とする（複号は同順）。

端子電圧に対しては、投入前の電流がそのまま蓄電器に流れたものとしたときの定常最大値  $I/\omega C$  に対する比でもってしめし、電流に対しては投入前の電流の最大値に対する比でしめすことにする。いま、

$$\tau = \omega t, \quad m = \frac{R}{\omega L}, \quad k = \frac{1}{\omega^2 LC} \quad (2.3)$$

とする。まず、a相の蓄電器が投入されるときを考える。第6節(1.58)式はこの場合、

$$V_{a0}(p) = \frac{3(pL+R)}{p3C(pL+R)+2} I_{a0}^{\circ}(p) \quad (2.4)$$

となるから

$$V_{a0}(\tau) = \rho_a \sin(\tau + \varphi_a) + \rho_{a1} e^{-\alpha \tau} \sin(\omega_1 \tau + \varphi_{a1}) \quad (2.5)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \rho_a \cos \varphi_a &= \frac{1}{D_1^2} \left( \frac{2}{3} m k \cos \theta + \mu_1^2 \sin \theta \right) \\ \rho_a \sin \varphi_a &= \frac{1}{D_1^2} \left( \frac{2}{3} m k \sin \theta - \mu_1^2 \cos \theta \right) \\ \rho_{a1} \cos \varphi_{a1} &= \frac{1}{\omega_1 D_1^2} \left\{ \frac{m}{2} \left( \mu_1^2 - \frac{4}{3} k \right) \cos \theta - \frac{2}{3} k \left( \mu_1^2 - \frac{m^2}{2} \right) \sin \theta \right\} \\ \rho_{a1} \sin \varphi_{a1} &= \frac{1}{D_1^2} \left( \mu_1^2 \cos \theta - \frac{2}{3} m k \sin \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{m}{2}, \quad \omega_1^2 = \frac{2}{3} k - \frac{m^2}{4} \\ \mu_1^2 &= 1 - \frac{2}{3} k + m^2, \quad D_1^2 = \left( 1 - \frac{2}{3} k \right)^2 + m^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

また、線路電流の擾乱電流はオ6節(1.59)式より

$$I_{b0}'(p) = I_{c0}'(p) \frac{-1}{p3C(\rho L + R) + 2} I_{a0}^0(p) \quad (2.8)$$

であるから

$$i_{b0}'(\tau) = i_{c0}'(\tau) = - \left\{ \eta_b' \sin(\tau + \psi_b') + \eta_{b1}' E^{-\alpha \tau} \sin(\omega_1 \tau + \psi_{b1}') \right\} \quad (2.9)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \eta_b' \cos \psi_b' &= \frac{1}{3} \frac{k}{D_1^2} \left\{ \left( \frac{2}{3} k - 1 \right) \cos \theta + m \sin \theta \right\} \\ \eta_b' \sin \psi_b' &= \frac{1}{3} \frac{k}{D_1^2} \left\{ \left( \frac{2}{3} k - 1 \right) \sin \theta - m \cos \theta \right\} \\ \eta_{b1}' \cos \psi_{b1}' &= \frac{1}{3} \frac{k}{\omega_1 D_1^2} \left\{ \left( \mu_1^2 - \frac{m^2}{2} \right) \cos \theta - \frac{m}{2} \left( \frac{2}{3} k + 1 \right) \sin \theta \right\} \\ \eta_{b1}' \sin \psi_{b1}' &= \frac{1}{3} \frac{k}{D_1^2} \left\{ m \cos \theta - \left( \frac{2}{3} k - 1 \right) \sin \theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

故に、オ6節(1.60)式より

$$\left. \begin{aligned} i_{b0}(\tau) &= \sin\left(\tau + \theta \pm \frac{2\pi}{3}\right) + \eta_b' \sin(\tau + \psi_b') + \eta_{b1}' E^{-\alpha \tau} \sin(\omega_1 \tau + \psi_{b1}') \\ i_{b0}(\tau) &= \sin\left(\tau + \theta \mp \frac{2\pi}{3}\right) + \eta_b' \sin(\tau + \psi_b') + \eta_{b1}' E^{-\alpha \tau} \sin(\omega_1 \tau + \psi_{b1}') \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

つぎに  $t_1$  秒後に  $b$  相の蓄電器が投入される場合を考える。  $t = t_1$  すなわち、  $\tau = \tau_1 = \omega t_1$  に時間の原点をうつしたときの上式の  $i_{b0}(\tau)$ ,  $i_{c0}(\tau)$  なる電流は

$$\left. \begin{aligned} i_{bt_1}^0(\tau) &= \mathcal{Z}_{bt_1} \sin(\tau + \psi_{bt_1}) + \mathcal{Z}_{bt_1} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_1\tau + \psi_{bt_1}) \\ i_{ct_1}^0(\tau) &= \mathcal{Z}_{ct_1} \sin(\tau + \psi_{ct_1}) + \mathcal{Z}_{ct_1} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_1\tau + \psi_{ct_1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}_{bt_1} \cos \psi_{bt_1} &= \cos(\tau_1 + \theta \pm \frac{2\pi}{3}) + \mathcal{Z}'_b \cos(\tau_1 + \psi'_b) \\ \mathcal{Z}_{bt_1} \sin \psi_{bt_1} &= \sin(\tau_1 + \theta \pm \frac{2\pi}{3}) + \mathcal{Z}'_b \sin(\tau_1 + \psi'_b) \\ \mathcal{Z}_{ct_1} \cos \psi_{ct_1} &= \cos(\tau_1 + \theta \mp \frac{2\pi}{3}) + \mathcal{Z}'_b \cos(\tau_1 + \psi'_b) \\ \mathcal{Z}_{ct_1} \sin \psi_{ct_1} &= \sin(\tau_1 + \theta \mp \frac{2\pi}{3}) + \mathcal{Z}'_b \sin(\tau_1 + \psi'_b) \\ \mathcal{Z}_{bt_1} &= \mathcal{Z}_{ct_1} = \mathcal{Z}'_b \bar{E}^{-\alpha\tau_1}, \quad \psi_{bt_1} = \psi_{ct_1} = \omega_1\tau_1 + \psi'_{b1} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

となる。

故に、第6節(1.64)式より

$$V_{at_1}(p) = \frac{pL + R}{\{pC(pL + R) + 1\} \{p3C(pL + R) + 1\}} I_{bt_1}^0(p) \quad (2.14)$$

であるから

$$\begin{aligned} v_{at_1}(\tau) &= \rho_{at_1} \sin(\tau + \varphi_{at_1}) + \rho_{aot_1} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_0\tau + \varphi_{aot_1}) \\ &\quad + \rho_{ait_1} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_1\tau + \varphi_{ait_1}) + \rho_{a2t_1} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_2\tau + \varphi_{a2t_1}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \rho_{at_1} \cos \varphi_{at_1} &= \frac{1}{2} \mathcal{Z}_{bt_1} \left\{ m\ell \left( \frac{1}{3} \frac{1}{D_2^2} - \frac{1}{D_0^2} \right) \cos \psi_{bt_1} + \left( \frac{\mu_0^2}{D_2^2} - \frac{\mu_0^2}{D_0^2} \right) \sin \psi_{bt_1} \right\} \\ \rho_{at_1} \sin \varphi_{at_1} &= \frac{1}{2} \mathcal{Z}_{bt_1} \left\{ m\ell \left( \frac{1}{3} \frac{1}{D_2^2} - \frac{1}{D_0^2} \right) \sin \psi_{bt_1} - \left( \frac{\mu_0^2}{D_2^2} - \frac{\mu_0^2}{D_0^2} \right) \cos \psi_{bt_1} \right\} \\ \rho_{aot_1} \cos \varphi_{aot_1} &= \frac{1}{2} \left[ \mathcal{Z}_{bt_1} \frac{1}{\omega_0 D_0^2} \left\{ \ell (\mu_0^2 - \frac{m^2}{2}) \sin \psi_{bt_1} - \frac{m}{2} (\mu_0^2 - 2\ell) \cos \psi_{bt_1} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\ell} \mathcal{Z}_{bt_1} \left( \frac{m}{2} \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos \psi_{bt_1} - \omega_1 \sin \psi_{bt_1} \right) \right] \\ \rho_{aot_1} \sin \varphi_{aot_1} &= \frac{1}{2} \left[ \mathcal{Z}_{bt_1} \frac{1}{D_0^2} (m\ell \sin \psi_{bt_1} - \mu_0^2 \cos \psi_{bt_1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\ell} \mathcal{Z}_{bt_1} (\omega_1 \cos \psi_{bt_1} + \frac{m}{2} \sin \psi_{bt_1}) \right] \\ \rho_{ait_1} \cos \varphi_{ait_1} &= \frac{3}{\ell} \mathcal{Z}_{bt_1} (\omega_1 \sin \psi_{bt_1} - \frac{m}{2} \cos \psi_{bt_1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{a1t_1} \sin \varphi_{a1t_1} &= \frac{3}{k} \eta_{bt_1} (-\omega_1 \cos \psi_{bt_1} - \frac{m}{2} \sin \psi_{bt_1}) \\
 \rho_{a2t_1} \cos \varphi_{a2t_1} &= \frac{1}{2} \left[ \eta_{bt_1} \frac{1}{\omega_2 D_2^2} \left\{ \frac{m}{2} (\mu_2^2 - \frac{2}{3} k) \cos \psi_{bt_1} - \frac{k}{3} (\mu_2^2 - \frac{m^2}{2}) \sin \psi_{bt_1} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{k} \eta_{bt_1} \left( \frac{m}{2} \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi_{bt_1} - \omega_2 \sin \psi_{bt_1} \right) \right] \\
 \rho_{a2t_1} \sin \varphi_{a2t_1} &= \frac{1}{2} \left[ \eta_{bt_1} \frac{1}{D_2^2} (\mu_2^2 \cos \psi_{bt_1} - \frac{1}{3} m k \sin \psi_{bt_1}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{k} \eta_{bt_1} (\omega_1 \cos \psi_{bt_1} + \frac{m}{2} \sin \psi_{bt_1}) \right] \\
 \omega_0^2 &= k - \frac{m^2}{4}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{3} - \frac{m^2}{4} \\
 \mu_0^2 &= 1 - k + m^2, \quad \mu_2^2 = 1 - \frac{k}{3} + m^2 \\
 D_0^2 &= (1 - k)^2 + m^2, \quad D_2^2 = \left(1 - \frac{k}{3}\right)^2 + m^2
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

また、同様にオ6節(1.64)式より

$$V_{bt_1}(p) \frac{(pL+R)\{p3C(pL+R)+2\}}{\{pC(pL+R)+1\}\{p3C(pL+R)+1\}} I_{bt_1}^0(p) \tag{2.18}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 v_{bt_1}(\tau) &= \rho_{bt_1} \sin(\tau + \varphi_{bt_1}) + \rho_{bot_1} E^{-\alpha\tau} \sin(\omega_0\tau + \varphi_{bot_1}) \\
 &\quad + \rho_{b2t_1} E^{-\alpha\tau} \sin(\omega_2\tau + \varphi_{b2t_1})
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 \rho_{bt_1} \cos \varphi_{bt_1} &= \frac{1}{2} \eta_{bt_1} \left\{ m k \left( \frac{1}{D_0^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{D_2^2} \right) \cos \psi_{bt_1} + \left( \frac{\mu_0^2}{D_0^2} + \frac{\mu_2^2}{D_2^2} \right) \sin \psi_{bt_1} \right\} \\
 \rho_{bt_1} \sin \varphi_{bt_1} &= \frac{1}{2} \eta_{bt_1} \left\{ m k \left( \frac{1}{D_0^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{D_2^2} \right) \sin \psi_{bt_1} - \left( \frac{\mu_0^2}{D_0^2} + \frac{\mu_2^2}{D_2^2} \right) \cos \psi_{bt_1} \right\} \\
 \rho_{bot_1} &= \rho_{aot_1}, \quad \varphi_{bot_1} = \varphi_{aot_1} + \pi \\
 \rho_{b2t_1} &= \rho_{a2t_1}, \quad \varphi_{b2t_1} = \varphi_{a2t_1}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

また、線路電流の擾乱成分はオ6節(1.65)式より

$$I_{ct_1}'(p) = \frac{-1}{p3C(pL+R)+1} I_{bt_1}^0(p) \tag{2.21}$$

であるから

$$i'_{ct_1}(\tau) = -\left\{ \eta'_{ct_1} \sin(\tau + \psi'_{ct_1}) + \eta'_{ct_1} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_1\tau + \psi'_{ct_1}) + \eta'_{c2t_1} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_2\tau + \psi'_{c2t_1}) \right\} \quad (2.22)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \eta'_{ct_1} \cos \psi'_{ct_1} &= \frac{k}{3} \frac{1}{D_2^2} \eta_{bt_1} \left\{ \left( \frac{k}{3} - 1 \right) \cos \psi_{bt_1} + m \sin \psi_{bt_1} \right\} \\ \eta'_{ct_1} \sin \psi'_{ct_1} &= \frac{k}{3} \frac{1}{D_2^2} \eta_{bt_1} \left\{ \left( \frac{k}{3} - 1 \right) \sin \psi_{bt_1} - m \cos \psi_{bt_1} \right\} \\ \eta'_{c2t_1} &= \eta_{bt_1}, \quad \psi'_{c2t_1} = \psi_{bt_1} + \pi \\ \eta'_{c2t_1} \cos \psi'_{c2t_1} &= \frac{k}{3} \frac{1}{\omega_2 D_2^2} \eta_{bt_1} \left\{ \left( \mu_2^2 - \frac{m^2}{2} \right) \cos \psi_{bt_1} - \frac{m}{2} \left( 1 + \frac{k}{3} \right) \sin \psi_{bt_1} \right\} \\ &\quad + \frac{\omega_1}{\omega_2} \eta_{bt_1} \cos \psi_{bt_1} \\ \eta'_{c2t_1} \sin \psi'_{c2t_1} &= \frac{k}{3} \frac{1}{D_2^2} \eta_{bt_1} \left\{ m \cos \psi_{bt_1} - \left( \frac{k}{3} - 1 \right) \sin \psi_{bt_1} \right\} + \eta_{bt_1} \sin \psi_{bt_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

故に線路電流は才6節(1.66)式より

$$\begin{aligned} i_{ct_1}(\tau) &= i_{ct_1}^0(\tau) - i'_{ct_1}(\tau) \\ &= \eta_{ct_1} \sin(\tau + \psi_{ct_1}) + \eta'_{ct_1} \sin(\tau + \psi'_{ct_1}) + \eta'_{c2t_1} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_2\tau + \psi'_{c2t_1}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

最後にC相の蓄電器が投入される場合を考える。  $i_{ct_1}(\tau)$  を  $t = t_1 + t_2$  すなわち、  $\tau = \omega(\tau_1 + \tau_2)$  に時間の原点をうつすと

$$i_{ct_2}^0(\tau) = \eta_{ct_2} \sin(\tau + \psi_{ct_2}) + \eta_{c2t_2} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_2\tau + \psi_{c2t_2}) \quad (2.25)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \eta_{ct_2} \cos \psi_{ct_2} &= \eta_{ct_1} \cos(\tau_2 + \psi_{ct_1}) + \eta'_{ct_1} \cos(\tau_2 + \psi'_{ct_1}) \\ \eta_{ct_2} \sin \psi_{ct_2} &= \eta_{ct_1} \sin(\tau_2 + \psi_{ct_1}) + \eta'_{ct_1} \sin(\tau_2 + \psi'_{ct_1}) \\ \eta_{c2t_2} &= \eta'_{c2t_1} \bar{E}^{-\alpha\tau_2} \quad \psi_{c2t_2} = \psi'_{c2t_1} + \omega_2\tau_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

才6節(1.68)式は

$$V_{at_2}(p) = V_{bt_2}(p) = \left\{ \frac{1}{p^3 C} - \frac{1}{3} \frac{pL + R}{pC(pL + R) + 1} \right\} I_{ct_2}^0(p) \quad (2.27)$$

となるから

$$\begin{aligned} v_{at_2}(\tau) = v_{bt_2}(\tau) &= \rho_{at_2} \sin(\tau + \varphi_{at_2}) + \rho_{aot_2} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_0\tau + \varphi_{aot_2}) \\ &\quad + \rho_{a2t_2} \bar{E}^{-\alpha\tau} \sin(\omega_2\tau + \varphi_{a2t_2}) + \delta a \end{aligned} \quad (2.28)$$

ただし

$$\begin{aligned}
 P_{at_2} \cos \varphi_{at_2} &= \frac{1}{3} \eta_{ct_2} \left\{ \left(1 - \frac{\mu_0^2}{D_0^2}\right) \sin \psi_{ct_2} - \frac{m k}{D_0^2} \cos \psi_{ct_2} \right\} \\
 P_{at_2} \sin \varphi_{at_2} &= \frac{1}{3} \eta_{ct_2} \left\{ -\frac{m k}{D_0^2} \sin \psi_{ct_2} - \left(1 - \frac{\mu_0^2}{D_0^2}\right) \cos \psi_{ct_2} \right\} \\
 P_{aot_2} \cos \varphi_{aot_2} &= \frac{1}{3} \left[ \eta_{ct_2} \frac{1}{\omega_0 D_0^2} \left\{ k (\mu_0^2 - \frac{m^2}{2}) \sin \psi_{ct_2} - \frac{m}{2} (\mu_0^2 - 2k) \cos \psi_{ct_2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{k} \eta_{c_2 t_2} \left( \frac{m}{2} \frac{\omega_2}{\omega_0} \cos \psi_{c_2 t_2} - \omega_0 \sin \psi_{c_2 t_2} \right) \right] \\
 P_{aot_2} \sin \varphi_{aot_2} &= \frac{1}{3} \left[ \eta_{ct_2} \frac{1}{D_0^2} (m k \sin \psi_{ct_2} - \mu_0^2 \cos \psi_{ct_2}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{k} \eta_{c_2 t_2} (\omega_2 \cos \psi_{c_2 t_2} + \frac{m}{2} \sin \psi_{c_2 t_2}) \right] \\
 P_{a_2 t_2} \cos \varphi_{a_2 t_2} &= \frac{3}{2} \frac{1}{k} \eta_{c_2 t_2} (\omega_2 \sin \psi_{c_2 t_2} - \frac{m}{2} \cos \psi_{c_2 t_2}) \\
 P_{a_2 t_2} \sin \varphi_{a_2 t_2} &= \frac{3}{2} \frac{1}{k} \eta_{c_2 t_2} (-\omega_2 \cos \psi_{c_2 t_2} - \frac{m}{2} \sin \psi_{c_2 t_2}) \\
 \delta_a &= \frac{1}{3} \left[ \eta_{ct_2} \cos \psi_{ct_2} + \frac{3}{k} \eta_{c_2 t_2} (\omega_2 \cos \psi_{c_2 t_2} + \frac{m}{2} \sin \psi_{c_2 t_2}) \right]
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

また、同様第6節(1.68)式は

$$V_{ct_2}(P) = \left\{ \frac{1}{p3C} + \frac{2}{3} \frac{pL+R}{pC(pL+R)+1} \right\} I_{ct_2}^0(P) \tag{2.30}$$

であるから

$$v_{ct_2}(\tau) = P_{ct_2} \sin(\tau + \varphi_{ct_2}) + P_{cot_2} e^{-\alpha \tau} \sin(\omega_0 \tau + \varphi_{cot_2}) + \delta_c \tag{2.31}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 P_{ct_2} \cos \varphi_{ct_2} &= \frac{1}{3} \eta_{ct_2} \left\{ \left(2 \frac{\mu_0^2}{D_0^2} + 1\right) \sin \psi_{ct_2} + 2 \frac{m k}{D_0^2} \cos \psi_{ct_2} \right\} \\
 P_{ct_2} \sin \varphi_{ct_2} &= \frac{1}{3} \eta_{ct_2} \left\{ 2 \frac{m k}{D_0^2} \sin \psi_{ct_2} - \left(2 \frac{\mu_0^2}{D_0^2} + 1\right) \cos \psi_{ct_2} \right\} \\
 P_{cot_2} &= -2 P_{aot_2} \quad \varphi_{cot_2} = \varphi_{aot_2} \\
 \delta_c &= \delta_a
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

故に、蓄電器にあらわれる端子電圧は

$$\begin{aligned}
 U_a &= U_{ao} + U_{at_1} + U_{at_2} \\
 U_b &= U_{bt_1} + U_{bt_2}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$v_c = v_{ct_2}$$

以上の各式において添字の  $0, t_1, t_2$  は時間の原点がそれぞれ  $t=0, t_1, t_1+t_2$  にあることをしめしている。

### 附録 3. 等価伝達関数法による基本波共振現象の解析

#### 1. 基本波共振現象の解析法

対象とする系は次の微分方程式で特性づけられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} x &= G_1(p) \{ e - G_2(p) y \} \\ y &= N(x) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

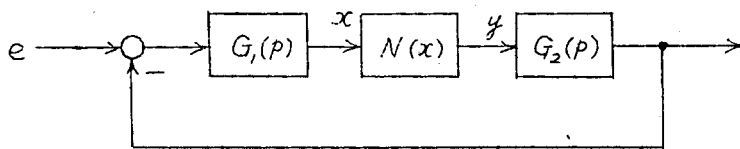


図 3.1

ただし、 $G_1(p), G_2(p)$  は  $p (= \frac{d}{dt})$  の有理関数で低域濾波特性をものものとし（そうでないときは第 2 部第 2 節 (4) 参照）、 $N(x)$  は非線型特性をしめすもので、 $x$  の一価の連続な奇関数と仮定し、系は外力  $e$  が階段状に変化したときは安定なるもので持続振動は発生しないものとする。かかる系に周期的外力を加えた場合に発生する振動のうち、外力と同じ周期の基本波の振動が優勢なる場合を解析する。すなわち、系への外力を

$$e = E \cos(t + \sigma) \quad (3.2)$$

としたとき、非線形要素への入力の基本波の振動のみが優勢であるから

$$x = a \cos(t + \varphi) \quad (3.3)$$

とおくことができる。



(a) 等価伝達関数

非線形要素への入力が(3.3)式のように変化するものとすれば、その出力をフーリエ級数に展開し、入力と同じ周波数成分、すなわち、基本波のみを考えると

$$\left. \begin{aligned} y &\cong \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos(t + \varphi - \theta_1), \\ \tan \theta_1 &= \frac{b_1}{a_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N \{ a \cos(t + \varphi) \} \cos(t + \varphi) dt \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N \{ a \cos(t + \varphi) \} \sin(t + \varphi) dt \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

となる。いま、

$$N = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{a} \varepsilon^{-j\theta_1} \quad (3.6)$$

で非線形要素の基本波の振動のみが優勢なときの等価伝達関数と定義すると上式に(3.5)式を代入すると

$$N = \frac{1}{a} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} N(a \cos t) \cos t dt \quad (3.7)$$

この場合等価伝達関数は振幅  $a$  の関数で実数量となる。

(b) 周期的平衡状態の決定

この場合基本波の振動のみが優勢であるから上述の等価伝達関数  $N$  を用いることにより、(3.1)式より

$$\dot{x} = G_1(j) \{ \dot{e} - G_2(j) N \cdot \dot{x} \} \quad (3.8)$$

となる ( $\cdot$  は複素量であることをしめす)。これより周期的平衡状態は次式で決定される。

$$\left. \begin{aligned} a^2 \{ (\xi_1 - N)^2 + \zeta_1^2 \} &= \frac{E^2}{r^2 + \omega^2} \\ \tan(\sigma - \varphi) &= \frac{(N - \xi_1)\omega + \zeta_1 r}{(N - \xi_1)r - \zeta_1 \omega} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

ただし

$$-\frac{1}{G_1(j)G_2(j)} = \xi_1 - j\eta_1 \quad (3.10)$$

$$G_2(j) = \gamma + jx \quad (3.11)$$

(C) 変分に対する等価伝達関数

上で求めた周期的平衡状態は必ずしも定常状態として実際に存在するとは限らない。ここでは安定条件の意味に用いる変分に対する等価伝達関数を定義しよう。

周期解は(3.3)式で表わされるとし、充分小さい外乱によつてひき起される周期解よりの変分  $\Delta x$  を考え、

$$\Delta x = \delta \cos nt \quad \delta \ll a \quad (3.12)$$

とする。このような変分の存在するときの非線形要素の出力は、 $N'(x) = \frac{dN(x)}{dx}$  とすれば

$$y + \Delta y \cong N(x) + N'(x) \Delta x \quad (3.13)$$

となるから、変分  $\Delta x$  に基因する出力成分は  $N'(x) \Delta x$  であるということができる。前と同様にして、これをフーリエ級数に展開し入力と同じ周波数成分のみ考えると

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &\cong \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nt - \theta_n) \\ \tan \theta_n &= \frac{b_n}{a_n} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N' \{ a \cos(t + \varphi) \} \delta \cos nt \cos nt dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N' \{ a \cos(t + \varphi) \} \delta \cos nt \sin nt dt \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

等価伝達関数のときと同様に

$$N_\delta = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\delta} e^{-j\theta_n} \quad (3.16)$$

で非線形要素の基本波の振動のみが優勢なときの変分に対する等価伝

逆関数と定義すると、上式に (3.15) 式を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} N_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) \{1 + \cos 2nt e^{j2n\varphi}\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) dt \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} n=1, 2, \dots \\ n \neq \text{integer} \end{array} \quad (3.17)$$

となる。すなわち、変分に対する等価伝達関数は変分の周波数が整数であるときは (3.17) 式の上の式で示すように複素量となり、そうでないときは実数量となる。

複素平面 ( $u-v$  平面) 上で考えると  $\varphi$  は変分の発生する位相をあらわすものであるから (3.17) 式の上の式より  $\varphi$  を消去すると

$$\left\{ u - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) dt \right\}^2 + v^2 = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) \cos 2nt dt \right\}^2 \quad (3.18)$$

$n=1, 2, 3, \dots$

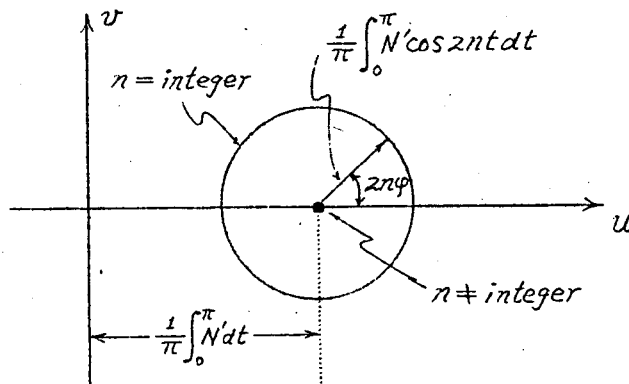
また、(3.17) 式の下式より

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) dt \quad n \neq \text{integer} \quad (3.19)$$

となる。すなわち、変分に対する等価伝達関数の複素平面上の軌跡は  $n$  が整数でないときは実数軸上の点となるが、 $n$  が整数であるときは

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) dt + j0 \text{ に中心をもち、半径が } \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) \cos 2nt dt \right|$$

なる円となる (\*3.2 図)。



\*3.2 図

(d) 周期的平衡状態の安定条件

(3.9) 式で求めた周期的平衡状態は必ずしも定常状態として実際に存在するものとは限らない。ここでは(c)で述べた変分に対する等価伝達関数を用いて、その安定条件を吟味し実在する定常状態を求めよう。

周期解  $x$  は (3.3) 式と表わされるとし、充分小さい外乱  $\Delta e$  によってひき起される定常的な周期解よりの変分を  $\Delta x$  とすれば  $x$  は (3.1) 式を満足するから

$$\Delta x = G_1(p) \{ \Delta e - G_2(p) N'(x) \Delta x \} \quad (3.20)$$

この関係は図3.3図のようなブロック線図でしめすことができる。

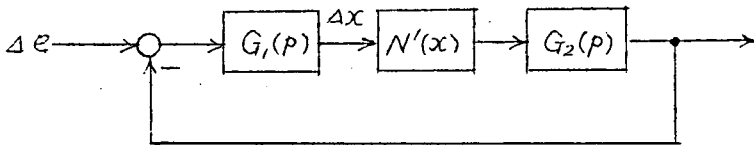


図3.3

ここで、充分小さい外乱  $\Delta e$  が取除かれた後  $\Delta x$  が時間の経過と共に零に収斂すれば  $x$  なる周期状態は漸近安定である。

$x$  および  $\Delta x$  が (3.3) 式および (3.12) 式であらわされるものとするば前述の変分に対する等価伝達関数を用いると安定か、不安定かを定める特性方程式は

$$1 + G_1(p) G_2(p) N'_0 = 0 \quad (3.21)$$

となる。 $G_1(p)$ ,  $G_2(p)$  が前述したような特性をもっているものとするば

$$\left\{ -1/G_1(p) G_2(p) \right\}_{p=j\omega_n} = \xi_n - j\zeta_n \quad (3.22)$$

$$n=1, 2, \dots$$

とすると、ナイキストの安定判別法を用いることにより次のようにいうことができる。 $N'_0$  は  $n$  が整数であるとき複素平面上で実軸上に中心をもつ円をあらわすが  $\xi_n - j\zeta_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) なる点が対応する円の内部に入れば系は角周波数  $\omega_n$  なる振動が発生して不安定となる。また  $N'_0$  は  $n$  が整数でないときは実軸上の点であるから、かかる自励振動は発生しない。

すなわち、不安定の条件は (3.18) 式を用いると

$$\left\{ \xi_n - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) dt \right\}^2 + \zeta_n^2 < \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) \cos 2nt dt \right\}^2 \quad (3.23)$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

となる。

$n=1$  に対する不安定条件、すなわち、主として外力と同じ周期の自励振動を併発して不安定となる条件は上式より

$$\left\{ \xi_1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) dt \right\}^2 + \zeta_1^2 - \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) \cos 2t dt \right\}^2 < 0 \quad (3.24)$$

となるが、周期的平衡状態の式 (3.9) より

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{E^2}{r^2 + x^2} \right) = 2a \left[ \left\{ \xi_1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) dt \right\}^2 + \zeta_1^2 - \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) \cos 2t dt \right\}^2 \right]$$

となるから、(3.24) 式の不安定条件は

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{E^2}{r^2 + x^2} \right) < 0 \quad \text{或は} \quad \frac{\partial E^2}{\partial a^2} < 0 \quad (3.25)$$

となる。これは系の微分方程式が2階であるときに理論的に与えられているが、系の微分方程式が高階になっても成立することがわかる。

すなわち、外力を増加するとき振動の振巾が増加するとき安定であり、反対に振巾が減少する場合は不安定となることをしめしているものである。

### (e) 基本波共振現象のおこる条件

前述したように (3.9) 式で与えられる平衡状態のうち物理的に存在するのは (3.23) 式をみたさないものである。すなわち

$$f(u, v, a) = \left\{ u - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) dt \right\}^2 + v^2 - \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) \cos 2nt dt \right\}^2 = 0 \quad (3.26)$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

の中に  $\xi_n - j\zeta_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) なる点が入らないことである。

しかるに (3.26) 式なる円は  $a$  すなわち (3.9) 式より  $E$  が変化すると円の位置および大きさが変化する。故に種々の  $a$  に対する (3.26) 式の包絡線を求めると、このような包絡線の内部に  $\xi_n - j\zeta_n$  なる点が入ればあ

る  $E$  の値により基本波共振現象が発生するといふことができる。

## 2. 非線形特性が罷あるいは折線であらわされる場合

(a) 非線形特性が罷で表わされる場合

非線形特性  $N(x)$  が

$$N(x) = x^{2\nu+1} \quad (3.27)$$

$$\nu = 1, 2, \dots$$

であるときは等価伝達関数 (3.7) 式より

$$N = \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}\nu!(\nu+1)!} a^{2\nu} \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

また、変分に対する等価伝達関数は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N'(a \cos t) dt &= \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} a^{2\nu} \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N'(a \cos t) \cos 2nt dt &= \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu-n)!(\nu+n)!} a^{2\nu} ; n=1, 2, \dots, \nu, \\ &= 0 ; n \neq 1, 2, \dots, \nu \end{aligned}$$

となるから、(3.17) 式より

$$\left. \begin{aligned} N_g &= \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} a^{2\nu} & n \neq \text{integer}, n(\text{integer}) > \nu \\ &= \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} a^{2\nu} + \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu-n)!(\nu+n)!} a^{2\nu} \varepsilon^{j2n\varphi} & n=1, 2, \dots, \nu \end{aligned} \right\} (3.29)$$

すなわち、変分に対する等価伝達関数は  $n=1, 2, \dots, \nu$  に対するものだけが複素量、すなわち、複素平面上でその軌跡は円となり、それ以外では実数量となる。

$\nu=1, 2, 3, 4$  としたときの等価伝達関数を表 3.1 表に示す。

$n=1$  のときの変分に対する等価伝達関数は (3.29) 式より複素平面 ( $u-v$  平面) 上では次のような式であらわされる円となる。

表 3.1

非線形特性	$N$	$N_S$
$x^3$	$\frac{3}{4}a^2$	$\frac{3}{2}a^2$ ; $n \neq 1$
		$\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a^2 \varepsilon^{j2\varphi}$ ; $n = 1$
$x^5$	$\frac{5}{8}a^4$	$\frac{15}{8}a^4$ ; $n \neq 1, 2$
		$\frac{15}{8}a^4 + \frac{5}{4}a^4 \varepsilon^{j2\varphi}$ ; $n = 1$
		$\frac{15}{8}a^4 + \frac{5}{16}a^4 \varepsilon^{j4\varphi}$ ; $n = 2$
$x^7$	$\frac{35}{64}a^6$	$\frac{35}{16}a^6$ ; $n \neq 1, 2, 3$
		$\frac{35}{16}a^6 + \frac{105}{64}a^6 \varepsilon^{j2\varphi}$ ; $n = 1$
		$\frac{35}{16}a^6 + \frac{42}{64}a^6 \varepsilon^{j4\varphi}$ ; $n = 2$
		$\frac{35}{16}a^6 + \frac{7}{64}a^6 \varepsilon^{j6\varphi}$ ; $n = 3$
$x^9$	$\frac{63}{128}a^8$	$\frac{315}{128}a^8$ ; $n \neq 1, 2, 3, 4$
		$\frac{315}{128}a^8 + \frac{63}{32}a^8 \varepsilon^{j2\varphi}$ ; $n = 1$
		$\frac{315}{128}a^8 + \frac{63}{64}a^8 \varepsilon^{j4\varphi}$ ; $n = 2$
		$\frac{315}{128}a^8 + \frac{9}{32}a^8 \varepsilon^{j6\varphi}$ ; $n = 3$
		$\frac{315}{128}a^8 + \frac{9}{256}a^8 \varepsilon^{j8\varphi}$ ; $n = 4$

$$f(u, v, a^{2\nu}) = \left\{ u - \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} a^{2\nu} \right\}^2 + v^2 - \left\{ \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu-1)!(\nu+1)!} a^{2\nu} \right\}^2 = 0$$

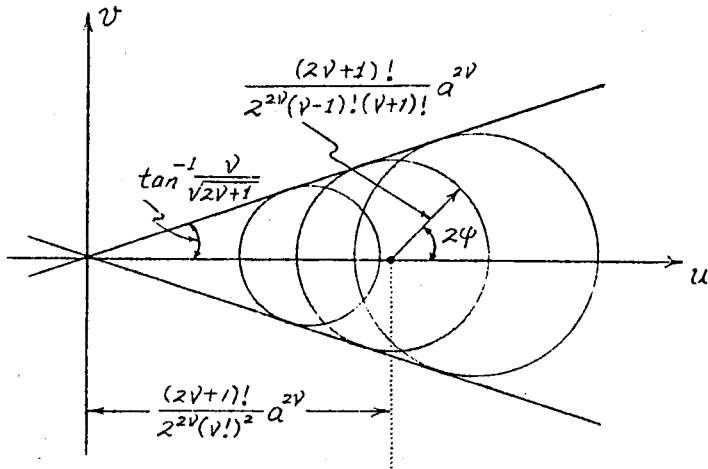
となる、 $a$  を種々変化されたときの包絡線は上式と次式

$$\frac{\partial f}{\partial a^{2\nu}} = -2 \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}\nu!(\nu-1)!} \left[ \left\{ u - \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} a^{2\nu} \right\} + \frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu}(\nu-1)!(\nu+1)!} a^{2\nu} \right] = 0$$

より  $a^{2\nu}$  を消去すると

$$v = \pm \frac{v}{\sqrt{2v+1}} u \quad (3.30)$$

となり、原点で交わる二直線をあらわすことになる（※3.4図）、これより、 $\xi, -j\zeta_1$  なる点が二直線でかこまれる内部にあればある入力振巾で基本波共振現象が発生するということができる。



※3.4 図

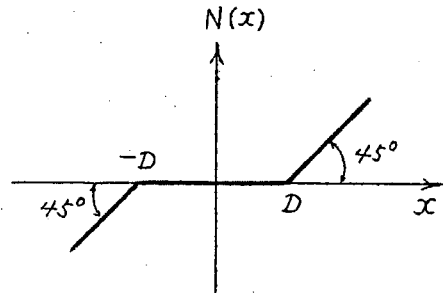
非線形特性が

$$N(x) = C_1 x + C_3 x^3 + C_5 x^5 + \dots \quad (3.31)$$

であるときも上述の結果を用いることにより簡単に等価伝達関数、変分に対する等価伝達関数、共振現象の発生域を求めることができる。

(b) 非線形特性が折線で表わされる時

非線形特性を直線の接続で近似的に表わされる場合が多い。このようなき等価伝達関数および変分に対する等価伝達関数がどうなるかについて述べる。ただし、折点の所では連続な微係数をもつものと仮定する。このことは実際上ゆるされることで



※3.5 図



ある、

非線形特性がオ3.5 図のような不動帯特性、すなわち

$$\left. \begin{aligned} N(x) &= x-D && ; x \geq D \\ &= 0 && ; |x| \leq D \\ &= x+D && ; x \leq -D \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

等価伝達関数は(3.7)式より

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{1}{\pi} \{2\tau - \sin 2\tau\} && ; a \geq D \\ &= 0 && ; a \leq D \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

ただし

$$\tau = \cos^{-1} \frac{D}{a} \quad (3.34)$$

となる、また、(3.17)式において

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) dt &= \frac{2}{\pi} \tau, & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N'(a \cos t) \cos 2nt dt &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \sin 2n\tau && ; a \geq D \\ &= 0, & &= 0 && ; a \leq D \end{aligned}$$

となるから、変分に対する等価伝達関数は

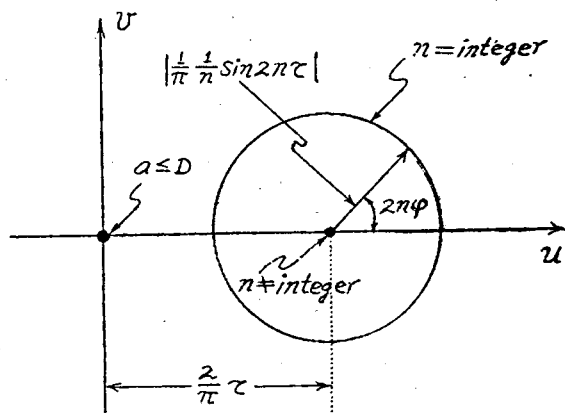
$$\left. \begin{aligned} N_{\delta} &= \frac{2}{\pi} \tau, & n \neq \text{integer} \\ &= \frac{2}{\pi} \tau + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \sin 2n\tau \cdot \epsilon^{j2n\varphi}, & n = \text{integer} \\ &= 0 & a \leq D \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

となる。すなわち、複素平面上では  $a \leq D$  のときは原点  $a \geq D$  で  $n$  が整数でないときは実軸上の点、 $a \geq D$  で  $n$  が整数のときは次式のような円となる(オ3.6 図)。

$$\left\{ u - \frac{2}{\pi} \tau \right\}^2 + v^2 = \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \sin 2n\tau \right\}^2$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

$a$  したがって  $\tau$  を変化させた

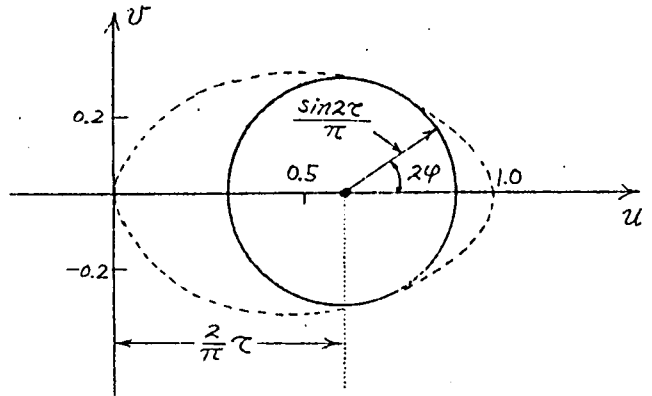


オ3.6 図

ときの (3.36) 式の包絡線は  $n=1$  に対して

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} (4\tau - \sin 4\tau) \\ v &= \pm \frac{1}{2\pi} (1 - \cos 4\tau) \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

となり、オ3.7図のよ  
うなサイクロイド(擺  
線)の一部となる。す  
なわち、 $\sigma, -j\ell,$  なる  
点が、この閉曲線の内  
部にあれば基本波共振  
現象が発生するという  
ことができる。



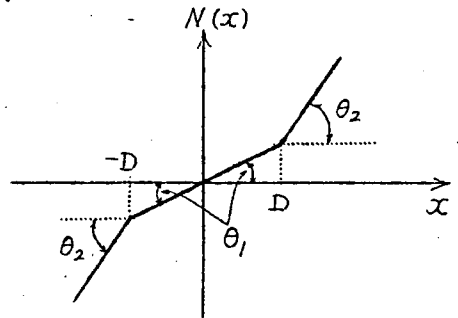
オ3.7図

非線形特性が折線の

接続であらわされるときは上の結果を用いることにより簡単に等価伝達関数, 変分に対する等価伝達関数を求めることができる。

例えばオ3.8図のような特性のときは、等価伝達関数, 変分に対する等価伝達関数は (3.43), (3.44) 式より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N &= k_1 + k_2 \frac{1}{\pi} \{2\tau - \sin 2\tau\} & ; a \geq D \\ &= k_1 & ; a \leq D \end{aligned} \right\} \quad \dots (3.38)$$



オ3.8図

$$\left. \begin{aligned} N_s &= k_1 & ; a \leq D \\ &= k_1 + k_2 \frac{2}{\pi} \tau & ; n \neq \text{integer}, a \geq D \\ &= k_1 + k_2 \frac{2}{\pi} \tau + k_2 \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \sin 2n\tau \varepsilon^{j2n\phi} & ; n = \text{integer}, a \geq D \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

ただし

$$\tau = \cos^{-1} \frac{D}{a} \quad (3.40)$$

$$k_1 = \tan \theta_1, \quad k_2 = \tan \theta_2 - \tan \theta_1, \quad (3.41)$$

また、 $n=1$  に対する  $N_S$  の複素平面上の軌跡は (3.37) 式のしめす  $3.7$  図を  $k_2$  倍して虚軸に平行に右へ  $k_1$  だけずらすことにより得られる。

### 附録 4. $\{a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t\}^{2\nu+1}$ の展開 才2部才2節 (2.31) 式の証明

$$\begin{aligned} & \{a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t\}^{2\nu+1} \\ &= \sum_{r=0}^{2\nu+1} \binom{2\nu+1}{r} a^{2\nu+1-r} b^r \cos^{2\nu+1-r}(\overline{2m+1}t + \varphi) \cos^r t \end{aligned} \quad (4.1)$$

奇数冪と偶数冪とをわけると

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{\nu} \left\{ \binom{2\nu+1}{2r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \cos^{2(\nu-r)+1}(\overline{2m+1}t + \varphi) \cos^{2r} t \right. \\ & \quad \left. + \binom{2\nu+1}{2r+1} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos^{2(\nu-r)}(\overline{2m+1}t + \varphi) \cos^{2r+1} t \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2) 式において

$$\left. \begin{aligned} \cos^{2n+1} \theta &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{i} \cos(2n+1-2i)\theta \\ \cos^{2n} \theta &= \frac{1}{2^{2n-1}} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{j} \cos(2n-2j)\theta + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

なる関係式を用いると (4.1) 式は

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \binom{2\nu+1}{2r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \frac{1}{2^{2(\nu-r)}} \cdot \frac{1}{2^{2r-1}} \binom{2(\nu-r)+1}{i} \\ & \times \cos(2\nu-r+1-2i)(\overline{2m+1}t + \varphi) \left\{ \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2r}{2k} \cos(2r-2k)t + \frac{1}{2} \binom{2r}{r} \right\} \\ & + \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-r} \binom{2\nu+1}{2r+1} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \frac{1}{2^{2(\nu-r)-1}} \cdot \frac{1}{2^{2r}} \binom{2r+1}{l} \cos(2r+1-2l)t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \sum_{j=0}^{\nu-r-1} \binom{2(\nu-r)}{j} \cos(2\sqrt{\nu-r-2j})(\overline{2m+1}t+\varphi) + \frac{1}{2} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \right\} \\
 & = \frac{1}{2^{2\nu}} \left[ \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r} \binom{2(\nu-r)+1}{i} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \right. \\
 & \quad \times \cos(2\sqrt{\nu+1-2r-2i})(\overline{2m+1}t+\varphi) \\
 & \quad + \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{k} \binom{2(\nu-r)+1}{i} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \\
 & \quad \times \left( \cos\left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2r-2i)+2(r-k)t+(2\nu+1-2r-2i)\varphi} \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \cos\left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2r-2i)-2(r-k)t+(2\nu+1-2r-2i)\varphi} \right\} \right) \\
 & \quad + \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{l=0}^r \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{l} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2r+1-2l)t \\
 & \quad + \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{l=0}^r \sum_{j=0}^{\nu-r-1} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{j} \binom{2r+1}{l} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \\
 & \quad \times \left( \cos\left\{ \overline{(2m+1)(2\nu-2r-2j)+(2r+1-2l)t+(2\nu-2r-2j)\varphi} \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \cos\left\{ \overline{(2m+1)(2\nu-2r-2j)-(2r+1-2l)t+(2\nu-2r-2j)\varphi} \right\} \right) \Big] \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

(4.4) 式の [ ] 内の \*1 項は次のようになる。

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r} \binom{2(\nu-r)+1}{i} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \cos(2\sqrt{\nu+1-2r-2i})(\overline{2m+1}t+\varphi)$$

助数  $i$  を  $x$  に変換すれば

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=r}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \cos(2\sqrt{\nu-x+1})(\overline{2m+1}t+\varphi)$$

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=r}^{\nu} = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \quad \text{であるから}$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \cos(2\sqrt{\nu-x+1})(\overline{2m+1}t+\varphi) \quad (4.5)$$

\*2 項はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{k} \binom{2(\nu-r)+1}{i} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \left( \cos\left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2r-2i)+2(r-k)t} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (2\nu+1-2r-2i)\varphi \right\} + \cos\left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2r-2i)-2(r-k)t+(2\nu+1-2r-2i)\varphi} \right\} \right)
 \end{aligned}$$

助数  $l$  を  $x$  に変換し,  $\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=r}^{\nu} \sum_{l=0}^{r-1} = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \sum_{l=0}^{r-1}$  であることを用いると

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \sum_{l=0}^{r-1} \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{l} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \left( \cos \left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2x)+2(r-l)} t \right. \right. \\ \left. \left. + (2\nu+1-2x)\varphi \right\} + \cos \left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2x)-2(r-l)} t + (2\nu+1-2x)\varphi \right\} \right)$$

さらに助数  $l$  を  $y$  に変換すれば

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \sum_{y=0}^r \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r-y} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \left( \cos \left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2x)+2y} t \right. \right. \\ \left. \left. + (2\nu+1-2x)\varphi \right\} + \cos \left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2x)-2y} t + (2\nu+1-2x)\varphi \right\} \right)$$

$$- 2 \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \cos(2\nu+1-2x) (\overline{2m+1} t + \varphi)$$

$$\sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \sum_{y=0}^r = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=y}^x \sum_{y=0}^r \quad \text{であるから}$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=y}^x \sum_{y=0}^r \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r-y} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \left( \cos \left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2x)+2y} t \right. \right. \\ \left. \left. + (2\nu+1-2x)\varphi \right\} + \cos \left\{ \overline{(2m+1)(2\nu+1-2x)-2y} t + (2\nu+1-2x)\varphi \right\} \right)$$

$$- 2 \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \cos(2\nu+1-2x) (\overline{2m+1} t + \varphi) \quad (4.6)$$

※3項については

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{l=0}^r \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{l} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2r+1-2l)t$$

助数  $l$  を  $x$  に変換すれば

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=0}^r \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2x+1)t$$

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=0}^r = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \quad \text{であるから}$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2x+1)t \quad (4.7)$$

※4項については

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{l=0}^r \sum_{j=0}^{\nu-r} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{j} \binom{2r+1}{l} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \left( \cos \{ \overline{(2m+1)(2\nu-2r-2j) + (2r+1-2l)} t \right. \\ & \quad \left. + (2\nu-2r-2j)\varphi \} + \cos \{ \overline{(2m+1)(2\nu-2r-2j) - (2r+1-2l)} t + (2\nu-2r-2j)\varphi \} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{l=0}^r \sum_{j=0}^{\nu-r} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{j} \binom{2r+1}{l} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \left( \cos \{ \overline{(2m+1)(2\nu-2r-2j) + (2r+1-2l)} t \right. \\ & \quad \left. + (2\nu-2r-2j)\varphi \} + \cos \{ \overline{(2m+1)(2\nu-2r-2j) - (2r+1-2l)} t + (2\nu-2r-2j)\varphi \} \right) \\ & \quad - 2 \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{l=0}^r \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{l} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2r+1-2l)t \end{aligned}$$

※1項の助数  $j$  を  $y$  に変換し, ※2項に(4.7)式の結果を用いると

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{l=0}^r \sum_{y=0}^{\nu-r} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r-y} \binom{2r+1}{l} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \left( \cos \{ \overline{2y(2m+1) + (2r+1-2l)} t \right. \\ & \quad \left. + 2y\varphi \} + \cos \{ \overline{2y(2m+1) - (2r+1-2l)} t + 2y\varphi \} \right) \\ & \quad - 2 \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2x+1)t \end{aligned}$$

※1項の助数  $l$  を  $x$  に変換すると

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=\nu-r}^{\nu} \sum_{y=0}^{\nu-r} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r-y} \binom{2r+1}{x-\nu+r} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \left( \cos \{ \overline{2y(2m+1) + (2\nu+1-2x)} t \right. \\ & \quad \left. + 2y\varphi \} + \cos \{ \overline{2y(2m+1) - (2\nu+1-2x)} t + 2y\varphi \} \right) \\ & \quad - 2 \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2x+1)t \end{aligned}$$

※1項の助数  $r$  を変化させると

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=r}^{\nu} \sum_{y=0}^r \binom{2\nu+1}{2(\nu-r)+1} \binom{2r}{r-y} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2r} b^{2(\nu-r)+1} \left( \cos \{ \overline{2y(2m+1) + (2\nu+1-2x)} t \right. \\ & \quad \left. + 2y\varphi \} + \cos \{ \overline{2y(2m+1) - (2\nu+1-2x)} t + 2y\varphi \} \right) \\ & \quad - 2 \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2x+1)t \\ & \quad \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=r}^{\nu} \sum_{y=0}^r = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{y=0}^x \sum_{r=0}^x = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=y}^x \sum_{y=0}^x \quad \text{であるから} \end{aligned}$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=y}^x \sum_{y=0}^x \binom{2\nu+1}{2(\nu-r)+1} \binom{2r}{r-y} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2r} b^{2(\nu-r)+1} \left( \cos \{ \overline{2y(2m+1) + (2\nu+1-2x)} t \right.$$

$$+2y\varphi\} + \cos\{\overline{2y(2m+1) - (2\nu+1-2x)t + 2y\varphi}\}$$

$$-2 \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2x+1)t \quad (4.8)$$

(4.5), (4.6), (4.7), (4.8) 式の結果を(4.4)式に代入すれば

$$\{a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t\}^{2\nu+1}$$

$$= \frac{1}{2^{2\nu}} \left[ - \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r} \cos(2\nu-x+1)(\overline{2m+1}t + \varphi) \right.$$

$$+ \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=y}^x \sum_{y=0}^x \binom{2\nu+1}{2r} \binom{2r}{r-y} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2(\nu-r)+1} b^{2r}$$

$$\times (\cos\{\overline{(2m+1)(2\nu-2x+1) + 2y}t + (2\nu-2x+1)\varphi\}$$

$$+ \cos\{\overline{(2m+1)(2\nu-2x+1) - 2y}t + (2\nu-2x+1)\varphi\})$$

$$- \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2r+1} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r+1}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r+1} \cos(2x+1)t$$

$$+ \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=y}^x \sum_{y=0}^x \binom{2\nu+1}{2(\nu-r)+1} \binom{2r}{r-y} \binom{2(\nu-r)+1}{x-r} a^{2r} b^{2(\nu-r)+1}$$

$$\times (\cos\{\overline{2y(2m+1) + (2\nu-2x+1)t + 2y\varphi}\}$$

$$+ \cos\{\overline{2y(2m+1) - (2\nu-2x+1)t + 2y\varphi}\}) \Big] \quad (4.9)$$

### 附録 5. $(2\nu+1)\{a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t\}^{2\nu}$ の展開 才2部才2節(2.37)式の証明

$$\{a \cos(\overline{2m+1}t + \varphi) + b \cos t\}^{2\nu}$$

$$= \sum_{r=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{r} a^{2\nu-r} b^r \cos^{2\nu-r}(\overline{2m+1}t + \varphi) \cos^r t \quad (5.1)$$

偶数累と奇数累にわけると

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos^{2(\nu-r)}(\overline{2m+1}t + \varphi) \cos^{2r} t$$

$$+ \sum_{r=0}^{\nu-1} \binom{2\nu}{2r+1} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \cos^{2(\nu-r)-1}(\overline{2m+1}t + \varphi) \cos^{2r+1} t \quad (5.2)$$

附録4 (4.3)式を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^{2\nu-1}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \right. \\
 &+ \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r-1} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{i} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(\nu-r-i) (\overline{2m+1}t + \varphi) \\
 &+ \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{k} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(r-k)t \\
 &+ \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r-1} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{i} \binom{2r}{k} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \left\{ \cos \{ \overline{2(2m+1)(\nu-r-i) + 2(r-k)t + 2(\nu-r-i)\varphi} \} \right. \\
 &\quad \left. + \cos \{ \overline{2(2m+1)(\nu-r-i) - 2(r-k)t + 2(\nu-r-i)\varphi} \} \right\} \\
 &+ \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-r-1} \sum_{l=0}^{r-1} \binom{2\nu}{2r+1} \binom{2(\nu-r)-1}{j} \binom{2r+1}{l} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \left\{ \cos \{ \overline{(2\nu-r-j-1)(2m+1) + (2r-l+1)t + (2\nu-r-j-1)\varphi} \} \right. \\
 &\quad \left. + \cos \{ \overline{(2\nu-r-j-1)(2m+1) - (2r-l+1)t + (2\nu-r-j-1)\varphi} \} \right\} \Big] \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

上式において [ ] 内の各項を考えると

$$\begin{aligned}
 \text{※2項} &= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{i} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(\nu-r-i) (\overline{2m+1}t + \varphi) \\
 &\quad - \sum_{r=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{※3項} &= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{k=0}^r \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{k} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(r-k)t \\
 &\quad - \sum_{r=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{※4項} &= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{i} \binom{2r}{k} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \left\{ \cos \{ \overline{2(2m+1)(\nu-r-i) + 2(r-k)t + 2(\nu-r-i)\varphi} \} \right. \\
 &\quad \left. + \cos \{ \overline{2(2m+1)(\nu-r-i) - 2(r-k)t + 2(\nu-r-i)\varphi} \} \right\} \\
 &\quad - 2 \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{i} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(\nu-r-i) (\overline{2m+1}t + \varphi) \\
 &\quad - 2 \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{k=0}^r \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{k} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(r-k)t
 \end{aligned}$$



$$+ 2 \sum_{r=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \quad (5.6)$$

しかるに (5.4) 式の第 1 項, (5.6) 式の第 2 項は

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{i} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(\nu-r-i)(\overline{2m+1}t+\varphi)$$

助数  $i$  を  $x$  に変換すれば

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=r}^{\nu} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{x-r} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(\nu-x)(\overline{2m+1}t+\varphi)$$

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=r}^{\nu} = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \quad \text{であるから}$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{x-r} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(\nu-x)(\overline{2m+1}t+\varphi) \quad (5.7)$$

また, (5.5) 式の第 1 項, (5.6) 式の第 2 項は

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{k=0}^r \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{k} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(r-k)t$$

助数  $k$  を  $x$  に変換すれば

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=0}^r \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2xt$$

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=0}^r = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \quad \text{であるから}$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2xt \quad (5.8)$$

また, (5.6) 式の第 1 項は

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{\nu-r} \sum_{k=0}^r \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{i} \binom{2r}{k} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \left( \cos \{ 2(2m+1)(\nu-r-i) + 2(r-k)t + 2(\nu-r-i)\varphi \} \right. \\ \left. + \cos \{ 2(2m+1)(\nu-r-i) - 2(r-k)t + 2(\nu-r-i)\varphi \} \right)$$

助数  $i, k$  を  $x, y$  に変換すれば

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=r}^{\nu} \sum_{y=0}^r \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{x-r} \binom{2r}{r-y} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \left( \cos \{ 2(\nu-x)(2m+1) + 2yt + 2(\nu-x)\varphi \} \right.$$

$$+ \cos \left\{ \overline{2(\nu-x)(2m+1)-2yt+2(\nu-x)\varphi} \right\}$$

$$\sum_{r=0}^{\nu} \sum_{x=r}^{\nu} \sum_{y=0}^r = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \sum_{y=0}^r = \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{y=0}^x \sum_{r=y}^x \quad \text{であるから}$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{y=0}^x \sum_{r=y}^x \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{x-r} \binom{2r}{r-y} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \left( \cos \left\{ \overline{2(\nu-x)(2m+1)+2yt+2(\nu-x)\varphi} \right\} \right. \\ \left. + \cos \left\{ \overline{2(\nu-x)(2m+1)-2yt+2(\nu-x)\varphi} \right\} \right) \quad (5.9)$$

つぎに(5.3)式の※5項について考える。

$$\text{※5項} = \sum_{r=0}^{\nu-1} \sum_{j=0}^{\nu-r-1} \sum_{l=0}^r \binom{2\nu}{2r+1} \binom{2(\nu-r)-1}{j} \binom{2r+1}{l} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \left( \cos \left\{ \overline{(2\nu-r-j)(2m+1)+(2r-l+1)t} \right\} \right. \\ \left. + (2\nu-r-j-1)\varphi \right) + \cos \left\{ \overline{(2\nu-r-j-1)(2m+1)-(2r-l+1)t+(2\nu-r-j-1)\varphi} \right\}$$

助数  $j, l$  を  $x, y$  に変換すれば

$$= \sum_{r=0}^{\nu-1} \sum_{x=r}^{\nu-1} \sum_{y=0}^r \binom{2\nu}{2r+1} \binom{2(\nu-r)-1}{x-r} \binom{2r+1}{r-y} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \left( \cos \left\{ \overline{(2\nu-1-x+1)(2m+1)+(2y+1)t} \right\} \right. \\ \left. + (2\nu-1-x+1)\varphi \right) + \cos \left\{ \overline{(2\nu-1-x+1)(2m+1)-(2y+1)t+(2\nu-1-x+1)\varphi} \right\}$$

$$\sum_{r=0}^{\nu-1} \sum_{x=r}^{\nu-1} \sum_{y=0}^r = \sum_{x=0}^{\nu-1} \sum_{r=0}^x \sum_{y=0}^r = \sum_{x=0}^{\nu-1} \sum_{y=0}^x \sum_{r=y}^x \quad \text{であるから}$$

$$= \sum_{x=0}^{\nu-1} \sum_{y=0}^x \sum_{r=y}^x \binom{2\nu}{2r+1} \binom{2(\nu-r)-1}{x-1} \binom{2r+1}{r-y} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \left( \cos \left\{ \overline{(2\nu-1-x+1)(2m+1)+(2y+1)t} \right\} \right. \\ \left. + (2\nu-1-x+1)\varphi \right) + \cos \left\{ \overline{(2\nu-1-x+1)(2m+1)-(2y+1)t+(2\nu-1-x+1)\varphi} \right\} \quad (5.10)$$

以上の各式の結果を用いると

$$(2\nu+1) \left\{ a \cos(\overline{2m+1}t+\varphi) + b \cos t \right\}^{2\nu} \\ = \frac{2\nu+1}{2^{2\nu-1}} \left[ -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \right. \\ - \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=0}^x \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{x-r} \binom{2r}{r} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2(\nu-x)(\overline{2m+1}t+\varphi) \\ + \sum_{x=0}^{\nu} \sum_{r=x}^{\nu} \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{\nu-r} \binom{2r}{r-x} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \cos 2xt \\ \left. + \sum_{x=0}^{\nu-1} \sum_{y=0}^x \sum_{r=y}^x \binom{2\nu}{2r} \binom{2(\nu-r)}{x-r} \binom{2r}{r-y} a^{2(\nu-r)} b^{2r} \left( \cos \left\{ \overline{2(\nu-x)(2m+1)+2yt+2(\nu-x)\varphi} \right\} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos \left\{ 2(\nu-x)(2m+1) - 2y t + 2(\nu-x)\varphi \right\} \\
 & + \sum_{x=0}^{\nu-1} \sum_{y=0}^x \sum_{r=y}^x \left( \frac{2\nu}{2r+1} \right) \binom{2(\nu-r)-1}{x-r} \binom{2r+1}{r-y} a^{2(\nu-r)-1} b^{2r+1} \left[ \cos \left\{ (2\nu-1-x+1)(2m+1) + (2y+1)t \right. \right. \\
 & \left. \left. + (2\nu-1-x+1)\varphi \right\} + \cos \left\{ (2\nu-1-x+1)(2m+1) - (2y+1)t + (2\nu-1-x+1)\varphi \right\} \right] \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

附録 6.  $1/(1 - \frac{2Z}{1+Z^2} \cos \varphi)$  などの展開  
 才3部才3節 (3.37), (3.38), (3.39) 式の証明

$|x| < 1$  ならば

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (6.1)$$

と展開されるが、ここで

$$x = Z e^{j\varphi} \quad Z < 1 \quad (6.2)$$

とすれば、上式に代入し実部虚部を等しく置くことにより

$$\frac{1 - Z \cos \varphi}{1 + Z^2 - 2Z \cos \varphi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \cos n\varphi \quad (6.3)$$

$$\frac{2 \sin \varphi}{1 + Z^2 - 2Z \cos \varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \sin n\varphi \quad (6.4)$$

しかるに、 $1 - Z \cos \varphi = \frac{1}{2}(1 + Z^2 - 2Z \cos \varphi) + \frac{1}{2}(1 - Z^2)$  であるから (6.3) 式に代入して整理すると

$$\frac{1 - \frac{2Z}{1+Z^2} \cos \varphi}{1 + Z^2} = \frac{1 + Z^2}{1 - Z^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \cos n\varphi \right\} \quad (6.5)$$

また、 $1 - Z \cos \varphi = \frac{1}{1+Z^2} \{ 1 + Z^2 - 2Z \cos \varphi \} + Z \cos \varphi \frac{1-Z^2}{1+Z^2}$  であるから (6.3) 式に代入して整理すると

$$\frac{\cos \varphi}{1 - \frac{2Z}{1+Z^2} \cos \varphi} = \frac{1 + Z^2}{Z} \left\{ \frac{Z^2}{1 - Z^2} + \frac{1 + Z^2}{1 - Z^2} \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \cos n\varphi \right\} \quad (6.6)$$

(6.4) 式より

$$\frac{\sin \varphi}{1 - \frac{2Z}{1+Z^2} \cos \varphi} = \frac{1+Z^2}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \sin n \varphi \quad (6.7)$$

## 附録 7. 静止法(同期機リアクタンスの測定法)

これは次過渡リアクタンスを測定する方法であるが、<sup>(43)</sup> 制動巻線がないときにこの方法を適用すると、近似的に直軸過渡リアクタンス、横軸リアクタンスを測定することができる。発電機を静止状態におき、界磁回路を短絡すれば、才3部才2節(3.8)式より

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\alpha} &= - \left\{ \cos^2 \theta_0 x_d(p) + \sin^2 \theta_0 x_g(p) \right\} i_{\alpha} - \sin \theta_0 \cos \theta_0 \{ x_d(p) - x_g(p) \} i_{\beta} \\ \psi_{\beta} &= - \sin \theta_0 \cos \theta_0 \{ x_d(p) - x_g(p) \} i_{\alpha} - \left\{ \sin^2 \theta_0 x_d(p) + \cos^2 \theta_0 x_g(p) \right\} i_{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

いま、 $b-c$ 相に単相起電力  $e_{bc}$  を加え、 $b$ 相に流れる電流を  $i_b$  とすれば

$$i_{\beta} = \frac{2}{\sqrt{3}} i_b, \quad i_{\alpha} = 0, \quad v_{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} e_{bc}. \quad (7.2)$$

故に電機子抵抗を省略すると才3部才2節(3.7)式と(7.1)式より

$$e_{bc} + 2 \left\{ \sin^2 \theta_0 p x_d(p) + \cos^2 \theta_0 p x_g(p) \right\} i_b = 0 \quad (7.3)$$

加える電圧  $e_{bc}$  の基本波振巾を  $E_{bc}$ 、電流  $i_b$  の基本波振巾を  $I_b$  とし界磁回路の抵抗をそのリアクタンスに比し小さいとすると、才3部才2節(3.5)式の関係を用いると(7.3)式より

$$\frac{E_{bc}}{I_b} = B = 2 \left( x_d' \sin^2 \theta_0 + x_g \cos^2 \theta_0 \right) \quad (7.4)$$

同様にして  $c-a$ 相に単相起電力  $e_{ca}$  を加え、 $c$ 相に流れる電流を  $i_c$  とし  $e_{ca}$ 、 $i_c$  の基本波振巾を  $E_{ca}$ 、 $I_c$  とすれば

$$\frac{E_{ca}}{I_c} = C = 2 \left\{ x_d' \sin^2 \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) + x_g \cos^2 \left( \theta_0 + \frac{\pi}{3} \right) \right\} \quad (7.5)$$

また、 $a-b$ 相に加えたときは

$$\frac{E_{ab}}{I_a} = A = 2 \left\{ x_d' \sin^2 \left( \theta_0 - \frac{\pi}{3} \right) + x_g \cos^2 \left( \theta_0 - \frac{\pi}{3} \right) \right\} \quad (7.6)$$

(7.4)式～(7.6)式より

$$K = \frac{A+B+C}{3} = x'_d + x_g \quad (7.7)$$

(7.4)～(7.7)式より

$$\left. \begin{aligned} B-K &= (x_g - x'_d) \cos 2\theta_0 \\ A-C &= \sqrt{3} (x_g - x'_d) \sin 2\theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

故に

$$M = \sqrt{(B-K)^2 + \frac{(A-C)^2}{3}} = x_g - x'_d \quad (7.9)$$

故に(7.7), (7.9)式より

$$x'_d = \frac{K-M}{2}, \quad x_g = \frac{K+M}{2} \quad (7.10)$$

すなわち、発電機を静止状態にして、界磁を短絡し電機子に単相起電力を加え、その電圧および流れる電流を測定すれば横軸リアクタンス、直軸過渡リアクタンスがえられる。

## 附録 8. 平衡容量負荷による自励現象

発電機の電機子回路に平衡容量負荷がある場合とか、直列蓄電器を通して無限大母線につながれている場合の自励現象については多くの人により研究されている。<sup>(33),(34)</sup>

ここでは、不平衡の場合に比較する意味で電機子回路の過渡現象を省略して、自励現象の発生する領域を解析する。

電機子回路の過渡現象を省略すれば、才3部才2節の基礎方程式(3.1), (3.3)式は励磁がないとすれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} v_d &= -\psi_g - r i_d, & v_g &= \psi_d - r i_g \\ \psi_d &= -x_d(D) i_d, & \psi_g &= -x_g(D) i_g \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

ただし、 $D = \frac{d}{dt}$  とする。界磁回路の過渡現象を省略すれば上式は次

のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_d(p) &= -\frac{x_d' T_{d0}' p + x_d}{1 + T_{d0}' p} I_d(p) + \frac{T_{d0}' p}{1 + T_{d0}' p} (\psi_{d0}' + x_d' i_{d0}) \\ \psi_g &= -x_g i_g \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

ここで  $\bar{V}_d(p)$ ,  $I_d(p)$  は  $\psi_d$ ,  $i_d$  の  $p$ -関数で  $i_{d0}$  は  $i_d$  の初期値である。

一方、電機子回路についてはその抵抗、リアクタンスを  $r'$ ,  $x$  とすれば、過渡現象を省略しているので、

$$V_d = r' i_d - x i_g, \quad V_g = x i_d + r' i_g \quad (8.3)$$

となる。ただし、リアクタンスについては誘導的な場合を  $x > 0$  としている。

以上 (8.1) ~ (8.3) 式より端子電圧の直軸、横軸成分の  $p$ -関数は

$$\left. \begin{aligned} V_d(p) &= \frac{1}{\Delta} T_{d0}' p (x_g r' - r x) (\psi_{d0}' + x_d' i_{d0}) \\ V_g(p) &= \frac{1}{\Delta} T_{d0}' p \{ r'(r+r') + x(x+x_g) \} (\psi_{d0}' + x_d' i_{d0}) \\ \Delta &= T_{d0}' \{ (r+r')^2 + (x+x_g)(x+x_d') \} p + \{ (r+r')^2 + (x+x_g)(x+x_d) \} \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

となる。故に、自己励磁を起す領域は特性方程式  $\Delta = 0$  より

$$\{ (r+r')^2 + (x+x_g)(x+x_d) \} \{ (r+r')^2 + (x+x_g)(x+x_d') \} < 0 \quad (8.5)$$

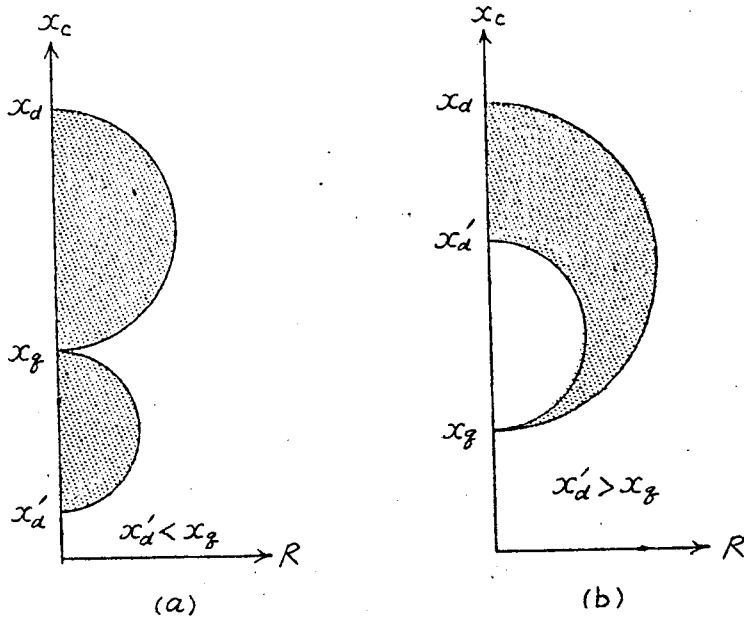
あるいは  $r+r' = R$ ,  $x = -x_c$  とおけば

$$\left\{ R^2 + \left( x_c - \frac{x_g + x_d'}{2} \right)^2 - \left( \frac{x_d' - x_g}{2} \right)^2 \right\} \left\{ R^2 + \left( x_c - \frac{x_d + x_g}{2} \right)^2 - \left( \frac{x_d - x_g}{2} \right)^2 \right\} < 0 \quad (8.6)$$

となる。これが平衡容量負荷の場合の自己励磁発生の領域をしめす式であつて、 $R - x_c$  平面で考えると、境界線はそれぞれ円(半円)となり、発生領域は両円(半円)の共有部分を除いた領域となる(オ8.1四)。この結果は界磁回路の時定数  $T_{d0}'$  および特性方程式  $\Delta = 0$  より求められる時定数が大なるときのみ妥当な近似を与えるものである。

電機子回路の過渡現象を考慮して解析した結果と比較すると、(8.6)式をしめす不安定域のうち  $R - x_c$  平面で、円(中心  $\frac{x_d + x_g}{2}$ , 半径  $\frac{x_d - x_g}{2}$ ) の内部の不定域は  $T_{d0}' = 0$  すなわち、界磁回路が開かれているとして電機子回路の過渡現象をも考慮したときの解析結果と一致し、円(中心

$\frac{x_g + x'_d}{2}$ , 半径  $\frac{x_g + x'_d}{2}$ ) の内部の不安定域は  $T'_{do} = \infty$  すなわち、界磁回路の磁束が不変としたとき解析結果と一致する。また、 $r=0$  とすると電機子回路の過渡現象を考慮すると、自己励磁発生域として  $x_c < x_g$ ,  $x_g < x_c < x_d$  または  $x_c < x_d$  となり、直軸リアクタンス  $x_d$  より小さな  $x_c$  では常に自己励磁が発生することになり、上の (8.6) 式の近似度がわるくなるが、抵抗がわずか ( $0.005 p.u.$ ) に存在すると急激に発生域が狭くなるから、実際的には問題とならない。



※8.1図

## 参 考 文 献

- (1) E.C. Starr, R.D. Evans : *Trans. A.I.E.E. Vol. 61 (1942) 963*
- (2) G. Jancke, K. Fakerström : *C.I.G.R.E. No. 332 (1950)*  
(送電線直列蓄電器専門委員会資料 No. 91)
- (3) N. Knudsen : *A.S.E.A. Journal (1950) 77*  
(送電線直列蓄電器専門委員会資料 No. 92)
- (4) 林 重憲 : 演算子法と過渡現象 (昭24年, 国民科学社) 47
- (5) S. Hayachi, A. Kishima : *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ. Vol. XVII (1955) 30*
- (6) 林, 近藤, 木島 : 電学会連大講演論文集 (昭31年) 355
- (7) 林, 近藤, 木島, 大森, 関 : 電学会連大講演論文集 (昭30年) 367
- (8) 林 重憲 : 電気評論 才35卷 (昭22年) 1
- (9) 電気協同研究 才7卷才2号 (昭26年) 8
- (10) 宮田, 田中 : 電学誌 才72卷 (昭27年) 675
- (11) 吉野, 山田, 大森 : オ-ム 才40卷 (昭28年) 279
- (12) 送電線直列蓄電器専門委員会資料 No. 174 (昭28年)
- (13) J. Fallou : *R.G.E. Tome XIX (1926) 987*
- (14) 林 千博 : 三菱電機 才18卷 (昭17年) 128
- (15) 竹内五一 : 電試研究報告 才480号 (昭21年)
- (16) C. Hayashi : *Forced Oscillations in Non-Linear Systems (1953, Nippon Printing Co.) Chap. IV, Chap. VI*
- (17) J. W. Butler, C. Concordia : *E.E. Vol. 56 (1937) 975*
- (18) G. Jancke, K.S. Smedsfelt, P. Hjertbery : *C.I.G.R.E. No. 322 (1954)*  
(送電線直列蓄電器専門委員会資料 No. 192)
- (19) N. Kryloff, N. Bogoliuboff : *Comptes Rendus (1932) 957, 1064, 1119.*
- (20) R. J. Kochenburger : *Trans. A.I.E.E. Vol. 69 Part I (1950) 569*
- (21) J. C. West, J. L. Douce : *Proc. I.E.E. Vol. 102 Part B (1954) 569*



- (22) J.C. West, J.L. Dauce, R.K. Livesley : *Proc. I.E.E. Vol. 103 Part B (1955) 463*
- (23) 林, 木島 : 電学会支連大講演論文集 (昭32年) 4
- (24) 林, 木島 : 電通学会非直線理論研究専門委員会資料 (昭33年)
- (25) J.L. Douce, R.E. King : *Trans. A.I.E.E. Vol. 78 App. & Ind. (1959) 665*
- (26) W. C. Johnson, B. C. Merrel, R. E. Alley, Jr : *Trans. A.I.E.E. Vol. 68 (1949) 31*
- (27) 林, 近藤, 木島, 吉川, 矢積 : 電学会支連大講演論文集 (昭31年) 79
- (28) 林, 近藤, 木島, 吉川, 矢積 : 技研報告 (関西電力) 才4号 (昭32年) 46
- (29) 林, 木島 : 電学会連大講演論文集 (昭33年) 587
- (30) J. Clem : *Trans. A.I.E.E. Vol. 58 (1939) 1*
- (31) C. F. Wagner : *Trans. A.I.E.E. Vol. 60 (1941) 1241*
- (32) 森川宗一 : 電試研究報告 才486号 (昭22年)
- (33) M. Takahashi : *Research of the Electrotechnical Laboratory, Tokyo, Japan, No. 350 (1933)*
- (34) S. B. Crary : *E.E. Vol. 56 (1937) 27*
- (35) C. F. Wagner : *E.E. Vol. 56 (1937) 1385*
- (36) 高橋正一 : 電学誌 才48卷 (昭3年) 740
- (37) R. H. Park : *Trans. A.I.E.E. Vol. 48 (1929) 716*
- (38) C. Concordia : *Synchronous Machines (1951, JOHN WILEY) Chap. 2*
- (39) E. Clarke : *G. E. Rev. Vol. 41 (1938) 488*
- (40) 林, 木島, 志賀, 矢積 : 電学会支連大講演論文集 (昭33年) 160
- (41) 林, 木島, 松田 : 電学会連大講演論文集 (昭34年) 524
- (42) 森口, 宇田川, 一松 : 数学公式 II (昭32年, 岩波書店) 190
- (43) F. K. Dalton, A. W. W. Cameron : *E.E. Vol. 71 (1952) 167*