

リレー制御系における振動現象に関する研究

田 村 博

# リレー制御系における振動現象に関する研究

田 村 博

昭和39年3月

DOC

1962

2

電気系

## 序 文

本論文は、筆者が京都大学大学院工学研究科博士課程（電気工字専攻）に在学中に行なった、リレー制御系の振動現象に関する理論的研究をまとめたものである。

筆者は本論文において、正弦波入力を有するリレー制御系の過渡応答の解析法を考案し、この方法を用いてリレー制御系において発生する分数調波振動の初期値問題の解決を試みたものである。本文は5章よりなりたっている。

第1章はリレー制御系の理論に関する概論であって、リレー制御系の理論の工学上の意義を述べ、さらに分数調波振動の取り上げられる理由を述べている。またリレー制御系における振動状態を決定するためにはその過渡応答の解析が必要であることを示している。続いてこれまで扱われてきた周期解の理論についての簡単な概観を行ない、若干の問題点を指摘している。

第2章では制御対象の伝達関数が一次である、最も簡単なリレー制御系に正弦波入力に加えられた場合の過渡応答を解析する方法を述べ、この方法を用いて基本調波振動と分数調波振動を発生する初期条件の領域を入力振幅の相異なる3つの場合について求めている。この初期条件の領域はアナログ計算機による実験結果とよく一致しており、また各領域内に初期条件を有する解は時間の経過とともにその領域内を遡る安定周期解に徐々に接近することが示されている。

第3章から第5章までは制御対象の伝達関数が二次であるリレー制御系に正弦波入力に加えられた場合について扱ったものである。強制入力のない二次リレー制御系の過渡応答を解析するには位相面上にリレーの切換曲線を求め、解がこの切換曲線と交わる毎にリレーの切換えが行なわれると考えて、その過渡応答を求めることができるのであるが、リレー制御系に強制入力がある場合にはこの切換曲線が時間的に絶えず移動

するため解析は著しく困難となる。第3章はこのような二次リレー制御系に正弦波入力を加えた場合の過渡応答を解析するために考えた新しい方法について述べている。

第4章は第5章で述べる初期値問題に対する準備として、第3章で述べた過渡応答の解析法から出発して周期解についての考察を行なったものである。さらにこれまでの周期解の理論では余り検討されていなかった不安定周期解の存在条件についても検討し、その存在領域を与えている。

第5章においては、 $1/3$  調波振動と基本調波振動を発生する初期条件の領域を第3章で述べた解析法によって求める方法を、いくつかの具体例によって示している。また不安定周期解の存在する場合としない場合では、相異なる周期振動を発生する初期条件の領域の境界曲線の満足すべき条件が異なっている場合のあることが示されている。さらに本章では同一のパラメータの下で初期条件の相異により、基本調波振動と概周期振動とが共存する場合のあることが示されている。

本論文で取り扱われているリレー制御系は比較的簡単なものであり、強制入力も正弦波入力に限られているが、本論文で述べられている方法は位相平面法の使える範囲の一次または二次の伝達関数を有するリレー制御系に任意の周期的入力を加えた場合の過渡応答の解析ならびに初期値問題に対して広く用いることができる

# 目 次

第 1 章	緒 論	1
§ 1.1	リレー制御系研究の意義	1
§ 1.2	リレー要素と線形部分	5
第 2 章	一次のリレー制御系における振動現象と その初期値問題	11
§ 2.1	解曲線の解析	11
§ 2.2	周期解の解析	16
§ 2.3	境界曲線の決定	25
2.3.1	$1/3$ 調波振動の不安定解の存在する場合	25
2.3.2	$1/3$ 調波振動の安定解のみが存在する場合	30
2.3.3	基本調波振動と $1/3$ 調波振動の共存する場合	33
§ 2.4	一次遅れの線形部分を有するリレー制御系の振動現 象とその初期値問題	34
§ 2.5	アナログ計算機による検討	46
第 3 章	二次のリレー制御系の過渡解の解析法	50
§ 3.1	過渡解の位相面軌道	50
§ 3.2	最初のリレーの切換え	55
§ 3.3	切換え後の解の位置	62
§ 3.4	解の位置を求める操作の反復	68
§ 3.5	リレーの切換回数	71

第 4 章	二次のリレー制御系の周期解の解析	75
§ 4.1	周期解の振動波形	75
§ 4.2	周期解の存在条件	77
§ 4.3	周期解の安定条件	82
§ 4.4	周期解の存在するパラメータの領域	88
第 5 章	二次のリレー制御系における周期振 動の初期値問題	96
§ 5.1	$1/3$ 調波振動の不安定解が存在する場合	97
§ 5.2	$1/3$ 調波振動の安定解のみが存在する場合	103
§ 5.3	基本調波振動と $1/3$ 調波振動の共存する場合	108
§ 5.4	アナログ計算機による検討	115
§ 5.5	概周期振動と基本調波振動の共存する場合	118
§ 5.6	入力位相角を種々の値に選んだ場合	127
参 考 文 献		136
謝 辞		139

# 第 1 章 緒 論

## § 1.1 リレー制御系研究の意義

自動制御系の閉ループの中にリレー特性を持つ要素を含んでいる系をリレー制御系と呼ぶ。リレー特性としては第 11 表に示すようなものがあり、このような特性を持つ自動制御系の要素をリレー要素と呼ぶ。電磁リレー、サーモスタットなどは本質的に不連続な動作を行なうリレー要素であるが、利得の高い真空管増幅器、磁気増幅器などの連続制御要素でも入力信号の大きい場合にはリレー要素のように動作する。

リレー制御系の解析の必要とされる理由には次の 3 つが考えられる。その 1 つは、リレーまたはリレー特性を用いて自動制御系を構成するため、ないしはその可能性を検討するためである。この種のリレー制御系としては古くより電磁リレーを使用した発電機の電圧制御回路などがあり、回路が簡単、堅牢で軽量である特徴を有する。この種の制御系は最近においては温度制御・流量、水位調節などにおいて多く採用されている。

次に最適制御理論の発展とともに、自動制御系の制御能力を常に最大限に利用するという立場から、自動制御系にリレー特性を用いることが考えられている。リレー特性を利用した最適制御系の適否を決定する場合に、線形連続制御系との比較も必要であるが、最適制御を行なわない普通のリレー制御系との比較も当然行なわれなければならない。最適制御系の適否を判断する一つの基礎を与えるためにも、最適制御を行なわない普通のリレー制御系の研究を行なうことが必要である。

リレー制御系が研究される今一つの理由としては、制御系の要素には飽和特性のような非線形特性は避け難いものであるが、制御系の要素を全て線形性の仮定の成立する範囲内で使用するということは経済性その他から考えても決して合理的ではない。現実には機器の使用範囲は飽和

第11表 種々のリレー特性

	対 稱 特 性	非 対 称 特 性
1		
2		
3		
4		



領域にまで及んでいる場合が多い。飽和要素においてその線形部分の利得を次第に高めていった極限の場合に対する1つのモデルとしてリレー制御系が考えられる。この意味からもしリレー制御系の解析が必要とされる。

リレー特性に不動帯のある場合を除けば、リレー制御系に定常的な振動は避け難いものであるが、定常的な振動が発生することによる不利益を減少するために、

- 1 自励振動周期を制御信号の変化速度に較べてはるかに短くなるように設計する。
- 2 マイナ・ループを設けて高い周波数の振動を発生させる（滑り状態）
- 3 制御信号に較べて周波数の高い補足的入力を加えて、平衡状態の近傍でリレーの非線形特性を線形化する。

といった方法がとられている。これらの方法の研究の基礎を与えるものがリレー制御系における自励振動および強制振動の研究である。この場合、リレー特性は本質的に非線形であるので、非線形系に特有の現象が発生する。すなわち自励振動の発生、周波数引込み現象、分数調波振動や概周期振動の発生、あるいは滑り振動状態などが見られる。これらの問題については今日までの研究の結果、リレー制御系に正弦波入力に加えられた際の周期振動には、入力と同じ周期の基本調波振動の発生する場合とともに、入力の $\nu$ 倍 ( $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ) の周期を有する分数調波振動が発生する場合のあることが明らかにされ、その種類、存在条件、安定条件などが与えられている。また同一のパラメータの下で周期の異なった2つの振動が可能な場合のあることも示されており、その場合2つの振動のうちいずれが発生するかは、系の初期条件によって定まる。さらに分数調波振動においては入力に対する出力波形の位相の相異や出力波形の直流分の相異により幾通りかの振動が存在する。たとえば  $1/3$  調波振動の場合には、入力の位相に関して  $2\pi$  ずつ相互に位相の異なる3つの振動が実際に発生する。これらの幾通りかの同一分数調波振動の振

動状態の中で、いずれが発生するかということも系の初期条件によって決定されるのであるが、リレー制御系の初期条件とその時に発生する周期解との関係については、系統的な研究を行なったものはほとんどない。この場合に初期条件とその時に発生する周期振動との関係について考察するためには任意に与えられた初期条件に始まる過渡解を求めることが必要であるが、リレー制御系に限らず非線形振動系に周期的強制入力を加えた場合の過渡解を解析する一般的に有効な方法は確立されていない。

Duffing または van der Pol 型の非線形方程式で表わされる振動系に正弦波入力を加えた場合の過渡解の解析には Harmonic Balance 法における解の振幅と位相が時間的にゆっくりと変化すると仮定して導かれた微分方程式を位相面を用いて解析する方法がとられている。<sup>(35)</sup>しかしながらリレー制御系の場合にはリレー制御信号の値の如何により、リレー出力が不連続的に変化する点があり、またリレーにはヒステリシス特性が存在する場合があるので、上述の方法をリレー制御系の強制振動の過渡解の解析に用いるのは難しい。

一方リレー制御系においては、リレー出力の正負により2つの線形微分方程式が成立し、それぞれの方程式は容易に解くことができるのであるから、これら2つの方程式の解をリレーの切換えの時点において接続すれば、近似によることなく過渡解の解析が可能である。強制入力のないリレー制御系の場合には、位相面上に一定の切換曲線を求めて、その上で2つの線形微分方程式の解を接続して過渡応答を求めることが行なわれている。しかしリレー制御系に強制入力が増えられた場合には、この切換曲線が時間的に変化するので、過渡応答の解析は極めて困難で、これまで解析が行なわれた例はほとんどない。

本論文では周期的入力を有するリレー制御系の任意の初期条件より出発する過渡解を解析する独自の方法を提案し、この方法を用いて周期振動と初期条件の関係を考察して異なる周期振動を発生する初期条件の領域を見出すことを主たる目的としている。更にこの方法を周期解の解析に適用して周期解の理論の再検討を行なうとともに、リレー制御系に正

弦波入力を加えた場合には同一パラメータの下で周期振動と概周期振動の共存する場合があることを明らかにしている。

## § 1.2 リレー要素と線形部分

リレー制御系は一般に図 1.1 のような構成となっており、これらの構成要素を大別すると線形要素から成り立っている線形部分とリレー要素に分けることができ、リレー要素の出力は線形部分の入力となっている(図 1.2)。線形部分は機能的には伝達関数  $W(s)$  で表わすことができる。図 1.1 では  $f(t)$  なる系の入力が点 1 に加えられているが、点 1 か

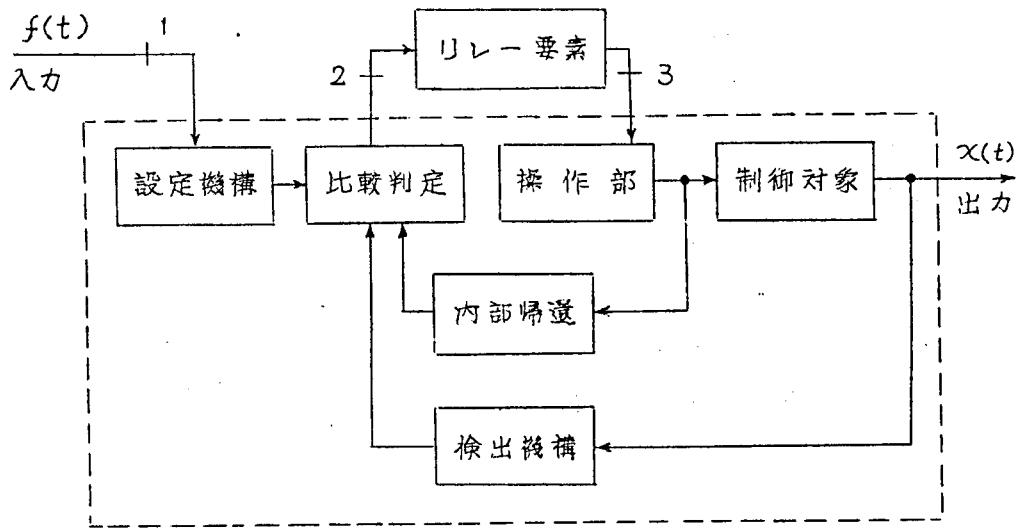


図 1.1 リレー制御系の構成図

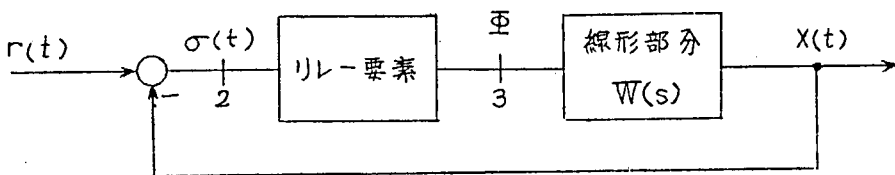


図 1.2 リレー要素と線形部分

ら点2への伝達関数  $P(s)$  がわかっていれば、 $f(t)$  なる信号が  $P(s)$  なる伝達関数を持つ要素を通過した後の出力  $r(t)$  を点2に加えることと  $f(t)$  を点1に加えることは等価であり、図1.1の系を図1.2のように表わした場合、このリレー制御系の入力は  $r(t)$  で与えられる。

図1.2に示すリレー制御系に周期振動が発生している場合、関数  $\sigma(t)$ ,  $x(t)$ ,  $r(t)$  は時間についての周期関数となる。そこで周期関数であることを表わすのに各関数の上に  $\sim$  印を付け、それぞれ  $\tilde{\sigma}(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{r}(t)$  のように表わすことにする。入力信号  $\tilde{r}(t)$  が、

$$\tilde{r}(t) = r_{DC} + A r_0(t) \quad (1.1)$$

ただし  $r_{DC}$  : 入力の直流分;  $A$  : 周期成分の振幅

$r_0(t)$  : 振幅1の周期関数

のように表わされるものとし、リレー要素は図1.3に示すような非対称な特性を有するものとする。

電圧制御系、速度制御系、温度制御系などにおいては線形部分の伝達関数  $W(s)$  は0型となる。このような系ではリレーの出力は非対称となるのが普通である。そこで  $W(0) = C_{00}$  とおき、次のように変数変換を行なう。

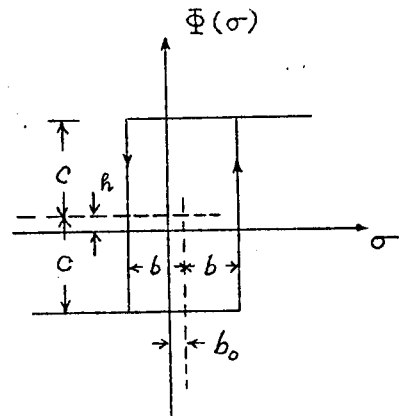


図1.3 非対称リレー特性

$$\Phi^*(\sigma^*) = \begin{cases} C \operatorname{sign}(\sigma^* - b) & \dot{\sigma}^*(t) > 0 \\ C \operatorname{sign}(\sigma^* + b) & \dot{\sigma}^*(t) < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\sigma^*(t) = \sigma(t) - \sigma_0 \quad (1.3)$$

$$x^*(t) = x(t) - C_{00}h \quad (1.4)$$

$$r_{DC}^* = r_{DC} - C_{00}h - \sigma_b \quad (1.5)$$

この新しい変数によるブロック線図は図 1.4 のようになる。つまりリレー出力およびヒステリシスの幅の非対称性を入力の直流成分の中に入れてしまえば、一般性を失うことなくリレー特性は対称であると仮定してもさしつかえない。

位置制御系においては線形部分の伝達関数は 1 型となり、 $C_{00} = \infty$  となる。

この場合には

$$\sigma^*(t) = \sigma(t) - \sigma_b \quad (1.6)$$

$$x^*(t) = x(t) - r_{DC} + \sigma_b \quad (1.7)$$

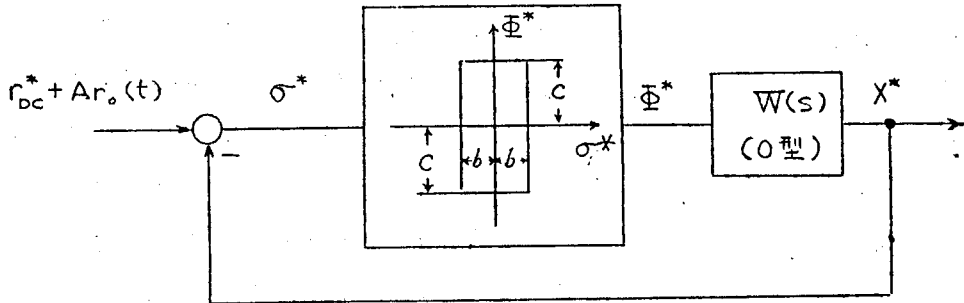


図 1.4 0 型の線形部分を持つリレー制御系

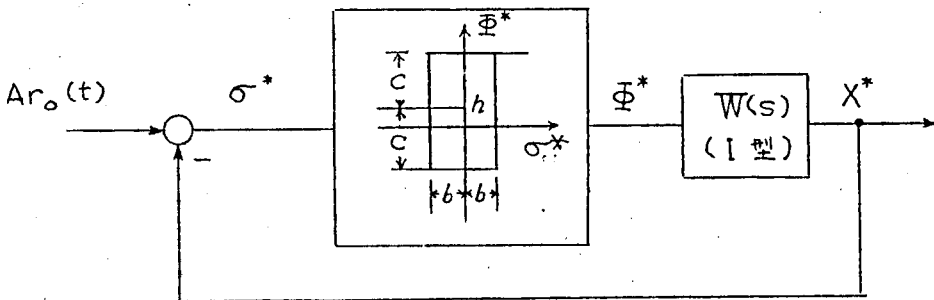


図 1.5 1 型の線形部分を持つリレー制御系

のように変数変換を行うと、図 1.5 のようなブロック線図をえる。I 型の系では変数の座標の平行移動によってリレー出力の非対称性を取り除くことはできないが、入力の直流分およびヒステリシスの幅の非対称性は取り去ることができる。以下では入力の直流分およびリレー特性の非対称性を、上述のように、線形部分の伝達関数が 0 型であれば入力直流分にまとめてしまい、I 型であれば平行移動によって入力直流分とヒステリシスの非対称性は除去し、リレー出力の非対称性のみを考慮して解析を行なうことにする。

図 1.4 あるいは図 1.5 によって示されるリレー制御系に実際に発生する周期振動は今日知られている限りではいずれも 1 周期の間のリレーの切換えが 2 回であるような振動である。このように 1 周期の間のリレーの切換えの回数が 2 回であるような周期解を以下では単純であると呼び、リレーの切換えが 1 周期の間に 3 回以上あるような周期解を複雑であると呼ぶことにする。ただし特にことわらない限りは、単純な周期解のみを考えることにする。今日まで解析的に取扱われている周期解もほとんどが単純なものであり、複雑な周期解について若干の解析が行なわれた例もあるが、そこで見出された複雑な周期解も安定条件を満足せず、実際には発生しないと報告されている<sup>(12)(13)</sup>。またアナログ計算機を用いた数多くの実験によっても複雑な振動の発生は認められていない。

リレー制御系に周期  $T$  なる周期解が存在する場合においては任意の時間  $t$  ( $t > 0$ ) において、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}(t) &= \tilde{\sigma}(t+T) \\ \tilde{x}(t) &= \tilde{x}(t+T) \\ \tilde{r}(t) &= \tilde{r}(t+T) \end{aligned} \right\} (1.8)$$

が成立するが、とくに

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}(t) &= -\tilde{\sigma}(t+T/2) \\ \tilde{x}(t) &= -\tilde{x}(t+T/2) \\ \tilde{r}(t) &= -\tilde{r}(t+T/2) \end{aligned} \right\} (1.9)$$

の成立するような周期解を対称であると呼ぶ。リレー制御系の線形部分

の伝達関数が1型である場合には線形部分の入力の時間平均は零でなければならない。したがってリレー特性が対称で、伝達関数が1型であるようなリレー制御系における周期解の場合、リレー出力の正である時間と負である時間はひとしく、その周期解は対称でなければならない。いま、

$$\tilde{r}(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

なる入力に加えられた場合に、

$$T = \frac{2\nu\pi}{\omega}$$

なる対称な  $1/\nu$  調波振動の解が存在すると仮定すると、

$$\sigma(t) = r(t) - x(t)$$

であるから、(1.9)式を用いると、

$$A \sin(\omega t_0 + \varphi_0) = -A \sin(\omega t_0 + \varphi_0 + \nu\pi) \quad (1.10)$$

をえる。すなわち対称な  $1/\nu$  調波振動が存在するためには  $\nu$  は奇数でなければならないことがわかる。しかるにリレー特性が対称で伝達関数が1型であるようなリレー制御系における周期解は全て対称でなければならないから、このような系においては奇数次の分数調波振動の解のみが存在して、偶数次分数調波振動の解は存在しない。また伝達関数が0型でリレー特性が対称な制御系においても、対称な周期解の存在するのは基本調波振動と奇数次分数調波振動の場合だけである。

対称な周期解について検討する場合、これは半周期毎に符号の異なる同じ波形の解となるから、任意の半周期間の解の変化について考察すれば充分である。いま対称な周期解においてリレーが負から正に切り換えられる瞬間を  $t = t_0$  とすると、この周期解が存在するためには、

$$\tilde{\sigma}(t_0) = b \quad (1.11)$$

$$\tilde{\sigma}(t_0 - 0) > 0 \quad (1.12)$$

$$\tilde{\sigma}(t) \geq -b \quad t_0 \leq t < t_0 + T/2 \quad (1.13)$$

なる条件が必要である。今日までの周期解の理論は(1.11)式および(1.12)式の条件についての考察が主であり、(1.11)式および(1.12)

式の条件を判別するためにチブキン氏はリレー制御系の特性量と呼ばれるベクトル量を定義してこれを用いて図式的にこれらの条件を判別する方法を考案し、坂和氏はこの方法を分数調波振動の場合に適用する研究を行なっている。また坂和氏は1/3調波振動の発生限界が(1.13)式から与えられるとしているが、(1.13)式の条件については今日まで十分な考察が行なわれていない。さらに、相異なる周期振動を発生する初期条件の領域を決定する場合に不安定周期解が存在するか否かということが極めて重要な条件となるのであるが、基本調波振動ならびに分数調波振動の不安定解の存在する入力振幅の上限を決定するのは、(1.12)式ではなく、正確には(1.13)式の条件である。以下においては(1.13)式の条件を考慮してリレー制御系の周期解について詳細な検討を行なっている。



## 第2章 一次のリレー制御系における振動現象 とその初期値問題

本章では、線形部分が一次の伝達関数で表わされるリレー制御系の過渡解および周期解を解析する方法について述べる。このような系に発生する  $1/3$  調波振動と基本調波振動に着目し、与えられたパラメータの下ではこれらの振動がそれぞれいかなる初期条件の下で発生するかについて考察を行い、それぞれの振動を発生する初期条件の領域と入力位相角との関係を与えている。この場合これらの領域の境界が満足すべき条件は簡単な形で与えられ、ある有限領域内にあるすべての解曲線が時間とともにその領域内にある周期解に収斂して行くことが明らかにされている。

### § 2.1 解曲線の解析

図 2.1 に示すように、線形部分の伝達関数が  $W(s) = k/s$  で与えられ、リレー要素が図 2.2 に示される対称特性を有する簡単なリレー制御系に、正弦波入力  $r^*(t) = A^* \sin(\omega t + \varphi_0)$  を加えた場合について考える。

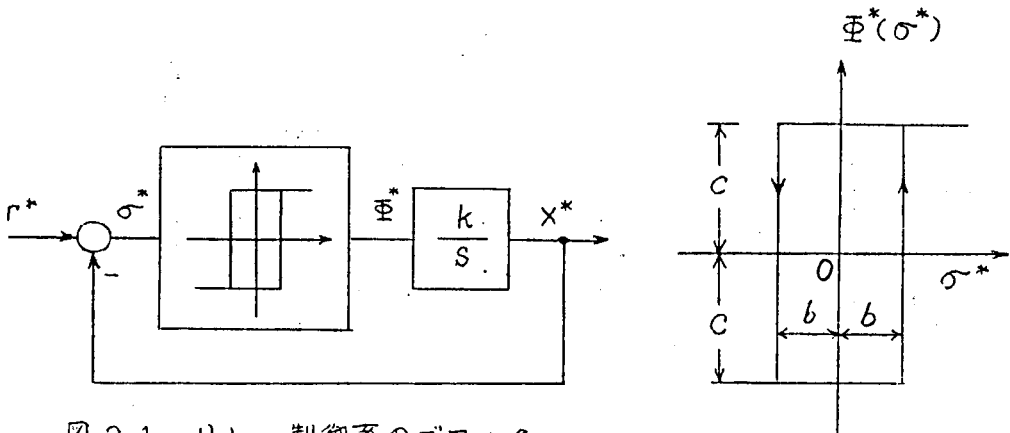


図 2.1 リレー制御系のブロック線図

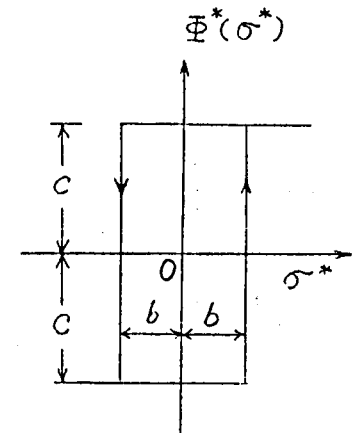


図 2.2 対称リレー特性

この系の出力  $x^*$  について考えると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= k\Phi^*(\sigma^*) \\ \sigma^*(t) &= A^* \sin(\omega t + \varphi_0) - x^* \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

なる微分方程式が成立する。ここで  $\varphi_0$  は  $t=0$  における入力の位相角である。(2.1)式において、

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x^*}{ck}, \quad \sigma = \frac{\sigma^*}{ck}, \quad A = \frac{A^*}{ck}, \\ b &= \frac{b^*}{ck} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

のように変数および定数の変換を行なうと、(2.1)式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \Phi(\sigma) \\ \sigma(t) &= A \sin(\omega t + \varphi_0) - x \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

のように無次元化される。この無次元化された方程式に対するブロック線図は図2.3のようになり、また  $\Phi(\sigma)$  は図2.4に示すような絶対値1の関数で、 $|\sigma| > b$  の場合には、

$$\begin{aligned} \sigma > b & \quad \text{ならば} \quad \Phi(\sigma) = 1 \\ \sigma < -b & \quad \text{ならば} \quad \Phi(\sigma) = -1 \end{aligned}$$

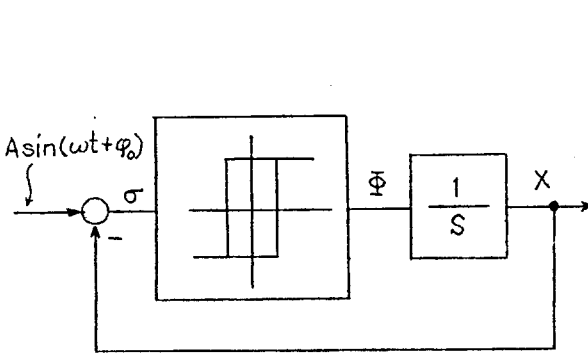


図 2.3 リレー制御系のブロック線図

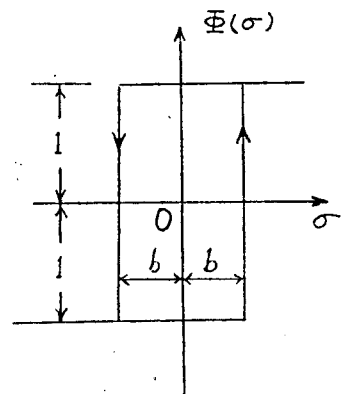


図 2.4 対称リレー特性

のように一意的に定まるが、

$$|\sigma| \leq b \quad (2.4)$$

の場合には  $1$  または  $-1$  のいずれにもとりうる。したがって系の出力  $x$  の初期値を  $x_0$  とした場合に、

$$\sigma(0) = A \sin \varphi_0 - x_0 \quad (2.5)$$

であるから、

$$|A \sin \varphi_0 - x_0| > b \quad (2.6)$$

であれば、以後の系の状態は一意的に定まるが、(2.6)式の不等号が反対の場合には、 $x_0$  の他にリレー出力の初期値  $\varpi_0$  をも与えなければ以後の系の状態は定まらない。

縦軸に変数  $x$  をとり、横軸に時間  $t$  をとり、 $(t, x)$  平面上で  $x$  の時間的变化を考察する。リレーの出力  $\varpi$  は  $\pm 1$  の何れかをとるから、 $x$  の時間的变化を示す解曲線は全て傾斜  $dx/dt = 1$  ( $\varpi = 1$  の場合) または  $dx/dt = -1$  ( $\varpi = -1$  の場合) の平行な直線となる。以下では便宜上、正の傾斜の解曲線 ( $\varpi = 1$ ) を正の解曲線と呼び、負の傾斜の解曲線 ( $\varpi = -1$ ) を負の解曲線と呼ぶ。

さて図 2.4 から明らかなように、リレーの極性は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t) &= -b\varpi \\ \dot{\sigma}(t)\varpi &< 0 \quad (\cdot = \frac{d}{dt}) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

なる 2 つの条件が満足されるときに切り換えられる。

(2.3) 式の第 2 式を用いてこの条件を書き直すと、

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin(\omega t + \varphi_0) + b\varpi \\ [A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \varpi]\varpi &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

となる。したがって切換曲線は  $\varphi_0 = 0$  の場合には (2.8) 式の第 1 式より

$$\left. \begin{aligned} \text{切換曲線 I} &: x = A \sin \omega t + b \\ \text{切換曲線 II} &: x = A \sin \omega t - b \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

となり、Fig. 5 に示したようになる。また  $\varphi_0 \neq 0$  の場合には時間の原点をこの図の  $t = \varphi_0/\omega$  の点に移動した場合を考えればよいので、

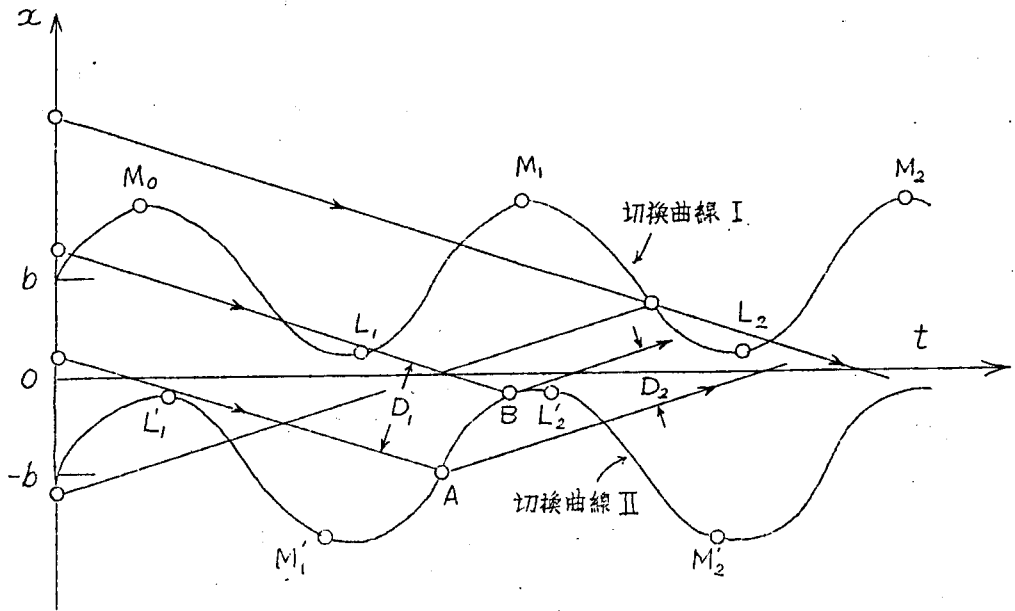


図 2.5 解曲線と切換曲線

以下では  $\varphi_0 = 0$  の場合について考察を進めるが、その結果は  $\varphi_0$  キ 0 の場合にも適用される。

(2.9) 式の 2 つの切換曲線のうちで、(2.8) 式の第 2 式を満足する区間に解曲線が到達した場合には、切換曲線 I および II の上でリレーの極性はそれぞれ正から負、および負から正に切り換えられる。(2.8) 式の第 2 式を満足する切換曲線上の区間を求めるために、(2.8) 式の第 2 式の左辺の括弧の中の式を零とおくと、

$$A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \overline{\alpha} = 0 \quad (2.10)$$

となる。(2.10) 式を満足する  $t$  の値を (2.8) 式の第 1 式に代入すると、図 2.5 の切換曲線 I および II の上にそれぞれ点  $M_0, L_1, M_1, \dots$  および  $L_1', M_1', L_2', \dots$  をえる。

ここにおいて、' のない点は切換曲線 I の上の点 ( $\overline{\alpha} = 1$ ) であり、' を附した点は切換曲線 II の上の点 ( $\overline{\alpha} = -1$ ) をあらわす。また (2.10) 式を満足する  $t$  を (2.9) 式に代入してえられる切換曲線上の点において、

$$\ddot{\phi}(t) \mp = -\mp A \omega^2 \sin \omega t > 0$$

なる場合にはこれをLで表われ、不等号の反対の場合をMで表わしている。

このような点によって定まる切換曲線上の区間  $[M_{n-1}, L_n]$  または  $[M'_{n-1}, L'_n]$  においては (2.8) 式の第2式の条件が満たされている。一方区間  $[L_n, M_n]$  ならびに  $[L'_n, M'_n]$  では (2.8) 式の不等号は反対となる。したがって区間  $[M_{n-1}, L_n], [M'_{n-1}, L'_n]$  だけでリレーの切換えが行なわれ、区間  $[L_n, M_n], [L'_n, M'_n]$  ではリレーの切換えは行なわれない。また区間  $[L_n, M_n], [L'_n, M'_n]$  では (2.8) 式の第2式、したがって (2.7) 式の第2式の不等号が反対となっているので、これらの区間に到達するそれぞれ正および負の解曲線は存在しない。

図 2.5 の切換曲線 I の下側の領域では、任意の点を通る正の解曲線が 1 つだけ存在し、切換曲線 II の上側の領域では任意の点を通る負の解曲線が 1 つだけ存在する。したがって切換曲線 I と II の間に  $x$  がある場合には、リレー出力の正負に対応する 2 つの解曲線が存在する。

ところで (2.10) 式からわかるように、入力振幅  $A$  および  $\omega$  が小さく、 $A\omega < 1$  の成立する場合には常に (2.8) 式の第2式の関係が成立するので、(2.10) 式を満足するような根は存在せず、したがって点  $M_n, L_n, M'_n, L'_n$  等は存在しない。この場合には切換曲線 I, II の全区間でリレーの切換えが行なわれる。

次に任意の 2 つの正または負の解曲線がある場合に、リレーの切換えを受けることによって、その相互関係はどのように変化するかについて考察する。かりに任意の 2 つの負の解曲線と切換曲線 II の交点を図 2.5 のように点 A ( $t_A, x_A$ )、点 B ( $t_B, x_B$ ) とする。リレーの切換え前の解曲線はいずれも傾斜  $-1$  の曲線であり、切換えの後では傾斜  $1$  の直線であるから、2 つの解曲線の相互関係を 2 直線間の距離で表わすことができる。リレーの切換え前の解曲線間の距離を  $D_1$ 、切換え後の距離を  $D_2$  とする。一般に 2 点 ( $t_A, x_A$ )、( $t_B, x_B$ ) を通り、傾斜  $m$

の2直線間の距離Dは、

$$D = \frac{|x_B - x_A - m(t_B - t_A)|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

で与えられるので、

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} |(x_B - x_A) + (t_B - t_A)|$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} |(x_B - x_A) - (t_B - t_A)|$$

となる。リレーの切換えによってこの2つの解曲線間の距離が短縮されるか、それとも拡大するかについて考えると、

$$D_1^2 - D_2^2 = 2(x_B - x_A)(t_B - t_A)$$

であるから、

$$(x_B - x_A)(t_B - t_A) > 0 \tag{2.11}$$

ならば、リレーの切換えにより、解曲線間の距離は短縮される。また不等号が反対ならば、解曲線間の距離は拡大する。(2.11)式の関係はリレーが負から正に切換えられる場合について導かれたものであるが、同じような関係式はリレーが正から負に切り換えられる場合についても同様の方法により導かれ、その結果は次式に統一される。

$$\Phi_0 (x_B - x_A)(t_B - t_A) < 0 \tag{2.12}$$

ただし  $\Phi_0$  は切換え前のリレー出力を表わす。

この関係は後に述べる周期解の安定問題、初期条件と周期解の関係を論じる場合の基礎となるものである。

## § 2.2 周期解の解析

このリレー制御系において、1周期Tの間のリレーの切換え回数が2であるような単純な周期振動が存在する場合について考えよう。いま周期解においてリレーが正から負に切り換えられる点を  $(\tilde{t}_I, \tilde{x}_I)$  とし、つぎに負から正に切り換えられる点を  $(\tilde{t}_{II}, \tilde{x}_{II})$  とすると、これらの

点はそれぞれ切換曲線 I および II の上にある。このリレー制御系に発生する周期振動においては § 1.2 で述べたように、リレー出力が 1 になっている時間と -1 になっている時間が等しくなければならない。したがってまたこの周期解は半周期  $T/2$  毎に正負反対の全く同じ波形の対称な振動となり、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_I &= -\tilde{x}_{II} \\ \tilde{t}_I + \frac{T}{2} &= \tilde{t}_{II} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

が成立する。(2.3) 式の第 1 式において  $\alpha = -1$  とおき、 $t=0$  では  $x = \tilde{x}_I$  なる初期条件を与え、同式を  $t=0$  から  $t=T/2$  まで積分すると、

$$\tilde{x}_{II} = \tilde{x}_I - \frac{T}{2} \quad (2.14)$$

となり、この式に (2.13) 式の第 1 式を用いると、

$$\tilde{x}_I = -\tilde{x}_{II} = \frac{T}{4} \quad (2.15)$$

をえる。点  $(\tilde{t}_I, \tilde{x}_I)$ ,  $(\tilde{t}_{II}, \tilde{x}_{II})$  はそれぞれ切換曲線 I および II 上にあることから、(2.15) 式の  $\tilde{x}_I$ ,  $\tilde{x}_{II}$  の値を (2.9) 式に代入すると、

$$A \sin \omega \tilde{t}_I = \tilde{x}_I - b \quad (2.16)$$

$$A \sin \omega \tilde{t}_{II} = \tilde{x}_{II} + b \quad (2.17)$$

のようになる。振動の周期  $T$  が入力周期の  $\nu$  倍 ( $\nu = 2, 3, 4, \dots$ ) である時に、この振動は  $1/\nu$  調波振動と呼ばれ、また  $\nu=1$  の場合には基本調波振動と呼ばれる。

しかるに周期解の波形が半周期毎に符号が逆の同じ波形とならなければならないので、

$$\tilde{\sigma}(t) = -\tilde{\sigma}(t + T/2)$$

$$\tilde{x}(t) = -\tilde{x}(t + T/2)$$

となり、(2.3) 式の第 2 式にこれらの式を代入すると、

$$A \sin(\omega t + \varphi_0) + A \sin(\omega t + \omega T/2 + \varphi_0) = 0$$

をうる。この関係が成立するためには  $\omega T/2 = \nu\pi$ , ( $\nu = 1, 3, 5, \dots$ )  
 でなければならない。したがって、

$$T = \frac{2\nu\pi}{\omega}, \quad (\nu = 1, 3, 5, \dots) \tag{2.18}$$

となる。

さて (2.16), (2.17) 式が実根を持つためには、

$$\left| \frac{\tilde{x}_I - b}{A} \right| < 1, \quad \left| \frac{\tilde{x}_{II} + b}{A} \right| < 1$$

なることが必要である。上式に (2.15), (2.18) 式を代入して、

$$A_{p\nu} = \left| \frac{\nu\pi}{2\omega} - b \right| \tag{2.19}$$

とおけば、 $1/\nu$  調波振動の解が存在するためには、

$$A > A_{p\nu} \tag{2.20}$$

であることが必要である。また (2.19) 式からわかるように、 $A_{p\nu} = 0$   
 となるような振動周期  $T_0$  は

$$T_0 = 4b \tag{2.21}$$

となり、これは自励振動の周期である。(2.20) 式の成立している場合、  
 (2.16), (2.17) 式はいずれも任意の  $n$  に対して

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} < \omega t < 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$2n\pi + \frac{3\pi}{2} < \omega t < 2(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

の間に根を1つずつ持っている。これらの根によって与えられる切換曲  
 線上の点でリレーの切換えの行なわれる周期解が仮に全て存在している  
 ものと仮定して、これらの周期解の安定性を吟味することにしよう。図  
 2.5 の任意の点Aを周期解において負の解曲線から正の解曲線にリレー  
 の切換えの行なわれる点にとり、点Bは点Aの無限に近いものと仮定し  
 て、 $dt \equiv t_B - t_A$ ,  $dx \equiv x_B - x_A$  とおくと、(2.11) 式の条件  
 を  $(dx/dt) > 0$  のように書くことができる。同じく (2.12) 式の条

六  
内



件は  $(\text{重 } dx/dt) < 0$  のように書き表わすことができるから、(2.16) および (2.17) 式を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega t_{II} &> 0 \\ \cos \omega t_I &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

のようになる。すなわち周期解においてリレー出力が  $\text{重}$  から  $-\text{重}$  に切り換えられた際に、(2.22) 式が成立している場合には、その周期解の十分近くにある任意の解はリレーの切換えの行なわれた後においてその周期解に一層接近し、(2.22) の不等号が反対の場合には逆に周期解から離れていくことになる。したがって切換曲線上で (2.22) 式が成立する場合にその周期解は安定、逆の場合は不安定となる。

次にこれらの周期解が存在するための条件について考える。(2.15)、(2.16) および (2.17) 式によって与えられる点  $(\tilde{t}_I, \tilde{x}_I), (\tilde{t}_{II}, \tilde{x}_{II})$  はこの点でリレーの切換えが行なわれるべき点であるから、それぞれ図 2.5 の区間  $[M_{n-1}, L_n]$  および  $[M'_{n-1}, L'_n]$  上になければならない。また切換曲線 I の区間  $[L_n, M_n]$  を通る正の解曲線は存在せず、切換曲線 II の区間  $[L'_n, M'_n]$  を通る負の解曲線は存在しないから、周期解を与える正ならびに負の解曲線もそれぞれ区間  $[L_n, M_n]$  ならびに  $[L'_n, M'_n]$  を通ってはいはならない。したがって周期解の正および負の解曲線がそれぞれ点  $L_n, L'_n$  を通っている場合が周期解の存在するための限界を与える。今考察している振動は対称であるから、周期解の正、負いずれの解曲線についても同じ結果がえられるので、仮に負の解曲線について考えることにする。点  $L'_1$  を通る負の解曲線が周期 T の周期解であり、点  $L'_1$  を通過した後でだけ時間を経過した時に再び切換曲線 II の区間  $[M'_1, L'_2]$  と交わるものとする。

点  $L'_1$  の座標を  $(t_L, x_L)$  とすると、(2.9) 式の第 2 式、(2.10) 式および (2.17) 式よりそれぞれ、

$$x_L = -\frac{T}{4} + c = A \sin \omega t_L - b \quad (2.23)$$

$$A \omega \cos \omega t_L + 1 = 0 \quad (2.24)$$

$$A \sin \omega (t_L + \tau) = -\frac{T}{4} + b \quad (2.25)$$

をえる。(2.25)式の左辺を三角関数の加法定理によって展開し、(2.23)、(2.24)式を用いて、 $A$ および $t_L$ を消去すると、

$$H(\tau) \equiv -\left(b - \frac{T}{4}\right) + \left(b - \frac{T}{4} + \tau\right) \cos \omega \tau - \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau = 0 \quad (2.26)$$

$$\text{ただし } 0 \leq \tau < \frac{\nu \pi}{\omega} \quad (2.27)$$

なる関係式をえる。また(2.23)および(2.24)式より $t_L$ を消去すると、

$$A^2(\tau) = \left(b - \frac{T}{4} + \tau\right)^2 + \frac{1}{\omega^2} \quad (2.28)$$

をえる。したがって方程式(2.26)を満足する $\tau$ の値を用いて(2.28)式を計算すると、周期振動の存在限界を与える振幅を計算することができる。

ここで関数 $H(\tau)$ について考えると、

$$H'(\tau) \equiv \frac{dH}{d\tau} = -\left(b - \frac{T}{4} + \tau\right) \omega \sin \omega \tau \quad (2.29)$$

であり、 $H'(\tau)$ は

$$\left(b - \frac{T}{4} + \tau\right) = 0 \quad \text{または} \quad \sin \omega \tau = 0$$

の成立した場合に符号が反転する。簡単な計算により、

$$\left. \begin{aligned} H(0) = 0, \quad H\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{\omega}, \quad H'(0) = 0 \\ H''(0) \equiv \frac{d^2H}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} = -\omega^2 \left(b - \frac{T}{4}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

となることが示されるから、

$$T < T_0 = 4b$$

の場合には $H''(0) < 0$ であり、

$$0 \leq \tau \leq \pi/\omega \quad \text{では} \quad H'(\tau) \leq 0$$

$$\pi/\omega \leq \tau \leq 2\pi/\omega \quad \text{では} \quad H'(\tau) \geq 0$$

であるから、この場合の関数  $H(\tau)$  は図 2.6 (b) のような形となっていることがわかる。また、

$$T > T_0$$

の場合には  $H''(0) > 0$  であり、また  $0 \leq (\frac{T}{4} - b) \leq \frac{\pi}{\omega}$  とすると

$$0 \leq \tau \leq (\frac{T}{4} - b) \quad \text{では} \quad H'(\tau) \geq 0$$

$$(\frac{T}{4} - b) \leq \tau \leq \pi/\omega \quad \text{では} \quad H'(\tau) \leq 0$$

$$\frac{\pi}{\omega} \leq \tau \leq \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{では} \quad H'(\tau) \geq 0$$

となるから、この場合の関数  $H(\tau)$  の形は  $\tau = \pi/\omega$  で極小を有する図 2.6 (a) のような形となる。ここで特に

$$H(\pi/\omega) \leq 0 \tag{2.31}$$

と仮定すると関数  $H(\tau)$  は  $0 \leq \tau \leq 2\pi/\omega$  の範囲において3個の根を持つことがわかる。§ 2.1 で述べたように切換曲線 II 上の点  $L_n$  では、

$$\ddot{\sigma}(t_L) = -A\omega^2 \sin \omega t_L < 0$$

でなければならないが、この式を(2.23)式によって書き直すと、

$$\tau + b - \frac{T}{4} > 0 \tag{2.32}$$

となるから、図 2.6 (a) の3根のうちで  $\tau = 0$  なる根は上式の条件を満足していない。したがって  $\tau = 0$  なる根は無意根である。

ここで(2.26)式に  $\tau = \pi/\omega$  を代入し、さらに(2.18)式を用いて簡単な計算を行なうと(2.31)式の代わりに、

$$\omega > \omega_k \tag{2.33}$$

ただし

$$\omega_k = \frac{(\nu-1)\pi}{2b} \tag{2.34}$$

をえる。

上式からわかるように入力の角周波数  $\omega$  が  $\omega_k$  より小さい場合には、

(2.21) 式は  $\tau$  の変化範囲で実根を持たず、 $1/\nu$  調波振動が存在しないことになる。また  $\pi/\omega < (T/4 - b)$  の場合には  $H(\tau)$  は  $\tau = (T/4 - b)$  で極小となるが、この  $H(T/4 - b) > 0$  となり、(2.26) 式の方程式は成立しない。

図 2.6 (a), (b) の  $q$  および  $r$  で示されている (2.27) 式の根をそれぞれ  $\tau_q, \tau_r$  で示すことにすると、 $0 \leq \tau_q < \pi$  であるから、このような条件を満たす解は不安定周期解であり、また  $\pi < \tau_r < 2\pi$  であり、このような条件を満たす解は安定周期解である。したがって  $\tau_q, \tau_r$  を (2.28) 式に代入し、(2.18) 式を用いると、不安定および安定周期解の存在する振幅の上限がそれぞれ、

$$A_{q\nu}^2 = \left( b - \frac{\nu\pi}{2\omega} + \tau_q \right)^2 + \frac{1}{\omega^2} \quad (\nu = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.35)$$

$$A_{r\nu}^2 = \left( b - \frac{\nu\pi}{2\omega} + \tau_r \right)^2 + \frac{1}{\omega^2} \quad (\nu = 3, 5, \dots) \quad (2.36)$$

のように与えられる。ただし、(2.27) 式より  $\tau$  の定義域は  $\nu = 1$  であれば  $0 \leq \Delta\tau < \pi/\omega$  となるので、 $\tau_r (> \pi/\omega)$  なる根は無関係である。したがって (2.36) 式では  $\nu = 1$  の場合は除外する。

さて以上の結果に基づいて、(2.19)、(2.35)、(2.36) 式を用いて基本

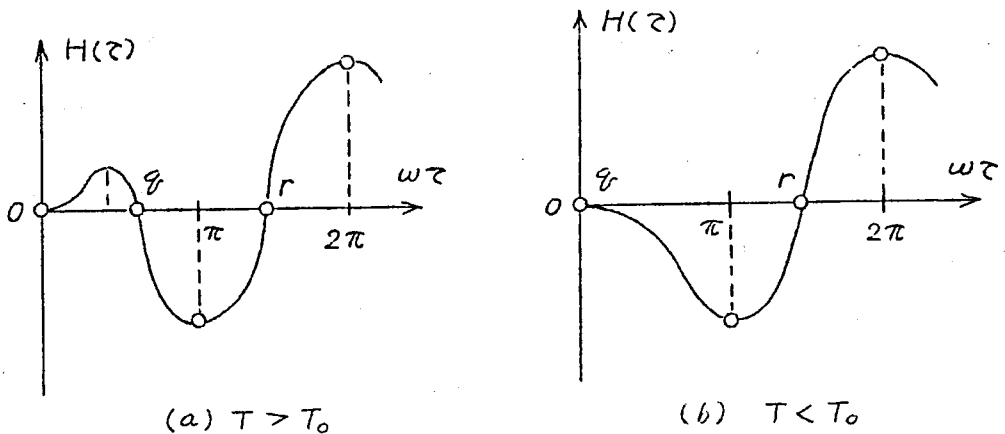


図 2.6 関数  $H(\tau)$

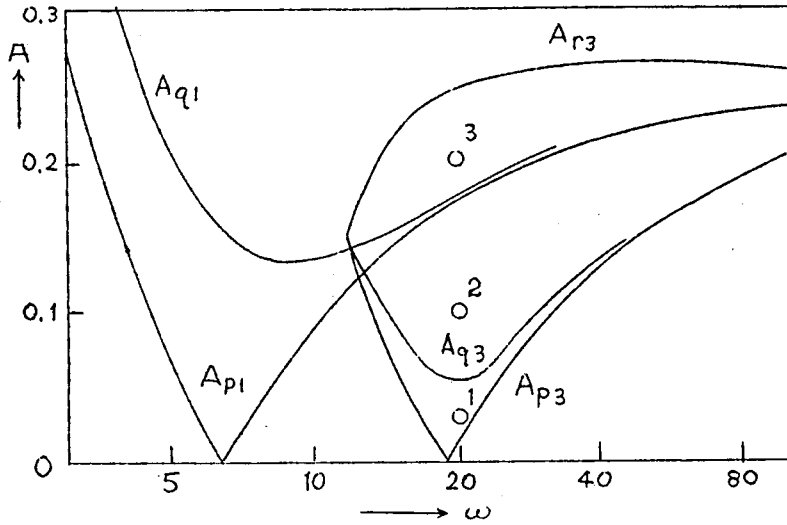


図 2.7 基本調波振動と  $1/3$  調波振動の解の存在領域 ( $b = 0.25$ )

調波振動および  $1/3$  調波振動の存在するパラメータ ( $A, \omega$ ) の領域を  $b = 0.25$  の場合について求めると図 2.7 をえる。この図の曲線  $A_{p1}$  より上の領域では基本調波振動が発生し、曲線  $A_{p3}$  と  $A_{r3}$  の間の領域では  $1/3$  調波振動が発生する。また曲線  $A_{p1}$  と曲線  $A_{q1}$  の間の領域ならびに曲線  $A_{p3}$  と  $A_{q3}$  の間の領域では、各周期解に安定なものとは不安定なものが存在する。

図 2.7 の点 3 ( $A = 0.20, \omega = 20$ ) にパラメータを取った場合には基本調波振動と  $1/3$  調波振動が共に発生する。前述のように  $1/3$  調波振動には入力に関して  $2\pi$  だけ相互に位相の異った 3 つの周期解が存在する。図 2.8 はこの場合に発生する基本調波振動と 3 種類の  $1/3$  調波振動の波形を示す。

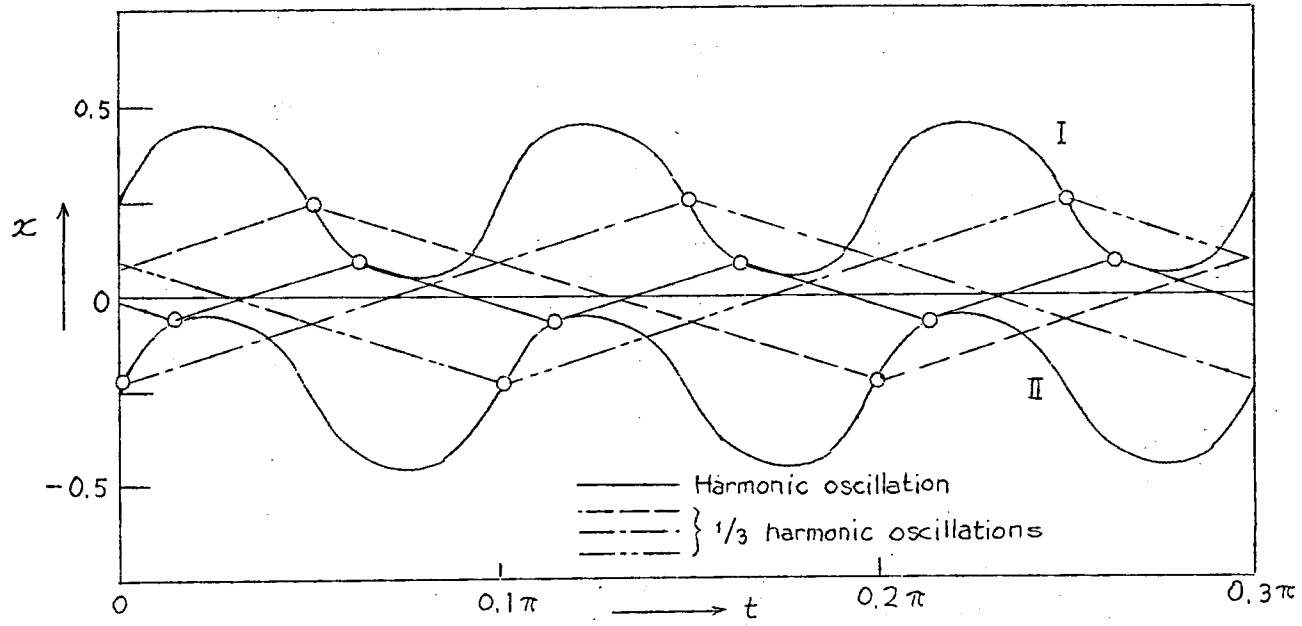


図 2.8 基本調波振動と  $1/3$  調波振動

( $A = 0.20$ ,  $\omega = 20$ ,  $b = 0.25$ )

## § 2.3 境界曲線の決定

任意の初期値  $x_0, \dot{x}_0, \varphi_0$  から出発した振動が最終的にどの周期解に落着くかによって、解曲線全体をいくつかのグループに分けることができる。各グループの境界となっている解曲線を境界曲線と呼ぶことにする。この境界曲線は切換曲線と解曲線との相互関係から見出されるものであるが、境界曲線を決定する条件は入力振幅  $A$  の大きさにより3つの場合がある。次に  $b = 0.25, \omega = 20$  の場合に例をとって境界曲線とその満足すべき条件について述べる。図 2.5 および図 2.8 においては縦軸を  $x$ 、横軸を時間  $t$  にとっていたが、以下では横軸を入力位相角  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  にとることにする。そしてまず  $\varphi_0 = 0$  の場合について考察してそれぞれの定常振動を発生する初期条件の領域を示す図を作成しよう。後に示すように  $\varphi_0 \neq 0$  の場合にはその領域図の横座標の原点を  $\varphi = \varphi_0$  の点に移動することによって、同じ図でもって任意の位相の正弦波入力がこの系に加えられた場合に発生する周期振動と初期条件の関係をも決定することができる。このように  $\varphi_0 = 0$  と仮定すると、 $\omega$  は一定であるから横軸は時間の経過を表わすことになる。

### 2.3.1 $1/3$ 調波振動の不安定解の存在する場合

入力振幅  $A$  を図 2.7 において  $A_{p3} < A < A_{q3}$  となる領域にとった場合には  $1/3$  調波振動の安定解と不安定解が共に存在する。入力振幅および入力周波数を図 2.7 の点 1 にとって初期条件と周期解の関係について考察する。これらの周期解のリレーの切換えの行なわれる点は、(2.15) 式を (2.16), (2.17) 式に代入することにより求められる。さらにその周期解の安定性は (2.22) 式により判別することができる。図 2.9 ではこれらの安定ならびに不安定周期解のリレーの切換えの行なわれる点を  $\circ$  印でもって示してある。これらの点を通る正および負の解曲線を順次つなぎ合わせることによって周期解の波形がえられる。この場合安定周期解の波形は図 2.8 の場合と同じようになるので、図 2.9 ではこれを省

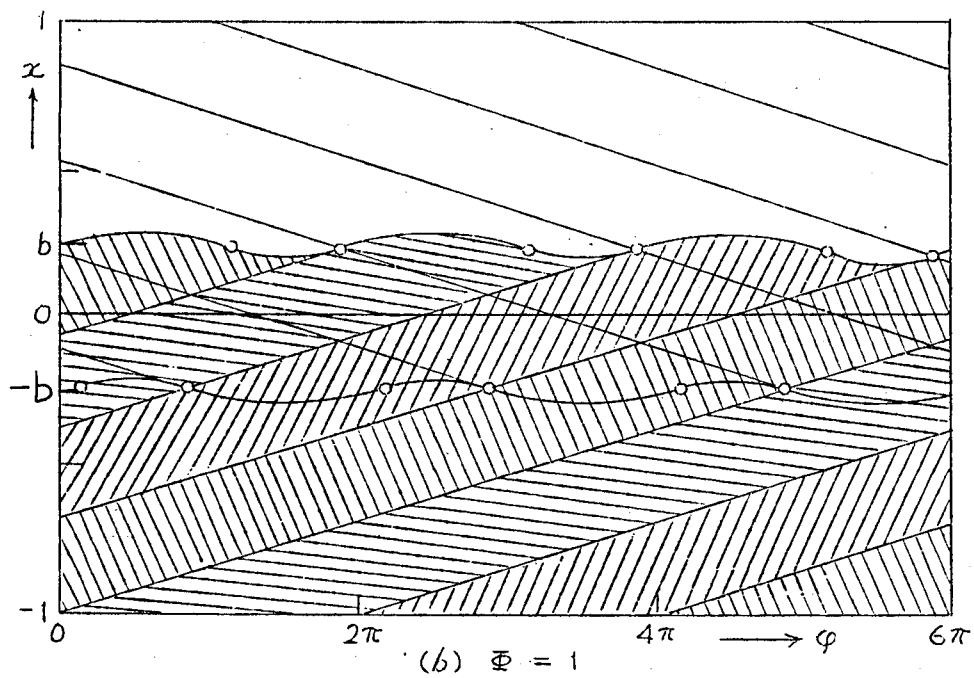
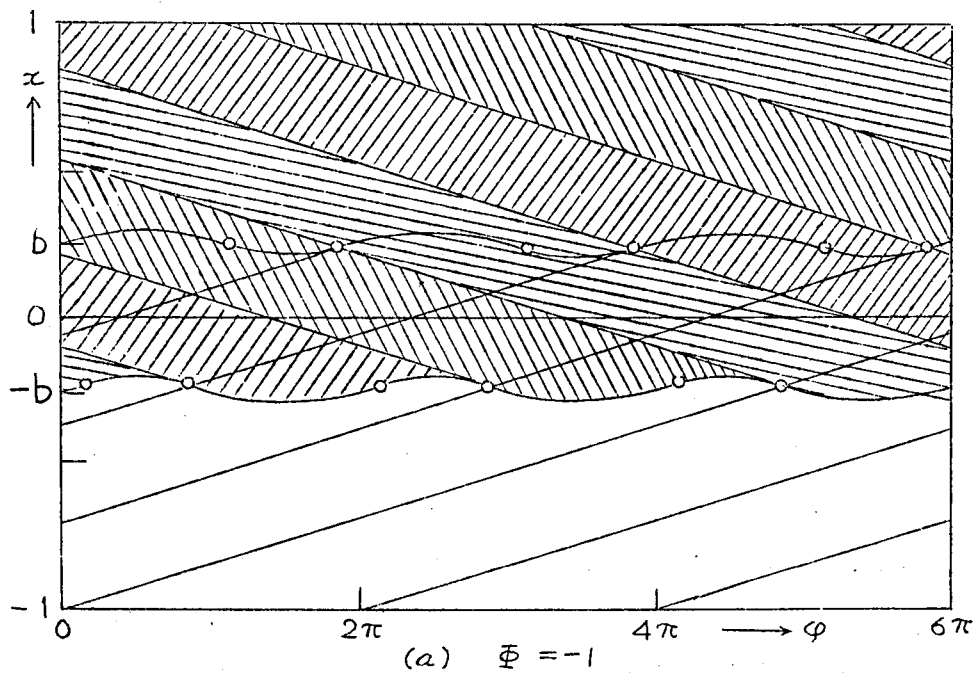


図 2.9 1/3 調波振動を発生する初期条件の領域  
 (  $A = 0.03$ ,  $b = 0.25$ ,  $\omega = 20$  )



略し、不安定周期解の波形だけが示されている。

不安定周期解ならびにこれに連らなっている解曲線を作図する。こうしてえられた相隣る2つの解曲線によってはさまれた領域を図2.9のよ  
うに3種類に分類する。これらの領域は切換曲線IとIIの間で重なるこ  
とになるから、 $\Phi = -1$  の場合を図2.9(a)に、 $\Phi = 1$  の場合を図2.9  
(b)に分けて示してある。これらの境界の1つとなっている正の解曲線  
と、その面側の領域に属している2つの正の解曲線について考えると、  
これらの解曲線は切換曲線Iとの交点で負の解曲線に切換えられる。し  
かるに面切換曲線の間では不安定周期解が二つの領域をへだてる境界と  
なっているのであるから、これらの解曲線は正の境界曲線の切換え後の  
負の境界曲線の面側に存在することになる。負の解曲線についても同様  
であって、上述の3種類の領域内の解曲線は何回リレーの切換えをへた  
後でも必ず同じ傾斜の斜線を施こされた同種類の領域の中にあることが  
わかる。

図2.9から容易にわかるように、これらの3つの領域内にはそれぞれ  
1/3調波振動の安定周期解が存在している。安定周期解に十分近い  
点に初期条件がえられた場合には、時間の経過とともにその点を通る  
解は限りなく安定周期解に接近し、逆に不安定周期解に十分近い点を通  
る解は周期解から次第に離れる。そこで次には周期解から著しく離れた  
点を通る解の性質について考える。

先に図2.5に示した任意の点 $A(t_A, x_A)$ として、この場合には1/3  
調波振動の安定解に対応する切換曲線IIの上の点 $(\tilde{\varphi}_{II}, \tilde{x}_{II})$ をとる  
(ただし $\tilde{\varphi}_{II} = \omega \tilde{t}_{II}$ )。(2.9)式より、

$$x_B - \tilde{x}_{II} = A(\sin \varphi_B - \sin \tilde{\varphi}_{II})$$

となることを考慮すると、(2.11)式は、

$$(\sin \varphi_B - \sin \tilde{\varphi}_{II})(\varphi_B - \tilde{\varphi}_{II}) > 0 \quad (2.37)$$

となる。ここで $\varphi_B$ は任意の負の解曲線と切換曲線IIとの交点の横座標  
である。

したがって§2.1の(2.11)式の場合と同様にして(2.37)式が成立

している場合には、 $\varphi_B$  を通る解曲線はリレーの切換えによって点Aを通る安定な周期解に接近することになる。そこで  $\tilde{\varphi}_{II}$  でリレーの切換えを受ける負の解曲線とその属している領域について考える。この領域の両方の境界は不安定周期解と重なっており、(2.17)式より、

$$\sin \varphi_B = \sin \tilde{\varphi}_{II}$$

となるので、(2.37)式の不等号は成立せず、左辺は零となる。即ちリレーの切換えによって境界曲線と安定周期解との距離は変化しない。一方この相隣る境界曲線では含まれた領域内の解曲線が切換曲線IIと交わった場合には、その交点の横座標  $\varphi_B$  が

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_B < \tilde{\varphi}_{II} \text{ のとき } \sin \varphi_B < \sin \tilde{\varphi}_{II} \\ \varphi_B > \tilde{\varphi}_{II} \text{ のとき } \sin \varphi_B > \sin \tilde{\varphi}_{II} \end{array} \right\} \quad (2.38)$$

となり、(2.37)式が満足される。結局、相隣る2つの負の境界曲線では含まれた領域内の全ての解曲線は切換曲線IIの上でリレーの切換えを受けると、 $1/3$ 調波振動の安定解に接近してゆく。同様のことが正の境界曲線では含まれた領域に対してもいえる。その場合の任意の正の解曲線と周期解の正の解曲線とは、

$$(\sin \varphi_B - \sin \tilde{\varphi}_I)(\varphi_B - \tilde{\varphi}_I) < 0 \quad (2.39)$$

であれば、リレーの切換えにより距離が短縮させることになる。ただし(2.39)式において  $\varphi_B$  は任意の正の解曲線と切換曲線との交点である。

したがって図2.9の各領域内の解曲線はリレーの切換えを重ねるたびに次第にその領域内にある $1/3$ 調波振動の安定解に接近してゆき、最後には安定な周期解に収れんすることになる。結局入力の位相に関して相互に $2\pi$ ずつ異なる3つの $1/3$ 調波振動の発生する初期条件の領域は図2.9に示すようになる。

これまでは(2.3)式において  $\varphi_0 = 0$  の場合について論じてきたのであり、図2.9の直線  $\varphi = 0$  の上で変数  $x$ 、重の初期値  $x_0$  および  $\mu_0$  を指定すると、その場合に発生する周期振動が決定する。一方  $\varphi_0 \neq 0$  の場合には同じ図において  $\varphi = \varphi_0$  なる時点を経験の原点にとり、直線  $\varphi = \varphi_0$  上で初期値  $x_0$ 、および  $\mu_0$  を与えると、その場合に発生する周期

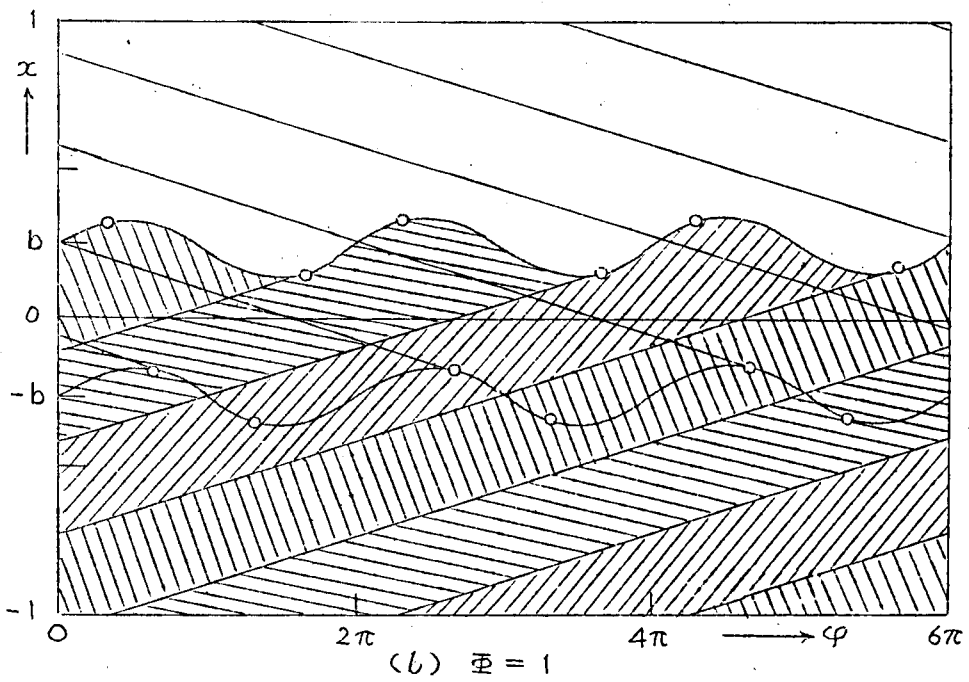
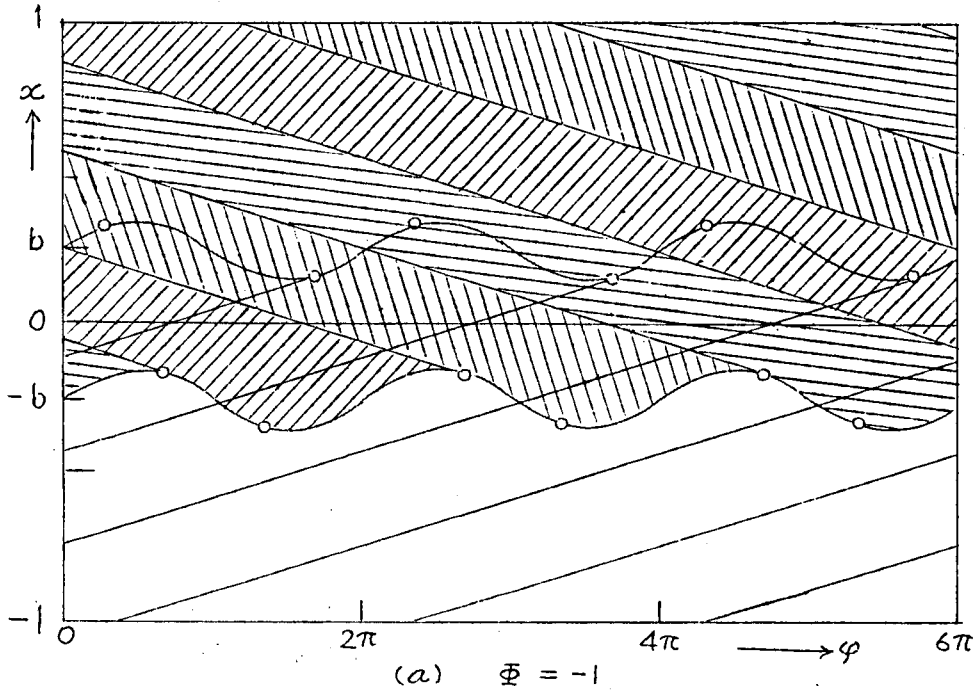


図2.10  $1/3$  調波振動を発生する初期条件の領域  
( $A = 0.10$ ,  $b = 0.25$ ,  $\omega = 20$ )

振動を決定することができる。したがって図 2.9 は  $\varphi_0$  キ 0 の場合にも適用できることになる。このことは初期条件と周期解との関係を示す以下の図においても同様である。

### 2.3.2 $1/3$ 調波振動の安定解のみが存在する場合

入力振幅  $A$  を図 2.7 において  $A_{q3} < A < A_{p1}$  の範囲にとった場合には、 $1/3$  調波振動の安定解だけが存在し、 $1/3$  調波振動の不安定解ならびに基本調波振動の解は存在しない。いま入力のパラメータを図 2.7 の点 2 ( $A=0.10, \omega=20$ ) に取った場合の初期条件と周期解の関係を考察する。図 2.10 で  $\circ$  印で示す点は § 2.1 で述べた切換曲線上の点  $L_n, L'_n, M_n, M'_n$  である。切換曲線上の点  $L_n, L'_n$  に到達するそれぞれ正および負の解曲線を描き、この解曲線をもとにして、 $(\varphi, x)$  平面の全領域を図 2.10 のように分類する。この場合切換曲線上の点  $L_n, L'_n$  に到達するそれぞれ正および負の解曲線と、切換曲線上の区間  $[L_n, M_n], [L'_n, M'_n]$  がこの 3 つの領域の境界となっている。

点  $L'_n$  と  $L'_{n+1}$  を通る 2 本の負の解曲線ではさまれた領域内にある負の解曲線と、切換曲線 II の区間  $[L'_n, M'_n]$  上から始まる負の解曲線とについて考えると、これらの解曲線は切換曲線 II の上の区間  $[M'_n, L'_{n+1}]$  上に到達し、そこでリレーが切換えられる。切換曲線 II 上の区間  $[M'_n, L'_{n+1}]$  上に到達したすべての解曲線は、リレーの切換えによって同じ種類の正の解曲線に接続される。この場合には境界に無限に近い点を通る解曲線は一度リレーの切換えが行なわれると、切換え後の境界曲線から遠ざかって、有限距離だけ安定周期解に近づき、不安定周期解の存在する場合のように境界に充分近い点を通る解曲線がリレーの切換えのくりかえされる度に、少しずつ徐々に境界から離れて行くようなことは起こらない。そして 2 つの境界曲線ではさまれた解曲線全体もまた一度リレーが切換えられると、2 つの境界ではさまれた領域の内部にあり、境界曲線から有限距離だけ離れた領域の中に入ってしまう。境界曲線に亘っている解曲線がリレーの切換えによって、その両側の

いずれの領域内に入るかは、リレー特性から点  $L_n, L'_n$  を通るそれぞれ正および負の解曲線は (2.7), (2.10) 式によって点  $L_n, L'_n$  で

$$\sigma(t) = -b \sin \omega t, \quad \dot{\sigma}(t) = 0$$

となるが、

$$\ddot{\sigma}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t$$

が、点  $L'_n$  では  $\ddot{\sigma}(t) < 0$ 、点  $L_n$  では  $\ddot{\sigma}(t) > 0$  であることから、点  $L_n, L'_n$  ではリレーの切換えは行なわれぬ。そこでたとえば点  $L'_n$  を通る負の境界曲線は点  $L'_n$  ではリレーの切換えは行なわれず、切換曲線 II の区間  $[M'_n, L'_{n+1}]$  上ではじめて正の解曲線と切り換えられる。しかるに無限小だけこの境界曲線の下側にある解曲線は切換曲線 II の区間  $[M'_{n-1}, L'_n]$  と交わり、そこでリレーの切換えが行なわれる。結局図 2.10 の相隣る 2 つの負の境界曲線ではさまれた領域において、この領域の下の境界曲線はこの領域に属しており、上の境界曲線はこの領域のもう一つ上の領域に属していることがわかる。同様に 2 つの正の境界曲線ではさまれた領域について考えると、その領域の上の境界曲線はその領域に属しており、下の境界曲線はその領域のもう一つ下の領域に属していることがわかる。

さて、図 2.10 の 3 つの領域にはそれぞれ  $1/3$  調波振動の安定な周期解が一つずつ存在しているのであるが、これらの領域内の任意の解曲線と周期解の相互関係が、リレーの切換えによってどのように変わるかを考える。この場合においても切換曲線 II の区間  $[M'_{n-1}, L'_n]$  上に到達した全ての負の解曲線に対しては (2.37) 式が成立することから、ある領域内の負の解曲線はリレーの切換えによってその領域内にある周期解に接近する。正の解曲線についても同様であって、結局図 2.10 のように分類された各領域内の全ての解曲線は、リレーの切換えを重ねた後にそれぞれの領域内における  $1/3$  調波振動の安定な周期解に限りなく接近する。したがって図 2.10 は 3 種類の  $1/3$  調波振動とそれぞれ発生する初期条件の領域を与えていることがわかる。

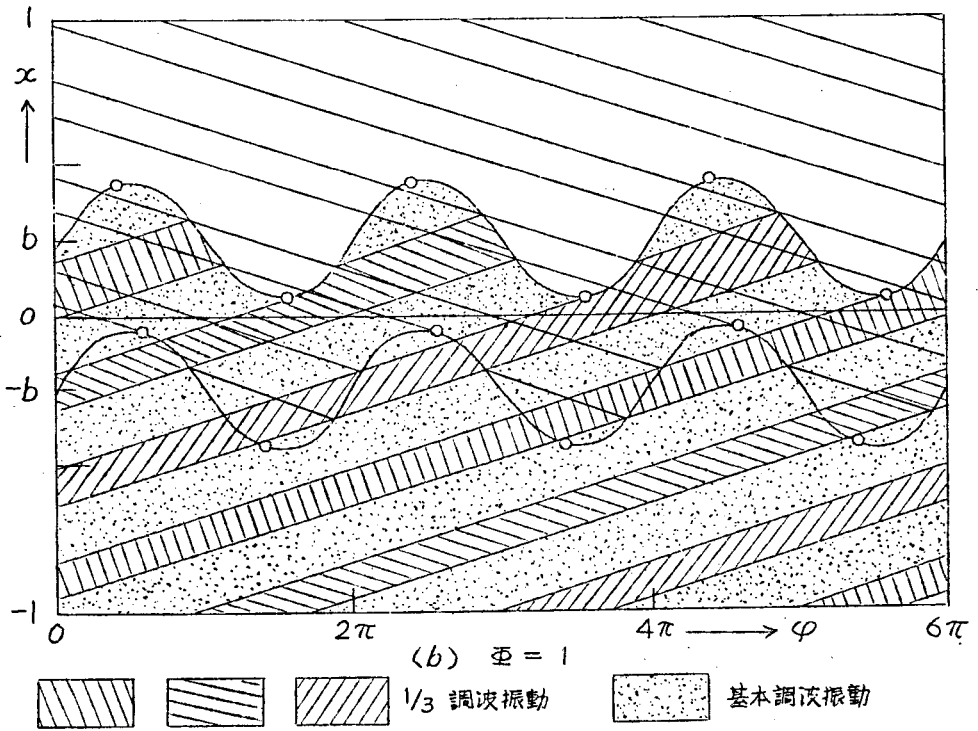
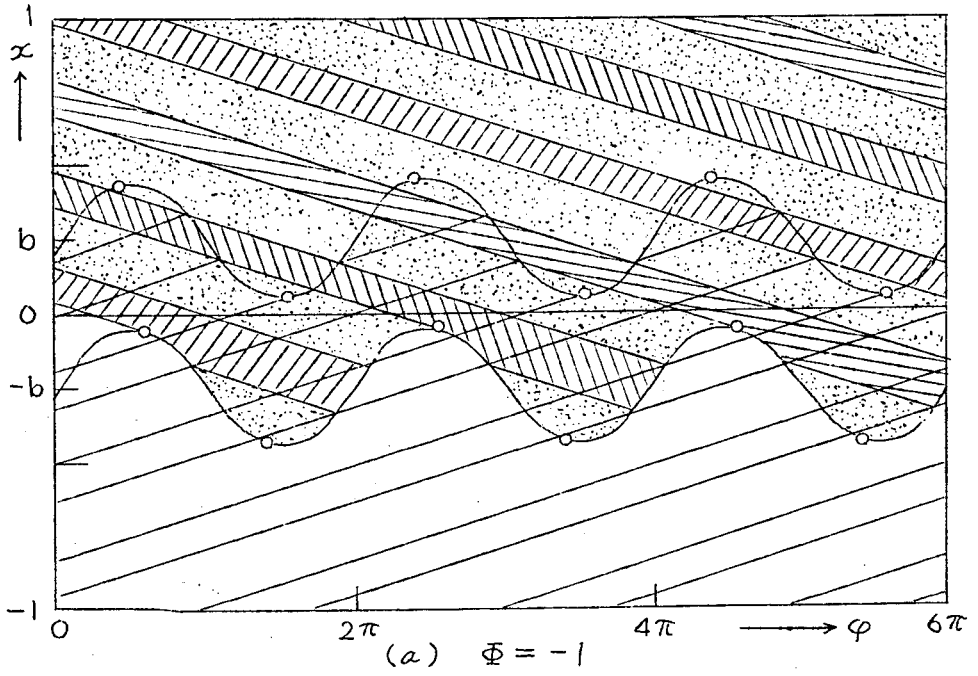


図 2.11 基本調波振動と1/3調波振動を発生する初期条件の領域 ( $A=0.20, b=0.25, \omega=20$ )

2.3.3 基本調波振動と  $1/3$  調波振動の共存する場合

入力振幅  $A$  を図 2.7 において  $A_{p1} < A < A_{r3}$  の範囲にとつた場合には、基本調波振動の周期解と  $1/3$  調波振動の周期解とが存在する。特に  $A_{p1} < A < A_{q1}$  であれば、基本調波振動の解には安定・不安定の 2 つの周期解が存在し、 $A_{q1} < A < A_{r3}$  では安定なものだけが存在する。入力のパラメータを図 2.7 の点 3 ( $A = 0.20, \omega = 20$ ) にとつた場合に発生する位相の相異なる三つの  $1/3$  調波振動ならびに基本調波振動の波形はすでに図 2.8 に示したが、これらの合計 4 個の周期振動を発生する初期条件の領域を 2.3.2 の場合と同様な考察によって求めると図 2.11 のようになる。この図で 2 つの領域の境界となっている解曲線には次の三つがある。

- a) 切換曲線 I および II 上の点  $L_n$  および  $L'_n$  上に到達するそれぞれ正および負の解曲線。これを一次の境界曲線と呼ぶことにすれば、これは 2.3.2 の場合にも相隣る 2 つの領域の境界となっていたものである。
- b) 上で与えられる正の解曲線は切換曲線 II の区間  $[M'_{n-1}, L'_n]$  と交わっている。また上の負の解曲線は切換曲線 I 上の区間  $[M_{n-1}, L_n]$  と交わっている。これらの交点に到達するそれぞれ負および正の解曲線を二次の境界曲線と呼ぶことにする。
- c) 二次の正（または負）の境界曲線が切換曲線 II（または I）の区間  $[M'_{n-1}, L'_n]$ （または  $[M_{n-1}, L_n]$ ）と交点を持つ場合があり、図 2.11 はそのような場合の 1 例である。この交点に到達する負（または正）の解曲線を三次の境界曲線と呼ぶことにする。

これら一次、二次、三次の境界曲線でかこまれた領域を図 2.11 のように 4 種類に分類すると、各領域内の解曲線はリレーの切換えをくり返すことによって他の領域内の解曲線に接続されることはない。これら 4 つの領域のうち 3 つにはそれぞれ図 2.8 に示した  $1/3$  調波振動の解が存在し、残りの一つの領域には基本調波振動の解が存在している。一次と二次の負の境界曲線ではさまれた領域で、その領域の上側の境

界が一次の境界曲線と下側の境界が二次の境界曲線と与えられている領域には基本調波振動の解が存在しており、この領域内の全ての解曲線はリレーの切換えによって基本調波振動の解により接近することが(2.37)式から明らかになる。同様のことが一次と二次の正の境界曲線ではさまれた領域で、その境界が下側では一次、上側では二次の境界曲線である領域内の全ての正の解曲線に対してもいえる。したがって図 2.11 の黒点で示されている領域内の全ての解曲線は、リレーの切換えをくりかえすごとに基本調波振動の解に次第に接近する。

同様にして残りの3つの領域内の全ての解曲線もリレーの切換えをくり返すごとに、各領域内の  $1/3$  調波振動の解に次第に接近する。

結局、この場合 ( $A=0.20$ ) の基本調波振動ならびに3種類の  $1/3$  調波振動を発生する初期条件の領域は図 2.11 のようになることがわかる。

## § 2.4 一次遅れの線形部分を有するリレー制御系の振動現象とその初期値問題

前節までの方法を用いると、線形部分の伝達関数が一次遅れの形をしているリレー制御系の初期条件とその際に発生する周期振動との関係を見出すことができる。いま図 2.12 に示されるリレー制御系について考える。この系の出力  $x^*$  について考えると、

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dx^*}{dt^*} + x^* &= K \Phi^*(\sigma^*) \\ \sigma^* &= r^*(t^*) - x^* \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

なる微分方程式が成立する。ここに  $\Phi^*(\sigma^*)$  は図 2.13 に示す対称なりレー特性を表わす。

変数および定数を

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{t^*}{T}, & x &= \frac{x^*}{ck}, & \sigma &= \frac{\sigma^*}{ck} \\ r(t) &= \frac{1}{ck} r^*(t^*) \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$



$$b = \frac{b^*}{ck}$$

のように変換すると、(2.40)式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \alpha x &= \Phi(\sigma) \\ \sigma &= r(t) - x \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

ただし  $\Phi(\sigma)$  は図

2.15 に示す対称なりレー特性を表わす関数である。

図 2.14 は (2.42) 式で表わされるリレー制御系のブロック線図であり、いまこの系に正弦波入力  $r(t)$

$= A \sin(\omega t + \varphi)$  を加えた場合に発生する基本調波振動と  $1/3$  調波振動について考える。ここにおいても周期  $T$  の間のリレーの切換え回数が 2 であるような単純な周期振動に限って考察を行なう。

(2.42) 式を解くと、出力  $x$  の時間的变化を示す解曲線は正または負の傾斜の指数関数

$$x = \Phi + (x_0 - \Phi) e^{-t} \quad (2.43)$$

で与えられる。いま周期解においてリレー出力が正から負に切換えられる点  $(\tilde{t}_I, \tilde{x}_I)$  および負から正に切換えられる点  $(\tilde{t}_{II}, \tilde{x}_{II})$  を § 2.2 と同じようにして求めると、

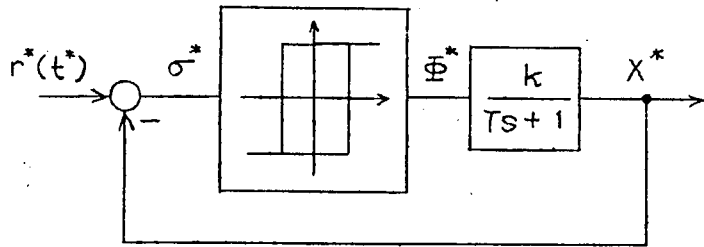


図 2.12 リレー制御系のブロック線図

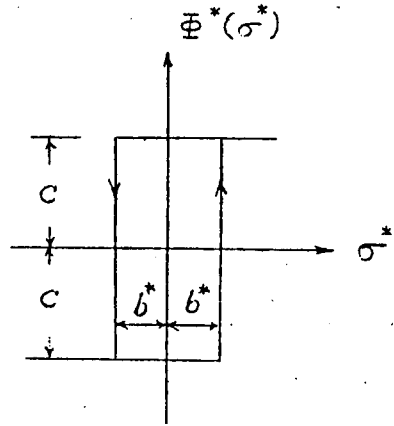


図 2.13 対称リレー特性

$$\tilde{x}_I = -\tilde{x}_{II} = \tanh \frac{T}{4} \quad (2.44)$$

$$\left. \begin{aligned} A \sin \omega \tilde{t}_I \\ = \tanh \frac{T}{4} - b \\ A \sin \omega \tilde{t}_{II} \\ = -\tanh \frac{T}{4} + b \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

ただし

$$T = \frac{2\nu\pi}{\omega} \quad (\nu = 1, 3) \quad (2.46)$$

で与えられる。(2.45) 式の両式が解を持ったためには、

$$A > A_{p\nu} \quad (2.47)$$

ただし

$$A_{p\nu} = \left| \tanh \frac{\nu\pi}{2\omega} - b \right| \quad (2.48)$$

でなければならない。ここに  $A_{p\nu}$  は  $1/\nu$  調波振動が存在するための入力振幅の下の限界を与える。また安定ならびに不安定な周期解の存在する振幅の上の限界は、与えられた周期解が切換曲線上の点  $L_n$  または  $L'_n$  を通るという条件から (2.26) 式と同様にして求められ、それは

$$\left. \begin{aligned} H(\tau) &= -(b - \tanh \frac{T}{4}) + [b - x(\tau)] \cos \omega\tau - \frac{1}{\omega} \dot{x}(\tau) \sin \omega\tau \\ x(\tau) &= 1 - \dot{x}(\tau) = 1 - (1 - \tanh \frac{T}{4}) e^\tau \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

とおいた場合に、方程式、

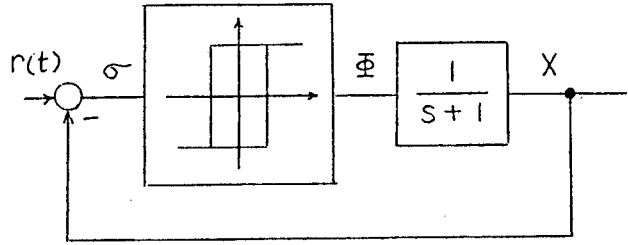


図 2.14 リレー制御系のブロック線図

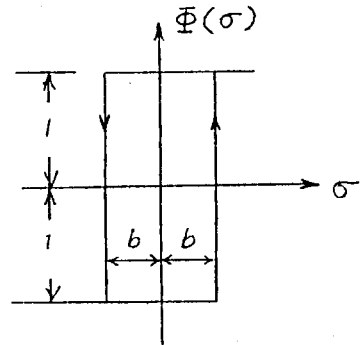


図 2.15 対称リレー特性

$$H(\tau) = 0 \quad (2.50)$$

を満足する根 $\tau$ を

$$A^2 = [x(\tau) - b]^2 + \frac{1}{\omega^2} \dot{x}^2(\tau) \quad (2.51)$$

に代入することにより与えられる。この場合

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \left\{ (1-b)\omega^2 - (1 - \tanh \frac{T}{4})(1+\omega^2)e^\tau \right\} \sin \omega\tau$$

$$\left. \frac{d^2H}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = (1-b)\omega^2 - (1 - \tanh \frac{T}{4})(1+\omega^2)$$

$$H(0) = 0$$

$$H(\pi/\omega) = 2 \left[ \frac{1 - e^{-\frac{T}{2} + \frac{\pi}{\omega}}}{1 + e^{-\frac{T}{2}}} - b \right]$$

$$H(2\pi/\omega) = (1 - \tanh \frac{T}{4})(e^{\frac{2\pi}{\omega}} - 1) > 0$$

であり、また  $L'_n$  点では  $\ddot{\sigma} < 0$  であることから、

$$\left\{ (1-b)\omega^2 - (1 - \tanh \frac{T}{4})(1+\omega^2)e^\tau \right\} < 0 \quad (2.52)$$

となるので、 $d^2H/d\tau^2|_{\tau=0} < 0$  すなわち、

$$b > 1 - (1 - \tanh \frac{T}{4})(1 + \frac{1}{\omega^2}) \quad (2.53)$$

であるならば、関数  $H(\tau)$  は図 2.6(a) の形となり、(2.52) 式の不等号が反対の場合には  $H(\tau)$  は図 2.6(b) の形となり、 $q, r$  で示す2つの根  $\tau_q, \tau_r$  が存在する。(2.35), (2.36) 式の場合と同じように  $1/\nu$  調波振動の安定ならずに不安定周期解の存在する振幅の上限を与える式はそれぞれ次のようになる。

$$A_{q\nu}^2 = [x(\tau_q) - b]^2 + \frac{1}{\omega^2} \dot{x}^2(\tau_q) \quad (2.54)$$

( $\nu = 1, 3, 5, \dots$ )

$$A_{r\nu}^2 = [x(\tau_r) - b]^2 + \frac{1}{\omega^2} \dot{x}^2(\tau_r) \quad (\nu = 3, 5, \dots) \quad (2.55)$$

ただし

$$x(\tau) = 1 - \dot{x}(\tau) = 1 - (1 - \tanh \frac{\tau}{4}) e^{\tau}$$

また  $1/\nu$  調波振動の存在するための周波数の低い方の限界は  $H(\tau/\omega) = 0$  とおくことにより、

$$b = \frac{1 - e^{-\frac{(\nu-1)\pi}{\omega_k}}}{1 + e^{-\frac{\nu\pi}{\omega_k}}} \quad (2.56)$$

から見出すことができる。

基本調波振動 ( $\nu=1$ ) ならびに  $1/3$  調波振動 ( $\nu=3$ ) を発生するパラメータ ( $A, \omega$ ) の領域を (2.48), (2.54), (2.55) 式を用いてヒステリシスの幅  $b=0.25$  の場合について求めると図 2.16 をえる。

次にはこの図で  $\omega=20$  としたときの 1, 2, 3 の 3 つの点に対してそれぞれの振動を発生する初期条件の領域を求める。点 1 ( $A=0.03$ ) は  $1/3$  調波振動の安定ならびに不安定な周期解が共に存在する場合で、2, 3, 1 と同じ条件から境界曲線が決定される。すなわち不安定周期解ならびにこれに連なっている解曲線がこの場合の境界曲線を与える (図 2.17)。

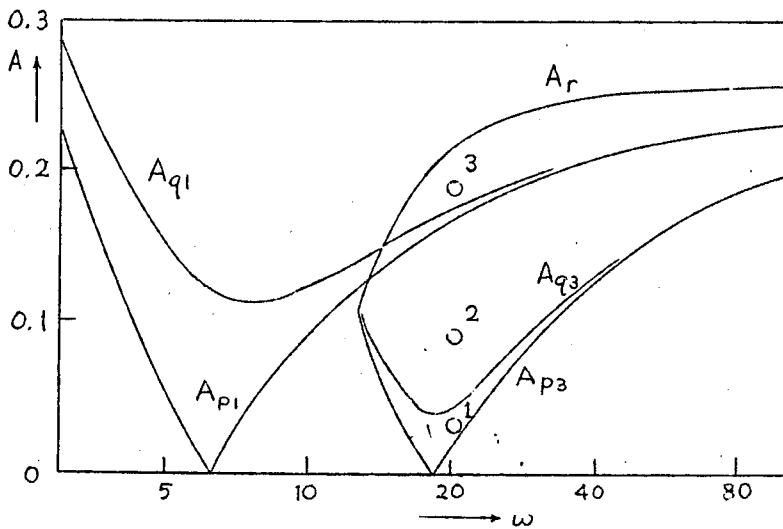


図 2.16 基本調波振動と  $1/3$  調波振動の解の存在領域 ( $b=0.25$ )

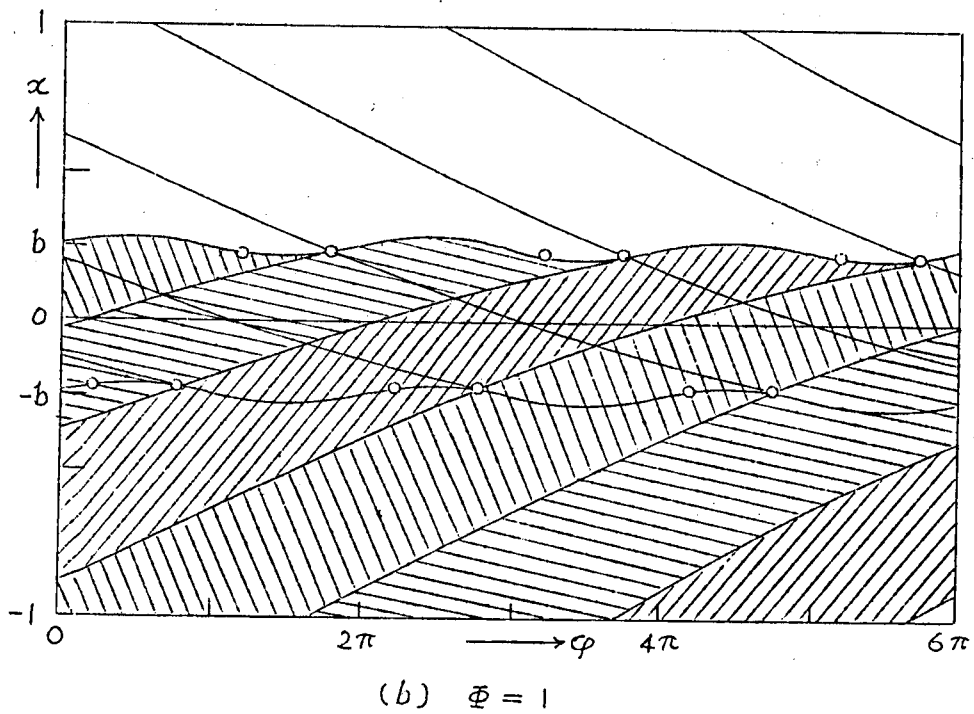
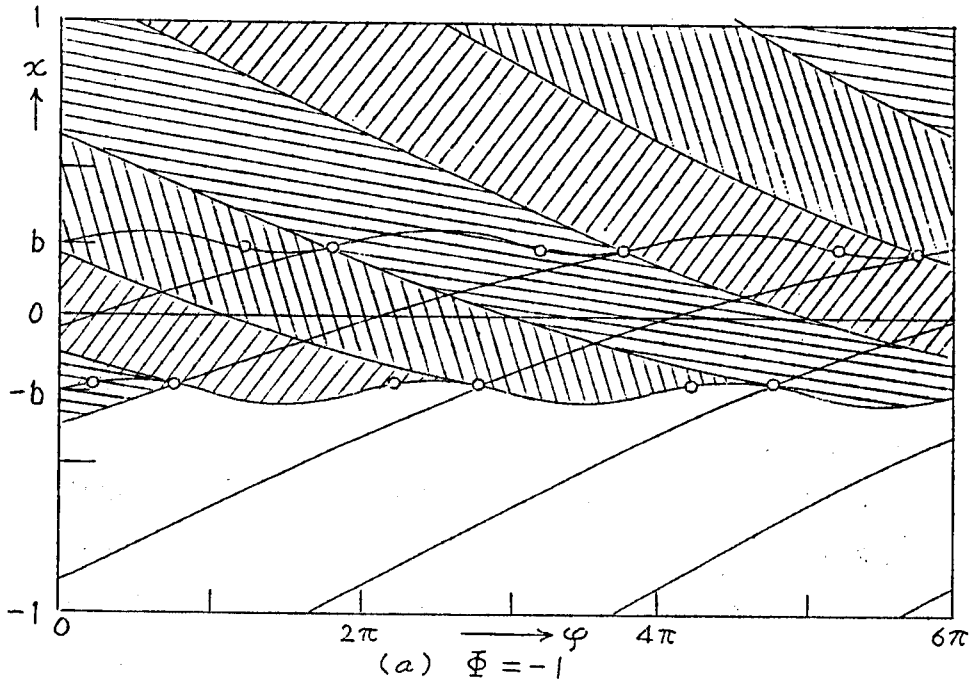


図 2.17  $1/3$  調波振動を発生する初期条件の領域  
 ( $\Lambda = 0.03$ ,  $b = 0.25$ ,  $\omega = 20$ )

点2 ( $A=0.10$ ) は  $1/3$  調波振動の安定解のみが存在する場合で、2.3.2と同じ条件から境界曲線が決定される。すなわち、切換曲線上の点  $L_n, L'_n$  を通るそれぞれ正および負の解曲線がこの場合の境界曲線を与える(図2.18)。点3 ( $A=0.19$ ) は  $1/3$  調波振動と基本調波振動のいずれも安定解のみが共存する場合であり、2.3.3で定義したところの一次および二次の境界曲線がこの場合の境界曲線を与える(図2.19)。この場合には三次の境界曲線は存在していないが、入力振幅が更に大きくなると3次の境界曲線によって区分される初期条件の領域も存在するようになる。

このようにして作図された各領域内にはそれぞれに基本調波振動または  $1/3$  調波振動の安定な解が存在していることが容易に示される。次に各領域内の全ての解曲線はリレーの切換えを受けるたびに、その領域内にある周期解に接近していくことを示す。

線形部分の伝達関数が  $W(s) = 1/s$  である場合には2つの解曲線の間の距離がリレーの切換えによってどのように変化するかという点に着目したが、 $W(s) = \frac{1}{s+1}$  の場合には2つの解曲線の間の距離はたえず変化するのでこれを利用することはできない。

いま、切換曲線IIの上で負の解曲線から正の解曲線に切り換えられる図2.20の場合について考える。周期解は点  $(\tilde{t}_I, \tilde{x}_I)$  で切換曲線IIと交わり、一方任意の解曲線が点  $(t_B, x_B)$  で交わっているものとする。点  $(t_B, x_B)$  を通る正ならびに負の解曲線と直線  $t = \tilde{t}_I$  との交点の  $x$  座標をそれぞれ  $x_{Bt}, x_{Bs}$  とすると、(2.44)式より、

$$\left. \begin{aligned} x_{Bt} &= (x_B - 1) e^{-(\tilde{t}_I - t_B)} + 1 \\ x_{Bs} &= (x_B + 1) e^{-(\tilde{t}_I - t_B)} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

となる。ここで、

$$\left. k_1 = \frac{x_{Bs} + 1}{\tilde{x}_I + 1} \quad (> 0) \right\} \quad (2.58)$$

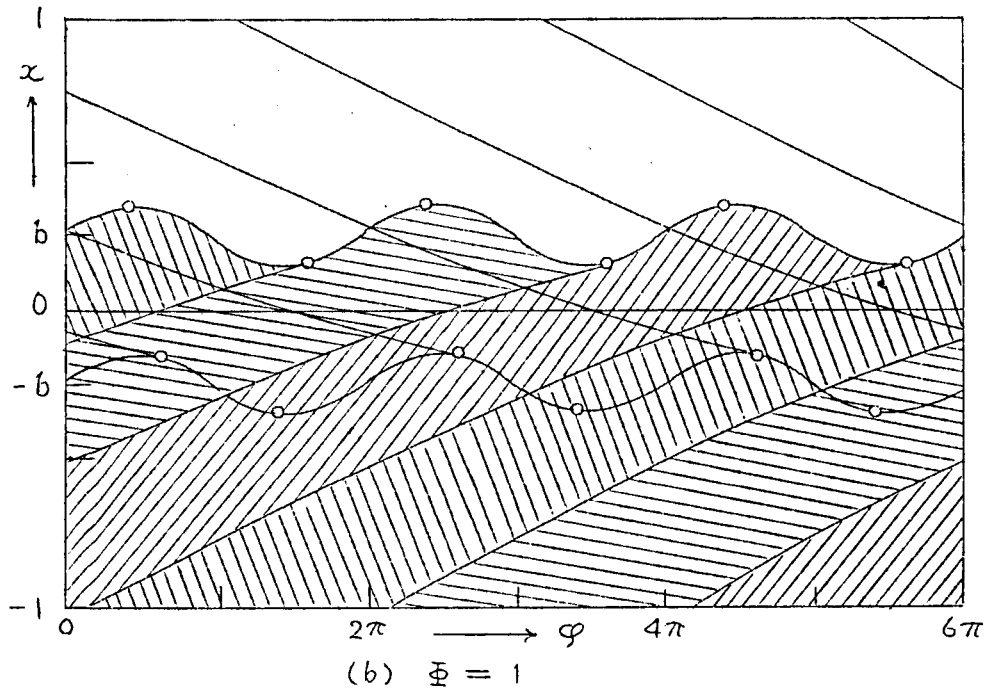
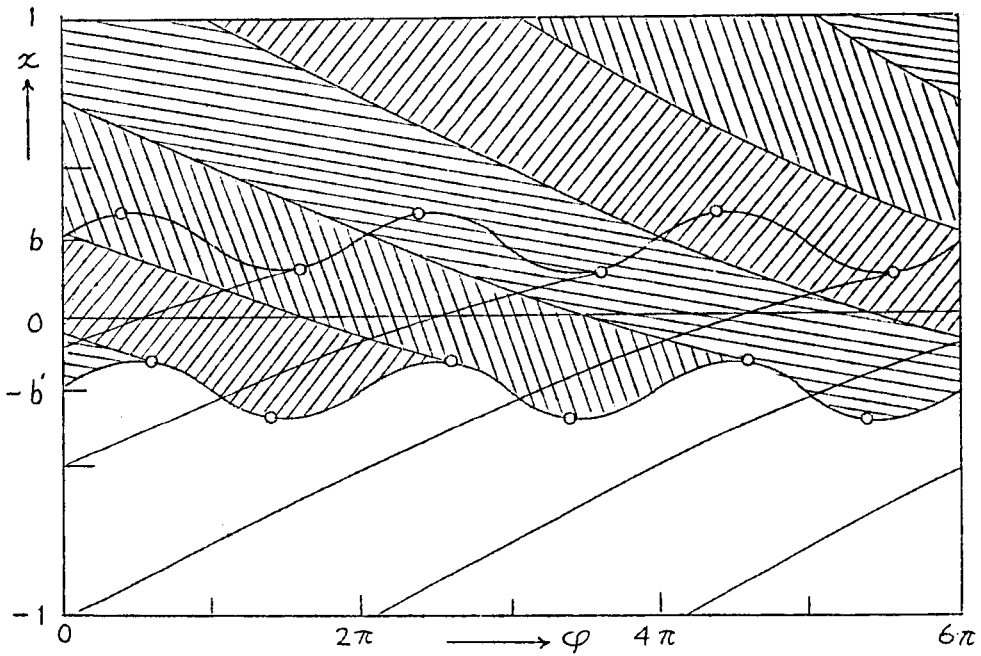
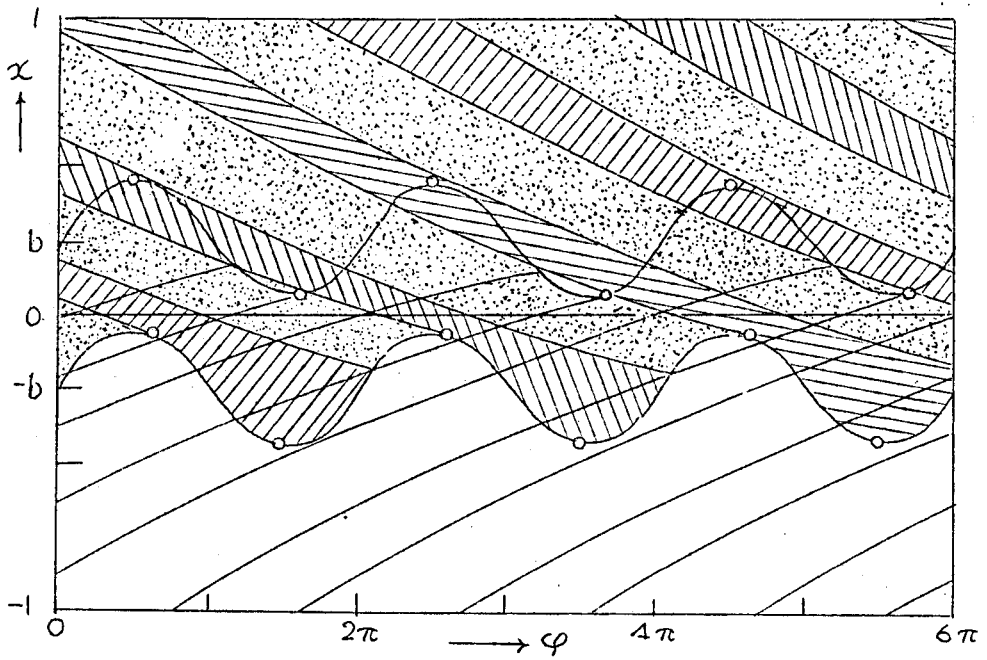
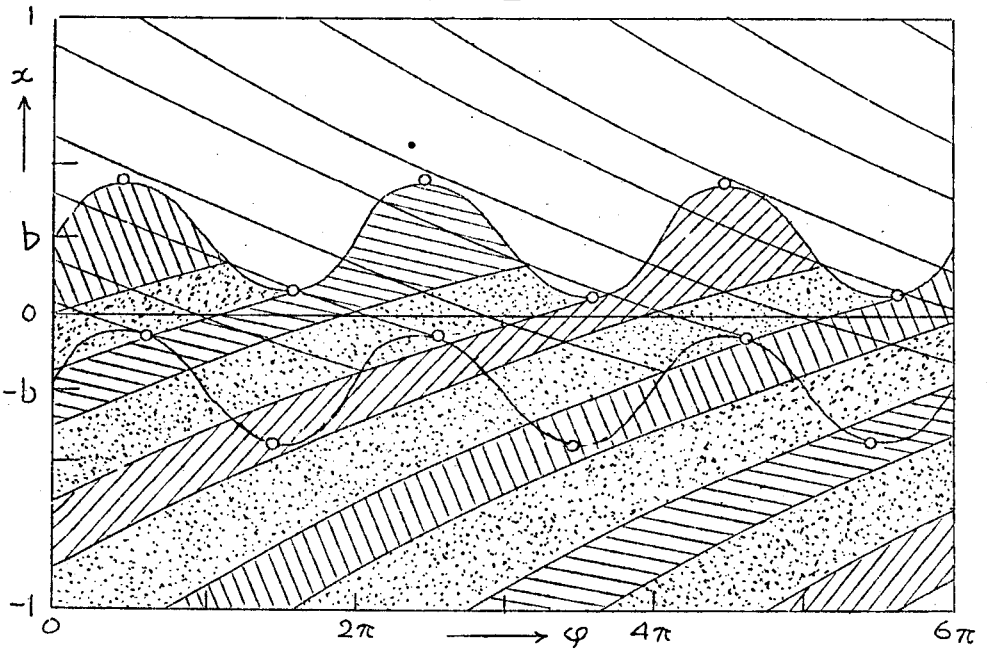


図 2.18  $1/3$  調波振動を発生する初期条件の領域  
 ( $A = 0.10, b = 0.25, \omega = 20$ )



(a)  $\Phi = -1$



(b)  $\Phi = 1$

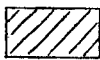







 1/3 調波振動      基本調波振動

図 2.19 基本調波振動と 1/3 調波振動を発生する初期条件の領域 ( $A=0.19$ ,  $b=0.25$ ,  $\omega=20$ )



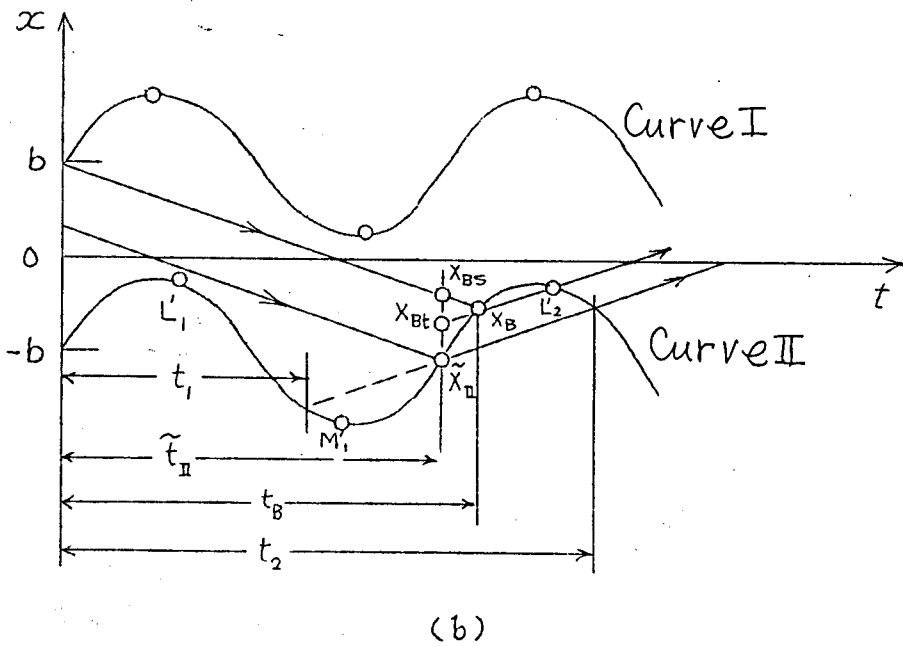
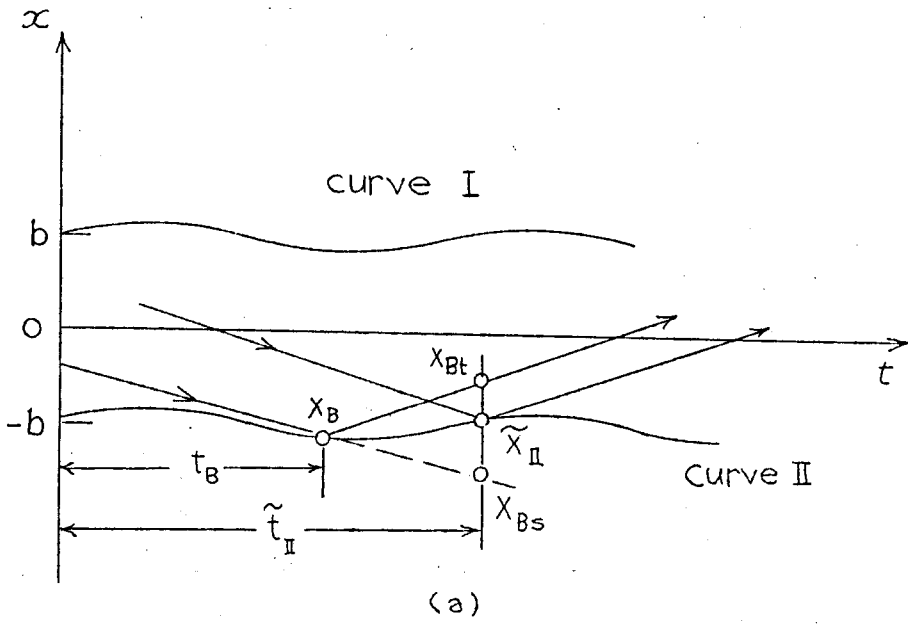


図 2.20 解曲線の周期解への接近

$$k_2 = \frac{x_{Bt} - 1}{\tilde{x}_{II} - 1} \quad (> 0)$$

で定義される  $k_1, k_2$  をとれば、これらが

$$k_1 < k_2 < 1 \quad (2.59)$$

$$k_1 > k_2 > 1 \quad (2.60)$$

$$k_1 < 1/k_2 < 1 \quad (2.61)$$

$$k_1 > 1/k_2 > 1 \quad (2.62)$$

のいずれかを満たしている場合には、この任意の解曲線はリレーの切換えにより周期解 ( $k_1 = k_2 = 1$ ) に接近する。また反対に (2.59) ~ (2.62) 式の  $k_1$  と  $k_2$  を入れ換えた式が成立する場合には、この解曲線は周期解から離れて行く。図 2.20(a) の場合のように点  $(\tilde{t}_{II}, \tilde{x}_{II})$  を通る正の解曲線と切換曲線 II との交点が唯一つしか存在しない場合には、 $k_1 < 1, k_2 < 1$ 、または  $k_1 > 1, k_2 > 1$  となる。しかるに (2.57) 式および (2.58) 式より、

$$k_1 - k_2 = \frac{2(\tilde{x}_{II} - x_B)}{\tilde{x}_{II}^2 - 1} e^{-(\tilde{t}_{II} - t_B)} \quad (2.63)$$

であり、また (2.44) 式より

$$\tilde{x}_{II}^2 - 1 = \tanh^2 \frac{T}{4} - 1 < 0$$

であるから、(2.63) 式の正負は  $(\tilde{x}_{II} - x_B)$  と反対の符号をとる。この場合には  $k_2 < 1$  ならば  $t_B < \tilde{t}_{II}$ 、 $k_2 > 1$  ならば  $t_B > \tilde{t}_{II}$  であることを考えると、(2.59) 式および (2.60) 式の条件は共に、

$$(t_B - \tilde{t}_{II})(x_B - \tilde{x}_{II}) > 0 \quad (2.64)$$

で表わされる。

Fig. 2.20(b) の場合のように点  $(\tilde{t}_{II}, \tilde{x}_{II})$  を通る正の解曲線と切換曲線 II との交点が 3 つ存在する場合には、

i)  $t_B \leq t_1$  であれば  $k_1 < 1, k_2 \leq 1$

ii)  $t_1 < t_B \leq \tilde{t}_{II}$  であれば  $k_1 \leq 1, k_2 \geq 1$

iii)  $\tilde{t}_I < t_B \leq t_2$       であれば       $k_1 > 1, k_2 \leq 1$

iv)  $t_2 < t_B$                       であれば       $k_1 > 1, k_2 > 1$

となる。i) および iv) の場合においては、先の場合と同じくこの解が周期解に接近するための必要充分条件は(2.64)式で与えられる。また(2.57)式および(2.58)式より、

$$k_1 k_2 - 1 = \frac{(x_B^2 - 1) e^{-2(\tilde{t}_I - t_B)} - (\tilde{x}_I^2 - 1)}{\tilde{x}_I^2 - 1} \quad (2.65)$$

をえる。ii) の場合には、 $t_B - \tilde{t}_I < 0, x_B < \tilde{x}_I < 0$  であるから、

$$0 > (x_B^2 - 1) e^{-2(\tilde{t}_I - t_B)} > x_B^2 - 1 > \tilde{x}_I^2 - 1$$

となるので、 $k_1 k_2 - 1 < 0$  となり(2.61)式の条件が成立する。またiii) の場合には  $t_B - \tilde{t}_I > 0, x_B > \tilde{x}_I$  であるが、ここに  $-\tilde{x}_I > x_B$  なる条件をつけ加えると、

$$0 > \tilde{x}_I^2 - 1 > x_B^2 - 1 > (x_B^2 - 1) e^{-2(\tilde{t}_I - t_B)}$$

となり、 $k_1 k_2 - 1 > 0$  をえる。したがって(2.62)式の条件が成立する。なお  $-\tilde{x}_I > x_B$  なる条件は入力振幅 A が、

$$A < \tanh \frac{T}{4} + b$$

であれば満足されている。特に分数調波振動が存在する場合には常にこの条件は成立していなければならないから、この条件はここでは問題にする必要がない。結局、点  $(\tilde{t}_I, \tilde{x}_I)$  を通る正の解曲線と切換曲線 II との交点が3つ存在する場合においても、(2.64)式が成立する場合には任意の負の解曲線は切換曲線 II 上でのリレーの切換えによって周期解に接近することがわかる。(2.64)式を位相  $\varphi_B, \tilde{\varphi}_I$  を用いて表わせば(2.37)式と同じ式をえる。

同様のことが正の解曲線についてもいえる。この場合に任意の正の解曲線がリレーの切換えによってその領域内の周期解に接近するための条件は(2.39)式で与えられる。結局図 2.17, 図 2.18, および図 2.19

の各領域内の全ての解曲線はリレーの切換えを経るたびにその領域内にある周期解に接近することがわかる。

### § 2.5 アナログ計算機による検討

アナログ計算機を用いて相異なる周期振動を発生する初期条件の領域を実験的に求めると、その結果は本章で理論的に見出された初期条件の領域ときわめてよく一致しており、容易にこの理論の正しさが証明された。

図 2.21 はアナログ計算機の演算回路である。なお各演算要素の表示方法は慣習<sup>(34)</sup>によっている。また変数  $x$  のスケールは 100 倍に、時間  $t$  のスケールは 20 倍になるように選ばれている。

図 2.3 に示した線形部分の伝達関数が  $W(s) = 1/s$  であるリレー制御系についての実験を行なう際にはポテンシオメータの係数は零となるようにとり、図 2.14 の場合すなわち線形部分の伝達関数が  $W(s) =$

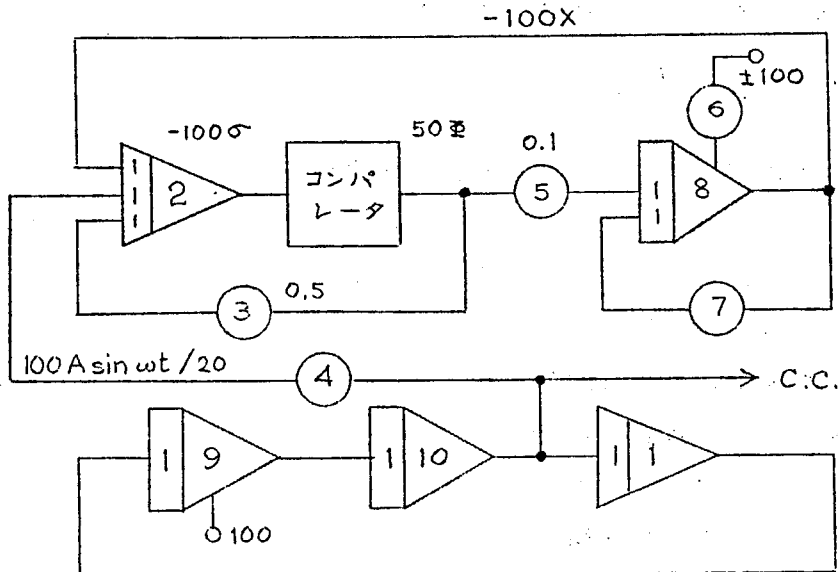
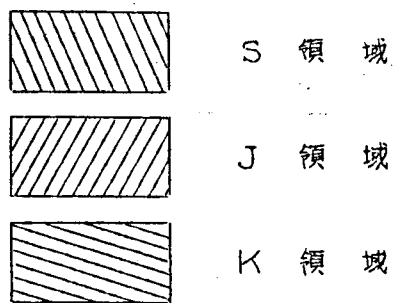


図 2.21 アナログ計算機の演算回路

$1/(s+1)$  である場合についての実験にはポテンシオメータ 7 を  $1/20 = 0.05$  に設定した。また入力振幅  $A$  の値はポテンシオメータ 4 に、変数  $\alpha$  の初期条件はポテンシオメータ 6 にそれぞれ設定される。

積分器 10 の出力はポテンシオメータ 4 を通して入力正弦波信号として加えられているが、積分器 10 の別の 1 つの出力はサイクルカウンタ  $CC$  に導かれており、サイクルカウンタは積分器 10 の出力の 3 サイクル毎にインパルス信号を発生する。この系に  $1/3$  調波振動が発生している状態においてこのインパルス信号の発生する際の変数  $\alpha$  の値から、その  $1/3$  調波振動の位相が決定された。

実験は  $\varphi_0 = 0$  の場合について行なわれた。理論計算およびアナコムによる実験の結果は  $W(s) = 1/s$  の場合を図 2.22 に、また  $W(s) = 1/(s+1)$  の場合を図 2.23 に比較して示されており、これらの結果はきわめてよく一致していることがわかる。なお図 2.22, 2.23 の  $S$ ,  $J$ ,  $K$  の領域は  $1/3$  調波振動を発生する初期条件の領域であり、白地の領域は基本調波振動の発生する初期条件の領域である。 $S$ ,  $J$ ,  $K$  の領域と先の図 2.9 ~ 2.11 および図 2.17 ~ 2.19 の斜線の傾斜の相異により表わされた 3 つの領域との対応関係は次のようになっている。



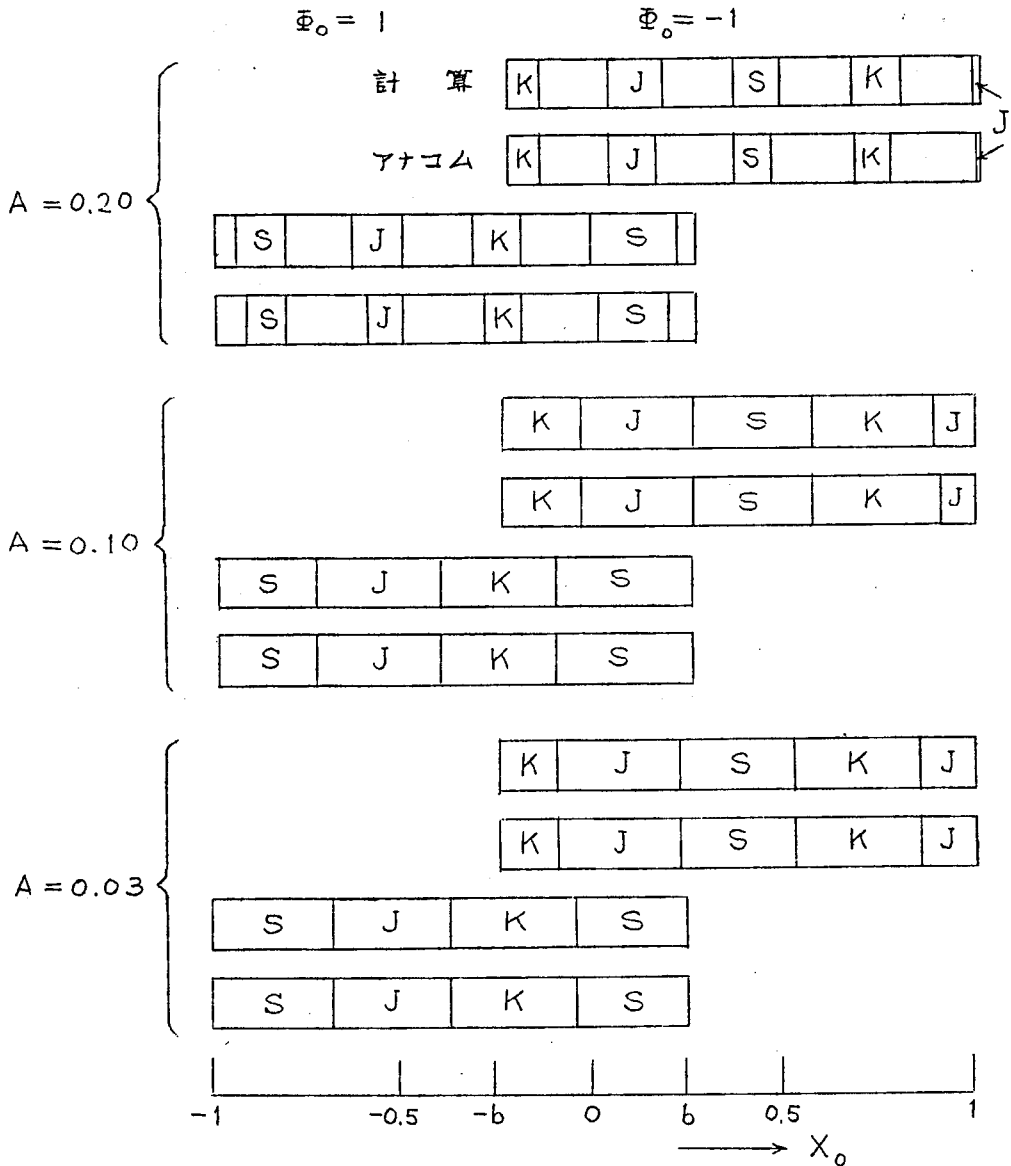


図 2.22 アナコムの計算結果との比較

$W(s) = 1/s, \varphi_0 = 0, \omega = 20, b = 0.25$

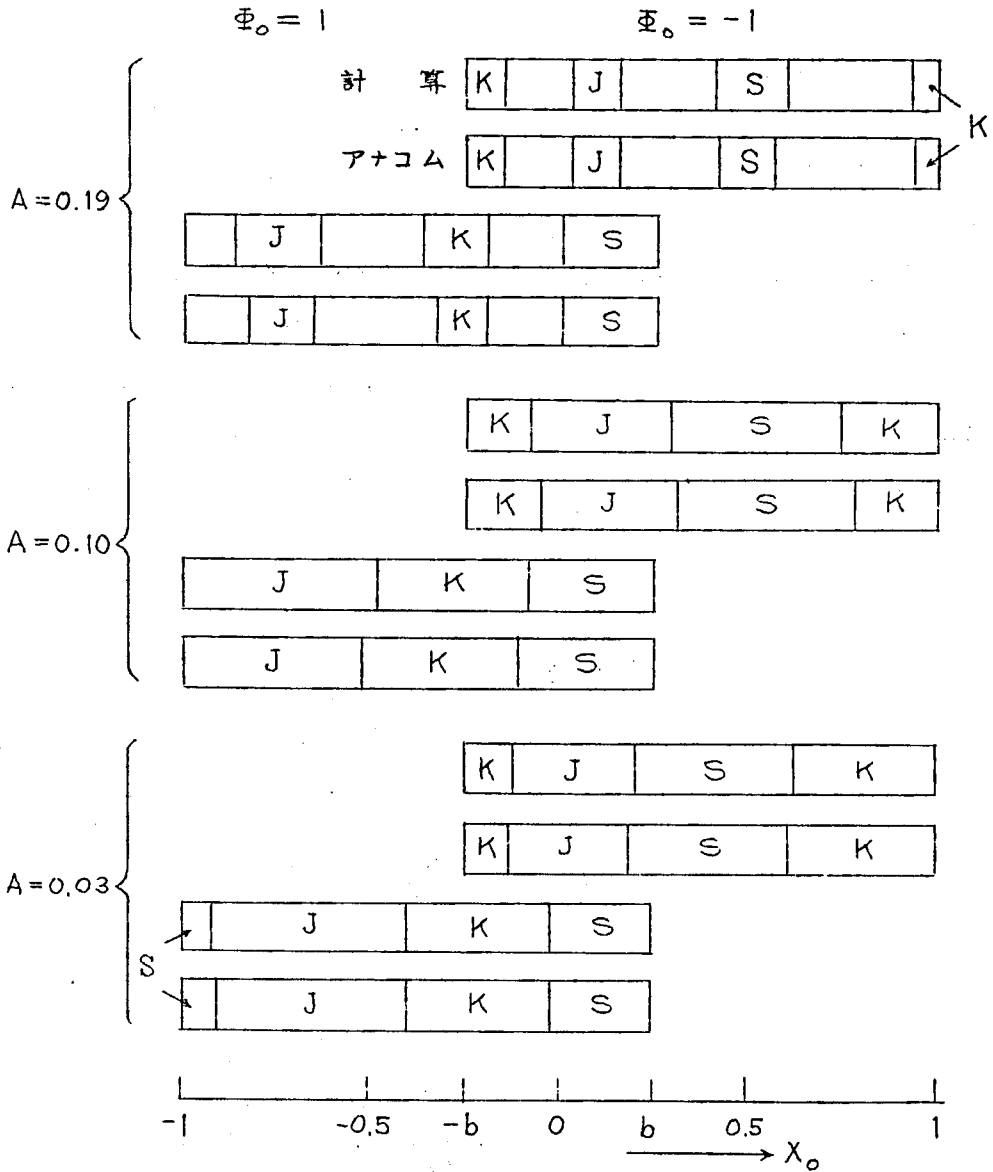


図 2.23 アナコムの計算結果との比較

$W(s) = 1/(s+1), \varphi_0 = 0, \omega = 20, b = 0.25$

### 第3章 二次のリレー制御系の過渡解の解析法

リレー制御系の線形部分が二次の伝達関数で与えられる場合には、振動状態を表わすのに出力 $x$ の他にその微分値 $\dot{x}$ をも用いることが必要で、前章の場合のように $(t, x)$ 平面で系の状態の時間的変化を考察することはできない。本章では $(x, \dot{x})$ 位相平面を用いて、位相面の任意の点より出発した過渡解のある時間後の位相面上の位置を表わす点を求める方法を述べる。この方法は線形部分の伝達関数が二次である場合には一般的に適用することができるが、本章ならびに以下の章では線形部分が1型の伝達関数で表わされ、リレー特性は対称であるような簡単なリレー・サーボ系に正弦波入力を加えた場合を例にとって考察を進める。

#### § 3.1 過渡解の位相面軌道

図 3.1 に示す二次のリレーサーボ系について考える。この系の出力 $x^*$ について考えると、

$$T \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} + \frac{dx^*}{dt^*} = k \Phi^*(\sigma^*) \quad (3.1)$$

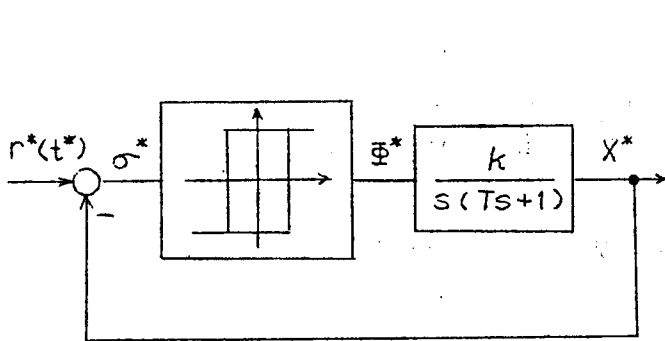


図 3.1 リレー制御系のブロック線図

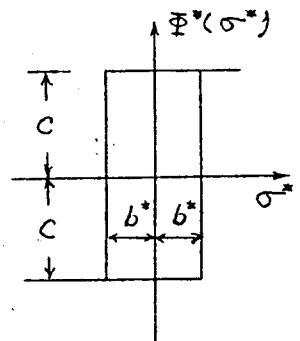


図 3.2 対称リレー特性



$$\sigma^* = r^*(t^*) - x^* \quad )$$

なる微分方程式が成立する。ここで  $\Phi^*(\sigma^*)$  は図 3.2 に示す対称なリレー特性を表わす関数である。変数ならびに定数を、

$$\left. \begin{aligned} t = \frac{t^*}{T} \quad x = \frac{x^*}{Tck} \quad \sigma = \frac{\sigma^*}{Tck} \\ r(t) = \frac{1}{Tck} r^*(t^*) \quad b = \frac{b^*}{Tck} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

のように変換すると、(3.1) 式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \Phi(\sigma) \\ \sigma = r(t) - x \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

のようになる。ここに  $\Phi(\sigma)$  は図 3.3 に示す対称なリレー特性を表わす関数である。いまこの系に正弦波入力  $r(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$  を印加した場合には (3.3) 式は、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} = \Phi(\sigma) \quad (\cdot = \frac{d}{dt}) \\ \sigma = A \sin(\omega t + \varphi_0) - x \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

のようになり、これをブロック線図で示すと図 3.4 のようになる。ここに  $\varphi_0$  は  $t=0$  における入力の位相角である。以下では図 3.4 で示されるリレー制御系の振動を、 $x, z$  位相面を用いて解析する方法につ

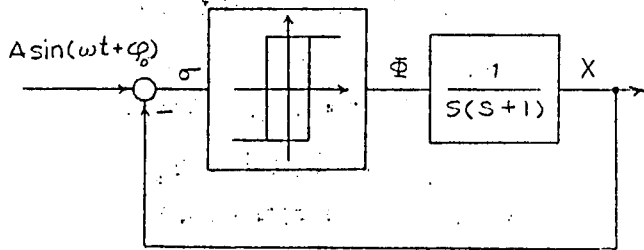
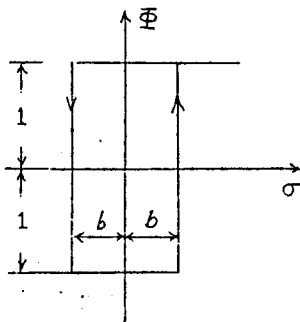


図 3.3 対称リレー特性

図 3.4 リレー制御系のブロック線図

いて考察する。

さて  $t=0$  における  $x, \dot{x}$  の初期値を  $x_0, \dot{x}_0$  とし、同じくリレー出力の初期値を  $\Phi_0$  とし、(3.4) 式の第1式を解くと、

$$\dot{x} - \Phi_0 = (\dot{x}_0 - \Phi_0) e^{-t} \quad (3.5)$$

$$x = x_0 + \Phi_0 t + (\dot{x}_0 - \Phi_0)(1 - e^{-t}) \quad (3.6)$$

のようになる。この場合  $\Phi(\sigma)$  は図 3.3 に示すような関数であるから、

$$\sigma(0) > b, \quad \text{のとき} \quad \Phi = 1$$

$$\sigma(0) < -b, \quad \text{のとき} \quad \Phi = -1$$

のように定まるが、

$$|\sigma(0)| \leq b$$

のときには  $\Phi_0$  は +1 または -1 のいずれをもとることができる。

いま、任意の解において、 $\Phi_0 = 1$  であれば、その解の初期値は正極平面上にあると呼び、 $\Phi_0 = -1$  である場合にはその解の初期値は負極平面上にあると呼ぶことにする。この場合 (3.4) 式の第2式において、 $t=0$  とすれば、

$$\sigma(0) = A \sin \varphi_0 - x_0 \quad (3.7)$$

であるから、

$$\left. \begin{array}{l} \text{正極平面} \quad \Pi^+ : A \sin \varphi_0 + b \geq x_0 \\ \text{負極平面} \quad \Pi^- : A \sin \varphi_0 - b \leq x_0 \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

のように与えられる。またリレーにヒステリシス特性が存在する場合には、正極平面と負極平面とは位相面の一定の区間において重ね合わされていることになる。

(3.5) 式および (3.6) 式から時間  $t$  を消去すると、

$$x + \Phi_0 \ln |\dot{x} - \Phi_0| + (\dot{x} - \Phi_0) = C_0 \quad (3.9)$$

を与える。ここに  $C_0$  は初期値に関係した定数で、

$$C_0 = x_0 + \Phi_0 \ln (\dot{x}_0 + \Phi_0) + (\dot{x}_0 + \Phi_0)$$

で与えられる。(3.9) 式は (3.4) 式の第1式解の位相面軌道を与える式で図 3.5 の実線 ( $\Phi_0 = -1$ ) および破線 ( $\Phi_0 = 1$ ) で示すような、 $C_0$  をパラメータとする曲線を表わしている。リレー出力  $\Phi_0$  が一定であれ

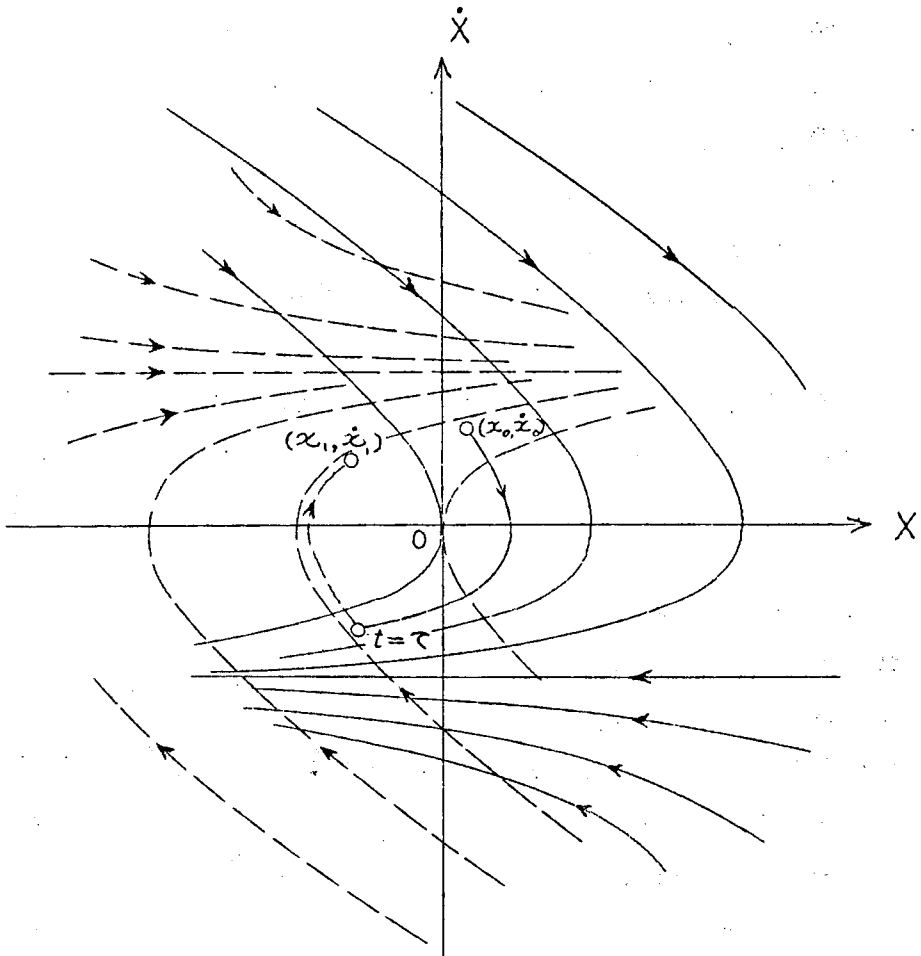


図 3.5 解の位相面軌道

ば、これらの位相面軌道は任意の点  $(x_0, \dot{x}_0)$  に対して唯一つだけ存在しており、2つの軌道が交わることはない。今位相面上の点  $(x_0, \dot{x}_0)$  に初期値をとるならば、(3.4)式の第1式の解はその点を通る実線または破線の位相面軌道の上を時間の経過とともに矢印の方向に移動する。このようにして求められた(3.4)式の解が

$$\left. \begin{aligned} \sigma(t) &= -b \pm \\ \dot{\sigma}(t) &\pm < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

なる条件を共に満足した場合にはリレーの切換えが行なわれる。なかここに、

$$\dot{\sigma}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \dot{x} \quad (3.11)$$

である。今  $t = \tau$  において最初のリレーの切換えが行なわれるものとする

$$\sigma(\tau) = -b\Phi_0 \quad (3.12)$$

$$\dot{\sigma}(\tau)\Phi_0 < 0 \quad (3.13)$$

なる二条件が成立していなければならない。(3.4)式の第2式ならびに(3.11)式にそれぞれ(3.6), (3.5)式を代入して  $t = \tau$  とし、さらに(3.12), (3.13)式のようにおくと、

$$x_0 + (\dot{x}_0 - \Phi_0)(1 - e^{-\tau}) - A \sin(\omega\tau + \varphi_0) + \Phi_0(\tau - b) = 0 \quad (3.14)$$

$$[A\omega \cos(\omega\tau + \varphi_0) - (\dot{x}_0 - \Phi_0)e^{-\tau} - \Phi_0]\Phi_0 < 0 \quad (3.15)$$

をえる。(3.12)式を(3.4)式の第2式を用いて書き直すと容易にわかるように

$$x(\tau) = A \sin(\omega\tau + \varphi_0) + b\Phi_0 \quad (3.16)$$

でありまた、(3.5)式より、

$$\dot{x}(\tau) = \Phi_0 + (\dot{x}_0 - \Phi_0)e^{-\tau} \quad (3.17)$$

であるから、リレーの切換えが行なわれた後においては、(3.4)式の解は、

$$\dot{x} - \Phi_1 = [\dot{x}(\tau) - \Phi_1]e^{-(t-\tau)} \quad (3.18)$$

$$x = x(\tau) + \Phi_1(t - \tau) + [\dot{x}(\tau) - \Phi_1](1 - e^{-(t-\tau)}) \quad (3.19)$$

$$\Phi_1 = -\Phi_0 \quad (3.20)$$

で与えられる。 $t = L (L > \tau)$  における(3.4)式の解の  $x, \dot{x}$  平面上の位置を  $(x_1, \dot{x}_1)$  で表わし、 $\tau < t < L$  なる時間  $t$  においてリレーの切換えは行なわれないものとする、(3.16)~(3.20)式により、

$$x_1 = (\dot{x}_1 - \Phi_1)(e^{L-\tau} - 1) + A \sin(\omega\tau + \varphi_0) + \Phi_1(L - \tau - b) \quad (3.21)$$

$$\dot{x}_1 - \Phi_1 = (\dot{x}_0 - \Phi_0)e^{-L} + 2\Phi_0 e^{-L+\tau} \quad (3.22)$$

をえる。すなわち  $t = 0$  において  $\Phi = \Phi_0$  で点  $(x_0, \dot{x}_0)$  を出発した解は  $t = L$  において、(3.14)式で定まる  $\tau$  をパラメータとして(3.21), (3.22)式で定まる点  $(x_1, \dot{x}_1)$  にあることがわかる。

### § 3.2 最初のリレーの切換え

容易にわかるように、(3.14) 式を満足する初期値の点は  $\chi$ ,  $\psi$  位相面上で  $\tau$  をパラメータとする負の傾斜の直線の上にある。その直線の傾斜は  $\tau=0$  では  $-\infty$  であり、 $\tau$  の増加とともに  $-\infty \rightarrow -1$  まで単調に増加する。 $\tau=\tau$  において最初のリレーの切換えの行なわれる解の初期値は、この直線上の次の3条件を共に満足している部分にある。

(a.1) (3.15) 式を満足している。

(a.2) リレー出力の初期値が  $\Phi_0 = 1$  である直線であれば正極平面  $\Pi^+$  上に、また  $\Phi_0 = -1$  である直線であれば負極平面  $\Pi^-$  上になければならない。

(a.3)  $\tau_1 < \tau$  なるパラメータ  $\tau_1$  をもつ直線と交っておりかつ  $\tau_1$  において上の2条件が満足されている場合には、パラメータ  $\tau$  なる直線上のこのような交点の存在する部分をはぶく。

この(a.1)~(a.3)の条件をすべて満足している直線の部分を、 $\Phi_0$  の正負に対応してそれぞれ  $L_0^+(\tau)$ ,  $L_0^-(\tau)$  直線と呼ぶことにする。

いま、ヒステリシスの中  $b$  および入力のパラメータ  $A, \omega$  を

$$b = 0.20, \quad A = 0.16, \quad \omega = 5$$

にとり、また入力位相角を  $\varphi_0 = 0$  にとって、負極平面  $\Pi^-$  上で  $\Phi_0 = -1$  の場合の(3.14)式の直線を描くと図 3.6 の負の傾斜の直線となる。

(3.14) 式の負の傾斜の直線のうちで(3.15)式を満足している部分を求めるために(3.15)式の左辺を零とおくと、

$$A \omega \cos(\omega \tau + \varphi_0) - (\dot{\chi}_0 - \Phi_0) e^{-\tau} - \Phi_0 = 0 \quad (3.23)$$

をえる。(3.14), (3.23) 式を共に満足する位相面上の点は図 3.6 の曲線 AB, BY のようになり、曲線 AB の A より B を見た右側および曲線 BY の B より Y を見た右側では、この曲線に接する負の傾斜の直線が

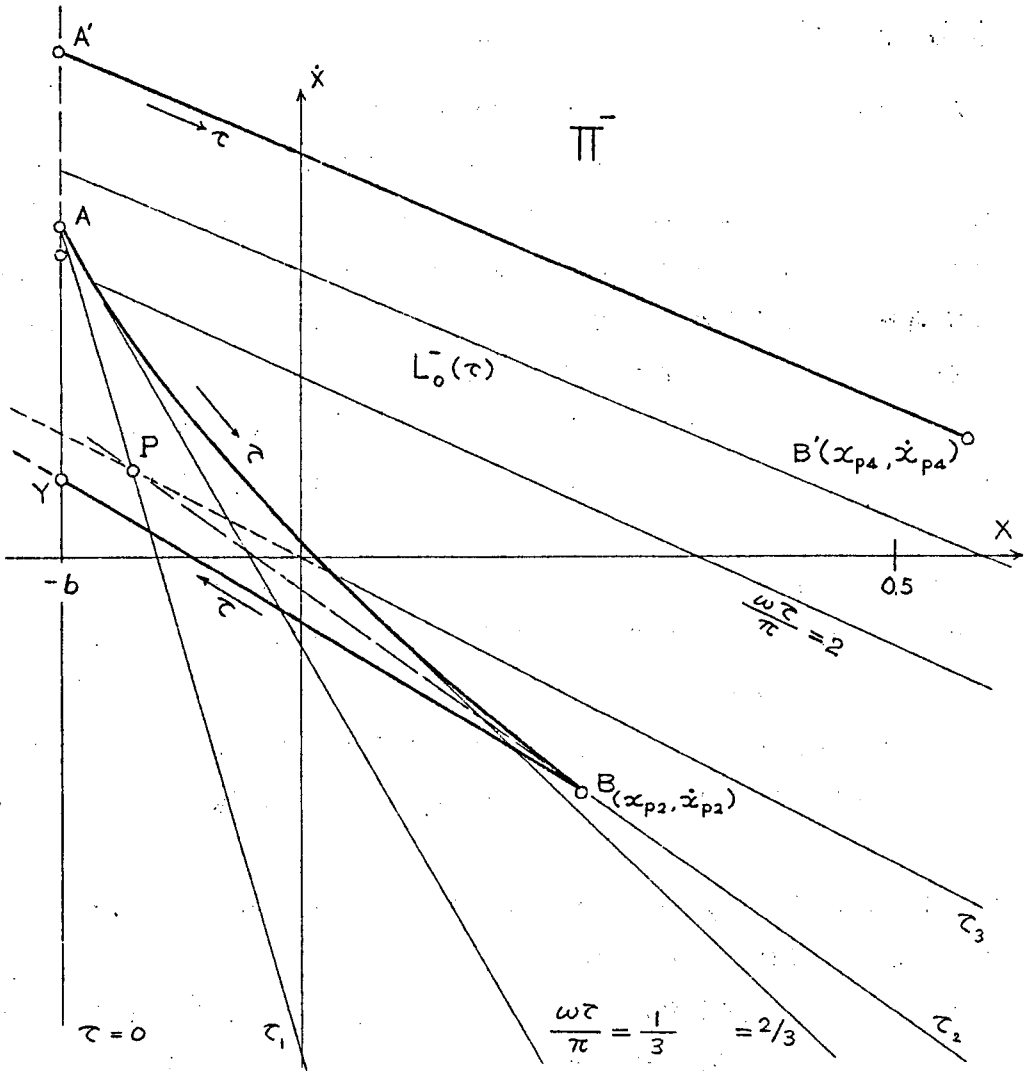


図 3.6 (3.14) 式で表わされる負の傾斜の直線 ( $\Phi_0 = -1$ )

存在しており、この曲線は  $\tau$  をパラメータとする (3.14) 式で与えられる負の傾斜の直線の包絡線\*となっている。そして (3.15) 式において  $\Phi_0 = -1$  とおくと容易にわかるように、任意の  $\tau$  に対応する負の傾斜の直線においてその直線と曲線  $AB$  または  $BY$  との接点の  $x$  座標よりも  $x$

\*  $f(x, y, \tau) = 0$  の包絡線はこの方程式と  $\partial f / \partial \tau = 0$  から  $\tau$  を消去してえられる。

の値が小さい部分に初期値をとった場合に(3.15)式が成立し、それよりも  $\alpha$  が大きければ(3.15)式は成立しない。したがって負の傾斜の直線のうちで、包絡線 AB、BY との接点よりも下の部分のみをとれば(a.1)の条件が満たされている。(3.14)、(3.23)式を共に満足する点は  $\alpha$  が増大するとともに点Aより出発してBへ、さらにBからYへと移動し、ついに  $\alpha < -b$  の領域へと及びていく。図3.6の  $\tau_3$  に対応する負の傾斜の直線の場合には、この図の範囲では包絡線との接点を有していないが実際には  $\alpha = -b$  より左側の領域で曲線BYの延長線上で接点を有しており、したがって  $\tau_3$  に対応する負の傾斜の直線の場合  $\alpha \geq -b$  の部分は全て(a.1)の条件を満たしている。

ここで図3.6の点Pについて考えると、 $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 、 $\tau_3$  に対応する3本の負の傾斜の直線が点Pを通っている。 $\tau_2$  に対応する直線は点Bで包絡線に接しており、点Pでは(a.1)の条件が満足されないから除外する。一方  $\tau_1$ 、 $\tau_3$  に対応する直線についてはいずれも(a.1)、(a.2)の条件を満足している。この場合  $\tau_1 < \tau_3$  であるから一度  $\tau_1$  においてリレーが切換えられてしまえば、 $\tau_3$  においてどのような条件が満たされていようと問題ではない。したがって(a.3)の条件を設けることが必

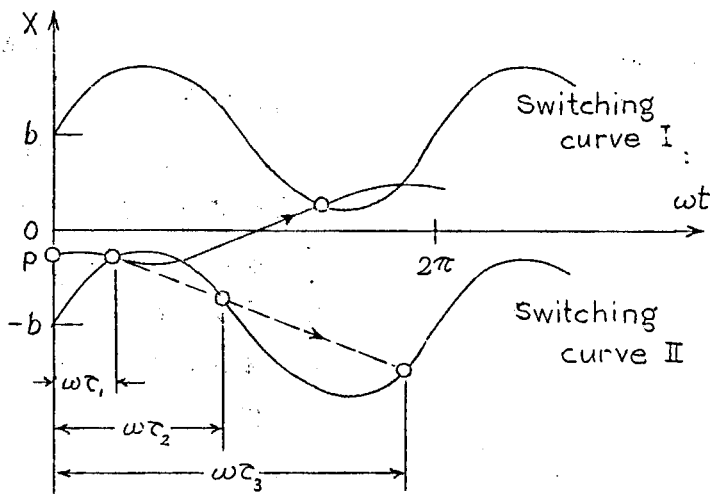


図 3.7 過渡応答のリレーの切換え

要となる。点Pから出発する解の時間応答曲線は図3.7に示すように時点  $t = \tau$  において切換曲線<sup>II</sup>に交わりリレーは負から正に切り換えられる。曲線 AB, BY および直線  $x = -b$  ではさまれた領域内のいずれの点についても点Pと同じことがいえるので、包絡線 BY に接し、AB と交わる負の傾斜の直線については、曲線 AB の A より B を見た左側の部分のみをとって  $L_0^-(\tau)$  直線とする。

結局 (3.14) 式の負の傾斜の直線のうちで、その直線が曲線 AB と接するものについてはその接点よりも下の部分のみをとり、またその直線が曲線 AB と交わるものについてはその交点よりも下の部分のみをとり、このいずれでもない直線にあつては  $x$  軸に平行な直線  $x = \sin \varphi_0 - b$  (図3.6では  $\varphi_0 = 0$  であり、 $x = -b$  となる) との交点よりも下の部分のみをとって  $L_0^-(\tau)$  直線とする。こうすると  $x \geq \sin \varphi_0 - b$  の負極平面の全ての点には唯一本の  $L_0^-(\tau)$  直線が存在することになる。

これまでは  $\varphi_0 = -1$  の場合について考察してきたが、 $\varphi_0 = 1$  の場合にも同様な考察を行なうことができる。その結果は図3.8に示されており、この図で曲線 CD が  $\varphi_0 = 1$  の場合の負の傾斜の直線の包絡線であり、この曲線 CD と接する負の傾斜の直線にあつてはその接点よりも上の部分のみをとり、また曲線 CD と交わる直線にあつてはその交点よりも上の部分のみをとり、このいずれでもない直線においては  $x = \sin \varphi_0 + b$  との交点よりも上の部分のみをとると、これらの負の傾斜の半直線はいずれも (a.1), (a.2), (a.3) の3条件を満足する  $L_0^+(\tau)$  直線となる。そして正極平面の全ての点に対して唯一本の  $L_0^+(\tau)$  直線が存在していることがわかる。図3.8の負の傾斜の直線は  $L_0^-(\tau)$  直線(実線)、および  $L_0^+(\tau)$  直線(破線)を表わしている。以下では  $L_0^-(\tau)$  直線ならびに  $L_0^+(\tau)$  直線を一括して  $L_0$  直線と呼ぶこともある。

ここで (3.14) 式と (3.23) 式を共に満足している曲線、すなわち負の傾斜の直線の包絡線はパラメータの如何にかかわらず、一般に図3.6の曲線 AB, BY のような形をしていることを示そう。



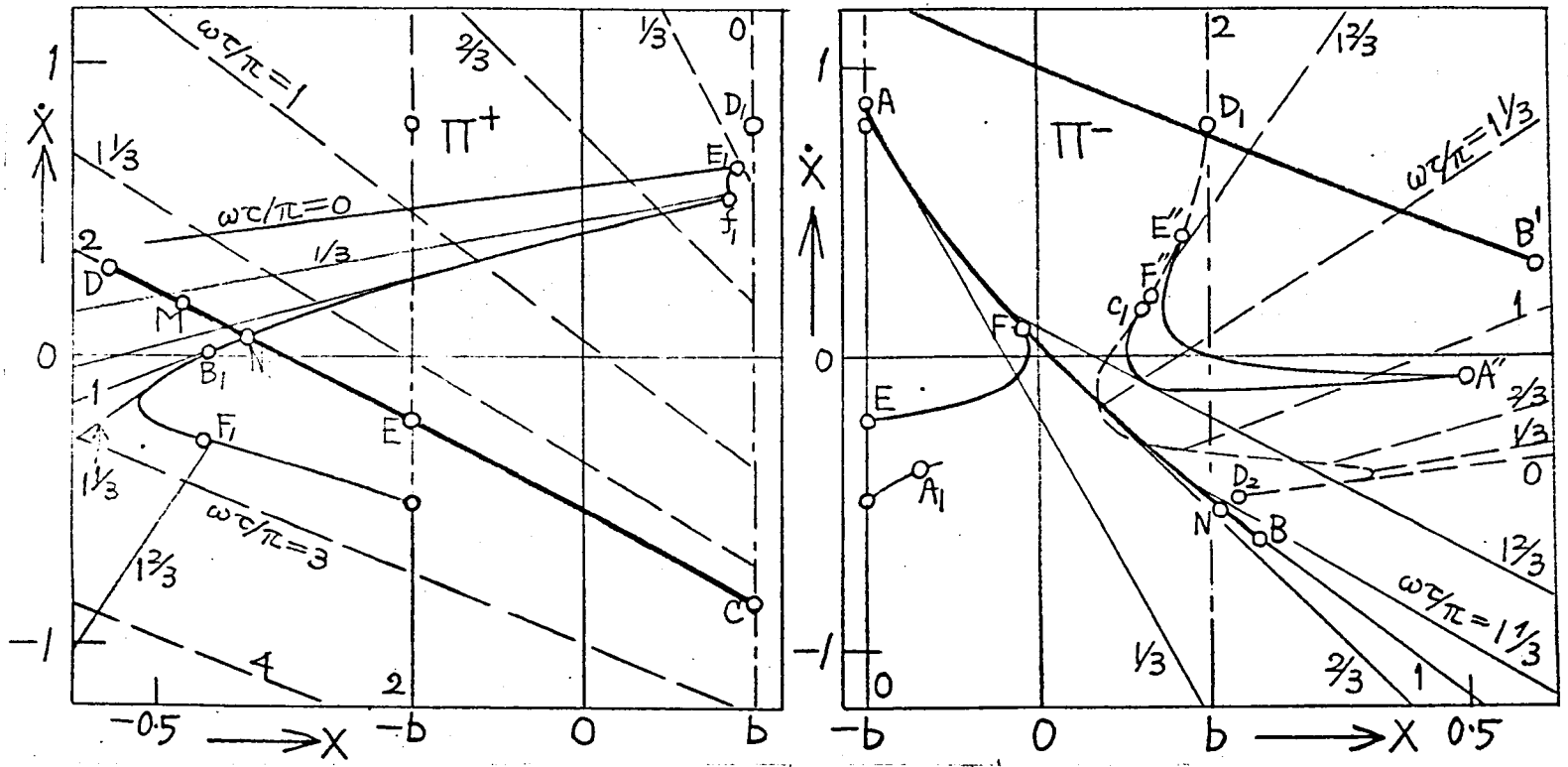


图 3.8 遲滯応答の位相面解析

( $A=0.16, \omega=5, b=0.2, \varphi_0=0$ )

(3.14)式を $\tau$ について微分すると、

$$\frac{dx_0}{d\tau} + \frac{d\dot{x}_0}{d\tau}(1-e^{-\tau}) + (\dot{x}_0 - \Phi_0)e^{-\tau} - A\omega \cos(\omega\tau + \varphi_0) + \Phi_0 = 0 \quad (3.24)$$

となり、これに(3.23)式を用いると、

$$\frac{dx_0}{d\tau} + \frac{d\dot{x}_0}{d\tau}(1-e^{-\tau}) = 0$$

となる。

$$\frac{d\dot{x}_0}{dx_0} = \frac{d\dot{x}_0}{d\tau} / \frac{dx_0}{d\tau}$$

であることを考慮すると、

$$\frac{d\dot{x}_0}{dx_0} = \frac{-1}{1-e^{-\tau}} \quad (3.25)$$

をえる。(3.25)式より包絡線の微係数は常に負であり、この増加とともに $-\infty \rightarrow -1$ まで単調に増大する。同様にして、

$$\frac{d^2\dot{x}_0}{dx_0^2} = \frac{e^{-2\tau}}{(1-e^{-\tau})^3 [A\omega^2 \sin(\omega\tau + \varphi_0) - A\omega \cos(\omega\tau + \varphi_0) + \Phi_0]} \quad (3.26)$$

をえる、この式において分母が零になると(3.26)式の右辺は無限大となる。

(3.26)式 of 分母の第2因数を零とおくと、

$$A\omega^2 \sin(\omega\tau + \varphi_0) - A\omega \cos(\omega\tau + \varphi_0) + \Phi_0 = 0 \quad (3.27)$$

または

$$A\omega \sqrt{1+\omega^2} \sin(\omega\tau + \varphi_0 - \tan^{-1} \frac{1}{\omega}) + \Phi_0 = 0 \quad (3.27')$$

をえる、(3.27)式の左辺は零の前後で符号が反転するから、(3.27)

式を満足する点で $\frac{d^2\dot{x}_0}{dx_0^2}$ の値は $-\infty$ から $+\infty$ または $+\infty$ から $-\infty$ へと不

連続的に変化する。(3.27)式を満足する $\tau$ を求めて(3.14)式および

(3.23)式に入れて $x_0, \dot{x}_0$ を計算すると、この点で負の傾斜の直線の

包絡線は二次の不連続となっており、この点は尖点となっている。そして(3.27)式を $\tau$ についての方程式として解いた根よりも小なる値から大なる値にパラメータ $\tau$ の値を変化した場合に、負の傾斜の直線の包絡線は凸曲線から凹曲線へ、または凹曲線から凸曲線へと変化する。

いま(3.27)式において $A=0.16$ ,  $\omega=5$ ,  $\varphi_0=-1$ ,  $\varphi_0=0$ とにおいて(3.27)式の根を求め、小さい方から $\tau_{p1}$ ,  $\tau_{p2}$ ,  $\tau_{p3}$ , ... とし、この $\tau_{p1}$ ,  $\tau_{p2}$ , ... を(3.14)式および(3.23)式に代入して求めた $\dot{x}$ および $\dot{z}$ の値を $x_{p1}$ ,  $x_{p2}$ , ...,  $\dot{x}_{p1}$ ,  $\dot{x}_{p2}$ , ... とすると第3.1表に示す値をえる。これらの尖点のうちで点 $(x_{p1}, \dot{x}_{p1})$ ,  $(x_{p4}, \dot{x}_{p4})$ だけが $x \geq -b$ の半平面に存在しており、図3.8ではそれぞれ点Bおよび点B'で示されている。

第 3.1 表

$\omega\tau_{p1} = 25^\circ 20'$	$x_{p1} = -0.202$	$\dot{x}_{p1} = 0.883$
$\omega\tau_{p2} = 177^\circ 11'$	$x_{p2} = 0.256$	$\dot{x}_{p2} = -0.629$
$\omega\tau_{p3} = 25^\circ 20' + 360^\circ$	$x_{p3} = -3.85$	$\dot{x}_{p3} = 5.62$
$\omega\tau_{p4} = 177^\circ 11' + 360^\circ$	$x_{p4} = 0.577$	$\dot{x}_{p4} = 0.301$
⋮	⋮	⋮

なお一般に、

$$0 < \frac{1}{A\omega\sqrt{1+\omega^2}} \ll 1$$

であれば(3.27)式を満足する解 $\tau_{pn}$ は

$$\omega\tau_{pn} + \varphi_0 - \tan^{-1}(1/\omega) \approx (n-1)\pi$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与えられ、特に $\tan^{-1}(1/\omega)$ が $\pi$ に比べて充分小さい場合には、

$$\omega\tau_{pn} + \varphi_0 \approx (n-1)\pi \tag{3.28}$$

で与えられる。上式は曲線AB, CDの尖点を通る $L_0^\pm$ ( $\tau$ )直線のパラメータ $\tau$ を近似的に見出すのに用いると便利である。

同様にして  $\Phi_0 = 1$  の場合の包絡線 CD は上に凸な曲線であり、点 D が尖突となっている。

さて図 3.8 の曲線 AB, CD の上に初期値をとった場合には、(3.12) および (3.13) 式からわかるように、その点に接する  $L_0^-(\tau)$  直線のパラメータ  $\tau$  について

$$\sigma(\tau) = -b\Phi_0$$

$$\dot{\sigma}(\tau) = 0$$

となり、さらに、

$\ddot{\sigma}(\tau) = -A\omega^2 \sin(\omega\tau + \varphi_0) - \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega\tau + \varphi_0) + (\dot{x} - \Phi_0)$  であるから、

$$\ddot{\sigma}(\tau) = -A\omega^2 \sin(\omega\tau + \varphi_0) + A\omega \cos(\omega\tau + \varphi_0) - \Phi_0 \quad (3.29)$$

となる。そこで (3.27) 式を考慮に入れると、

$$\tau_{p1} < \tau < \tau_{p2}$$

$$\tau_{p3} < \tau < \tau_{p4}$$

なる  $\tau$  については、

$$\Phi_0 \ddot{\sigma}(\tau) > 0$$

となり、この解は  $t = \tau$  においてリレーの切換えが行なわれない。したがって図 3.8 において曲線 AB 自体はこの曲線の A より B を見た左側の領域に属している。同様にして曲線 CD 自体はこの曲線の C より D を見た左側の領域に属している。

### § 3.3 切換え後の解の位置

$L_0^-(\tau)$  または  $L_0^+(\tau)$  直線の任意の一つをとる。この直線上に任意の 2 点  $\gamma_0, \delta_0$  をとり、その  $\dot{x}$  座標を  $\dot{x}_{\gamma_0}, \dot{x}_{\delta_0}$  とする。点  $\gamma_0, \delta_0$  を初期値とする解の  $t = L$  における位置を表わす点の  $\dot{x}$  座標をそれぞれ  $\dot{x}_{\gamma_1}, \dot{x}_{\delta_1}$  とすると、 $t = 0$  から  $t = L$  までの間に 1 回リレーが切り換えられる場合には、 $\dot{x}_{\gamma_1}, \dot{x}_{\delta_1}$  は (3.22) 式から求められ、その結果から

$$\dot{x}_{\gamma_1} - \dot{x}_{\delta_1} = (\dot{x}_{\gamma_0} - \dot{x}_{\delta_0}) e^{-L} \quad (3.30)$$

なる関係式が導かれる。またで  $\geq L$  で  $t=0$  から  $t=L$  までの間に1  
回もリレーの切換えがない場合には(3.5)式を用いることにより上式  
と同じ式を導くことができる。したがって  $t=0$  から  $t=L$  までのリレ  
ーの切換えが1回以下である場合には、(3.30)式より、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\chi}_{r_0} > \dot{\chi}_{\delta_0} &\implies \dot{\chi}_{r_1} > \dot{\chi}_{\delta_1} \\ \dot{\chi}_{r_0} < \dot{\chi}_{\delta_0} &\implies \dot{\chi}_{r_1} < \dot{\chi}_{\delta_1} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

なる関係が成立する。

さて任意の一つの  $L_0^+(t)$  または  $L_0^-(t)$  直線をとった場合、その一端  
は無有限遠方にあり、他端は(a.1)~(a.3)のいずれかの条件によって  
与えられている。いま先の任意の点  $\delta_0$  を後者にとり、点  $r_0$  をその  
 $L_0^-(t)$  または  $L_0^+(t)$  直線上の任意の点とすると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\chi}_{r_0} < \dot{\chi}_{\delta_0} & (\Phi_0 = -1) \\ \dot{\chi}_{r_0} > \dot{\chi}_{\delta_0} & (\Phi_0 = 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

であるから、途中のリレーの切換えが1回以下であれば、

$$\dot{\chi}_{r_1} < \dot{\chi}_{\delta_1} \quad (\Phi = -1) \quad (3.33)$$

$$\dot{\chi}_{r_1} > \dot{\chi}_{\delta_1} \quad (\Phi = 1) \quad (3.34)$$

のようになる。

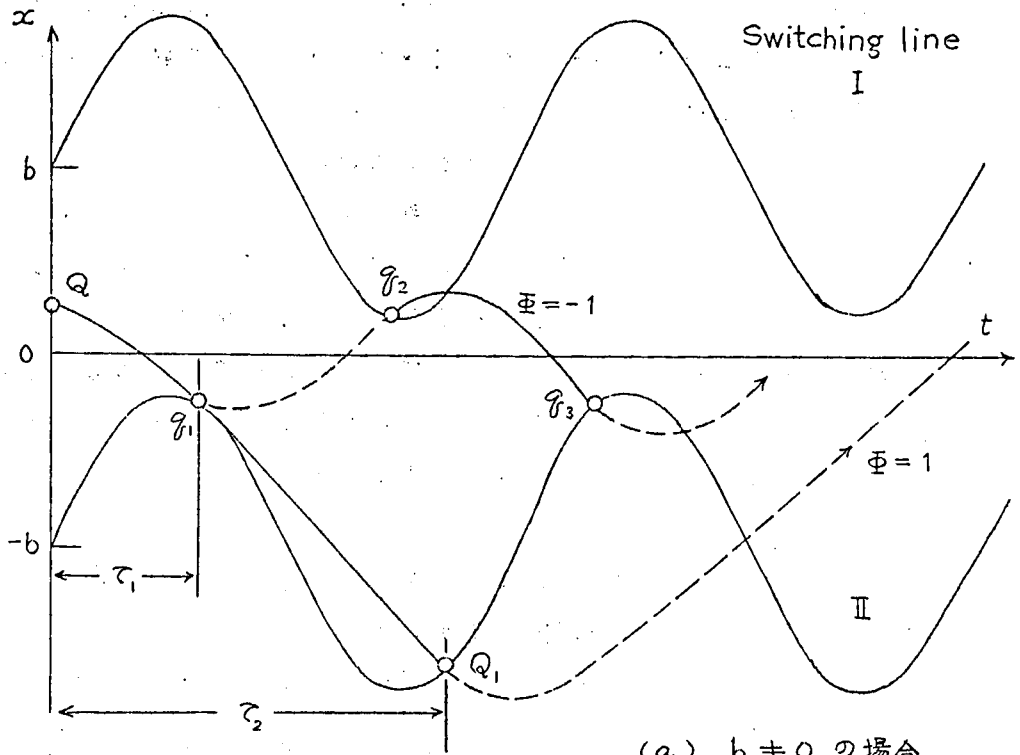
さて  $t=L$  における解の位置  $(\alpha_1, \dot{\alpha}_1)$  についての(3.21)式の関係  
は  $L \geq t$  であることから、 $(\alpha, \dot{\alpha})$  平面上の  $t$  をパラメータとする正  
の傾斜の直線を表わしている。この直線のうちで  $\Phi_0 = -1$  であれば(3.  
33)式、 $\Phi_0 = 1$  であれば(3.34)式を満足しており、かつ途中における  
リレーの切換回数が一回である部分を取り、それぞれ  $L_1^-(t)$ 、 $L_1^+(t)$   
直線とする。これらの直線を  $L_1$  直線と総称することにする。図3.8の  
正の傾斜の直線は  $L = \frac{2\pi}{\omega}$  にとった場合の  $L_1^-(t)$  直線(実線)および  
 $L_1^+(t)$  直線(破線)である。

$t=0$  から  $t=L$  までの間にリレーが1度だけ切り換えられる場合  
には図3.8のように  $L_0$  直線と  $L_1$  直線を描いておけば(3.22)式の計算  
を行なうだけで容易に  $t=L$  における解の位置を求めることができる。  
 $L_0$  直線においてその直線のパラメータ  $t$  が  $t > L$  であるならば、 $t$

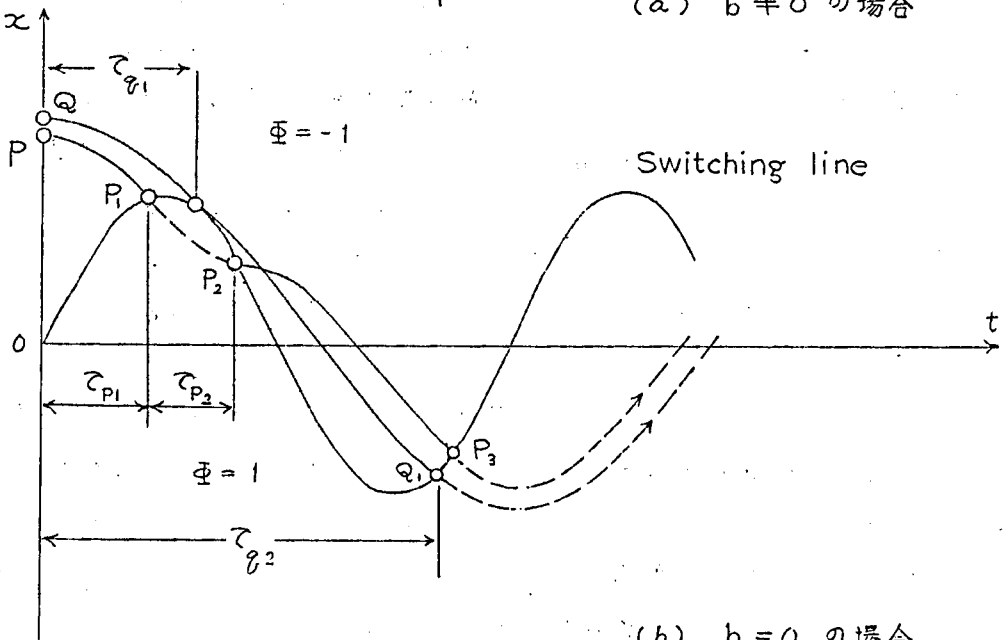
$t=0$  から  $t=L$  までの間にリレーの切り換えは1回もなく、 $0 < \epsilon < L$  であれば、少なくとも1回はリレーの切り換えが行なわれる。 $L$ の値を大きくとった場合には  $t=0$  から  $t=L$  までの間に2回以上リレーの切換えが行なわれることがある。このような場合には直接  $t=L$  における解の位置を知ろうとすればかなり複雑な計算が必要となる。しかし  $t=0$  から  $t=L$  までの間をいくつかに分けると、それぞれの期間についてはリレーの切換えの回数が1回となるようにすることができる。そうすれば1回毎の解の位置を求める操作については(3.21), (3.22)式のような関係が成立するので、この操作をくりかえすことにより  $t=L$  における解の位置を求めることができる。

図3.8の場合三角の領域AEF内に初期値をとった場合には  $t = \frac{2\pi}{\omega}$  までの間に2回リレーの切換えが行なわれ、 $t = \frac{2\pi}{\omega}$  において解は  $A''E''F''$  の領域内に入るのであるが、これにはまずAEF内の点を初期値とする解の  $t = \pi/\omega$  における位置を求め、次に  $t = \frac{2\pi}{\omega}$  の位置を求めた。この場合2回リレーの切換えの行なわれる領域の境界EFは、この上から出発した解が  $t = \pi/\omega$  において、曲線CD上の点を初期値とする解とともに曲線ABと原点に対称な曲線の上にあるという条件から与えられるものである。このことについては§3.5で再び考察する。

さて§3.2で述べたように包絡線AB, CD上の任意の点Qを初期値とする解はその点で包絡線に接する負の傾斜の曲線のパラメータで、に相当する時間  $t = \tau_1$  においては(3.12), (3.13)式で与えられるリレーの切換条件は成立せず、点Qで包絡線と交わる負の傾斜の直線のパラメータ  $\tau_2$  に相当する時間  $t = \tau_2$  において始めてリレーの切換えが行なわれる。このようにリレーの切換時間が包絡線AB, CDの両側で不連続的に変化していることから、包絡線AB(またはCD)の両側にあり、無限に接近した2点より出発した2つの解は図3.9に示すように、1度リレーの切換えが行なわれた後において有限な距離だけ離れている。すなわち図3.9(a)の点Qより始まる解は包絡線AB上に初期値を持つものとする、この解は  $t = \tau_1$  において切換曲線IIく



(a)  $b \neq 0$  の場合



(b)  $b = 0$  の場合

図 3.9 切 換 時 間 の 不 連 続

$x = A \sin \omega t - b$ ) と接するが、リレーの切換条件が成立しないため、 $t = t_2$  において始めて  $\sigma = -1$  から  $\sigma = 1$  にリレーが切換えられる。なお図 3.9 においては、 $\sigma = -1$  となっている期間の解は実線で示し、 $\sigma = 1$  となっている期間の解は破線で示している。

一方包絡線 AB の右側にあり、点 Q に無限に近い点を初期値とする解は、 $t = 0$  から  $t = t_1$  までは点 Q に始まる解に添って変化するが、 $t = t_1$  において点 Q に始まる解よりもわずかに  $x$  座標が小さいか、解の傾斜  $\dot{x}$  が急であるから、 $t = t_1$  においてリレーが切換えられる。 $t = t_1$  において  $\sigma = -1$  から  $\sigma = 1$  に切換えられた後この解が再び  $\sigma = -1$  に切換えられるのは、この解と切換曲線 I ( $x = A \sin \omega t + b$ ) の交わる点  $q_2$  である。この場合リレーにヒステリシスがあり、 $b \neq 0$  であるかぎり切換曲線 I と II は有限な距離だけ離れており、点  $q_1$  から点  $q_2$  にいたるには必ず有限の変化時間を必要とする。

このことを図 3.9 (b) に示すヒステリシスの存在しない場合と比較すると、 $b = 0$  の場合には切換曲線 I および II は一致しており、切換曲線の上側では  $\sigma = -1$ 、下側では  $\sigma = 1$  となっている。いま点 Q の近くの点 P に初期値を有する解は、点  $p_1$  において  $\sigma = -1$  から  $\sigma = 1$  にリレーが切り換えられた後、間もなく再び点  $p_2$  において  $\sigma = -1$  に切換えられ、解は  $P, p_1, p_2, p_3, \dots$  のように変化する。この場合 P が点 Q に近ければ 1 回目と 2 回目のリレーの切換えの間隔  $t_{p_2}$  は短くなり、点 P を Q に限りなく近づけると  $t_{p_2} \rightarrow 0$  となる。この場合  $P, p_1, p_2, p_3, \dots$  は解  $Q, Q_1$  に限りなく接近する。

このようにリレーの切換時間の不連続性によって接近した 2 つの解が有限距離だけ引離されるのは、リレーにヒステリシス特性が存在する場合に特徴的な性質で、このようにして引き離された 2 つの解がそれぞれ相異なる周期振動に落ち着くこともあり、そのような場合上述の包絡線が相異なる周期振動を発生する初期条件の領域の境界を与える。

図 3.8 の場合についていえば、包絡線上の線分 FB の F から B を見た右側に初期条件をとった場合には、 $t = 2\pi/\omega$  において解は曲線  $f_1, B_1$  の  $f_1$  から  $B_1$  を見た右側にあり、曲線 FB の同じく左側に初期値を



とれば、曲線  $B_1 F_1$  の  $B_1$  から  $F_1$  を見た右側にくる。同様に包絡線  $AB$  上の線分  $AF$  の右側に初期値を有する解は  $t = 2\pi/\omega$  において領域  $A''F''E''$  内の曲線  $A''F''$  の近傍にあり、曲線  $AF$  の同じく左側の点に初期値を有する解は  $t = 2\pi/\omega$  において曲線  $F_1 A_1$  の  $F_1$  から  $A_1$  を見た右側にある。この場合に曲線  $AB$  上に初期値を有する解は、前節でのべたように曲線  $AB$  自体はこの直線の  $A$  より  $B$  を見た左側の領域に属していることから、 $t = 2\pi/\omega$  において曲線  $B_1 F_1 A_1$  上にある。ただし点  $A$  を通る  $L_0(\tau)$  直線のパラメータでは  $\tau > 2\pi/\omega$  であり、点  $A$  より出発する解は  $t = 2\pi/\omega$  までの間にリレーの切換えは行なわれず、 $t = 2\pi/\omega$  においても  $\sigma = -1$  で  $\alpha > -b$  の半平面上にある。

無限に近い初期値より出発した2つの解が、ある時間を全過した後において有限のへだたりを有するという性質は、種々の周期振動を発生する初期条件の領域を決定する際に重要な役割を果たすものであり、この性質については第5章において更に検討する。

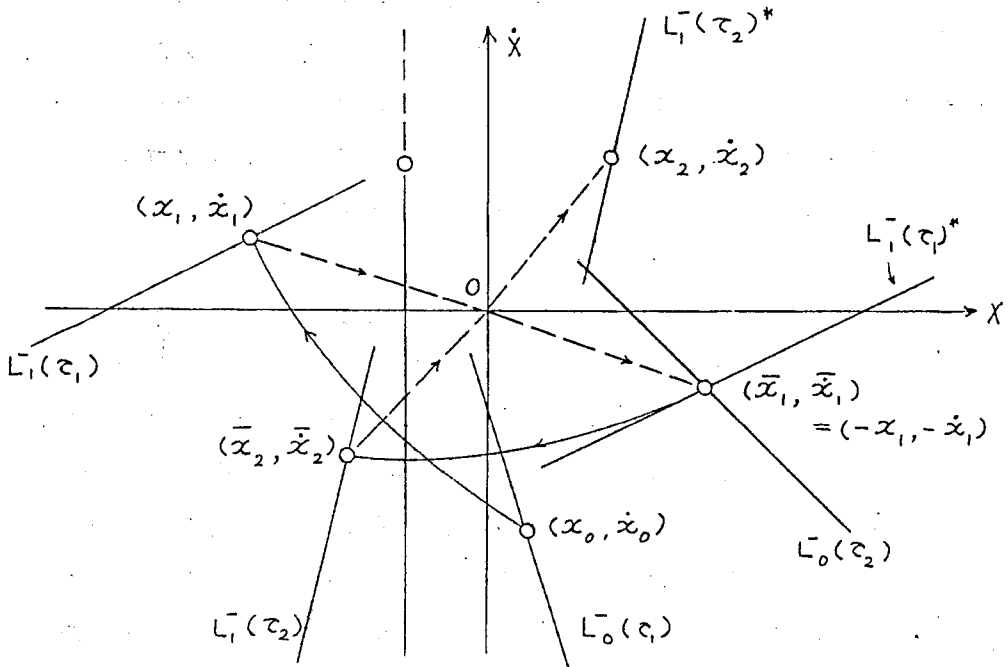


図 3. 10 入力半周期の奇数倍の時間毎に見た解の動き  
\*は原点に関して対称な直線を示す。

### § 3.4 解の位置を求める操作の反復

以上のようにしてある点  $(x_0, \dot{x}_0)$  を初期値とする解の  $t=L$  における位置を求める方法が与えられたが、これを用いて  $t=mL$  における解の位置  $(x_m, \dot{x}_m)$  を求める操作について考える。 $(x_1, \dot{x}_1)$  が与えられた場合に (3.4) 式ならびにそれ以下の諸式において  $\varphi_0$  の代わりに  $\varphi_0 + \omega L$  を代入した式を用いて上述の方法を適用すれば  $(x_2, \dot{x}_2)$  を求めることができるわけであるが、ここで再び入力位相角を  $\varphi_0 + \omega L$  とした式について  $L_0$  ならびに  $L_1$  直線を描かねばならないとしたら、解析は極めて繁雑となる。しかしながら次に述べるように  $L = \frac{2n\pi}{\omega}$  に取った場合には三角関数の周期性により、これらの直線を再び描く必要はないことがわかる。

すなわち  $L = \frac{2n\pi}{\omega}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) にとった場合には入力の位相角  $\varphi_0$  の代わりに  $\varphi_0 + 2n\pi$  を代入しても (3.4) 式以下の諸式は何ら変わらないので、 $t=0$  において点  $(x_0, \dot{x}_0)$  を初期値とする解の  $t=L$  における位置  $(x_1, \dot{x}_1)$  が求められた場合、点  $(x_1, \dot{x}_1)$  を初期値とする解の  $t=L$  における位置を、前と同じ操作によって求めると、その点は点  $(x_0, \dot{x}_0)$  を初期値とする解の  $t=2L$  における位置  $(x_2, \dot{x}_2)$  を与える。同じ操作を  $m$  回くりかえすことにより点  $(x_m, \dot{x}_m)$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) が求められる。

また  $L = (2n+1)(\pi/\omega)$  である場合には (3.4) 式以下の諸式において入力位相角を  $\varphi_0$  の代わりに  $\varphi_0 + (2n+1)\pi$  を代入してえられる式は (3.4) 式において変数  $x, \dot{x}$  を  $-x, -\dot{x}$  におきかえた式と同じになる。したがって入力位相角を  $\varphi_0 + (2n+1)\pi$  にした場合の  $L_0$  直線は入力位相角を  $\varphi_0$  にとった場合の  $L_0$  直線と原点に関して対称となる。そこで今図 3.10 に示すように  $t=0$  に点  $(x_0, \dot{x}_0)$  にある解の  $t=L$  における位置  $(x_1, \dot{x}_1)$  が求められた場合にこれと原点に関して対称な点  $(\bar{x}_1, \bar{\dot{x}}_1) = (-x_1, -\dot{x}_1)$  をとり、この点を初期値とする解の  $t=L$  における位置を求めると、その点は  $(x_0, \dot{x}_0)$  を初期値とする

解の  $t=2L$  における位置  $(x_2, \dot{x}_2)$  と原点に関して対称な点  $(-x_2, -\dot{x}_2)$  であることがわかる。ここでまず点  $(x_1, \dot{x}_1)$  を求めてそれを点  $(\bar{x}_1, \bar{\dot{x}}_1)$  にうつす操作の手間をはぶくために、予め  $L_1^\pm(\tau)$  直線と原点に関して対称な直線  $L_1^\pm(\tau)^*$  を描いておこなうならば、(3.22) 式で与えられる  $x_1$  に対して  $\bar{x}_1 = -x_1$  なる縦座標の点をこの直線上に求めれば、その点が  $(\bar{x}_1, \bar{\dot{x}}_1)$  となる。この方法を偶数回くりかえした場合には  $t=2mL$  ( $m=1, 2, \dots$ ) における解の位置が見出され、また奇数回くりかえした場合には  $t=(2m+1)L$  における解の位置と原点に関して対称な点が求められる。

さて  $t=0$  から  $t=L$  までの間にリレーの切換えが行なわれる場合については以上のようにして  $t=L$  における解の位置を求めうることが示されたが、リレーの切換えが行なわれない場合には  $t=L$  における解の座標は(3.5)式において  $x = \dot{x}_1$ ,  $t=L$  を代入すれば容易に求められる。

$$\dot{x}_1 - \Phi_0 = (\dot{x}_0 - \Phi_0) e^{-L} \quad (3.35)$$

となる。 $L=2n\pi/\omega$  にとられている場合には  $t=0$  において  $L_0^-(\tau)$  ( $\tau > L$ ) 上の  $\dot{x}_0$  なる縦座標の点にあった解は  $t=L$  において  $L_0^-(\tau-L)$  直線上の(3.35)式で与えられる  $\dot{x}_1$  なる縦座標の上にあることがわかる。同様にして  $L_0^+(\tau)$  ( $\tau > L$ ) の点から出発した解は  $t=L$  において  $L_0^+(\tau-L)$  上にある。

また  $L=(2n+1)\pi/\omega$  にとられている場合には、 $t=0$  において  $L_0^-(\tau)$  ( $\tau > L$ ) 上にある解は  $t=L$  において  $L_0^+(\tau-L)$  と原点に関して対称な直線上にある。したがって  $L_0^+(\tau-L)$  上に(3.35)式で与えられる  $\dot{x}_1$  に対して  $\bar{\dot{x}}_1 = -\dot{x}_1$  なる縦座標の点  $(\bar{x}_1, \bar{\dot{x}}_1)$  は、 $t=0$  に点  $(x_0, \dot{x}_0)$  にあった解の  $t=L$  における位置  $(x_1, \dot{x}_1)$  と原点に関して対称である。

以上のように  $L$  を入力半周期の偶数倍に選んだ場合には  $t=L$  における解の位置を求め、 $L$  を入力半周期の奇数倍に選んだ場合には  $t=L$  における解の位置に対して原点に対称な位置を求めることにすると便利であ

る。ここで記述を簡単にするために次のように $\mathcal{J}$ 変換を定義する。

正極平面または負極平面上の点の任意の集合 $H$ を考えて、 $H$ 内の点を初期値とする解の $t = 2n\pi/\omega$ における位置を表わす点の集合を $\mathcal{J}_{2n}(H)$ とし、また $t = (2n+1)\pi/\omega$ における解の位置を表わす点の集合と原点に関して対称な集合を $\mathcal{J}_{2n+1}(H)$ とする。 $H$ から $\mathcal{J}_{2n}(H)$ および $\mathcal{J}_{2n+1}(H)$ を求める操作をそれぞれ $\mathcal{J}_{2n}$ 変換、 $\mathcal{J}_{2n+1}$ 変換と呼び、両者をあわせて $\mathcal{J}$ 変換と称することにする。

また $t = 2n\pi/\omega$ において $H$ に到達するような解の $t=0$ における点の集合を $\mathcal{J}_{-2n}(H)$ 、 $t = (2n+1)\pi/\omega$ において $H$ に到達するような解の $t=0$ における点と原点に関して対称な点の集合を $\mathcal{J}_{-(2n+1)}(H)$ とする。 $H$ から $\mathcal{J}_{-2n}(H)$ および $\mathcal{J}_{-(2n+1)}(H)$ を求める操作を $\mathcal{J}_{-2n}$ 変換または $\mathcal{J}_{-(2n+1)}$ 変換と呼び、あわせて負の $\mathcal{J}$ 変換と称する。負の $\mathcal{J}$ 変換は上述の $\mathcal{J}$ 変換の操作を全く逆に適用することによって求めることができる。

任意の点を初期値とする解の動きは $t > 0$ において一意的に決定されることから、集合 $H$ が唯一つの点を表わす場合には $\mathcal{J}_n(H)$ も唯一つの点である。しかるにリレーにヒステリシスがある場合には相異なる点を初期値とする解がリレーの切換えの後に一致してしまうことがある。したがって $H$ が唯一の点を表わす場合であっても $\mathcal{J}_n(H)$ は必ずしも一つの点ではなく数個の点である場合もあるし、 $\mathcal{J}_n(H)$ が空集合の場合もある。

位相面上の点 $P$ において、

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}_n^r(P) &= P & (r \neq m) \\ \mathcal{J}_n^m(P) &= P \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

の場合、点 $P$ は $\mathcal{J}_n$ 変換に対して $m$ を周期とする周期点であると呼び、特に $m=1$ の場合には点 $P$ は $\mathcal{J}_n$ 変換に対して不動点であると呼ぶことにする。

### § 3.5 リレーの切換回数

これまでしばしば述べたように、ある初期値により与えられる解の  $t = L$  における位置を求める場合に、 $t=0$  から  $t=L$  までのリレーの切換回数が1回以下であれば容易にその位置を求めることができるのであるが、リレーの切換回数が2回以上である場合には一度に  $t=L$  における解の位置を求めようとするとかかなり複雑な計算を必要とする。この場合には  $t=L$  までの時間をいくつかに分けて、それぞれの期間におけるリレーの切換回数が1回以下となるようにして計算すると便利である。本節ではある初期値により与えられる解において  $t=L$  までの間に行なわれるリレーの切換回数を見出すことについて、先に考察した図 3.8 の場合に例をとって述べる。ここで過渡応答の解析に用いられる図 3.8 を一部簡単化して再び図 3.11 として示す。

さて  $L_0^+(\tau)$  直線は(3.21)式を満足する直線であり、(3.21)式に  $\varphi_0$  および  $L$  を与えて同式の正の傾斜の直線を描く。 $L = 2\pi/\omega$  にとり  $\mathcal{J}_2$  変換を行なう場合、 $0 \leq \tau \leq 2\pi/\omega$  なる  $L_0$  直線上の解では少なくとも1回はリレーの切換えが行なわれる。ここで  $\Phi_0 = 1$  の場合を考えると、 $0 \leq \tau \leq 2\pi/\omega$  なる  $\tau$  をパラメータとする  $L_0^+(\tau)$  直線は曲線  $CD$  の右側の領域にあり、その一部は直線  $\chi = b$  の線分  $D_1C$  上にその端点を有し、残りの一部は曲線  $CD$  との接点上に端点を有する。なお点  $D_1$  は  $L_0^+(0)$  直線に対する端点であるが、この場合この点は  $\mathcal{J}_2(D)$  で与えられる点とほとんど一致しており、便宜上以下では  $D_1 = \mathcal{J}_2(D)$  として取扱う。

$L_0^+(\tau)$  直線の端点の  $\chi$  座標  $\chi_{g_0}$  から(3.22)式の計算を行なって  $\chi_{g_1}$  を求め、負極平面  $\Pi^-$  上の正の傾斜の直線上にプロットすると、線分  $D_1C$  は曲線  $D_2c_1$ 、曲線  $CD$  の右側は同じく曲線  $c_1D_1$  の右側にと交換される。したがって(3.34)式の関係から、(3.21)式の正の傾斜の直線のうちで曲線  $D_2c_1D_1$  との交点より右の部分が  $L_1^+(\tau)$  直線として与えられる。この場合に曲線  $D_2c_1D_1$  が  $\chi < -b$  の半平面にも延



びている場合には、 $L_0^+(\tau)$  直線上に  $\mathcal{J}_2$  変換により 2 回リレーの切り換えられる部分があることになり、その場合  $L_1^+(\tau)$  直線は  $x \geq -b$  の負極平面  $\Pi^-$  にある部分のみをいうことになる。そして直線  $x = -b$  と (3.24) 式の正の傾斜の直線 ( $\alpha_1 = +1$ ) との交点に  $\mathcal{J}_2$  変換してえられる曲線と  $L_0^+(\tau)$  直線との交点よりも  $x$  座標の小さい  $L_0^+(\tau)$  直線上の点より出発した解においては  $\mathcal{J}_2$  変換を行なった場合に 2 回またはそれ以上リレーの切換えが行なわれることになる。

つぎに  $L_0^-(\tau)$  直線を  $\mathcal{J}_2$  変換することについて考えると、 $L_0^-(0)$  直線上の点 E より上の部分では、これと交わる  $L_0^+(\tau)$  直線のパラメータではいずれも  $2\pi/\omega$  より小であり、また点 E より下の部分ではその  $\tau$  は  $2\pi/\omega$  より大である。したがって  $L_0^-(0)$  直線の点 E より上の点に  $\mathcal{J}_2$  変換をする場合には少なくとも 2 回リレーの切換えがあることがわかる。そこで  $\mathcal{J}_2$  変換においてリレーの切換えが 2 回行なわれるような  $L_0^-(\tau)$  直線の部分を求めるためには、 $L$  を  $2\pi/\omega$  よりも小さくとして吟味することが必要である。

そこでいま  $L = \pi/\omega$  として  $\mathcal{J}_1$  変換を用いることにする。 $\mathcal{J}_1$  変換を行なうには  $L = \pi/\omega$  にとった場合の  $L_1^-(\tau)$  直線と原点に対称な直線を描くことが必要なわけであるが、改めてこれらの直線を計算して描くまでもなく、先に求めた  $L_1^+(\tau)$  直線の一端を延長することにより、これらの直線がえられることがわかる。すなわち  $\pi/\omega \leq \theta < 2\pi/\omega$  なる  $\theta$  をパラメータとする  $L_0^+(\theta)$  直線は  $\mathcal{J}_2$  変換により  $L_1^+(\theta)$  直線に変換されるわけであるが、この  $L_0^+(\theta)$  直線に  $\mathcal{J}_1$  変換を行なった場合には、途中でリレーの切換えは行なわれることなく  $L_0^-(\theta - \pi/\omega)$  直線に変換されている。この場合、 $0 \leq \theta - \pi/\omega < \pi/\omega$  であり、この  $L_0^-(\theta - \pi/\omega)$  直線にもう一度  $\mathcal{J}_1$  変換をすれば  $L_1^+(\theta)$  直線に変換されるのであるから、 $0 \leq \tau < \pi/\omega$  なる  $\tau$  をパラメータとする  $L_0^-(\tau)$  直線に  $\mathcal{J}_1$  変換を行なった場合には、 $L_1^+(\tau + \pi/\omega)$  直線と同じ直線に変換されることがわかる。したがって図 3.11 の  $\pi/\omega \leq \tau < 2\pi/\omega$  の範囲の破線で示す正の傾斜の直線が、 $L = \pi/\omega$  にとった場合の  $L_1^-(\tau)$

直線と原点に対称な位置にある。ただしこの場合に、図 3.11 に示すように  $L_1^+(\theta)$  直線の端点と  $L = \pi/\omega$  にとった  $L_1^-(\tau)$  直線と原点に関して対称な直線の端点とは必ずしも一致しないことに注意すべきである。先に述べたように  $L_1^+(\theta)$  直線の端点は (3.21) 式の直線と曲線  $D_2, C_1, D_1$  との交点で与えられたのであるが、 $L = \pi/\omega$  にとった  $L_1^-(\tau)$  直線と原点に対称な直線の端点を  $L_0^-(\tau)$  直線の端点の座標から計算すると図 3.11 の曲線  $a_1, c_1, D_1$  と (3.21) 式の直線の接点として与えられる。

さて、図 3.11 に見るように  $L = \pi/\omega$  とした  $L_1^-(\tau)$  と対称な直線は曲線 AB と交わっているから、 $\mathcal{J}_1$  変換によって曲線 AB の右側に変換された場合には、この領域を通る  $L_0^-(\tau)$  直線のパラメータではいずれも  $\pi/\omega$  より小であるから、これらの領域に再び  $\mathcal{J}_1$  変換をした場合には必ずリレーの切換えが行なわれる。したがって  $\mathcal{J}_1$  変換により曲線 AB の右側に変換される領域では、 $\mathcal{J}_2$  変換により少なくとも 2 回はリレーの切換えが行なわれる。一方曲線 AB の左側に  $\mathcal{J}_1$  変換を行なってもリレーの切換えは行なわれないから、 $\mathcal{J}_1$  変換により曲線 AB の左側に変換される領域については、 $\mathcal{J}_2$  変換によるリレーの切換えは 1 回だけしか行なわれない。ここで曲線 AB に  $\mathcal{J}_1$  変換を行なって曲線 EF を求めると、 $L_0^-(\tau)$  直線の曲線 EF より上の部分に  $\mathcal{J}_2$  変換を行なった場合には 2 回リレーの切換えが行なわれ、同じく曲線 EF より下の部分では 1 回だけリレーの切換えが行なわれることがわかる。



## 第4章 二次のリレー制御系の周期解の解析

前章では二次のリレー制御系に正弦波入力を加えた場合の強制振動の過渡応答を求める方法について考察した。本章では前章で述べた  $\mathcal{L}$  変換を用いて周期解について考察を行ない、周期解の理論に再検討を加える。次章で説明するように、不安定周期解の有無によって種々の周期振動を発生する初期条件の領域を決定する方法は異なっている。しかるに今日までの周期解の理論においては、不安定周期解の存在条件について充分の考察が行なわれておらず、その結果、誤った結論が下されている例も見受けられる<sup>(3)</sup>。本章においてこれらの点を明らかにする。

### § 4.1 周期解の振動波形

本章においても図 4.1 に示す簡単な二次のリレー制御系に例をとって考察を進めることにする。いまこの系において周期  $T$  の周期振動が存在するものとする。周期解を与える初期値を点  $(\tilde{x}_0, \dot{\tilde{x}}_0)$  とし、この周期解上では  $t = \tau_0$  において初めてリレーの切換えが行なわれるものとする。 (3. 14) 式より、

$$\tilde{x}_0 + (\dot{\tilde{x}}_0 - \Phi_0)(1 - e^{-\tau_0}) - A \sin(\omega\tau_0 + \varphi_0) + \Phi_0(\tau_0 - b) = 0 \quad (4. 1)$$

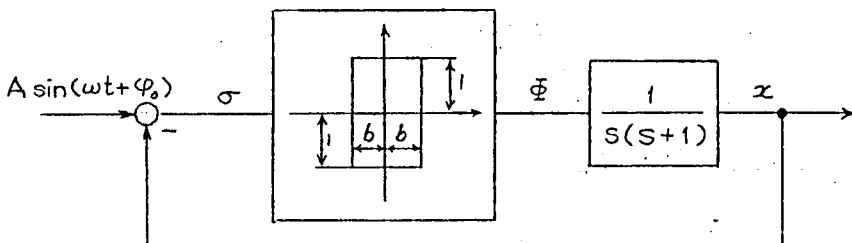


図 4.1 リレー制御系のブロック線図

をえる。第1章で述べたように1型の線形部分を有する対称なリレー制御系において発生する単純な周期振動は必ず対称となるから、この周期解は  $t = T/2$  において  $(-\tilde{x}, -\dot{\tilde{x}}_0)$  にある。(3.21)式と(3.22)式に、

$$L = \frac{T}{2}, \quad x_1 = -\tilde{x}_0, \quad \dot{x}_1 = -\dot{\tilde{x}}_0$$

を代入すると、

$$-\dot{\tilde{x}}_0 = -\Phi_0 + (\dot{\tilde{x}}_0 - \Phi_0) e^{-\frac{T}{2}} + 2\Phi_0 e^{-\frac{T}{2} + \tau_0} \quad (4.2)$$

$$x_0 + (-\dot{\tilde{x}}_0 + \Phi_0)(e^{\frac{T}{2} - \tau_0} - 1) + A \sin(\omega\tau_0 + \varphi_0) + \Phi_0(\tau_0 - \frac{T}{2} + b) = 0 \quad (4.3)$$

のようになる。(4.2)式を整理すると  $\dot{\tilde{x}}_0$  と  $\tau_0$  の関係が、

$$\dot{\tilde{x}}_0 = \Phi_0 [1 + e^{\tau_0} (\tanh \frac{T}{4} - 1)] \quad (4.4)$$

の形で与えられる。次に(4.1)式と(4.3)式を辺々加え合せ、(4.4)式を代入して  $\dot{\tilde{x}}_0$  を消去すると、

$$\tilde{x}_0 = -\Phi_0 [(\tanh \frac{T}{4} - 1) e^{\tau_0} + 1 + \tau_0 - \frac{T}{4}] \quad (4.5)$$

をえる。また(4.1)式から(4.3)式を辺々引算して、(4.4)式を用いて  $\tilde{x}_0$  を消去すると、

$$A \sin(\omega\tau_0 + \varphi_0) = \Phi_0 [\frac{T}{4} - \tanh \frac{T}{4} - b] \quad (4.6)$$

をえる。また(4.4)、(4.5)両式より  $\tau_0$  を消去すれば、

$$\tilde{x}_0 + \dot{\tilde{x}}_0 = -\Phi_0 [\ln \Phi_0 (\Phi_0 - \dot{\tilde{x}}_0) - \Phi_0 [\frac{T}{2} + \ln(1 + e^{-\frac{T}{2}})]] \quad (4.7)$$

をえる。すでに第1章で述べたように、このリレー制御系の出力  $x$  の振動周期  $T$  と入力  $u$  の角周波数  $\omega$  の間には、

$$T = \frac{2\nu\pi}{\omega} \quad (\nu = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.8)$$

の関係が存在する。そして  $\nu=1$  の場合にはこの同期振動は基本調波振動であり、 $\nu \geq 3$  の場合には分数調波振動となる。(4.4), (4.5) 両式の初期値で与えられる周期  $T$  の振動の波形は、(4.4), (4.5) 式を (3.5), (3.6) 式に代入し、さらに (3.18) ~ (3.20) 式を用いると、 $0 \leq t < T/2$  の間において、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= \Phi_0 \left\{ \frac{T}{4} - 1 + t - \tau_0 - (\tanh \frac{T}{4} - 1) e^{\tau_0 - t} \right\} & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ \tilde{x} &= -\Phi_0 \left\{ -\frac{T}{4} - 1 + t - \tau_0 + (\tanh \frac{T}{4} + 1) e^{-(t - \tau_0)} \right\} & (\tau_0 \leq t < \frac{T}{2}) \end{aligned} \right\} (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \Phi_0 \left\{ 1 + (\tanh \frac{T}{4} - 1) e^{\tau_0 - t} \right\} & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ \dot{\tilde{x}} &= -\Phi_0 \left\{ 1 - (\tanh \frac{T}{4} + 1) e^{-(t - \tau_0)} \right\} & (\tau_0 \leq t < \frac{T}{2}) \end{aligned} \right\} (4.10)$$

で表わされる。その後の半周期の振動波形は、前の半周期と極性が反対である以外は全く同じである。このような振動波形で与えられる周期解の位相面軌道は、(4.9), (4.10) 両式により  $\tau_0, t$  を消去すると、

$$\tilde{x} + \dot{\tilde{x}} = -\Phi \ln \Phi (\Phi - \tilde{x}) - \Phi \left\{ \frac{T}{4} + \ln (1 + e^{-\frac{T}{2}}) \right\} \quad (4.11)$$

で与えられる。

## § 4.2 周期解の存在条件

(1)(7)  
 これまでの周期解の理論はまず周期振動が存在すると仮定して、その際のこの系の出力の振動波形を求め、更にリレー制御信号の振動波形を求めている。そしてこのリレー制御信号が、仮定した周期解のリレーの切換条件を満足するか否かについて吟味するのであるが、この方法によるとリレーの切換えの行なわれる瞬間を時間の原点にとり、 $0 < t < T/2$  の半周期においてリレー出力を  $\Phi_1 = 1$  と仮定すると、周期解が存在するためのリレーの切換条件は、

$$\tilde{\sigma}(0) = b \quad (4.12)$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}(0) > 0 \quad (4.13)$$

$$\tilde{\sigma}(t) > -b \quad (0 < t < \frac{T}{2}) \quad (4.14)$$

で与えられる。(4.12)式および(4.13)式の2条件の判定を行なうためにチブキン氏はリレー制御系の特性量と呼ばれるベクトル量を用いているが、(4.14)式の条件については十分な考察を行なっていない。

ここでは(4.12)~(4.14)式の条件を位相面上で判別する方法について考察する。

周期解においてリレーの切換えの瞬間を時間の原点にとることをやめて、 $t = \tau_0$  に最初のリレーの切換えが行なわれるものとし、さらに  $0 < \tau_0 < \tau_0$  では  $\Phi = \Phi_0$ 、 $\tau_0 < \tau_0 < T/2$  では  $\Phi = -\Phi_0$  とすれば、(4.12)式および(4.13)式の条件は、

$$\tilde{\sigma}(\tau_0) = A \sin(\omega\tau_0 + \varphi_0) - \tilde{x}(\tau_0) = -\Phi_0 b \quad (4.12)'$$

$$\dot{\tilde{\sigma}}(\tau_0)\Phi_0 = [A\omega \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0) - \dot{\tilde{x}}(\tau_0)]\Phi_0 < 0 \quad (4.13)'$$

となる。この式の  $\tilde{x}(\tau_0)$ 、 $\dot{\tilde{x}}(\tau_0)$  は(3.5)式および(3.6)式の  $x_0$ 、 $\dot{x}_0$ 、 $t$  の代わりにそれぞれ  $\tilde{x}_0$ 、 $\dot{\tilde{x}}_0$ 、 $\tau_0$  を代入した式で表わされるが、それらを(4.12)'式に代入すると(4.12)'式は(4.1)式そのものとなる。(4.4)、(4.5)、(4.6)の三式で与えられる  $\tilde{x}$ 、 $\dot{\tilde{x}}$ 、 $\tau_0$  は(4.1)式を満足しているのであるから、この点  $(\tilde{x}_0, \dot{\tilde{x}}_0)$  を初期値とする周期解は明らかに(4.12)式の条件を満足する。この点  $(\tilde{x}_0, \dot{\tilde{x}}_0)$  が  $L_0^\pm(\tau_0)$  直線上に存在するならば、§ 3.2 の(a.1)の条件により  $L^\pm(\tau)$  直線上では全て(3.13)式の条件が満たされているから、当然(4.13)'式が満足されている。また  $\tau_0 = 0$  となるように入力位相をえらんだ場合を考えると、(4.4)式および(4.5)式より周期振動を与える初期値の点の  $x$ 、 $\dot{x}$  座標は、

$$\tilde{x}_0 = -\Phi_0 \left[ \tanh \frac{T}{4} - \frac{T}{4} \right]$$

$$\dot{\tilde{x}}_0 = \Phi_0 \tanh \frac{T}{4}$$

で与えられるが、仮りに  $\Phi_0 = -1$  であるとするれば、上式で与えられる点  $(x_0, x_0)$  は  $L_0^-(0)$  直線上の点であるが、この点にはまた  $\Phi_0 = 1$  の初期値に対する  $L_0^+(\tau)$  直線が通っている。しかるにこの点より出発する解が周期解であるとする、この直線のパラメータでの値は  $T/2$  でなければならない。よって (4.4) 式および (4.5) 式で与えられる座標の点が  $L_0^\pm(\tau)$  直線上にある場合には (4.14) 式の条件も自動的に満足されることになる。またこのことから、 $\tau_0 \neq 0$  となるような入力位相の場合において、 $L_0^\pm(\tau)$  直線上の (4.4) 式および (4.5) 式で与えられる座標の点から出発する周期解は、 $t = \tau_0$  ( $0 < \tau_0 < T/2$ ) において必ず一回りレールの切換えが行なわれるが、それ以外のレールの切換えはないことがわかる。したがって同期振動の存在条件は、(4.6) 式で与えられる  $\tau_0$  をパラメータとする  $L_0^\pm(\tau_0)$  直線上に (4.4) 式および (4.5) 式で与えられる座標の点が存在することであるとする事ができる。

次にこれを例題について考えてみる。

例題 図 4.1 のリレー制御系において、 $A = 0.08$ ,  $\omega = 5$ ,  $b = 0.2$ ,  $\varphi_0 = 0$  にとった場合の  $1/3$  調波振動 ( $\nu = 3$ ) について考えると、(4.6) 式は、

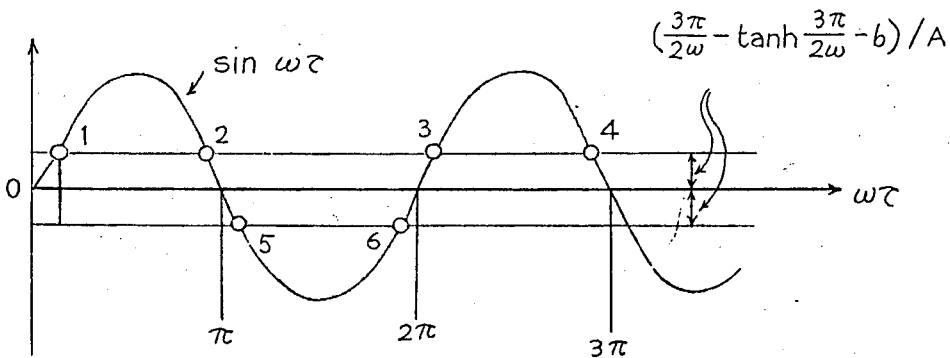


図 4.2

$$A \sin \omega \tau_0 = \Phi_0 \left[ \frac{3\pi}{2\omega} - \tanh \frac{3\pi}{2\omega} - b \right]$$

となる。この式を満足する  $\tau_0$  は無限個存在するわけであるが、 $0 \leq \tau_0$

第4.1表

$\Phi_0$		$\omega \tau_0 / \pi$	$\tilde{x}_0$	$\tilde{z}$	存在条件	安定条件
+1	1	0.024	+0.196	0.732	○	不安定
	2	0.976	-0.183	0.513	○	安定
	3	2.024	-0.386	0.057	○	不安定
	4	2.976	-0.214	-0.713	○	安定
-1	5	1.024	0.198	-0.498	○	不安定
	6	1.976	0.384	-0.085	○	安定

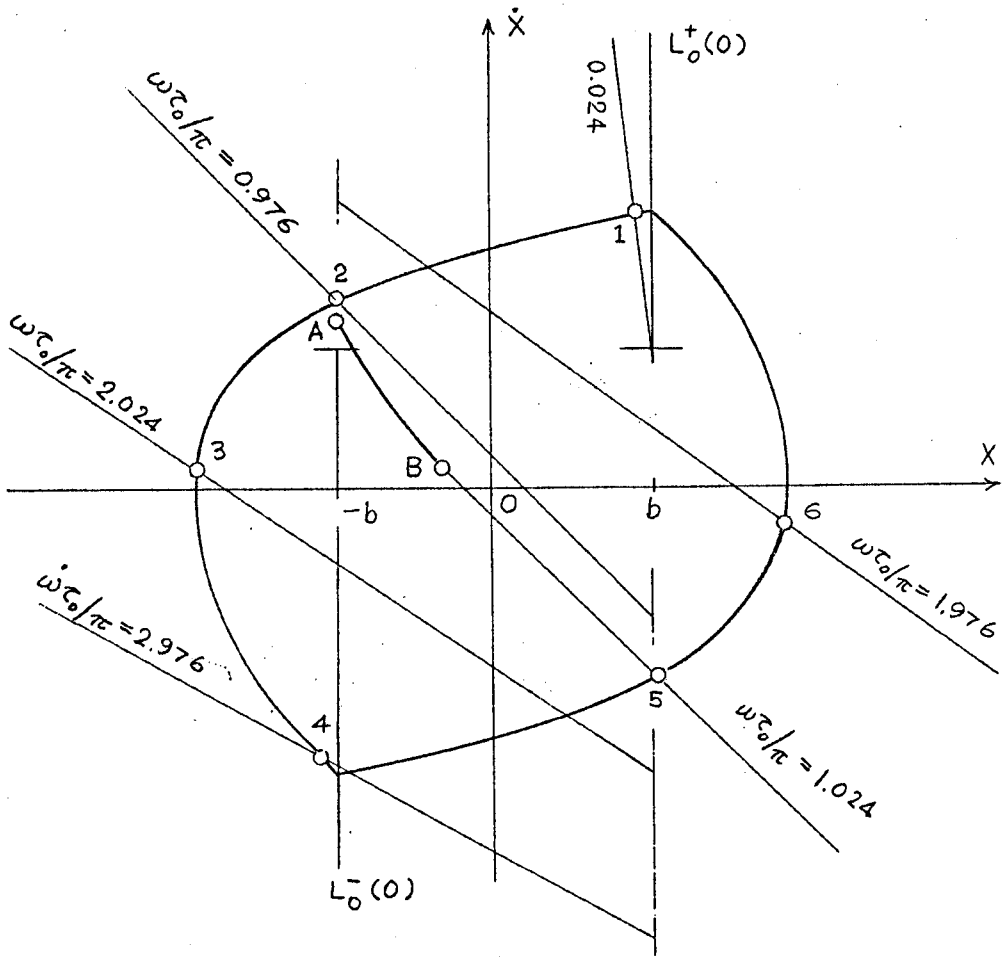


図 4.3 周期解の位相面軌道

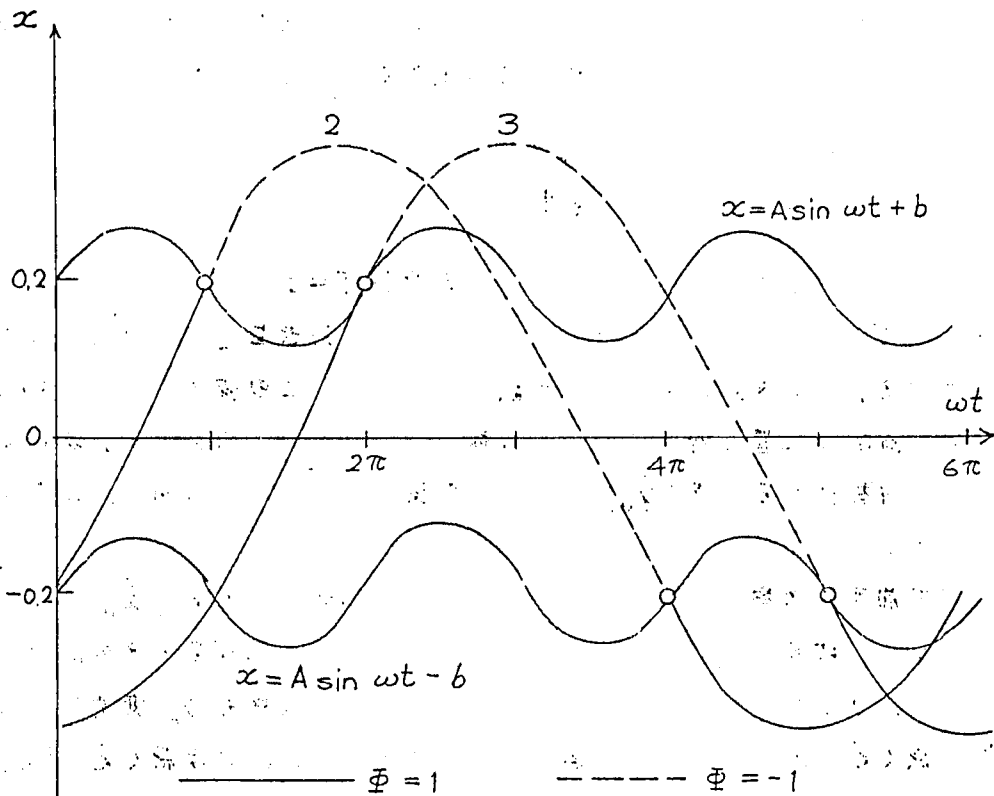


図 4.4 周期解の振動波形

$\frac{1}{2}$  であるから、図 4.2 に示すような 6 個の  $\omega$  が決定され、それぞれに対して (4.4) 式および (4.5) 式より  $x$ 、 $\dot{x}$  の座標を求めると、第 4.1 表のようになる。

これらの点は位相面上においてそれぞれ図 4.3 のような位置にあり、いずれも  $L_0^\pm$  (で、) 直線上にあり、周期解の存在条件を満足している。図 4.3 の開軌道は  $\omega = 5$  の場合の  $1/3$  調波振動の位相面軌道を (4.11) 式によつて計算したものである。

また図 4.4 は図 4.3 の点 2 と 3 より出発する周期解の波形を示したもので、切換曲線  $x = A \sin \omega t \pm b$  と周期解との  $\circ$  印で示された交点上

でリレーが切り換えられる。リレー出力が  $\pm 1$  となっている期間の波形が実線で、 $\pm 1$  の期間の波形が破線でそれぞれ描かれている。

### § 4.3 周期解の安定条件

点  $(\tilde{x}_0, \dot{\tilde{x}}_0)$  なる初期値で与えられる周期  $T = 2\nu\pi/\omega$  なる周期解とその近傍の一点  $(x_0, \dot{x}_0)$  を初期値とする解の動きを  $\mathcal{J}_\nu$  変換\*によって考察する。(4.8) 式より  $\nu$  は奇数であるので、この変換は  $t = \nu\pi/\omega$  における解の位置に対して原点と対称な点を求める操作となる。また周期解の対称性から、点  $(\tilde{x}_0, \dot{\tilde{x}}_0)$  は  $\mathcal{J}_\nu$  変換によって再び同じ点に変換される。

さて前節で考察した周期解の存在条件によれば、点  $(\tilde{x}_0, \dot{\tilde{x}}_0)$  は一般にリレーの切換時間の不連続的に変化する曲線(例えば図 3.8 の曲線 AB, CD)上にはないので、点  $(\tilde{x}_0, \dot{\tilde{x}}_0)$  の近傍の点も  $\mathcal{J}_\nu$  変換により、再び点  $(\tilde{x}_0, \dot{\tilde{x}}_0)$  の近傍に変換されると考えてよい。いま点  $(\tilde{x}_0, \dot{\tilde{x}}_0)$  の近傍の点を  $(x_0, \dot{x}_0) = (\tilde{x}_0 + u_0, \dot{\tilde{x}}_0 + v_0)$  とし、この点を初期値とする解は  $t = \nu\pi/\omega$  までに  $t = \tau_0 + \xi$  において一回だけリレーの切り換えが行なわれ、 $\mathcal{J}_\nu$  変換によって点  $(x_1, \dot{x}_1) = (\tilde{x}_0 + u_1, \dot{\tilde{x}}_0 + v_1)$  に変換されるものとする。ここで(3.14)式にしたがって関数  $f_1$  を

$$f_1(x_0, \dot{x}_0, \tau) = x_0 + (\dot{x}_0 - \Phi_0)(1 - e^{-\tau}) - A \sin(\omega\tau + \varphi_0) + \Phi_0(\tau - b) \quad (4.15)$$

のようにおく。さらに(3.21), (3.22)両式における  $x_1, \dot{x}_1$  はそれぞれ、本節の  $-x_1, -\dot{x}_1$  に相当するのであるから(3.21), (3.22)両式の  $x_1, \dot{x}_1$  の代わりに  $-x_1, -\dot{x}_1$  を用い、また  $L = T/2$  を代入して、

$$f_2(x_1, \dot{x}_1, \tau) \equiv -x_1 + (\dot{x}_1 - \Phi_0)(e^{\frac{T}{2} - \tau} - 1) - A \sin(\omega\tau + \varphi_0) + \Phi_0(\frac{T}{2} - \tau - b) \quad (4.16)$$

$$f_3(\dot{x}_1, \dot{x}_0, \tau) \equiv -(\dot{x}_1 - \Phi_0) - 2\Phi_0 e^{-(\frac{T}{2} - \tau)} - (\dot{x}_0 - \Phi_0) e^{-\frac{T}{2}} \quad (4.17)$$

\*  $\mathcal{J}_\nu$  変換については 70 ページ参照。



なる関数  $f_2, f_3$  を定義すると,  $x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1$  および  $\tau = \tau_0 + \xi$  の間には,

$$\begin{aligned} f_1(x_0, \dot{x}_0, \tau) &= 0, \quad f_2(x_1, \dot{x}_1, \tau) = 0 \\ f_3(\dot{x}_1, \dot{x}_0, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

なる関係が成立する。周期解を与える初期値の点においては、 $u_0 = v_0 = \xi = 0$  であり、この点に  $\mathcal{J}_p$  変換を行なった場合には  $u_1 = v_1 = 0$  となる。また  $u_0, v_0$  が十分に小さいときには、 $u_1, v_1, \xi$  も十分小さくなると考えられるから、

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_0, \dot{x}_0, \tau) &= f_1(\tilde{x}_0, \tilde{\dot{x}}_0, \tau_0) + a_1 u_0 + b_1 v_0 + c_1 \xi + \dots \\ f_2(x_1, \dot{x}_1, \tau) &= f_2(\tilde{x}_0, \tilde{\dot{x}}_0, \tau_0) + d_2 u_1 + g_2 v_0 + c_2 \xi + \dots \\ f_3(\dot{x}_1, \dot{x}_0, \tau) &= f_3(\tilde{x}_0, \tilde{\dot{x}}_0, \tau) + g_3 v_1 + b_3 v_0 + c_3 \xi + \dots \end{aligned} \right\} (4.19)$$

のように展開することができる。  $u_0, v_0, \xi, u_1, v_1$  は十分小さいと考へてこれらの変数についての2次以上の項を無視し、さらに(4.1), (4.2), (4.3)の3式より、

$$\left. \begin{aligned} f_1(\tilde{x}_0, \tilde{\dot{x}}_0, \tau_0) &= 0 \\ f_2(\tilde{x}_0, \tilde{\dot{x}}_0, \tau_0) &= 0 \\ f_3(\tilde{\dot{x}}_0, \tilde{\dot{x}}_0, \tau_0) &= 0 \end{aligned} \right\} (4.20)$$

となることを考慮すると、 $u_0, v_0, \xi, u_1, v_1$  についての次のような一次式をえる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 u_0 + b_1 v_0 + c_1 \xi &= 0 \\ c_2 \xi + d_2 u_1 + g_2 v_1 &= 0 \\ b_3 v_0 + c_3 \xi + g_3 v_1 &= 0 \end{aligned} \right\} (4.21)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a_1 &= \left. \frac{\partial f_1(x_0, \dot{x}_0, \tau)}{\partial x_0} \right|_{\sim}, & b_1 &= \left. \frac{\partial f_1(x_0, \dot{x}_0, \tau)}{\partial \dot{x}_0} \right|_{\sim}, & c_1 &= \left. \frac{\partial f_1(x_0, \dot{x}_0, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\sim} \\ c_2 &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, \dot{x}_1, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\sim}, & d_2 &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, \dot{x}_1, \tau)}{\partial x_1} \right|_{\sim}, & g_2 &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, \dot{x}_1, \tau)}{\partial \dot{x}_1} \right|_{\sim} \\ b_3 &= \left. \frac{\partial f_3(\dot{x}_1, \dot{x}_0, \tau)}{\partial \dot{x}_0} \right|_{\sim}, & c_3 &= \left. \frac{\partial f_3(\dot{x}_1, \dot{x}_0, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\sim}, & g_3 &= \left. \frac{\partial f_3(\dot{x}_1, \dot{x}_0, \tau)}{\partial \dot{x}_1} \right|_{\sim} \end{aligned}$$

である。ただし  $\left|_{\sim}\right.$  は変数の値を  $x_0 = x_1 = \tilde{x}_0$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = \tilde{\dot{x}}_0$ ,  $\tau = \tau_0$  とおくことを意味している。これらの係数  $a_1 \sim g_3$  を (4.15) ~ (4.17) の3式より求め、さらに (4.4) 式を用いて変形すると、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1, & b_1 &= 1 - e^{-\tau_0}, & c_1 &= \Phi_0 \tanh \frac{\Gamma}{4} - A\omega \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0) \\ c_2 &= c_1, & d_2 &= -1, & g_2 &= (e^{\frac{\Gamma}{2} - \tau_0} - 1) \\ b_3 &= -e^{-\frac{\Gamma}{2}}, & c_3 &= -2\Phi_0 e^{-(\frac{\Gamma}{2} - \tau_0)}, & g_3 &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

をえる。

さて (4.21) 式より  $\xi$  を消去して、 $u_1, v_1$  を  $u_0, v_0$  を用いて表わすと、

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

と書くことができる。同様にして点  $(x_0, \dot{x}_0)$  に  $\mathcal{J}_v$  変換を  $n$  回行なってえられる解の位置を  $(x_n, \dot{x}_n) = (x_0 + u_n, \dot{x}_0 + v_n)$  とすれば、 $(u_n, v_n)$  は、

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

ただし  $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

で与えられる。

さてマトリックス  $M$  を  $n$  回掛けてえられるマトリックス  $M^n$  はシルベスタの展開定理<sup>(36)</sup>によって変形すると、

$$M^n = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \left[ \rho_1^n \begin{pmatrix} m_{11} - \rho_2 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \rho_2 \end{pmatrix} - \rho_2^n \begin{pmatrix} m_{11} - \rho_1 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \rho_1 \end{pmatrix} \right]$$

の形で与えられる。ただし  $\rho_1, \rho_2$  は行列式

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} m_{11} - \rho & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (4.24)$$

の根 ( $\rho_1 \neq \rho_2$  とする) であり、

$$(b.1) \quad |\rho_1| < 1, \quad |\rho_2| < 1$$

である場合に限り、マトリックス  $M^n$  の全ての要素は  $n \rightarrow \infty$  において零となり、 $(u_n, v_n) = (0, 0)$  となる。したがって (b.1) なる条件の成立する場合に限り、点  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$  を通る周期解は安定である。(4.24) 式を (4.22) 式を用いて変形すると、

$$D(\rho) = \rho^2 + \left[ (1 + e^{-\frac{T}{2}}) - \frac{2\Phi_0(1 - e^{-\frac{T}{2}})}{c_1} \right] \rho + e^{-\frac{T}{2}} = 0 \quad (4.24')$$

のようになる。上式において、

$$0 < \rho_1, \rho_2 = e^{-\frac{T}{2}} < 1$$

であるから、 $\rho_1, \rho_2$  が共軛複素根であれば (b.1) なる条件が満足される。また  $\rho_1, \rho_2$  が 2 実根の場合には、その符号は等しくかついずれか一つは絶対値が 1 より小となる。さて (4.24)' 式の左辺  $D(\rho)$  は、

$$\left. \begin{aligned} D(0) &= e^{-\frac{T}{2}} > 0 \\ D(-1) &= \frac{2\Phi_0(1 - e^{-\frac{T}{2}})}{c_1} \\ D(1) &= \frac{2A\omega \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0)}{c_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

となる。また (4.13)' 式を用いると、

$$-c_1 \Phi_0 = [A\omega \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0) - \tilde{x}(\tau)] \Phi_0 < 0 \quad (4.26)$$

となるから、

$$D(-1) > 0$$

をえる。したがって関数  $D(\rho)$  は図 4.5 に示すような形となり、この方程式が 1 より大なる実根を有するか否かは  $D(1)$  の値によって決まり、 $D(1) > 0$  ならば、(b.1) の条件が成立し、 $D(1) < 0$  ならば成立しない。

しかるに  $D(1)$  の符号は (4.26) 式より  $- \Phi_0 \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0)$  の符号

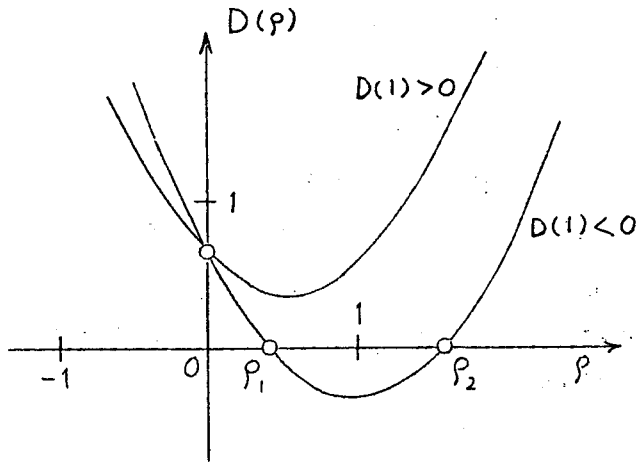
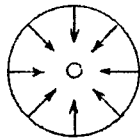
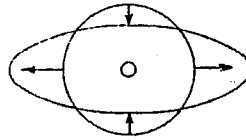


图 4.5



(a)  $|p_1| < 1, |p_2| < 1$   
安定



(b)  $0 < p_1 < 1 < p_2$   
不安定

图 4.6

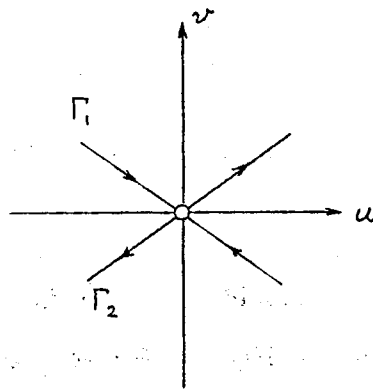


图 4.7

と一致するので、結局、 $(b, 1)$  の安定条件は、

$$\Phi_0 \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0) < 0 \quad (4.27)$$

のように表わすことができる。

ここでえられた結論を先に § 4.2 の例題で見出された周期解に対して適用してその安定判別を行なうと、それぞれ第 4.1 表の右端の欄に示すような結果をえる。

さて点  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$  から始まる周期解が安定である場合、図 4.6 (a) に示すようにその周期解の近傍を通る解は、その周期解に接近する。一方不安定解において  $0 < \beta_1 < 1 < \beta_2$  なる 2 実根が存在する場合には図 4.6 (b) に示すように、一つの方角からは周期解に接近するが、別の方角では周期解から次第に離れて行く。この場合、 $(u_0, v_0)$  と  $(u_1, v_1)$  の関係を図 4.7 に示す  $u-v$  平面で考えると、 $u-v$  平面を通る 2 直線があり、この直線上に点  $(u_0, v_0)$  がある場合には点  $(u_1, v_1)$  も同じ直線上の点となる。この直線の傾斜を求めるために、

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= kv_0 \\ u_1 &= kv_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

とにおいて、(4.21) 式に代入し、その係数行列式を作ると、

$$\begin{vmatrix} k+b_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -(k+q_2) & C_1 \\ b_3 & -1 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.29)$$

となる。この行列式を計算して整理すると、

$$\begin{aligned} k^2 + \left[ 2 - e^{-\tau_0} (e^{\frac{\tau}{2}} + 1) + \frac{C_1}{2\Phi_0} e^{-\tau_0} (e^{\frac{\tau}{2}} - 1) \right] k \\ + (1 - e^{-\tau_0}) (1 - e^{\frac{\tau}{2} - \tau_0}) + \frac{\Phi_0 C_1}{2} e^{-\tau_0} (e^{\frac{\tau}{2}} - 1) = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

をえる。

先に § 4.2 の例題で考察したした不安定周期解のうちで図 4.3 の点 3 より出発する解について (4.30) 式を満足する 2 根  $k_1, k_2$  を求めると、

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -0.660 \\ k_2 &= 0.523 \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

なる値をえる。

#### § 4.4 周期解の存在領域

今  $1/\nu$  調波振動について考える。(4.6)式の右辺の絶対値をとり、

$$A_{pv} = \left| \frac{T}{4} - \tanh \frac{T}{4} - b \right| \quad (4.32)$$

とおいた場合、(4.6)式が実根 $\tau_0$ を持つためには、

$$A > A_{pv} \quad (4.33)$$

でなければならない。§ 4.2 で述べたように、 $\tau_0$  が与えられた場合にその周期解が存在するための必要充分条件は、(4.4)式および(4.5)式で与えられる点 $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$ が $L_0^\pm(\tau_0)$ 直線上に存在することである。しかるに $L_0^+(\tau)$ 、 $L_0^-(\tau)$ 直線の $\tau$ 座標にはそれぞれ最小、および最大値があり、それらは§ 3.2の条件(a.1)~(a.3)によって与えられる。(a.1)の条件より、

$$[A\omega \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0) - \tilde{z}(\tau_0)] \Phi_0 < 0$$

であるから、これを变形すると、

$$A\omega \Phi_0 \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0) < \Phi_0 \tilde{z}(\tau_0) \quad (4.34)$$

となる。しかるに(4.10)式を用い $\Phi_0^2 = 1$ なることを考慮すると、

$$\Phi_0 \tilde{z}(\tau_0) = \tanh \frac{T}{4} > 0$$

であるから、 $\Phi_0 \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0) < 0$ であれば(4.34)式は常に成立する。(ii)換えると(4.27)式より、安定周期解については(4.34)式は常に成立する。不安定周期解の場合には $\Phi_0 \cos(\omega\tau_0 + \varphi_0) > 0$ であるから、(4.34)式の両辺を2乗してもその不等号は変わらない。したがって、

$$A^2 \omega^2 \cos^2(\omega\tau_0 + \varphi_0) < \tanh^2 \frac{T}{4}$$

となる。(4.6)式を用いてこの式の左辺から  $\tau$  を消去し、更に周期  $T$  を(4.8)式のように置換して、

$$A_{sv}^2 = \left( \frac{\nu\pi}{2\omega} - \tanh \frac{\nu\pi}{2\omega} - b \right)^2 + \frac{1}{\omega^2} \tanh^2 \frac{\nu\pi}{2\omega} \quad (4.35)$$

とおくと、不等式(4.34)は結局

$$A < A_{sv} \quad (4.36)$$

のようになる。したがって、安定周期解については点  $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$  は必ず(4.1)の条件を満足し、不安定周期解については(4.36)式が成立していれば(4.1)の条件が満足される。

次に(4.3)の条件について考察しよう。(3.14)式において  $\tau = \tau_0$  とおいてえられる負の傾斜の直線が図3.6の曲線 AB, CD と交わっている場合、この曲線の A より B, C より D を見た左側の部分に点  $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$  があれば(4.3)の条件が満足されており、右側であれば満足されていないのであるから、(4.3)の条件の成立する限界は点  $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$  が曲線 AB, CD 上に存在する場合となる。いま点  $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$  が曲線 AB, CD 上にあるとして、この点に接する  $L_0^\pm(\tau)$  直線のパラメータ  $\tau$  を  $\tau = \tau^*$  とすると、この周期解は  $\tau = \tau^* (0 \leq \tau^* \leq \tau_0 \leq \frac{T}{2})$  において(3.12), (3.23)および(3.29)式を満足する。したがって、

$$A \sin(\omega\tau^* + \varphi_0) - \tilde{z}(\tau^*) + b\Phi_0 = 0 \quad (4.37)$$

$$A\omega \cos(\omega\tau^* + \varphi_0) - \dot{\tilde{z}}(\tau^*) = 0 \quad (4.38)$$

$$[-A\omega^2 \sin(\omega\tau^* + \varphi_0) - \ddot{\tilde{z}}(\tau^*)] \Phi_0 > 0 \quad (4.39)$$

となる。ここで、

$$\Delta\tau = \tau_0 - \tau^* \quad (4.40)$$

とおくと、

$$\omega\tau^* + \varphi_0 = (\omega\tau_0 + \varphi_0) - \omega\Delta\tau$$

のようになるから、(4.37), (4.38)式の各第1項を  $\omega\tau_0 + \varphi_0$ ,  $\omega\Delta\tau$

の関数で表わし、三角関数の加法定理を用いてこれらの項を展開し、更に(4.37)式には  $\cos \omega \Delta \tau$ , (4.38)式には  $\sin \omega \Delta \tau$  を迎々乗すると、

$$A \sin(\omega \tau_0 + \varphi_0) \cos^2(\omega \Delta \tau) - A \cos(\omega \tau_0 + \varphi_0) \sin \omega \Delta \tau \cos \omega \Delta \tau - [\tilde{x}(\tau^*) - b \Phi_0] \cos \omega \Delta \tau = 0$$

$$A \sin(\omega \tau_0 + \varphi_0) \sin^2(\omega \Delta \tau) + A \cos(\omega \tau_0 + \varphi_0) \sin \omega \Delta \tau \cos \omega \Delta \tau - \frac{1}{\omega} \dot{\tilde{x}}(\tau^*) \sin \omega \Delta \tau = 0$$

のようになる。これを迎々加え合わせて、(4.6)式を用いると、

$$\Phi_0 \left[ \frac{T}{4} - \tanh \frac{T}{4} - b \right] - \frac{1}{\omega} \dot{\tilde{x}}(\tau^*) \sin \omega \Delta \tau - [\tilde{x}(\tau^*) - b \Phi_0] \cos \omega \Delta \tau = 0$$

となる。ここで

$$\dot{\tilde{x}}(\tau^*) = \Phi_0 \left\{ 1 + \left( \tanh \frac{T}{4} - 1 \right) e^{\Delta \tau} \right\}$$

$$\tilde{x}(\tau^*) = \Phi_0 \left\{ \frac{T}{4} - 1 - \Delta \tau - \left( \tanh \frac{T}{4} - 1 \right) e^{\Delta \tau} \right\}$$

となる。これらの式から  $\Phi_0$  を消去するために、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^*(\Delta \tau) &= \Phi_0 \dot{\tilde{x}}(\tau^*) \\ \tilde{x}^*(\Delta \tau) &= \Phi_0 \tilde{x}(\tau^*) \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

とおき、さらに(4.8)式を用いると、

$$H(\Delta \tau) = 0 \quad (4.42)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} H(\Delta \tau) &= \frac{\nu \pi}{2\omega} - \tanh \frac{\nu \pi}{2\omega} - b - \frac{\dot{\tilde{x}}^*(\Delta \tau)}{\omega} \sin \omega \Delta \tau \\ &\quad - [\tilde{x}^*(\Delta \tau) - b] \cos \omega \Delta \tau \\ \dot{\tilde{x}}^*(\Delta \tau) &= 1 + \left( \tanh \frac{\nu \pi}{2\omega} - 1 \right) e^{\Delta \tau} \\ \tilde{x}^*(\Delta \tau) &= \frac{\nu \pi}{2\omega} - 1 - \Delta \tau - \left( \tanh \frac{\nu \pi}{2\omega} - 1 \right) e^{\Delta \tau} \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

である。(4.37), (4.38)式を同時に満足するような  $\tau^*$  の値は、(4.42)



式より  $\Delta\tau$  が決定されれば、(4.40) 式より容易に見出すことができる。またその場合の入力振幅  $A$  は、(4.37) 式および (4.38) 式から次式のように与えられる。

$$A^2 = [\tilde{x}^*(\Delta\tau) - b]^2 + \frac{1}{\omega^2} [\dot{\tilde{x}}^*(\Delta\tau)]^2 \quad (4.44)$$

ここで関数  $H(y)$  の形について考えると、

$$H'(y) = \frac{dH(y)}{dy} = \frac{1}{\omega} \left\{ \omega^2 [\tilde{x}^*(y) - b] - [\dot{\tilde{x}}^*(y) - 1] \right\} \sin \omega y \quad (4.45)$$

$$H''(0) = \left. \frac{d^2H(y)}{dy^2} \right|_{y=0} = \frac{1}{\omega} \left[ \omega^2 \left( \frac{\nu\pi}{2\omega} - \tanh \frac{\nu\pi}{2\omega} - b \right) + 1 - \tanh \frac{\nu\pi}{2\omega} \right] \quad (4.46)$$

$$H(\pi/\omega) = \frac{\pi}{\omega} (\nu - 1) - 2b - \frac{2(1 - e^{-\frac{\pi}{\omega}(1-\nu)})}{1 + e^{-\frac{\nu\pi}{\omega}}} \quad (4.47)$$

$$H(2\pi/\omega) = \frac{2\pi}{\omega} + (1 - \tanh \frac{\nu\pi}{2\omega}) (1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega}}) \quad (4.48)$$

であり、

$$H(0) = H'(0) = 0 \quad (4.49)$$

であるから、 $\Delta\tau = 0$  は (4.42) 式の根である。しかるに、(4.39) 式の条件から、

$$\left\{ \omega^2 [\tilde{x}^*(\Delta\tau) - b] - [\dot{\tilde{x}}^*(\Delta\tau) - 1] \right\} < 0$$

でなければならぬから、

$$H''(0) = \frac{1}{\omega} \left\{ \omega^2 [\tilde{x}^*(0) - b] - [\dot{\tilde{x}}^*(0) - 1] \right\} < 0$$

となる。

$$\omega_d^2 \left( \frac{\nu\pi}{2\omega_d} - \tanh \frac{\nu\pi}{2\omega_d} - b \right) + 1 - \tanh \frac{\nu\pi}{2\omega_d} = 0 \quad (4.50)$$

で定まる  $\omega_d$  に対して、 $\omega < \omega_d$  では  $H''(0) > 0$  となり、(4.39) 式の条件が満足されないから、この場合  $\Delta\tau = 0$  なる根は無意根である。一方  $\omega > \omega_d$  では  $H''(0) < 0$  であり、 $\Delta\tau = 0$  は有意根である。

さて  $\nu=1$  の場合には  $H(\pi/\omega) = -2b < 0$  となるので、 $0 < y < \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\omega}$  の変域で関数  $H(y)$  は、 $\omega < \omega_d$  であれば図 4.8(a),  $\omega > \omega_d$  であれば図 4.8(b) の形となる。したがって (4.42) 式は図 4.8 の点  $q$  で示されるような有実根を持っている。この根を  $\Delta\tau_{q1}$  とし、これを (4.44) 式に代入してえられる

$$A^2_{q1} = [\tilde{x}^*(\Delta\tau_{q1}) - b]^2 + \frac{1}{\omega^2} [\tilde{x}^*(\Delta\tau_{q1})]^2 \quad (4.51)$$

なる  $A_{q1}$  は基本調波振動の不安定解の存在しうる入力振幅の上の限界を与える。

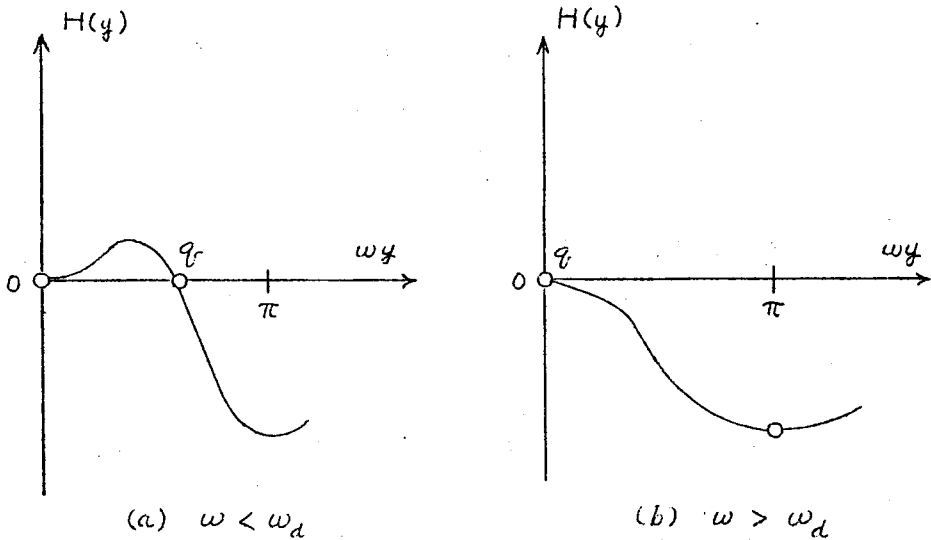


図 4.8 関数  $H(y)$  ( $\nu=1$  の場合)

$\nu \geq 3$  の場合には  $H(2\pi/\omega)$  は図 4.9 に示すような形をしていることから、 $H(2\pi/\omega) > 0$  である。したがって  $H(\pi/\omega) < 0$  すなわち、

$$\frac{\pi}{\omega_k} (\nu - 1) - \frac{2(1 - e^{-\frac{\pi}{\omega_k}(1-\nu)})}{1 + e^{-\nu \frac{\pi}{\omega_k}}} = 2b \quad (4.52)$$

で与えられる  $\omega_k$  に対して  $\omega > \omega_k$  であるならば、関数  $H(y)$  は図 4.10 (a), (b) に示すようになり、この図の  $q, r$  で示す二実根が存在する。この  $q, r$  に対応する (4.42) 式の根をそれぞれ  $\Delta\tau_{q\nu}, \Delta\tau_{r\nu}$  とすれ

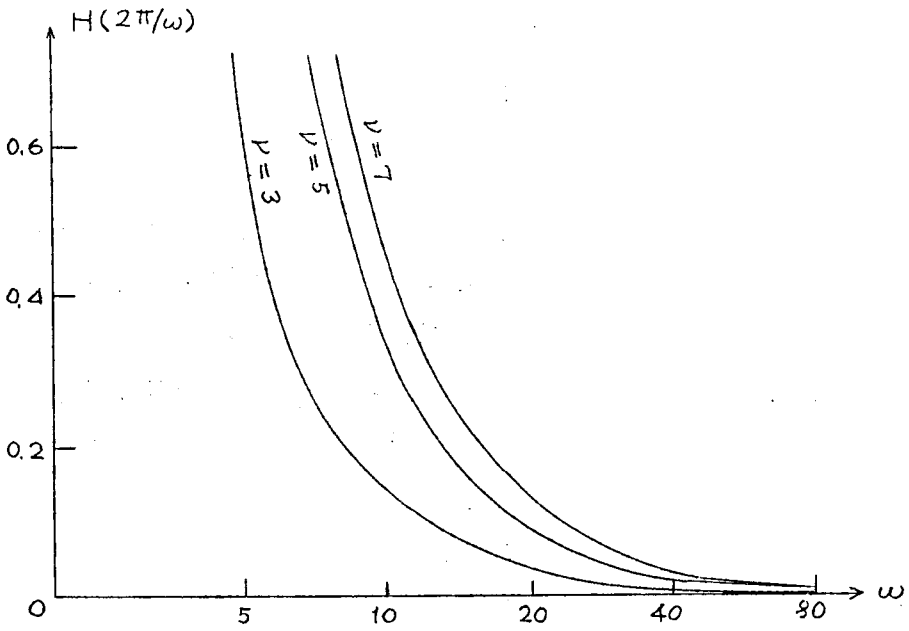


図 4.9

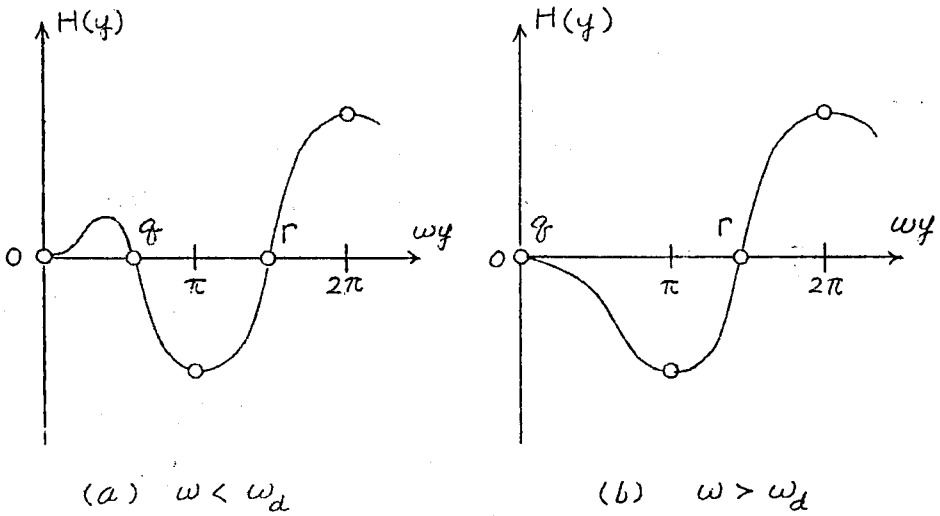


図 4.10 関数  $H(y)$  ( $\nu=3$  の場合)

ば、これらを(4.44)式に代入してえられる、

$$A_{q\nu}^2 = [\tilde{x}^*(\Delta\tau_{q\nu}) - b]^2 + \frac{1}{\omega^2} [\tilde{z}^*(\Delta\tau_{q\nu})]^2 \quad (4.53)$$

$$A_{r\nu}^2 = [\tilde{x}^*(\Delta\tau_{r\nu}) - b]^2 + \frac{1}{\omega^2} [\tilde{z}^*(\Delta\tau_{r\nu})]^2 \quad (4.54)$$

なる  $A_{q\nu}$ ,  $A_{r\nu}$  は  $1/\nu$  調波振動のそれぞれ不安定解および安定解の存在しうる入力振幅の上の限界を与える。また(4.52)式から求められる  $\omega_K$  は  $1/\nu$  調波振動の存在する入力周波数の限界を与える。すなわち  $\omega > \omega_K$  なる入力周波数に対してのみ  $1/\nu$  調波振動が存在する。

(a.3)の条件は(a.1)の条件よりもきびしいものであるから、(4.36)式の条件よりも、

$$A < A_{q\nu} \quad (\nu = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.55)$$

なる条件の方がきびしいことは明らかである。 $\Delta\tau_{q\nu} = 0$  なる根を(4.53)式または(4.51)式に代入すると(4.35)式をえる。したがって  $\omega \geq \omega_d$  であれば(4.36)式と(4.55)式の条件は一致し、 $\omega < \omega_d$  では、

$$A < A_{q\nu} < A_{5\nu}$$

となる。

以上(a.1), (a.3)の条件について考察してきたが、周期解を与える初期値の点  $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$  はいかなる場合にも負の傾斜の直線の(a.2)なる条件を満足する部分に存在することは明らかである。すなわち  $\tau_0 = 0$  となるように入力の位相  $\varphi_0$  をとった場合について考え、 $t=0$  においてリレーがたとえば  $-1$  から  $+1$  に切換えられるものとする。点  $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$  には  $L_0^-(0)$  と  $L_0^+(\frac{T}{2})$  直線が交わっている。いいかえると  $0 < t < \frac{T}{2}$  なる時点  $t$  においてリレーの切換えは行なわれぬ。このことから、入力位相が  $\varphi_0$  と  $\varphi_0 + \omega T/2$  の任意の値  $\varphi_0'$  の場合にも、点  $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$  は  $a < A \sin \varphi_0' + b$  なる正極平面  $\Pi^+$  に存在することになる。このようにして点  $(\tilde{x}_0, \tilde{z}_0)$  については常に(a.2)の条件が満足されていることがわかる。

さて(4.32), (4.51), (4.53)および(4.54)式を用いて基本調波振

動と 1/3 調波振動の安定解ならびに不安定解の存在するパラメータ ( $A, \omega$ ) の領域を、ヒステリシスの幅  $b = 0.2$  の場合について計算した結果が図 4.11 に示されている。それぞれの周期解の存在領域は次のとおりである。

基本調波振動の安定解	$A_{p1} < A$
基本調波振動の不安定解	$A_{p1} < A < A_{q1}$
1/3 調波振動の安定解	$A_{p3} < A < A_{r3}$
1/3 調波振動の不安定解	$A_{p3} < A < A_{q3}$

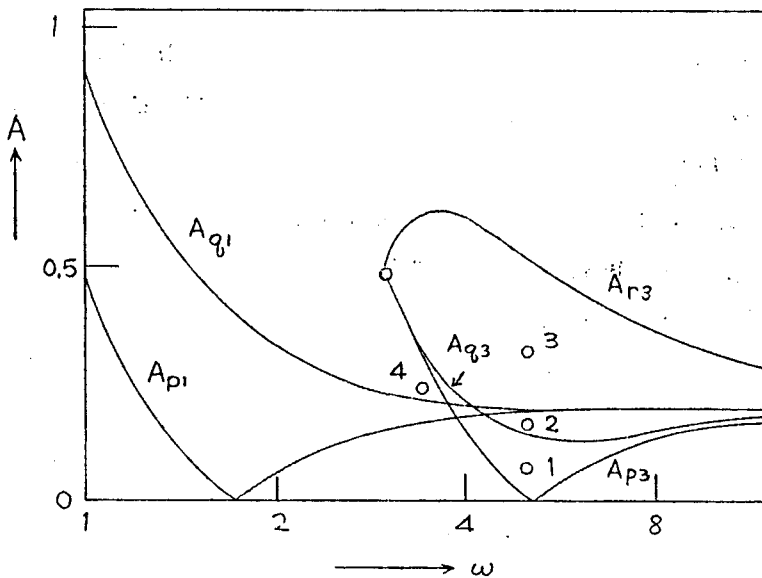


図 4.11 基本調波振動と 1/3 調波振動の解の存在領域 ( $b = 0.2$ )

## 第5章 二次のリレー制御系における

### 周期振動の初期値問題

前章では二次の線形部分を持つリレー制御系に正弦波入力に加えられた場合に発生する周期解の解析を行ない、基本調波振動ならびに  $1/3$  調波振動の解の存在するパラメータの領域を決定した(図4.11)。入力周波数と振幅を適当に選んだ場合には同一のパラメータの下で、基本調波振動と  $1/3$  調波振動の解がともに存在することがある。また  $1/3$  調波振動の場合、入力の位相に関して  $2\pi$  ずつ相互に位相の異なる3つの周期解が存在する。このように同一のパラメータの下で存在する周期あるいは位相の相異なる幾種類かの振動状態のうちで、いずれが発生するかということは、系の初期条件によって決まる。本章では第3章で述べた過渡応答の解析法を用いて、初期条件と周期解の関係をいくつかの具体例によって考察する。本章においても第2章および第3章の場合と同じく図5.1で示されるリレー制御系について考えることとし、まず  $b=0.2$ ,  $\omega=5$  として図4.11の点1, 2, 3に対応する3つの場合について、種々の周期振動を発生する初期条件の領域を求め、続いて同図の点4の場合について考察し、この場合には初期条件の如何により基本調波振動と概周期振動とがともに発生することを示す。また種々の周期振動を発生する初期条件の領域を示す領域図が入力位相角のとり方によってどのように変化するかについて最後の節で考察する。

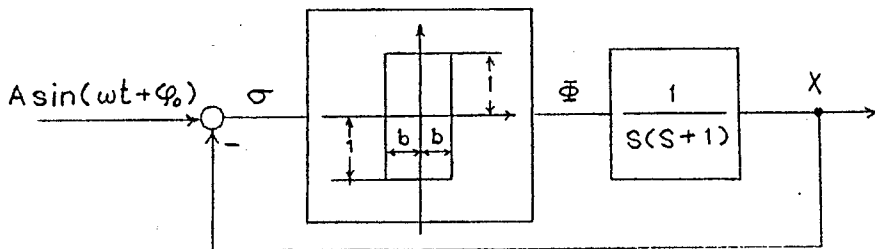


図 5.1 リレー制御系のブロック線図

### § 5.1 1/3 調波振動の不安定解が存在する場合

入力振幅  $A$  を図 4.11 において  $A_{p3} < A < A_{q3}$  にとった場合には、1/3 調波振動の安定解と不安定解が共に存在する。これらの周期解を与える初期値の点は前章で述べたように、(4.4)~(4.6) 式で与えられる。特に図 4.11 の点 1 ( $A=0.08, \omega=5$ ) にパラメータをとり、入力の位相角を  $\varphi_0=0$  にとった場合については、§ 4.2 の例題においてすでに考察を行なったように、図 4.3 の点 1, 3, 5 を初期値とする解は、1/3 調波振動の不安定解であり、点 2, 4, 6 を初期値とする解は 1/3 調波振動の安定解である。ここにおいても入力の位相角  $\varphi_0=0$  の場合を考える。

図 5.2 は 1/3 調波振動の不安定解を与える初期値の点の附近について、ある点を初期値

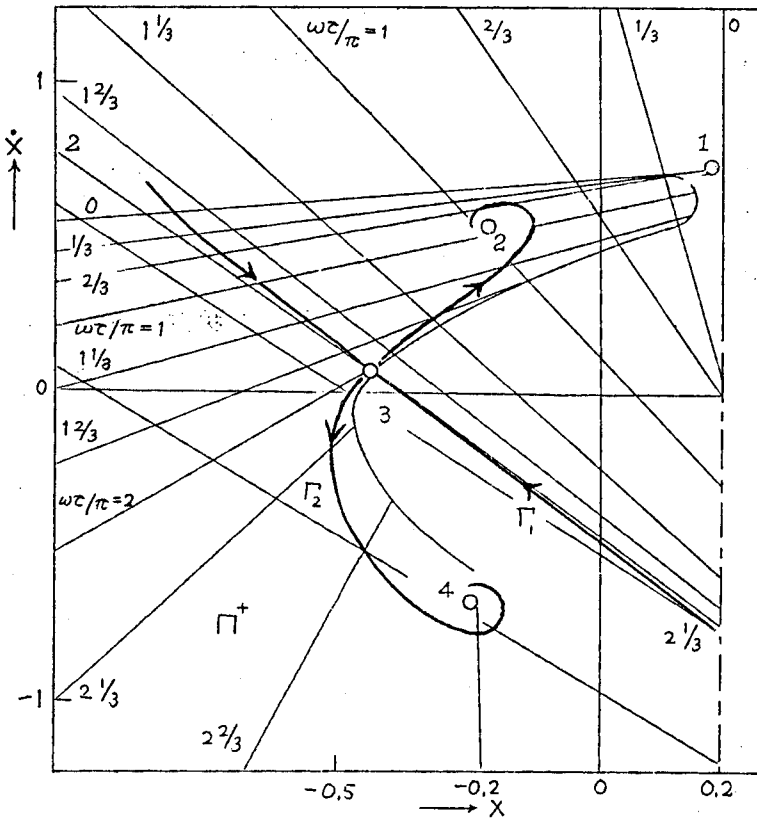


図 5.2 不安定周期点と境界曲線

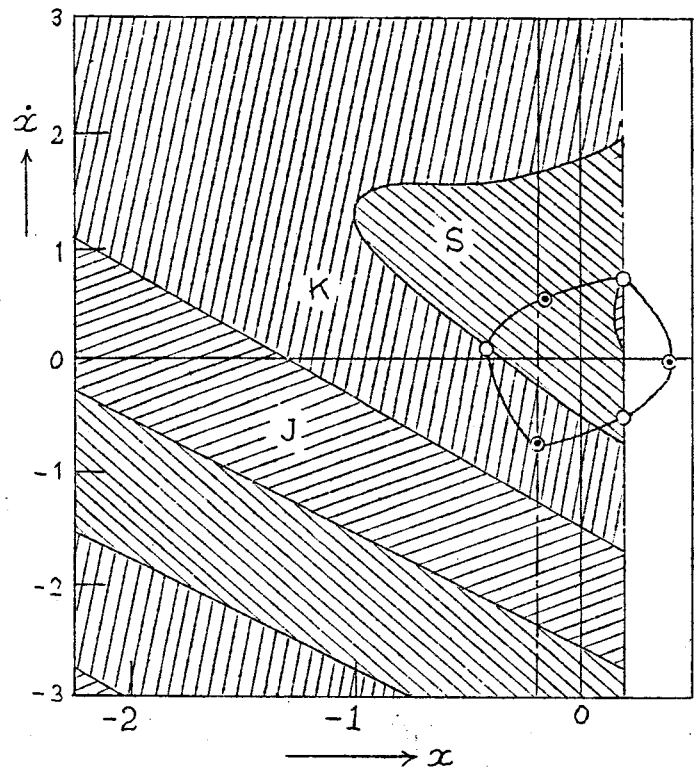
とする解の  $t = 3\pi/\omega$  における点に対して原点に対称な位置を求めるために用いられたもので、同図の負の傾斜の直線は第3章で述べた  $L_0^+(\tau)$  直線であり、また正の傾斜の直線は  $L = 3\pi/\omega$  にとった場合の  $L_1^+(\tau)$  直線を原点に関して対称に描いた  $L_1^+(\tau)^*$  直線である。この負の傾斜の直線と正の傾斜の直線を用いて先に述べた  $\mathcal{J}_3$  変換およびその逆の  $\mathcal{J}_3$  変換を行ない以下の解析を進める。

いま不安定周期解を与える点3および安定周期解を与える点2、点4について考えると、これらの点は  $\mathcal{J}_2$  および  $\mathcal{J}_3$  変換に対して不動点となっている。更に点3を通り  $\mathcal{J}_3$  変換および  $\mathcal{J}_3$  変換により不変な曲線  $\Gamma_1, \Gamma_2$  があり、曲線  $\Gamma_1$  上の点は  $\mathcal{J}_3$  変換により再び曲線  $\Gamma_1$  上に変換され矢印の方向に従って点3に次第に接近する。一方曲線  $\Gamma_2$  上の点は  $\mathcal{J}_3$  変換により曲線  $\Gamma_2$  上に変換され、矢印の方向に従って点3より離れて次第に点2および点4に収斂する。したがって点3は点2および点4に対応する  $1/3$  調波振動をそれぞれ発生する初期条件の領域の境界上の点であり、またこの点を通る曲線  $\Gamma_1$  はこの場合の初期条件の領域の境界を与える。そしてこの曲線  $\Gamma_1$  を求めることが異なる周期振動を発生する初期条件の領域の境界を求めることになる。

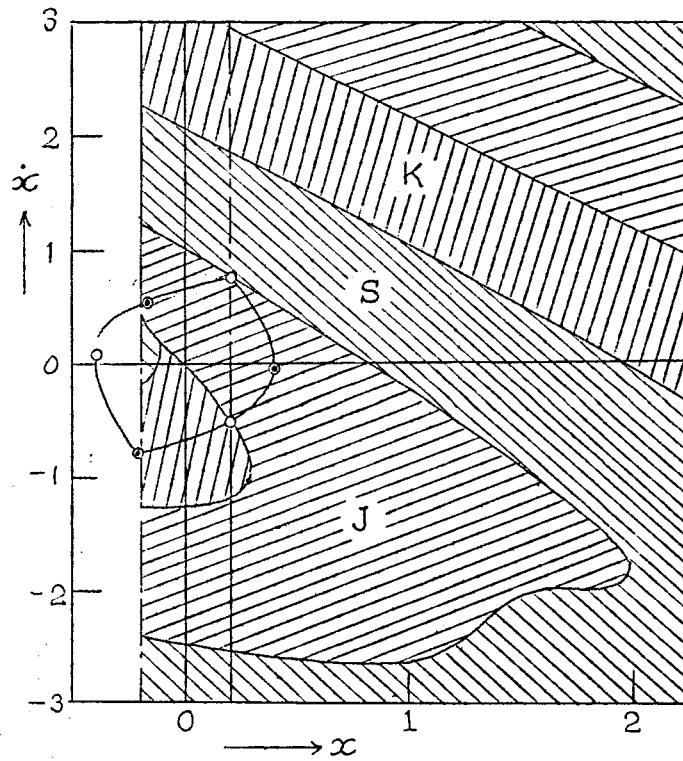
先に §4.3 で示したようにして、点3の近傍において曲線  $\Gamma_1, \Gamma_2$  を直線で近似すると、点3における曲線  $\Gamma_1, \Gamma_2$  の接線の勾配を計算により求めることができる。点3の付近において曲線  $\Gamma_1$  の接線に対して  $\mathcal{J}_3$  変換を繰り返し行なうとその極限として曲線  $\Gamma_1$  が求められる。このようにして一つの不安定周期解を与える初期値の点を通る境界曲線が求められると、この曲線に対して第3章で述べた方法により  $\mathcal{J}_2$  変換を行なうと3つの不安定周期解を与える初期値の点を通るそれぞれの境界曲線を求めることができる。その結果3つの周期振動を発生する初期条件の領域の境界は図5.3の斜線の傾斜の相違によって表わされた3つの領域の境界曲線となる。

図5.3では  $\alpha_0 = 1$  と  $\alpha_0 = -1$  の場合を別々にして示されているが、2つの図面を重ね合わせて描いた場合には、これらの図の境界曲線なら





(a)  $\Phi_0 = 1$



(b)  $\Phi_0 = -1$

図 5.3  $1/3$  調波振動を発生する初期条件の領域

( $A = 0.08$ ,  $\omega = 5$ ,  $b = 0.2$ ,  $\varphi_0 = 0$ )

次に境界曲線によって分割された3つの領域 J, K, S は、

$$x = A \sin \varphi_0 - b, \quad \dot{x} < Aw \cos \varphi_0$$

$$x = A \sin \varphi_0 + b, \quad \dot{x} > Aw \cos \varphi_0$$

で与えられる直線、すなわち  $L_0^-(0)$ ,  $L_0^+(0)$  直線上では一致しており、この直線上で  $\Phi_0 = 1$  と  $\Phi_0 = -1$  のそれぞれの領域は連続的に結合され、3つの領域それぞれが全体として一連の無限遠方に延びる領域を形成している (図 5.4)。

ここでこれらの領域内の点が  $\mathcal{T}_2$  変換によってどのように変換されるかについて考える。いずれの初期値の点にも一本の  $L_0$  直線が通っているのであるから、いま任意の  $L_0^\pm(\tau)$  直線を取り、図 5.4 に示すように、両端を境界曲線によって切り取られた一つの線分について考える。仮にこの線分は  $L_0^-(\tau)$  直線上にあり、領域 J に属しているとすると、この線分的一端  $\alpha_0$  は領域 K との境界曲線上に、また他端は領域 S との境界曲線上にある。この線分に対して  $\mathcal{T}_2$  変換を行なうと、先の作図の過程から明らかとなり、領域 K との境界曲線上の点  $\alpha_0$  はその境界曲線より一つ内側にある領域 S と K の境界曲線上の点  $\alpha_1$  へ、また領域 S との

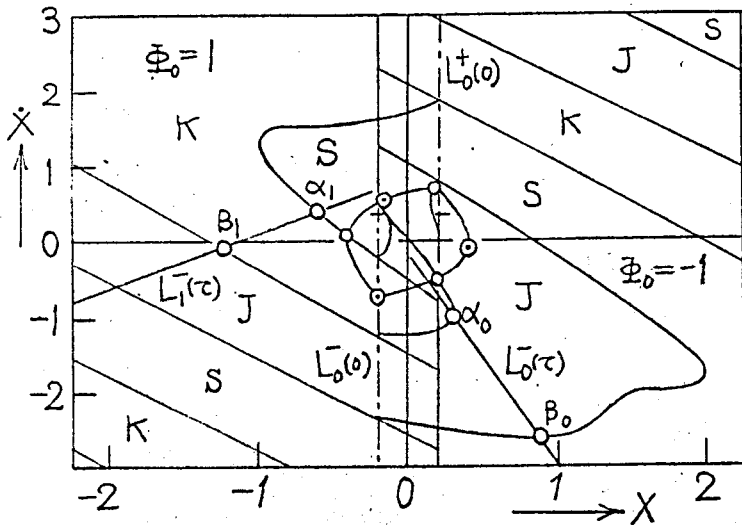


図 5.4 境界曲線とその内部の点の変換

境界曲線上にあった点  $\beta_0$  は領域 J と K の境界曲線上の点  $\beta_1$  に変換される。この変換の過程で途中リレーの切換えが 1 回行なわれる場合には (3.31) 式が成立することを示したが、(3.5) 式に  $t=L$  を代入した (3.35) 式を用いて先の場合と同様な計算を行なうと、途中リレーの切換えが行なわれないような場合にも (3.31) 式が成立することがわかる。この (3.31) 式を使うと途中のリレーの切換回数が 1 回以下の場合、先の線分  $\alpha_0\beta_0$  は  $\mathcal{T}_2$  変換によって線分  $\alpha_1\beta_1$  上に変換されることがわかる。同様のことは、この線分の一端が  $L_0^\pm(t)$  直線に対する (a.1) ~ (a.3) の条件によって切り取られている場合に対しても成立する。また  $\mathcal{T}_2$  変換を行なった場合に途中 2 回リレーの切換えが行なわれるような初期条件の領域に対しては、第 3 章でも述べたように  $\mathcal{T}_1$  変換を 2 回くり返すことによってその領域が  $\mathcal{T}_2$  変換によってどこに変換されるかを調べることができる。

さて第 3 章で述べた  $L_0^\pm(t)$  直線の包絡線について考えると、一般にこの包絡線は入力振幅が大きければ顕著に長くなるのであるが、ここで考察している場合には入力振幅が比較的小さいために  $\alpha_0=1$  の初期条件の領域には包絡線は存在せず、 $\alpha_0=-1$  の側にわずかに存在しているにすぎない (図 4.3 参照)。

図 5.3 で  $\alpha_0=-1$  の側の領域図を見ると、3 つの初期条件の領域の境界曲線が一点に交わっている箇所がある。この部分を拡大して若干模型化して示したものが図 5.5 であるが、この図の曲線 AB は第 3 章で述べた  $L_0^-(t)$  直線の包絡線である。1/3 調波振動の不安定解を与える初期値の点 3 および 5 を通る境界曲線  $\Gamma_1, \Gamma_1'$  がそれぞれ点  $f, g$  で曲線 AB と交わっている。第 3 章での考察の結果、曲線 AB 上の点は A より B を見た左側の領域に属しているから、 $\mathcal{T}_3(g)$  は曲線  $\Gamma_1'$  の点  $g$  と点 5 の間にあり、 $\mathcal{T}_3(Ag)$  は曲線  $Ag, \Gamma_1'$  の A より  $g$  を見た左側点  $g$  より点 5 を見た左側の領域 J の中に入る。また領域 K 内にあり曲線  $fg$  の近傍の点は  $\mathcal{T}_3$  変換により再び領域 K に、同じく領域 S にあり曲線 Af の近傍の点は  $\mathcal{T}_3$  変換により再び領域 S に変換されることを示すことができる。



の切換えが2回に限られているような周期解は、今考察しているパラメータの下では  $1/3$  調波振動しか存在しないことが明らかになっているが、しかし一周中にリレーの切換えが6回以上行なわれるような複雑な波形の周期振動が存在しないという証明は与えられていない。また概周期振動が存在しないという証明もない。しかし複雑な周期振動がこのような系において発生する可能性は今日まで証明された例がなく、またアナログ計算機による実験によっても複雑な波形の周期解や概周期振動の存在は認められない。

このような事実から、この場合には概周期振動ならびに一周期の中に多数回リレーの切換えの行なわれる複雑な波形の周期振動を与える安定な解は存在しないと考えられる。したがって図5.3の3つの領域は入力位相に関して  $2\pi$  ずつ位相がそれぞれ異なった  $1/3$  調波振動を発生する初期条件の領域であるということが出来る。

## § 5.2 $1/3$ 調波振動の安定解のみが存在する場合

入力振幅  $A$  が  $A_{g_3} < A < A_{p_1}$  (図4.11参照)である場合には、 $1/3$  調波振動の安定解は存在するが、 $1/3$  調波振動の不安定解および基本調波振動の解は存在しない。第3章の図3.8はこの場合の一例として図4.11の点2にパラメータを取り、入力位相角  $\varphi_0 = 0$  とした場合の解の動きを解析するのに用いられたものである。第3章では曲線  $AB$ ,  $CD$  の両側では最初のリレーの切換えまでの時間が不連続であり、その結果切換え後の解の位置は有限なへだたりを有すること、更にこの性質は異なる周期振動を発生する初期条件の領域を決定するのに重要な役割を果たすと述べた。次には曲線  $CD$  について以上のことを詳しく考察しよう。

ここでもある点を初期値とする解の  $t = \frac{3\pi}{\omega}$  における点に対して原点に対称な位置にある点を求める変換  $\mathcal{T}_3$  を用いる。図5.6の負の傾斜の直線は  $L^+$  (て) 直線であり、これは図3.8の場合と全く同一な直線で

ある。また正の傾斜の直線は  $L = \frac{3\pi}{\omega}$  にとつた場合の  $L_1^+$  (て) 直線を原点に関して対称に描いたものである。また表現の簡単を期すために、曲線  $CD$  の  $C$  より  $D$  を見た左側を曲線  $CD$  の左側と呼び、同じく右側を曲線  $CD$  の右側と呼ぶことにする。以下その他の場合もこの用法によることにする。

さて曲線  $CD$  の両側にあつて、曲線  $CD$  の近傍にある点は  $\mathcal{J}_3$  変換により曲線  $C_1, D_1, c_1$  の左側の領域に変換される。この場合曲線  $CD$  の左側の領域は曲線  $C_1, D_1$  の左側に、また曲線  $CD$  の右側の領域は曲線  $D_1, c_1$  の左側に変換される。曲線  $CD$  自身は曲線  $C_1, D_1$  上に変換される。一方曲線  $D_1, c_1$  は曲線  $CD$  の右側の領域にあり、曲線  $CD$  に無限に近い点の変換された極限として与えられる。曲線  $C_1, D_1, c_1$  と曲線  $CD$  との交点を  $M_1$  とすると、この場合には点  $M_1$  は曲線  $D_1, c_1$  上にあるから、曲線  $CD$  上には次のような条件を満たす点  $M_0$  が存在する。つまり曲線  $CD$  の右側にあり点  $M_0$  に無限に近い所にある点は  $\mathcal{J}_3$  変換により極限として点  $M_1$  をとる。また曲線  $M_0, M_1$  の左側にあつてこの曲線に無限に近い点は  $\mathcal{J}_3$  変換により曲線  $M_1, c_1$  上の線分  $M_1, m_2$  の左側に変換される。一方曲線  $m_0, D_1, DM_1$  は  $\mathcal{J}_3$  変換により曲線  $M_1, D_1, M_2$  に変換される。したがつて曲線  $CM_0$  の両側の領域は  $\mathcal{J}_3$  変換によつて再び曲線  $CM_0$  によつてへだてられたそれぞれの領域内に変換され、しかも曲線  $CM_0$  と直交する方向で曲線  $CM_0$  から遠ざかっていることがわかる。

さて曲線  $CM_0$  上の区間  $M_1, M_0$  には、この線分と交わる正の傾斜の直線が存在しているから、 $\mathcal{J}_3$  変換によりこの線分上に到達するような位相面上の曲線が存在していることがわかる。これらの曲線を求めると  $M_0, M^1, M^2, \dots$  のような曲線をえる。そして曲線  $M^1, M^2$  は1回の  $\mathcal{J}_3$  変換により曲線  $M_0, M^1$  上に到達し、次の  $\mathcal{J}_3$  変換により曲線  $M_1, M_0$  上に到達する。 $\mathcal{J}_3$  変換によつて曲線  $M_0, M^1, M^2, \dots$  を次第に延長していくとついに  $x=b$  と交わるが、この図を用いているのではこの曲線を

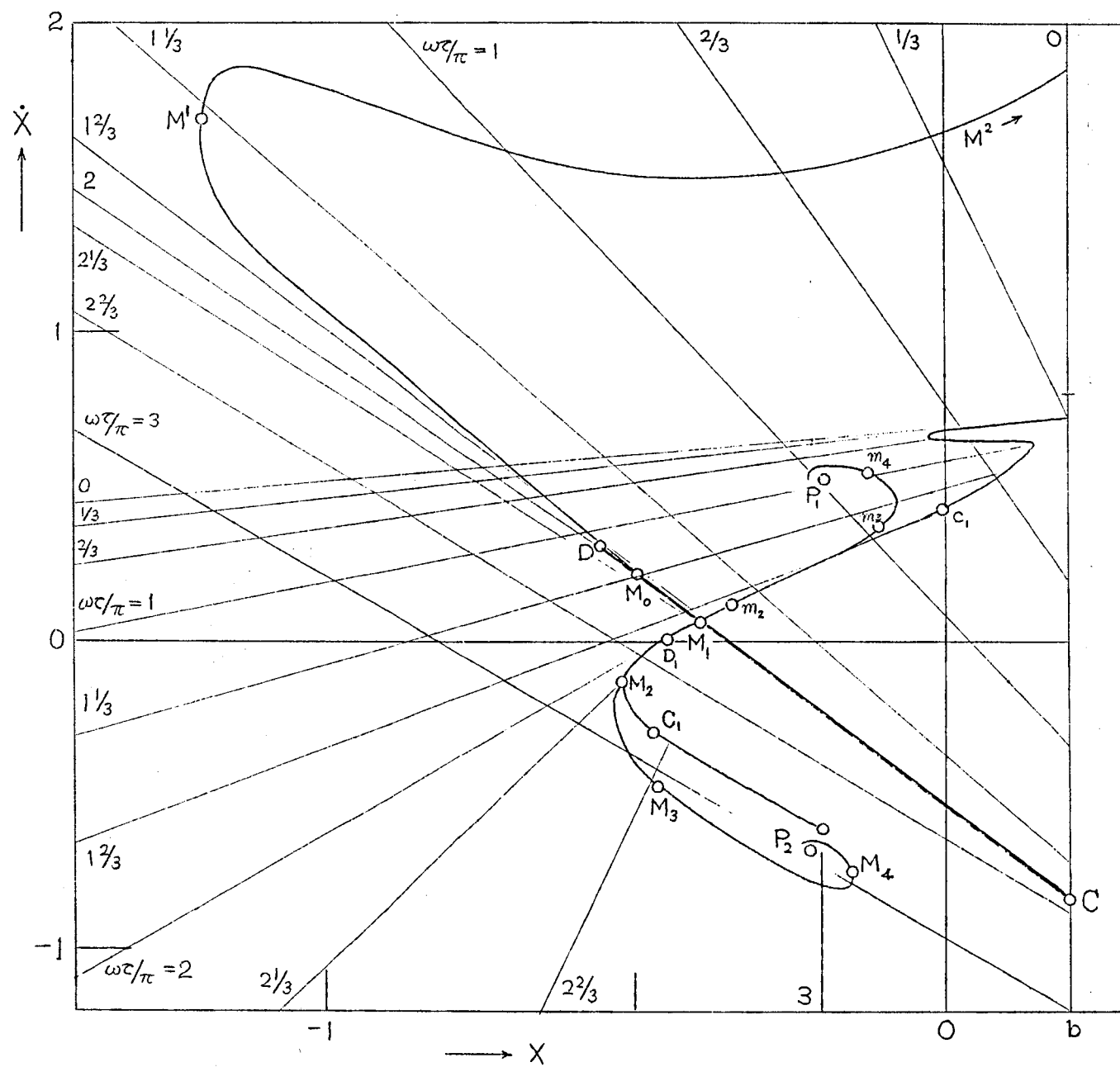


図 5.6 包絡線による初期条件の領域の分割  
 (  $A = 0.16$  ,  $\varphi_0 = 0$  ,  $\varpi_0 = 1$  )

それ以上に延長することはできない。というのはこの作業図は  $\Phi_0 = 1$  とした場合の解析に用いるものであり、この曲線をこれ以上延長しようとするれば、 $\alpha > b$  となり、 $\Phi_0 = -1$  の場合についての解析を必要とするからである。ここで  $\Phi_0 = -1$  の場合の解析について述べると、 $\Phi_0 = 1$  の場合の曲線 CD に対応する曲線はこの場合には曲線 AB であり、曲線 AB 上に先の場合の  $M_0$  に対応する点  $N_0$  を見出すことができる。この場合、

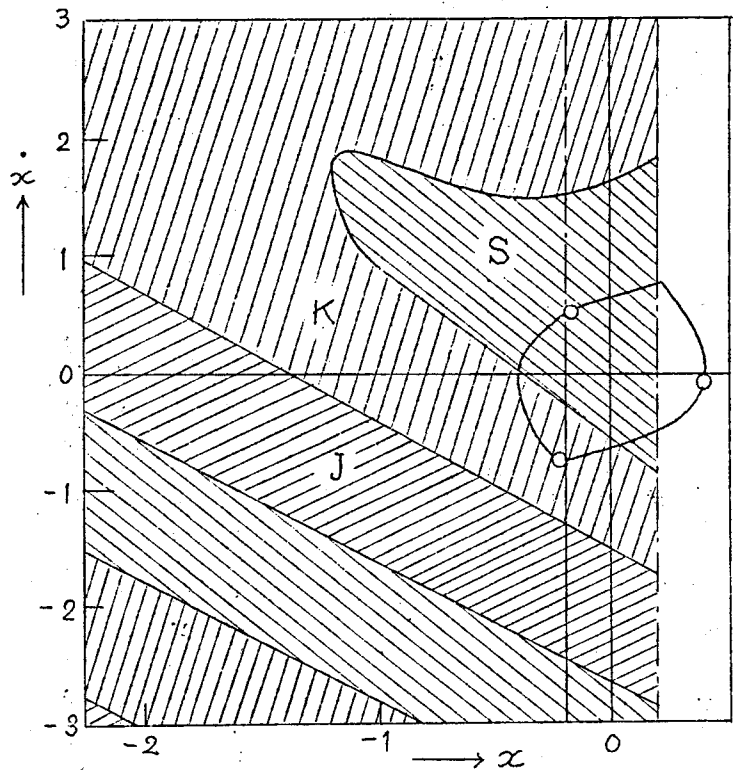
$$\mathcal{J}_1(D) = B$$

$$\mathcal{J}_1(M_0) = N_0$$

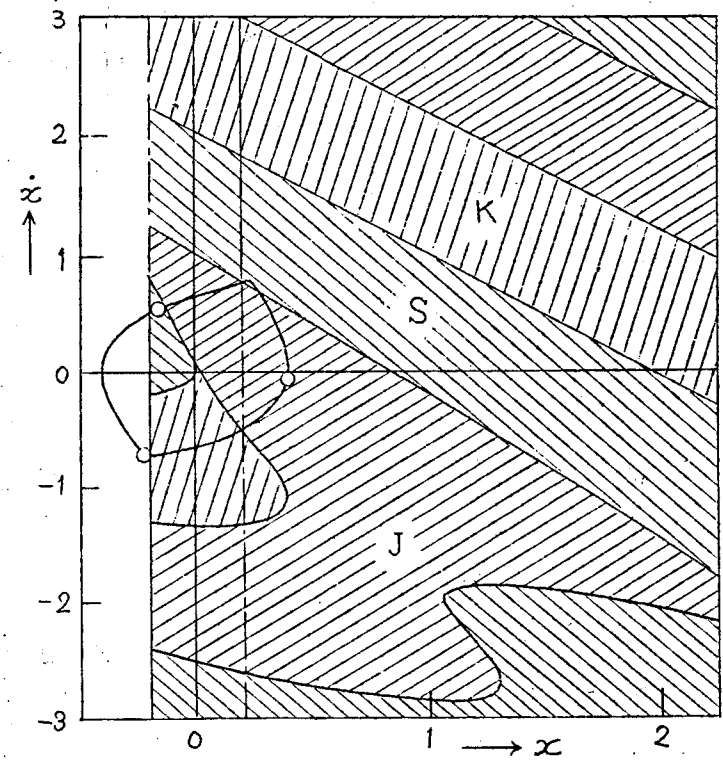
のような関係にある。これまでは説明の便宜上  $\Phi_0 = 1$  の場合の  $\mathcal{J}_3$  変換を用いて説明を行ってきたが、実際には図 3.8 を用いて  $\mathcal{J}_2$  変換をくりかえした場合に曲線  $AN_0$  および  $CM_0$  に到達するような点を一挙に求めてしまう方が便利であり、図 5.7 の 3 つの領域の境界曲線はこのようにして求められたものである。この場合これらの境界曲線自身は先に曲線  $CM_0$  が曲線  $M_1 C_1$  に変換されたことからわかるように、それぞれの外側の領域に属している。すなわち領域 S と K の境界曲線は K 領域に、K と J の境界曲線は J 領域に、J と S の境界曲線は S 領域に属している。この点は § 5.1 で述べた不安定周期解のある場合の境界曲線と基本的に異なっている。そしてこれらの境界曲線は  $\mathcal{J}_2$  変換を一回行なう毎に、すなわち入力の一周期毎にその境界曲線より一つ内側の境界曲線上に変換され、何回かこのような変換をくりかえしたのちに曲線  $CM_0$ ,  $AN_0$  上に到達し、その次の変換によってこの境界曲線へだてられた 2 つの領域のうちの外側の領域内部に変換される。

ここで再び図 5.6 について考えることにする。先に述べた所により、曲線  $m_0 DM_1$  の右側の点は  $\mathcal{J}_3$  変換により曲線  $M_1 M_2$  の右側に変換される。この曲線  $M_1 M_2$  に対して  $\mathcal{J}_3$  変換をくりかえし行なうと曲線  $M_1 M_2 M_3 \dots$  のような曲線がえられる。この曲線は  $\mathcal{J}_3$  変換のくりかえしにより次第にのびて不動点  $P_2$  のまわりに巻きついて行くことが確認さ





(a)  $\Phi_0 = 1$



(b)  $\Phi_0 = -1$

Fig. 5.7 1/3 調波振動を発生する初期条件の領域

( $A=0.16, \omega=5, b=0.2, \varphi_0=0$ )

れる。そしてこの場合  $m_0 DM_1$  の右側の領域は曲線  $M_1 M_2 M_3 \dots$  の右側に変換される。同じく曲線  $m_1 m_2$  は  $\mathcal{J}_3$  変換をくりかえすと曲線  $m_1 m_2 m_3 \dots$  のように徐々に延びて不動点  $P_1$  に巻きついていく。この場合の不動点  $P_1, P_2$  はいずれも  $1/3$  調波振動の安定解を与える初期値の点であり、§ 4.2 の例題の場合と同じようにして (4.4) ~ (4.6) の三式より計算して求められる点である。また曲線  $M_2 C_1, m_2 c_1$  についても  $\mathcal{J}_3$  変換をくりかえすことによりそれぞれ点  $P_2$  および  $P_1$  に収斂することが確認されるのであるが、曲線  $M_2 C_2, m_2 c_2$  に  $\mathcal{J}_3$  変換を  $n$  回行った後の曲線は、 $n$  の値を大きくとればそれぞれ曲線  $M_1 M_2 M_3 \dots$  および  $m_1 m_2 m_3 \dots$  に接近してほとんど区別できなくなるので省略してある。

同様のことは  $\alpha_0 = -1$  の場合の曲線  $AN_0$  についてもいえるので、結局図 3.8 の曲線  $AN_0$  と  $CM_0$  ならびに  $\mathcal{J}_2$  変換によりこれらの曲線上に到達するような曲線すなわち図 5.7 の境界曲線が入力位相に関して  $2\pi$  ずつ位相の相異なる周期振動を発生する初期条件の領域であることがわかる。

ここに図 5.7 の 3 つの領域にはそれぞれにその点に初期条件を取った場合に直ちに  $1/3$  調波振動の安定解を与える  $\circ$  印で示される点があり、これらの点は  $\mathcal{J}_2$  変換に対して 3 回を周期とする周期点となっている。

これらの 3 つの領域に対しても (5.1) 式および (5.2) 式が成立することが前と同じようにして結論され、更に前と同様にこの場合においても複雑な周期振動や概周期振動を与える安定解は存在しないという仮定を用いると、この 3 つの領域は入力の位相に関して  $2\pi$  ずつ位相の異なる 3 つの  $1/3$  調波振動を発生する初期条件の領域であるということができる。

さて図 5.6 において包絡線  $CD$  が上で述べた場合のように初期条件の領域の境界となるためには、点  $M_1$  が曲線  $CM_0$  上にあることが必要である。この必要条件の成立する限界について考えると、そのような場合は点  $M_0$  と点  $M_1$  とが同一な点となる。この場合点  $M_0$  または点  $M_1$  は

1/3 調波振動の解を与える初期値の点となる。しかるに先に § 4.4 で考察したところにより、周期解を与える初期値の点が  $L_0$  直線の包絡線上に存在する場合の入力振幅はそれぞれの周期解の存在限界を与えるのであるが、いま考察している場合には 1/3 調波振動の安定解を与える初期値の点は点  $M_0$  とは別に存在しなければならないので、点  $M_0$  を通る 1/3 調波振動は不安定な解であり、この場合の入力振幅は 1/3 調波振動の不安定解の存在する入力振幅の上限を与えることがわかる。また、 $M_0$  として入力振幅が  $A_{q3}$  よりも大きく、不安定周期解が存在しない場合には、点  $M_1$  が曲線  $CM_0$  上にあるという条件が成立し、本節で考察した方法により異なる周期振動を発生する初期条件の領域が決定される。また入力振幅が  $A_{q3}$  よりも小さくて不安定周期解の存在する場合には、上述の必要条件は成立せず初期条件の領域の境界は前節のような方法により見出される。このように不安定周期解が存在する場合とそうでない場合とでは、異なる周期振動を発生する初期条件の領域を決定する条件が異なっていることが示される。

### § 5.3 基本調波振動と 1/3 調波振動の共存する場合

入力振幅  $A$  が図 4.11 の  $A_{p1} < A < A_{r3}$  の範囲にあれば 1/3 調波振動と基本調波振動が共存する。今この図の点 3 にパラメータを取ると  $A = 0.32$ ,  $\omega = 5$  であり、この場合には 1/3 調波振動の安定解と基本調波振動の安定解が共に存在する。1/3 調波振動には位相の相異なる 3 つの振動が存在するので、あわせて 4 つの異なる振動を発生する初期条件の領域を決定することになる。

図 5.8 は  $\mathcal{L}_2$  変換を用いて過渡応答を解析するために描かれたものである。ここにおいても入力位相角は  $\varphi_0 = 0$  にとられている。この図の  $\tau$  をパラメータとする負の傾斜の直線は  $L_0^+$  ( $\tau$ ) 直線であり、正の傾斜の直線は、 $L_0^+$  ( $\tau$ ) より出発した解が途中 1 回のリレーの切換えをへて

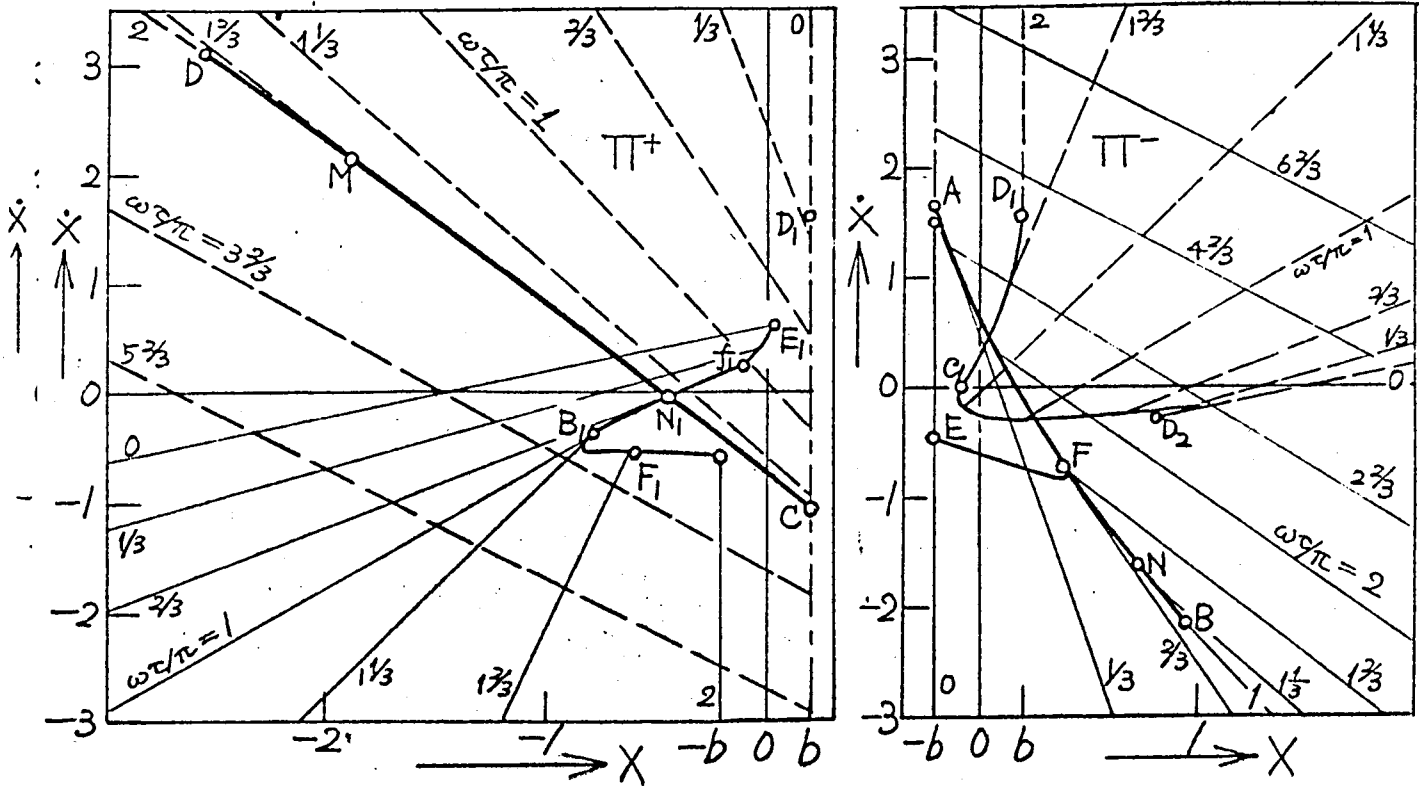


図 5.8 過渡応答の位相面解析

$\mathcal{J}_2$  変換による場合 ( $A=0.32, \omega=5, b=0.2, \varphi_0=0$ )

$t = \frac{2\pi}{\omega}$  に到着する点の軌跡を表わす  $L_1^\pm$  (C) 直線である。この図の領域 AEF の中に初期値をとった場合、 $t = \frac{2\pi}{\omega}$  までの間に 2 回リレーの切替えが行なわれ、 $t = 2\pi/\omega$  では A" E" F" の領域内に変換される。先に考察した 2 つの場合には  $\mathcal{J}_2$  変換の際に 2 回リレーの切替えが行なわれる初期条件の領域は小さかったのであるが、今考察する基本調波振動の存在する場合には、この領域はかなり広く、しかも基本調波振動を発生する初期条件の領域を決定する上で重要な役割を果たすので詳しく検討することが必要である。

しかしこの領域に  $\mathcal{J}_2$  変換を用いると途中のリレーの切替回数が増え、2 回となって解析が難かしくなるので、 $\mathcal{J}_1$  変換によって考察を進める。

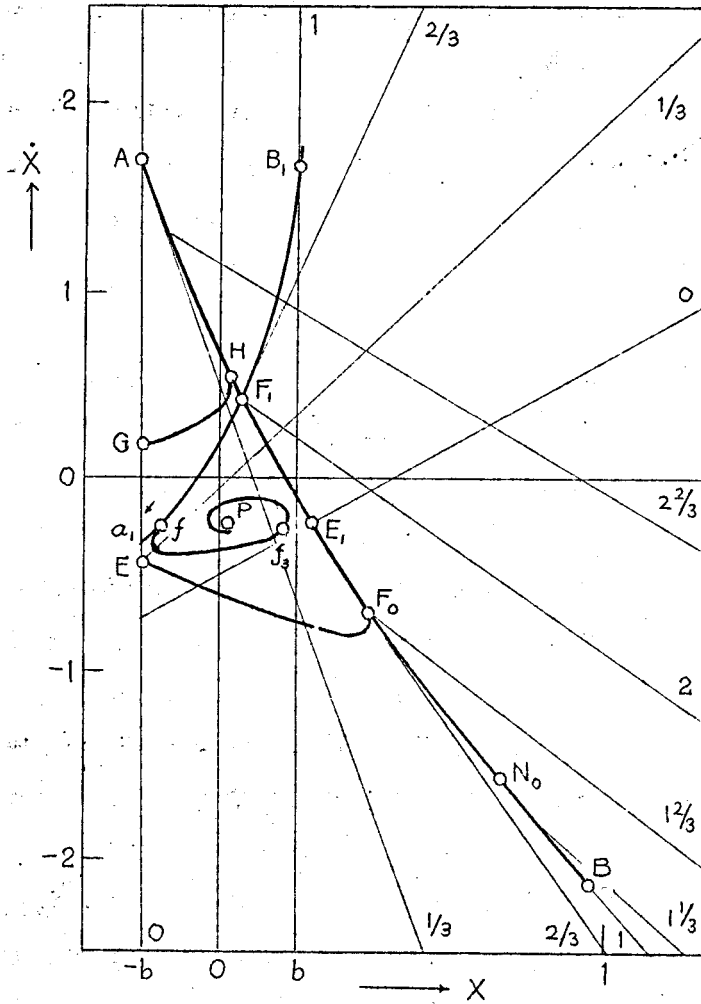


Fig. 5.9 過渡応答の位相面解析

$\mathcal{T}_1$  変換による場合

( $A=0.32, \omega=5, b=0.2, \varphi_0=0, \Phi_0=-1$ )

図 5.9 は  $\Phi_0 = -1$  にとつた場合の  $\mathcal{T}_1$  変換に用いられた図である。この図で負の傾斜の直線は  $L_0(\tau)$  直線であり、正の傾斜の直線は  $L = \frac{\pi}{\omega}$  にとつた場合の  $L_1(\tau)$  直線を原点に関して対称に描いたものであつて一つの負の傾斜の直線は  $\mathcal{T}_1$  変換によりそれとての値の等しい正の傾斜の直線上に変換される。曲線 AB は (3.14) 式および (3.23) 式をとみに

満足するような曲線で、この曲線のAからBを見た右側にある負の傾斜の直線の包絡線となっており、曲線AB自身はこの曲線の左側の領域に属している。曲線ABの右側にあり、この曲線に無限に近い所にある曲線を $\mathcal{J}_1$ 変換した場合の極限として曲線 $\alpha_1 B_1$ をえる。この場合点Aの近くの点は $\mathcal{J}_1$ 変換した場合に2度リレーが切換えられて正の半平面に変換されるので、図5.9では矢印によって曲線 $B_1 F_1 f_2$ の先に点 $\alpha_1$ があることを示している。

曲線 $\alpha_1 B_1$ と曲線ABとの交点を $F_1$ とすると、曲線AB上に次のような点 $F_0$ がある。すなわち曲線ABの右側にあり点 $F_0$ に無限に近い点は、 $\mathcal{J}_1$ 変換により極限として点 $F_1$ をとる。先のように曲線AB上の点または線分は大文字で表わし、曲線ABの右側にあつて、この曲線上の点に無限に近い点または線分を $\mathcal{J}_1$ 変換した場合の極限について考える場合には、同じ文字の小文字を用いることにする。そうすると曲線 $f_1 f_0$ は $\mathcal{J}_1$ 変換により $f_2 f_1$ に変換され、更にこの変換をくりかえすと結局 $f_1 f_2 f_3 \dots$ のような曲線が描かれ、曲線 $F_0 F_1$ の左側の領域はそのつどこの曲線 $f_1 f_2 f_3 \dots$ の左側に変換されることになる。曲線 $f_1 f_2 f_3 \dots$ は徐々に点Pに接近しているが、点Pを初期値とする解は基本調波振動の安定解であり、点Pは $\mathcal{J}_1$ 変換に対して不動点となっている。次に曲線 $F_0 F_1$ 上の線分 $E_1 F_1$ には正の傾斜の直線が交わっているから、 $\mathcal{J}_1$ 変換によりこれらの交点上に変換されるような点がこの平面の負の傾斜の直線上にある。このような点を求めると曲線 $E F_0$ をえる。容易にわかるように曲線 $E F_0$ の左側は $\mathcal{J}_1$ 変換によって曲線 $E_1 F_1$ の左側に変換され、さらに $\mathcal{J}_1$ 変換をくりかえし行なうと曲線 $f_1 f_2 f_3 \dots$ の左側に変換される。また曲線 $E F_0$ と正の傾斜の直線との交点が存在することから、これらの点に対して $\mathcal{J}_1$ 変換を適用すると曲線GHをえる。そしてまた曲線GHの右側は曲線EFの左側に変換される。以上の結果から点G, H,  $F_0$ , Eでかこまれた領域内の点は $\mathcal{J}_1$ 変換により不動点Pに漸近することがわかる。種々の初期値より出発した解の $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ 毎の点がこの領域に入るような初期条件の領域を全

て求めるには、図 5.9 によって  $\alpha_0 = -1$  の場合についてだけ考察しても不十分であるからこれより先は図 5.8 によって  $\mathcal{J}_2$  変換を用い解析を進める。

これまでは曲線 AB の左側の領域の点ならびに  $\mathcal{J}_1$  変換によってこの領域に変換されるような点は除外して考えていたが、これらの点については § 5.2 の場合と同じく  $\mathcal{J}_3$  変換を用いて考察することができ、その結果曲線 AB, CD 上にそれぞれ点  $N_0$ , および  $M_0$  があり、この場合にも曲線  $AN_0$ ,  $CM_0$  は異なる周期振動を発生する初期条件の領域の境界となっていることを確認することができる。

曲線  $AN_0$ ,  $CM_0$ ,  $EF_0$  および  $\mathcal{J}_2$  変換によりこれらの曲線上に変換されるような曲線を全て求めると、図 5.10 の 4 種類の領域の境界曲線を与える。この 4 つの領域のうち S, J, K については前と同じようにして (5.1) 式および (5.2) 式の成立することが示される。また白地の領域は  $\mathcal{J}_2$  変換を行なう毎に、再び白地の領域に変換される。この場合境界曲線自身は S, J, K いずれかの領域に属し、白地の領域に属しているものはない。

それぞれの境界曲線が領域 S, J, K のいずれに属するかは、§ 5.2 の場合と同じようにその境界曲線の外側にある領域に属している。

白地の領域内の  $\circ$  印で示す点は  $\mathcal{J}_2$  変換に対して不動点となっており、その点を初期値とする解は、基本調波振動の安定解を与える。また領域 S, J, K 内の  $\circ$  印の点は  $\mathcal{J}_2$  変換に対して 3 回を周期とする周期点であり、 $1/3$  調波振動の安定解を与える初期値の点である。

これらの 4 つの領域内の全ての点は  $\mathcal{J}_2$  変換を何回か行なうことによってそれぞれの領域内にある周期解を与える初期値の点の近くの有限な領域内に変換されることが示される。ここで § 5.1 の場合と同じく、概周期振動や複雑な周期振動を与える安定な解は存在しないと仮定すると、図 5.10 の白地の領域は基本調波振動を発生する初期条件の領域であり、領域 S, J, K は位相の異なる  $1/3$  調波振動を発生する初期条件の領域であると結論することができる。

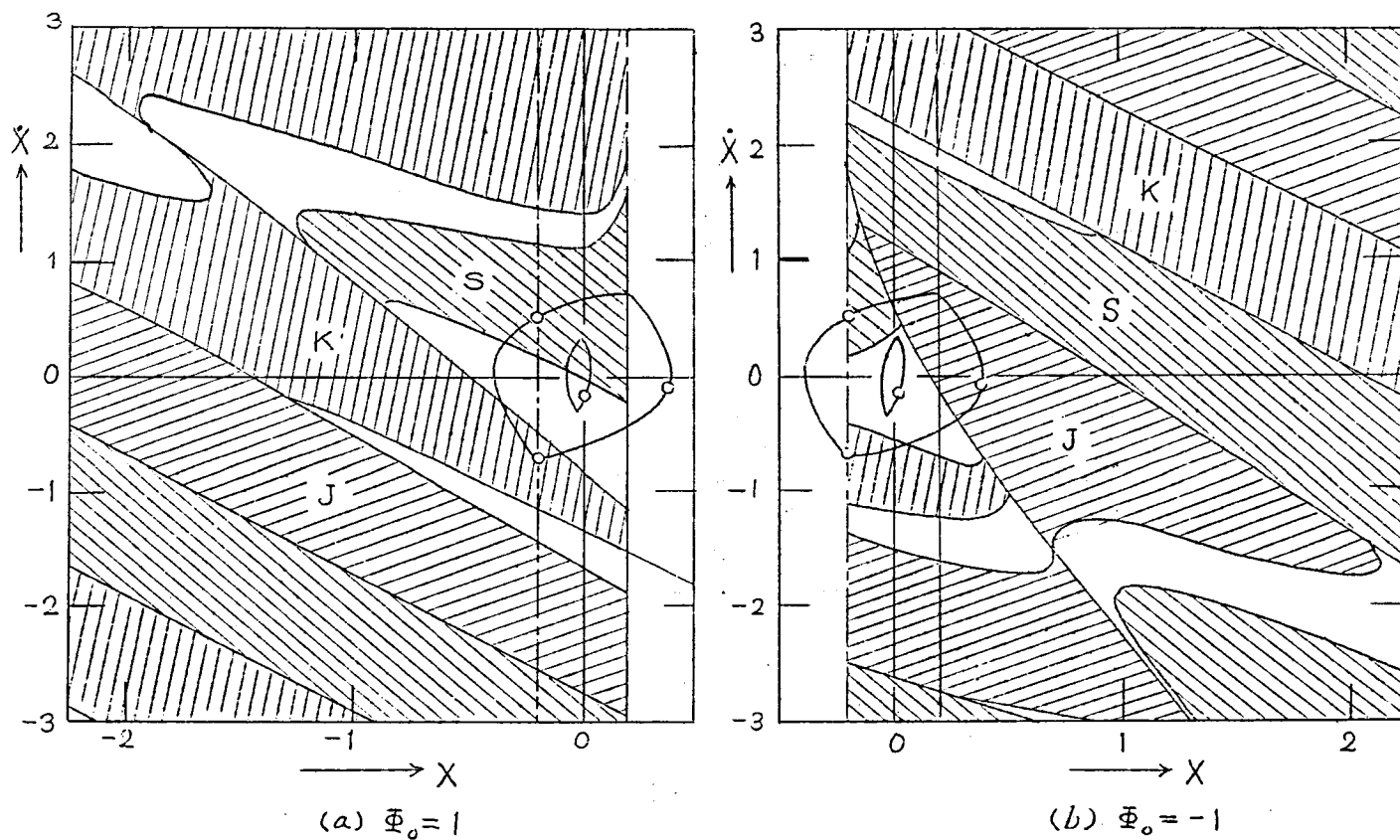


図 5.10  $1/3$  調波振動と基本調波振動を発生する初期条件の領域

( $A = 0.32, \omega = 5, b = 0.2, \varphi_0 = 0$ )

基本調波振動
 


1/3 調波振動



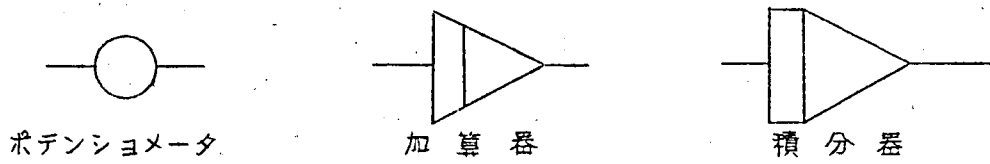
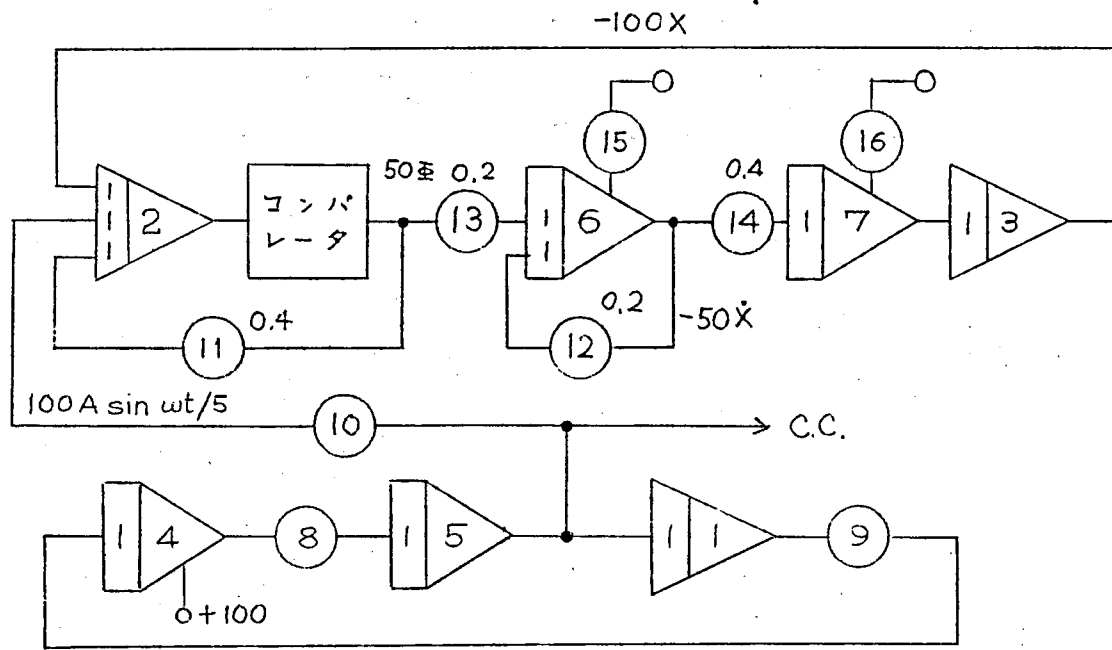


図 5.11 アナログ計算機の演算回路

## § 5.4 アナログ計算機による検討

本章の前3節で理論的な考察により見出された異なる周期振動を発生する初期条件の領域を実験的に検討するためにアナログ計算機による実験を行なった。

図5.1に示すリレー制御系を模擬したアナログ計算機の演算回路を図5.11に示す。ここで演算要素の表示方法は慣習<sup>(34)</sup>によっている。入力正弦波の角周波数はポテンシオメータ8, 9に設定される。図4.11の点1, 2, 3のように $\omega=5$ にえらんだ場合にはポテンシオメータ8, 9の値は1に設定される。入力振幅Aの値はポテンシオメータ10に設定され、積分巻5の出力は $\varphi_0=0$ なる正弦波であり、これがポテンシオメータ10を通して加算器2に入力正弦波として加えられる。積分巻5の出力は別にサイクルカウンタCCに導かれ、入力正弦波の3周期毎にサイクルカウンタよりインパルス信号が出される。

初期値 $X_0, \dot{X}_0$ はそれぞれポテンシオメータ16および15に設定され、またリレー出力の初期値 $\sigma$ が+1であるか-1であるかはコンパレータの出力をメータで見て選別する。加算器3と積分巻6の出力をXY記録計のそれぞれXおよびY端子に導き、ある初期値より出発した解の定常状態においてえがく位相面軌道に注目し、その軌道上のどの点においてサイクルカウンタのインパルスが与えられるかによって $1/3$ 調波振動の位相の相異を并列する。

入力位相角 $\varphi_0=0$ の場合についてアナログ計算機を繰返し動作させて、異なる周期振動を発生する初期条件の領域の境界を求めた結果を先に理論的に求めた結果と比較して示したものが図5.12(a),(b),(c)である。これらの図において○印の点は実験的に見出された境界曲線上の点で、破線の曲線はこれらの実験点からえられる境界曲線であり、実線の曲線は先に理論的に見出したところの境界曲線である。

実験は境界曲線上の点のみでなく、各領域内部の点に対しても多数回行なったが、それらの点を初期値とする解は、その属する領域内に

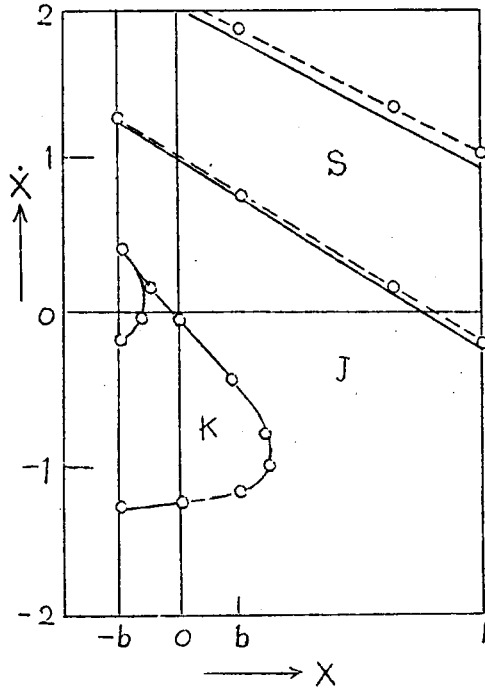
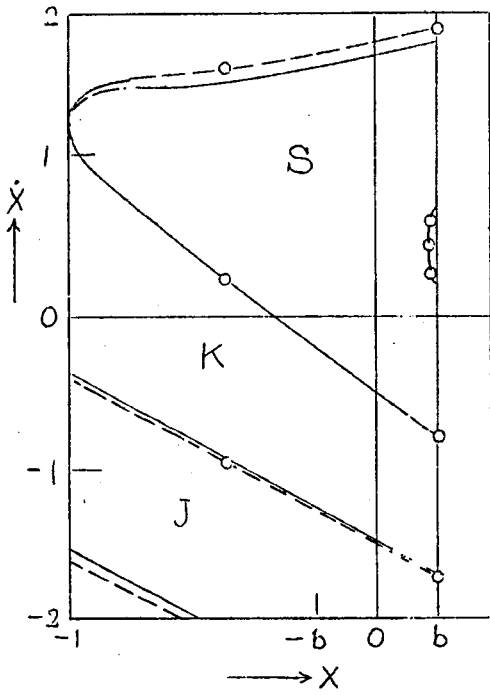


图 5.12 (a)

$A = 0.08$

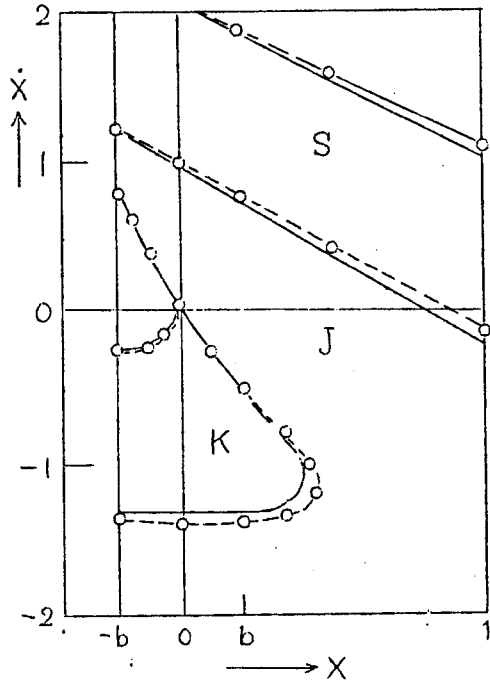
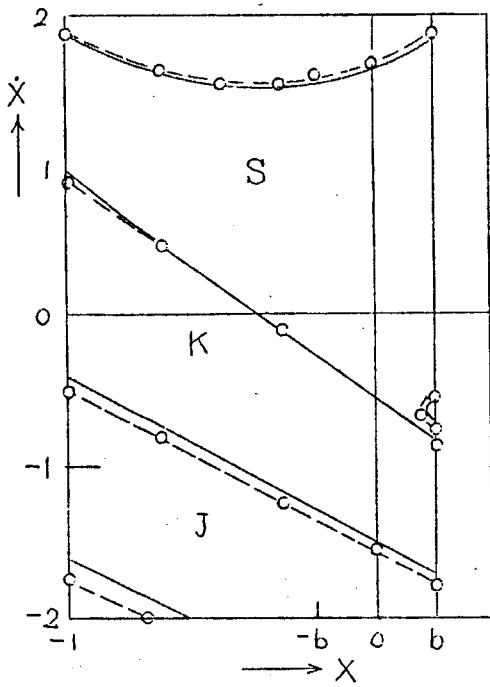


图 5.12 (b)

$A = 0.16$

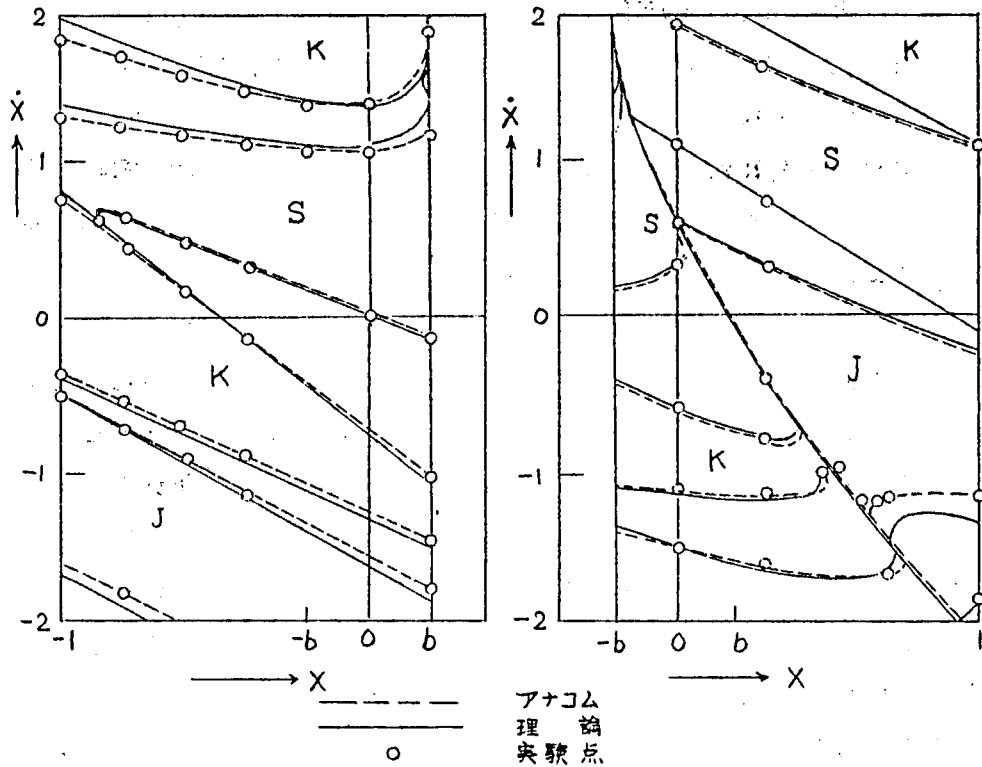


図 5.12(c)  $A = 0.32$

図 5.12 理論的な解析とアナコムの実験結果との比較

ある基本調波振動または  $1/3$  調波振動を与える安定な解に収斂していくことが全ての点について確認された。したがって図 4.11 の点 1, 2, 3 のようにパラメータをえらんだ場合において、複雑な周期振動や概周期振動を与える安定解は存在しないという仮説は実験的にうらづけられたと考えることができる。

さて本章の前3節の考察によれば、異なる周期振動を与える初期条件の領域の境界曲線を求める場合、その最も根本となる曲線を求めて、その曲線に対して負の  $\mathcal{A}$  変換をくりかえし行なうことにより全体的な境界曲線が求められる。この最も根本となる曲線とは § 5.1 の場合には不安定周期解を与える初期値の点 1, 3, 5 を通る曲線  $\Gamma_1$  のそれぞれ点 1, 3, 5 の近傍の部分であり、また § 5.2 および § 5.3 の場合には、

$L_0^{\pm}$ (て) 直線の包絡線  $AB, CD$  上の曲線分  $AN_0, CM_0$  であった。

図 5.12 を見ると容易にわかるように、アナログ計算機により実験的に求めた境界曲線(点線)と前3節の図式解析法によって求めた境界曲線(実線)とを比較した場合に、境界曲線の最も根本となっている部分においては二つの曲線はほとんど完全に一致している。そして境界曲線はその曲線上の点を初期値とする解の  $\omega t = 2\pi$  毎の位置を表わす点がこれらの根本となっている曲線上に到達するまでの時間が長くなるにしたがって実験結果と解析結果の差異が増大していく傾向にあることが認められる。これは境界曲線の最も根本になっている部分にある差異はきわめてわずかであっても、その上に到達するに要する時間が長くなるに従ってその差異は指数関数的に拡大するものと考えられるので、図 5.12 の実験および解析結果の差異は、図式解法およびアナログ計算機の誤差のために境界曲線の最も根本となっている部分に存在するわずかな誤差が拡大した結果生じたものであると考えることができる。図 5.12 より理論的な解析結果と、アナログ計算機による実験結果はきわめてよく一致していることがわかる。

## § 5.5 概周期振動と基本調波振動の共存する場合

本節では図 4.11 の点 4 すなわち  $A = 0.22, \omega = 3.5$  にえらんだ場合の初期条件と定常振動の関係について考察する。図 4.11 からわかるように、この場合には入力振幅は  $A > A_{q1}$  であり、周期解としては基本調波振動の安定解のみが存在して、 $1/3$  調波振動の解や基本調波振動の不安定解は存在しない。

この場合の初期条件と定常振動の関係について考察した結果によると、 $\alpha, \gamma$  位相面上には2種類の初期条件の領域が存在し、一方の領域に初期値を有する解は  $\mathcal{A}$  変換により他方の領域に変換されないことが示された。これらの一方の領域に初期値をとった場合には基本調波振動が発生し、他方の領域に初期値をとった場合には概周期振動の発生する

ことが、アナログ計算機の実験から明らかにされた。周期振動の存在する場合においても、初期値の取り方によっては概周期振動の発生する場合のあることは今日まであまり知られておらず、周期的入力を有するリレー制御系の過渡応答の解析を系統的に行なった結果、初めて明らかにされたものである。

図 5.13 は入力を図 4.11 の点 4 にとり入力位相角を  $\varphi_0 = 0$  にとった場合の過渡解の解析を行なうためのもので、この図の負の傾斜の直線は  $L$ 。直線であり、正の傾斜の直線は  $L = 2\pi/\omega$  にとった場合の  $L$ 。直線である（実線は  $\sigma_0 = -1$  の場合、破線は  $\sigma_0 = 1$  の場合）。 $\mathcal{J}_2$  変換を行なった場合のリレーの切換回数が 1 以下であるような初期値の点に関しては、この図の負および正の傾斜の直線と (3.22)

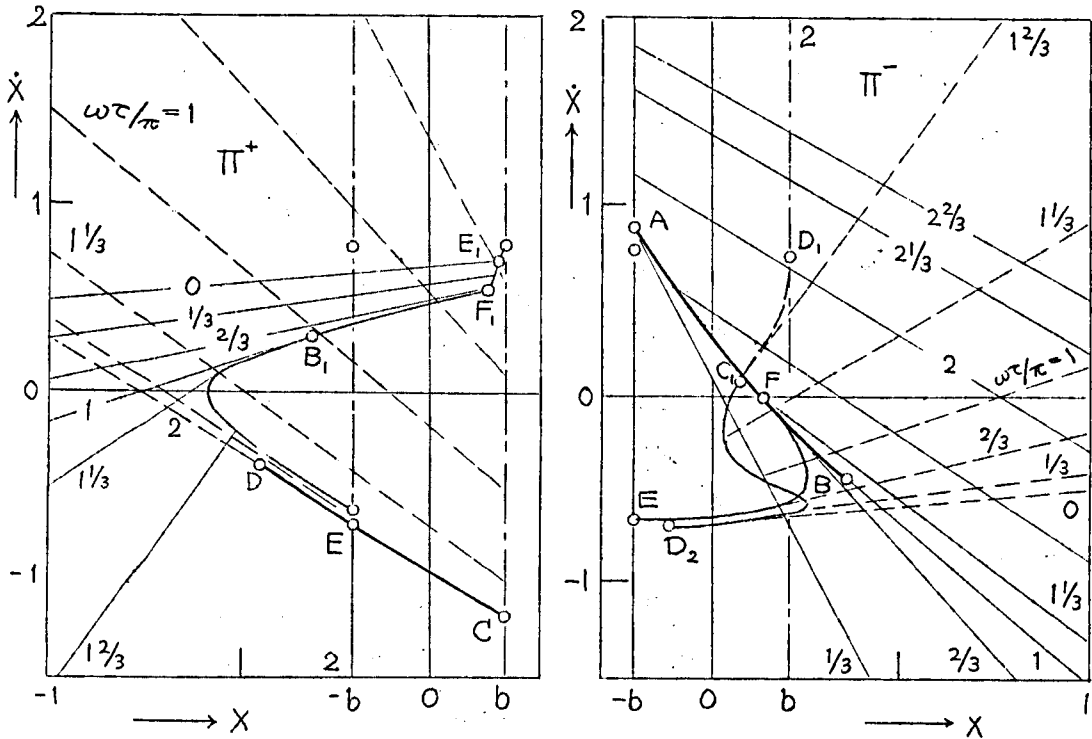


図 5.13. 過渡応答の位相面解析

( $A = 0.22, \omega = 3.5, \varphi_0 = 0, L = 2\pi/\omega$ )

式を用いて過渡解の解析を行なうことができる。リレー出力の初期値  $\alpha_0 = -1$  の場合において、初期値  $(\alpha_0, \omega_0)$  が領域 AEF<sub>0</sub> 内にえらばれた場合には  $\mathcal{J}_2$  変換の際のリレーの切換回数 2 回となり解析が複雑となるので、 $\mathcal{J}_1$  変換を用いた解析を行なうことにする。

図 5.14 は入力位相角  $\varphi_0 = 0$  の場合の  $\mathcal{J}_1$  および  $\mathcal{J}_2$  変換を用いられたもので、この図の負の傾斜の直線は  $L_0$  (て) 直線であり、正の傾斜の直線は  $L = \pi/\omega$  にえらんだ場合の  $L_1$  (て) 直線を原点に関して対称に描いたものである。この図の点 P はこの場合に発生する基本調波振動の安定解を与える初期値の点であり、この点は  $\mathcal{J}_1$  変換に対して不動点となっている。§ 5.3 の場合と同じようにして基本調波振動を発生する初期条件の領域を求めることにする。

すなわち曲線 AB は A より B を見たこの曲線の右側にある  $L_0$  (て) 直

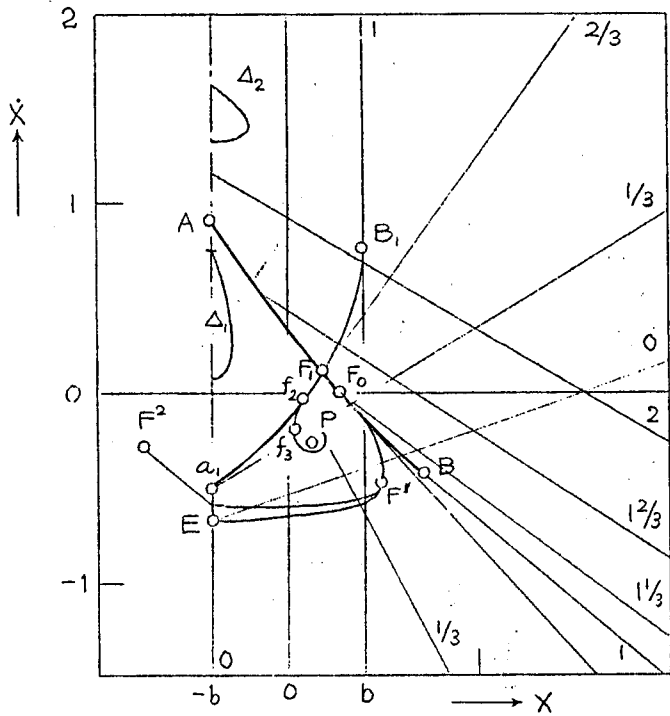


図 5.14 過渡応答の位相面解析

( $A=0.22, \omega=3.5, \varphi_0=0, L=\pi/\omega$ )

線の包絡線であり、 $\mathcal{J}_1$  変換によりこの曲線の右側の領域は曲線  $\alpha_1 B_1$  の右側に変換される。

さて曲線  $\alpha_1 B_1$  と曲線 AB との交点を  $F_1$  とすると、曲線 AB 上に次のような点  $F_0$  が存在する。すなわち曲線 AB の右側にあり点  $F_0$  に無限に近い点は  $\mathcal{J}_1$  変換により極限として点  $F_1$  をとるものとする。そして曲線  $F_0 F_1$  の左側の近傍の点は  $\mathcal{J}_1$  変換により曲線  $F_1 f_2$  の左側に変換され、さらにこの変換をくりかえすと曲線  $f_2 f_3, \dots$  の左側に逐次変換される。そして曲線  $F_1 f_2 f_3 \dots$  は次第に延びて不動点 P に巻きつくような曲線となっている。このようにして曲線  $F_0 F_1$  の左側の近傍の点は  $\mathcal{J}_1$  変換を繰返えした場合に不動点 P に接近することがわかる。しかるに曲線  $F_0 F_1$  に交わる正の傾斜の曲線が存在することから、 $\mathcal{J}_1$  変換により曲線  $F_0 F_1$  に変換される初期値の点が存在することがわかる。曲線  $F_0 F_1$  に  $\mathcal{J}_1$  変換を行なってこれらの点を求めると曲線  $F' F_0$  をえる。なお曲線  $F_1 B$  と正の傾斜の直線との交点が存在することから、曲線  $F_1 B$  に  $\mathcal{J}_1$  変換を行なった結果えられる曲線が図 5.14 の曲線  $E F_0$  であり、曲線  $F' F_0$  は曲線  $E F_0$  上の曲線である。曲線  $F' F_0$  に更に  $\mathcal{J}_1$  変換を行なうことにより曲線  $F^2 F'$  がえられ、また曲線  $F^2 F'$  と正の傾斜の直線との交点が存在することから、曲線  $F^2 F'$  のこれらの部分について  $\mathcal{J}_1$  変換を行なって曲線  $\Delta_1$  を求める。このようにして曲線  $F_0 F_1$  上に変換されるような初期値の点を順次求めて行くのであるがこれらの曲線を全て求めるためには本章の前3節の場合におなじく、

$\alpha_0 = -1$  の場合だけでなく、図 5.13 を用いて  $\alpha_0 = 1$  の場合についても負の  $\mathcal{J}$  変換をくりかえし行なうことが必要である。この操作を行なうと図 5.15 の斜線を施した領域と白地の領域の境界をなす曲線をえる。この斜線を施した領域内に初期値を有する解は、入力の周期に関して数サイクルだけ時間を経た後には、図 5.14 の曲線  $\alpha_1 F_1, F_1 F_0, F' F^2$  および直線  $x = -b$  で囲まれた領域内に入り、以後は徐々に同図の点 P に接近する。したがって図 5.15 の斜線を施した領域は基本調波振動を発生する初期条件の領域である。



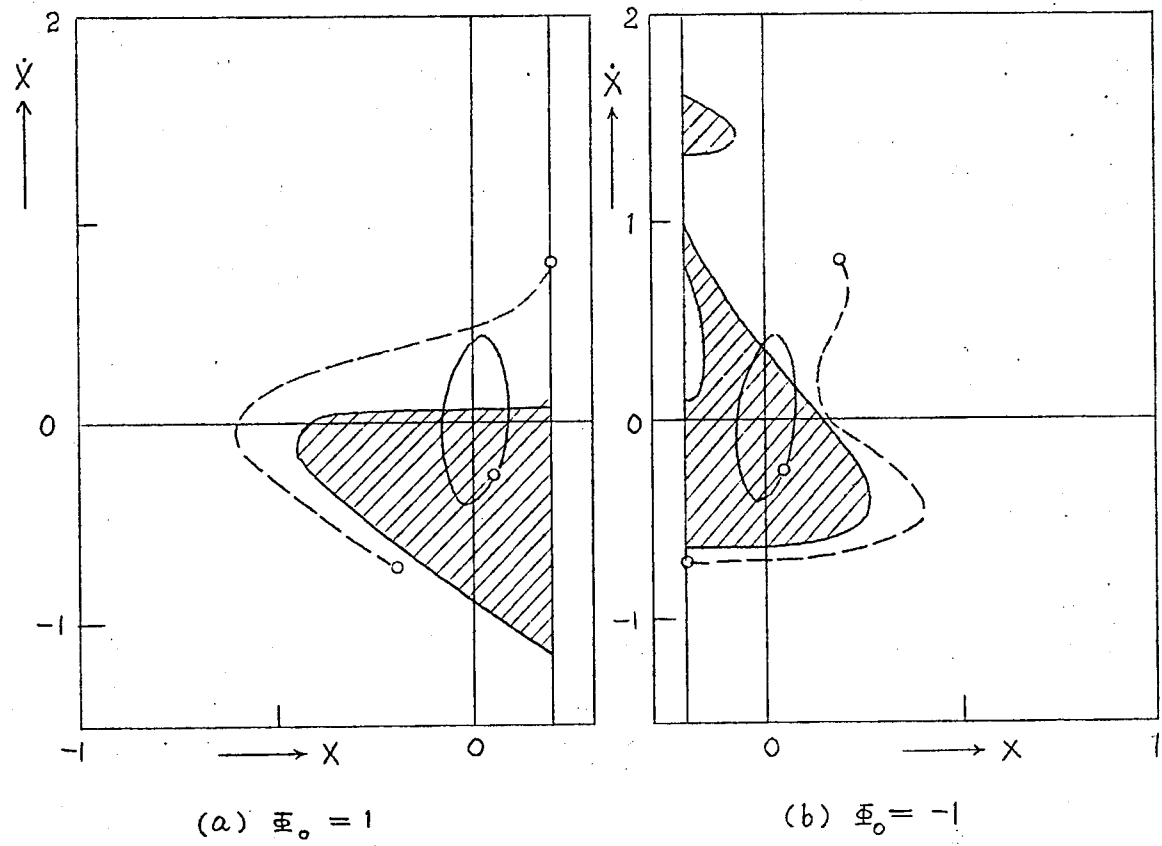


図5.15 基本調波振動と概周期振動を発生する初期条件の領域 ( $A=0.22, \omega=3.5, \phi_0=0$ )

基本調波振動
  概周期振動

さて図 5.15 の白地の領域に初期値をとった場合に、その解は定常状態において、いかなる振動となるかについて考えよう。基本調波振動を発生する初期条件の領域は図 5.15 の斜線を施した領域でつくされていることから、白地の領域は基本調波振動を発生する初期条件の領域ではない。また入力のパラメータを図 4.11 の点 4 にとった場合には、基本調波振動以外の単純な周期解は存在しない。したがって図 5.15 の白地の領域内に初期値をとった場合に発生する定常振動は概周期振動または複雑な周期振動であると考えられる。図 5.15 の 2 つの領域の境界となっている曲線は  $\mathcal{J}_1$  変換により図 5.14 の曲線  $F_0, F_1$  に変換される曲線と曲線  $F, A$  とからなりたっており、先の考察により曲線  $F_0, A$  の左側の領域に初期値をとれば、基本調波振動を発生する。次に曲線  $F_0, A$  に初期値をとった場合にいかなる振動を発生するかについて考えると、第 3 章で述べたように曲線  $AB$  はこの曲線の左側の領域に属しており、この曲線の左側の領域に  $\mathcal{J}$  変換を行なう場合には図 5.13 を用いて  $\mathcal{J}_2$  変換を用いて考察を行なう方が便利である。図 5.14 の曲線  $AF_0$  に相当する図 5.13 の曲線は曲線  $AF$  であるが、図 5.13 により曲線  $AF$  に  $\mathcal{J}_2$  変換を数回行なうと図 5.15 の破線のような閉ループの曲線を与える。この閉ループの曲線に対して  $\mathcal{J}_2$  変換をくりかえし行なっても、再びこの閉ループの上に変換される。この閉ループの曲線は図 5.13 の曲線  $E, F, B, A, DE$  のそれぞれ右側、および図 5.14 の曲線  $EF^*, BF_1, F, B_1$  のそれぞれ右側の領域にあり、それぞれの曲線に極めて近い点を通っている。以上の結果から図 5.15 の白地の領域に初期値をとった場合には、入力の一周期毎の解の位相面上の位置が定常状態において図 5.15 の閉ループ上にあるような概周期振動を発生するものと考えられる。

以上の考察結果を確認するためにアナログ計算機による実験を行なっ

---

\* これらの曲線は図 5.13 にも同じく描かれているが、この図の曲線には点  $F^*, F_1$  および  $B_1$  が記入されていないので、図 5.14 の記号を用いて説明する。なお図 5.13 の点  $D_1$  と図 5.14 の点  $B_1$  とは同一の座標を持つ。

た。アナログ計算機の換算回路は図5.11の通りである。

図5.16はアナログ計算機の実験により求められた基本調波振動を発生する初期条件の領域の境界曲線を、計算により見出された図5.15の境界曲線と比較したもので、二つの結果は大体よく一致していることがわかる。

図5.17はこの場合に発生する基本調波振動ならびに概周期振動の位相面軌道をXY記録計に記録したものであり、黒点は入力周期についての一周期毎の点を示している。

図5.18は概周期振動の発生している場合における $\alpha$ ,  $\omega$  および $\phi$ の波形を示している。

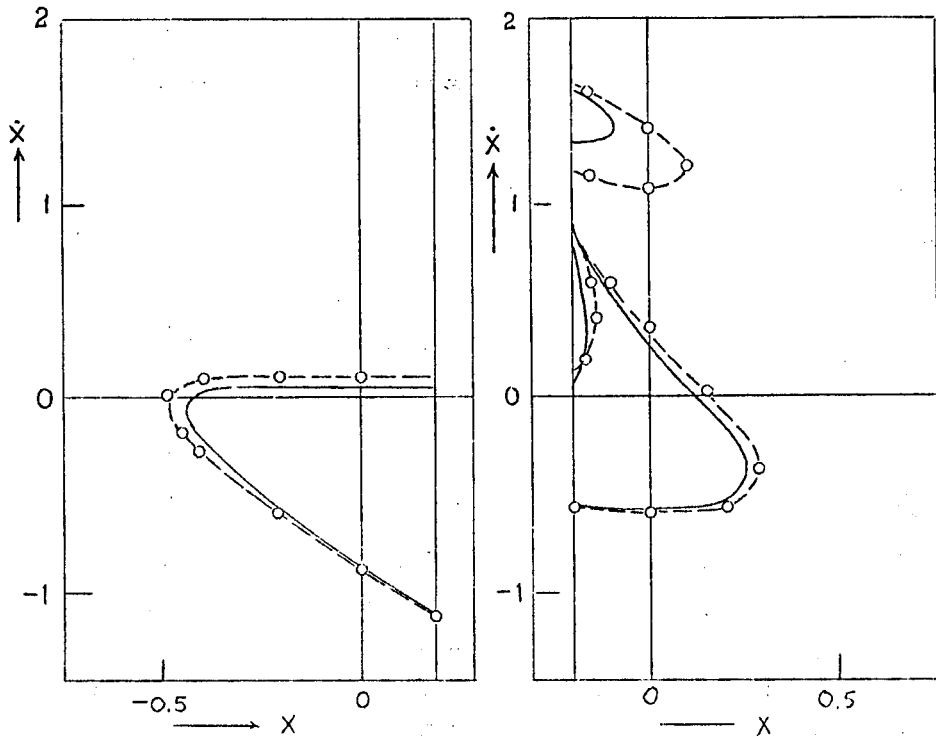


図5.16 理論的な解析とアナコムによる実験結果との比較

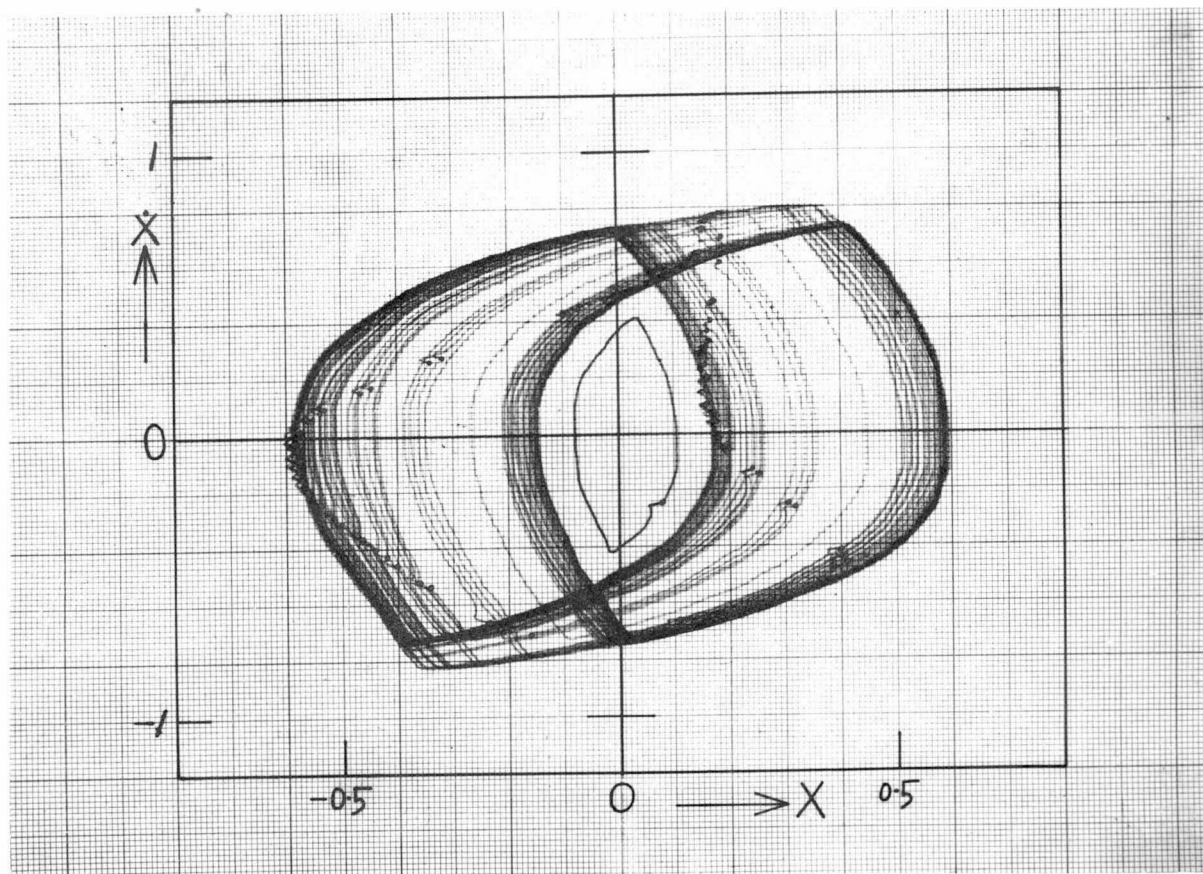


図 5.17 概周期振動と基本調波振動の位相面軌道

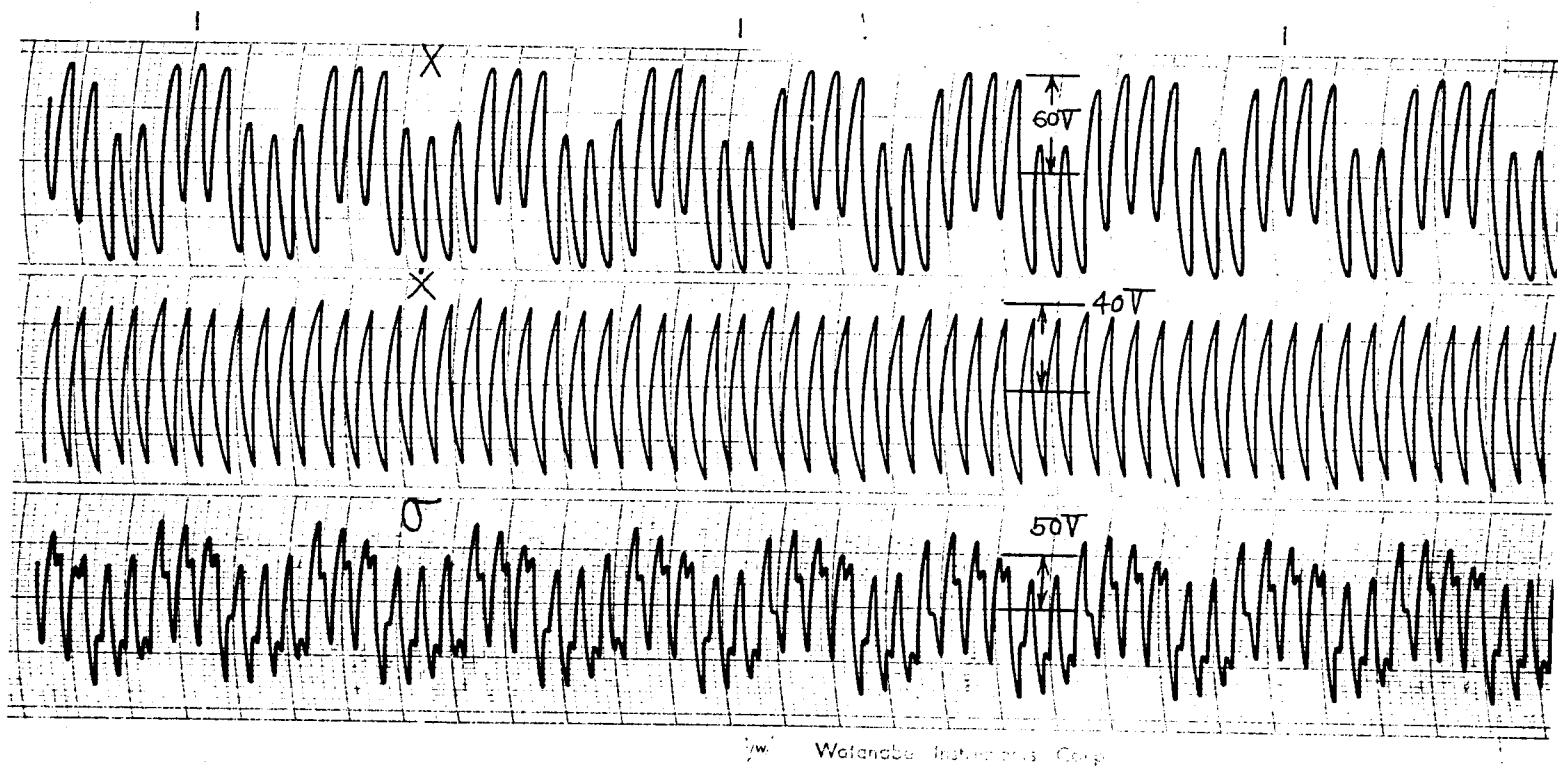


图 5.18 概周期振动波形

種々のパラメータの下でアナログ計算機を動作させた結果によれば、入力振幅  $A$  を種々の周期振動の発生する下の振幅限界  $A_{pl}$  のいずれよりも小さくとした場合には概周期振動の発生することが認められるが、周期振動の発生するパラメータの下で概周期振動の発生することはほとんどない。上述のように基本調波振動と概周期振動が共存するのも入力周波数ならびに振幅をごく限られた範囲にえらんだ場合のみ認められる。すなわち図 5.1 のリレー制御系において発生する自由振動の場合の角周波数は  $\omega_0 = 0.172$  であるから、図 4.11 の点 4 の  $\omega = 3.5$  は自由振動の角周波数の約 2 倍に等しい周波数である。そして発生する概周期振動の  $x$  の波形の最寄の山と山との間の時間は概略入力の 2 周期に等しく、このような山の 6 個分が概周期振動のみかけの 1 周期に相当している。

このような概周期振動と基本調波振動の共存するのは、図 5.1 のようなリレー制御系において自由振動の周波数の 2 倍に近い周波数の振幅の比較的小さい（ただし  $A > A_{pl}$ ）正弦波入力を加えた場合に限定されていることがアナログ計算機の実験から結論される。

## § 5.6 入力の位相角を種々の値に選んだ場合

さてこれまで図 4.11 の点 1~4 に入力パラメータをえらんだ 4 つの場合の初期条件と発生する周期振動の関係を考察したのであるが、これらはいずれも入力位相が  $\varphi_0 = 0$  である場合に関するものであった。

同様な方法により  $\varphi_0 \neq 0$  の場合の初期条件と発生する周期振動の関係についても考察することができる。また  $\varphi_0 = 0$  の場合について異なる周期振動を発生する初期条件の領域が求められている場合、 $\varphi_0 \neq 0$  の場合の同様の領域を求めるには、 $\varphi_0 = 0$  の場合の初期条件の領域が入力位相角の大きさに相当する時間  $t = \varphi_0 / \omega$  だけ経過した後において、いかなる領域に変換されるかを見ればよい。ここでは図 4.11 の点 3 の場合、すなわち基本調波振動ならびに  $1/3$  調波振動のいずれも安定

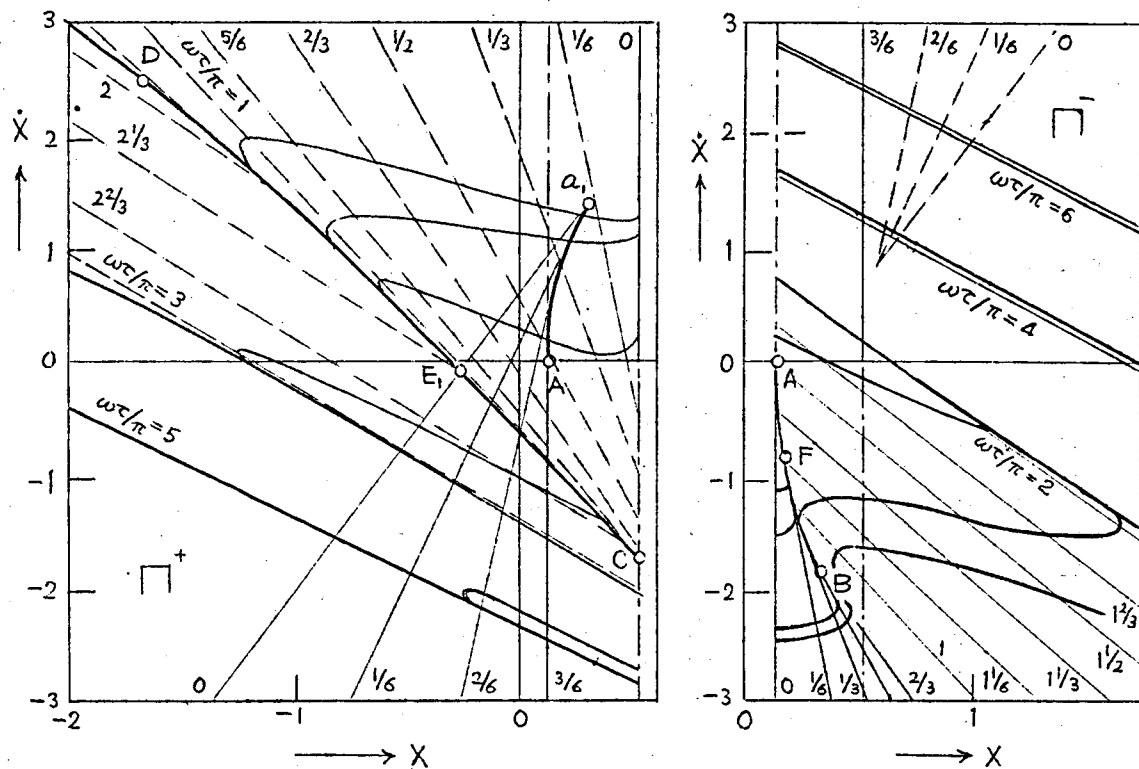


图 5.19 过渡应答之位相面解析 ( $A=0.32, \omega=5, \phi_0=\pi/2$ )

な解の存在する場合の異なる周期振動を発生する初期条件の領域が入力の位相角の相異によりどのように変化するかについて考察する。

図 5.19 の負の傾斜の直線は入力のパラメータを図 4.11 の点 3 にとり、入力の位相角を  $\varphi_0 = \pi/2$  にとった場合の  $L_0^-(\tau)$  直線(実線)、および  $L_0^+(\tau)$  直線(破線)であり、この場合  $L_0^-(\tau)$  直線の存在する負撓平面は  $x \geq A \sin \varphi_0 - b = 0.12$  で与えられ、同じく  $L_0^+(\tau)$  直線の存在する正撓平面は  $x \leq A \sin \varphi_0 + b = 0.52$  となる。また、曲線 AB および CD はそれぞれの曲線の右側に存在する  $L_0^-(\tau)$  および  $L_0^+(\tau)$  直線の包絡線である。

さて図 5.8 は  $\varphi_0 = 0$  の場合、図 5.19 は  $\varphi_0 = \pi/2$  の場合についてそれぞれ描かれた図であり、図 5.8 の  $L_0^\pm(\tau)$  ( $\tau > \pi/2\omega$ ) 上に初期値を有する解は  $0 \leq t \leq \pi/2\omega$  なる時間  $t$  においてリレーの切換えが行なわれることなく、 $t = \pi/2\omega$  においては図 5.19 の  $L_0^\pm(\tau - \pi/2\omega)$  直線上に変換される。そして  $t = \pi/2\omega$  における  $L_0^\pm(\tau - \pi/2\omega)$  直線上の解の縦座標の値は、(3.5) 式において  $t = \pi/2\omega$  とおくことにより容易に見出すことができる。したがって  $\tau \geq \pi/2\omega$  であるような初期条件の領域については、このような操作により図 5.10 の初期条件の領域を図 5.19 の上に写しかえることができる。

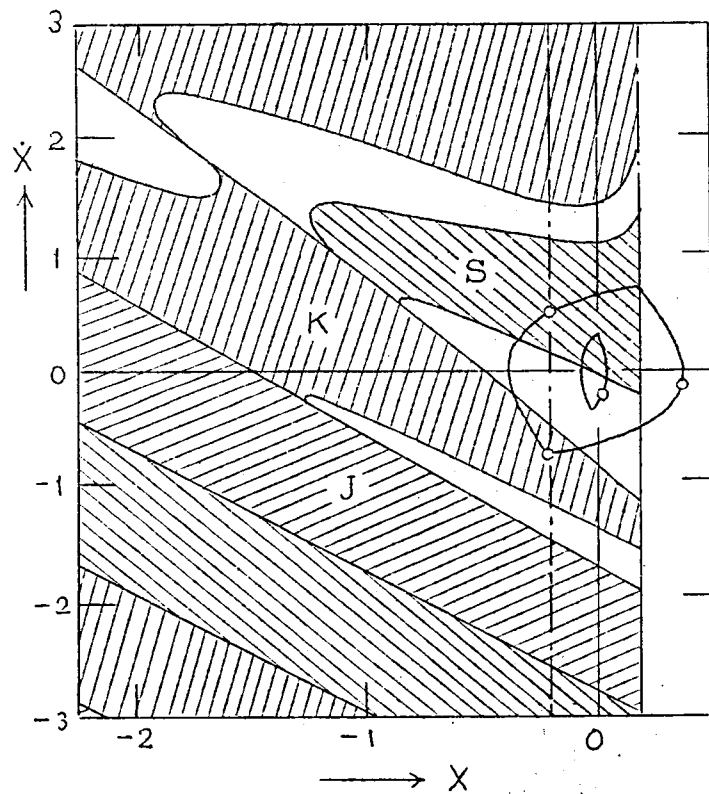
また図 5.19 の正の傾斜の直線は  $\varphi_0 = 0$ ,  $L = \pi/2\omega$  にとった場合の  $L_1^\pm(\tau)$  直線であり、図 5.8 において  $0 < \tau < \pi/2\omega$  の範囲の  $L_0^\pm(\tau)$  直線上の点は、 $t = \pi/2\omega$  においてこれらの正の傾斜の直線上に変換される。この場合に  $t = \pi/2\omega$  における縦座標の値は(3.22) 式より求められる。

このような操作により図 5.10 の初期条件の領域の境界を図 5.19 に写しかえた結果が、同じく図 5.19 に示されている。また図 5.20 はこれらの境界曲線でかこまれた4つの領域を示したもので、図 5.10 の領域 J, K, S および白地の領域に初期値を有する解は  $t = \pi/2\omega$  において図 5.20 のそれぞれ領域 J, K, S および白地の領域内にある。このようにして  $\varphi_0 = 0$  の場合についての異なる周期振動を発生する初期条件

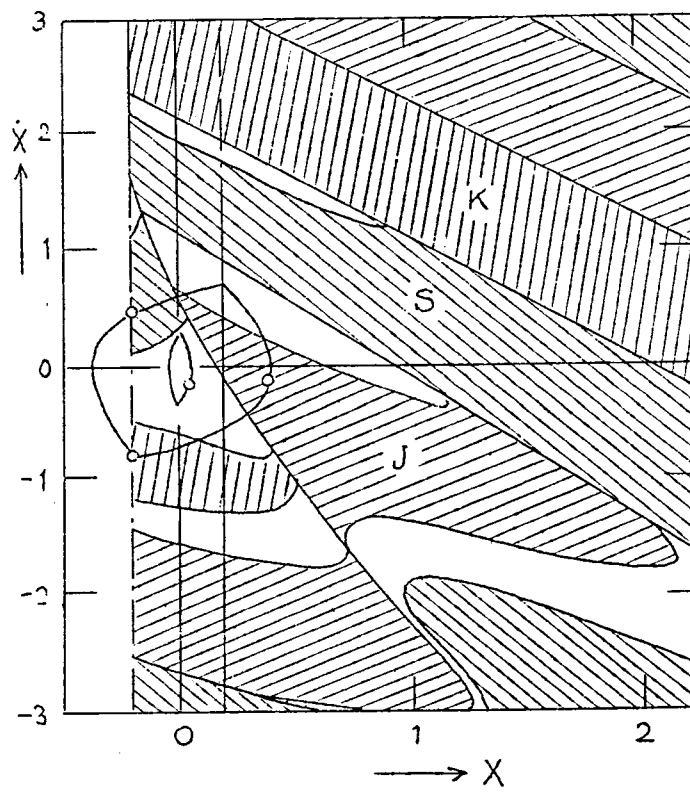


の領域から容易に  $\varphi_0 = \pi/2$  の場合の同様の初期条件の領域を求めることができる。

つきに入力位相角が  $\varphi_0 = \pi$  および  $\varphi_0 = (3/2)\pi$  の場合について考える。§ 3.4 で述べたように、図 5.1 のリレー制御系の方程式は入力の位相角が相互に  $\pi$  だけ相異なる 2 つの場合には、一方の方程式の変数  $x, z, \sigma$  の符号を反転することにより、全く同一な方程式に導くことができる。したがって入力の位相角が相互に  $\pi$  だけ相異なる場合の異なる周期振動を発生する初期条件の領域の境界曲線も、原点に関して対称な同一な曲線となる。すなわち  $\varphi_0 = \pi$  および  $(3/2)\pi$  の場合の初期条件の領域の境界曲線はそれぞれ図 5.10 および図 5.20 の境界曲線と原点に関して対称で図 5.21 および図 5.22 のようになる。そして図 5.10 の領域 J, K, S および白地の領域内の点に初期値を有する解は  $t = \pi/\omega$  および  $t = (3/2)(\pi/\omega)$  においてはそれぞれ図 5.21 および図 5.22 の同じ模様で表わされた領域にある。そしてそれらの解は  $t = 2\pi/\omega$  すなわち入力の一周期後には図 5.23 のそれぞれの領域に交換される。図 5.23 の境界曲線は図 5.10 のそれと全く同一であるが、図 5.10 において領域 J であった部分には  $t = 2\pi/\omega$  において領域 S より出発した解があり、同じく領域 K, S であった部分にはそれぞれ領域 J, K より出発した解がある。すなわち先には領域 J, K, S に関して(5.1)式の成立することを述べたが、図 5.10, 図 5.20, 図 5.21, 図 5.22 および図 5.23 を順次見較べることにより、(5.1)式の成立って行く時間的経過を見ることができる。



(a)  $\phi_0 = 1$



(b)  $\phi_0 = -1$

図 5.10 入力位相角が  $\phi_0 = 0$  の場合の初期条件の領域 (p113 の図と同じ)

( $A = 0.32$ ,  $\omega = 5$ ,  $b = 0.20$ )

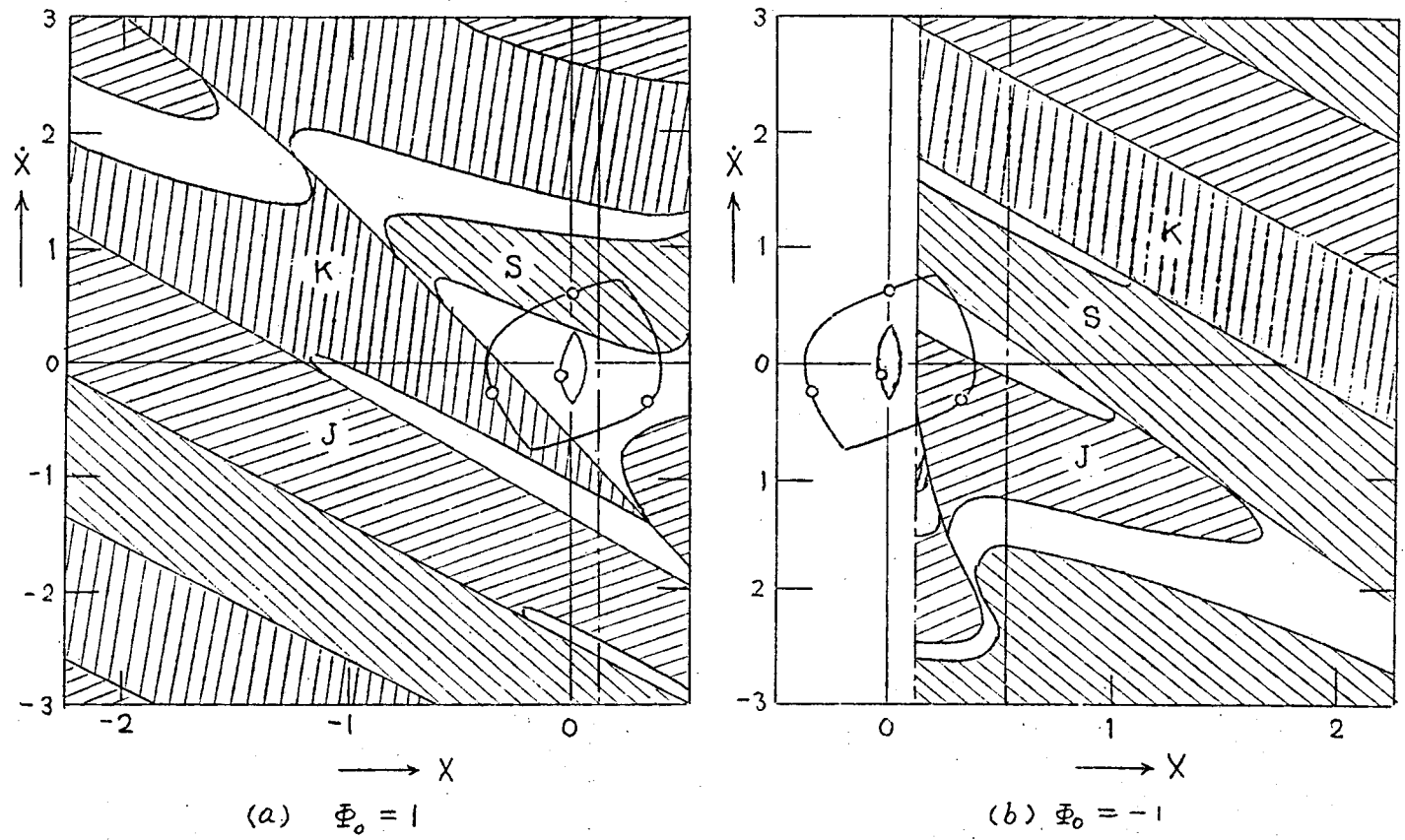
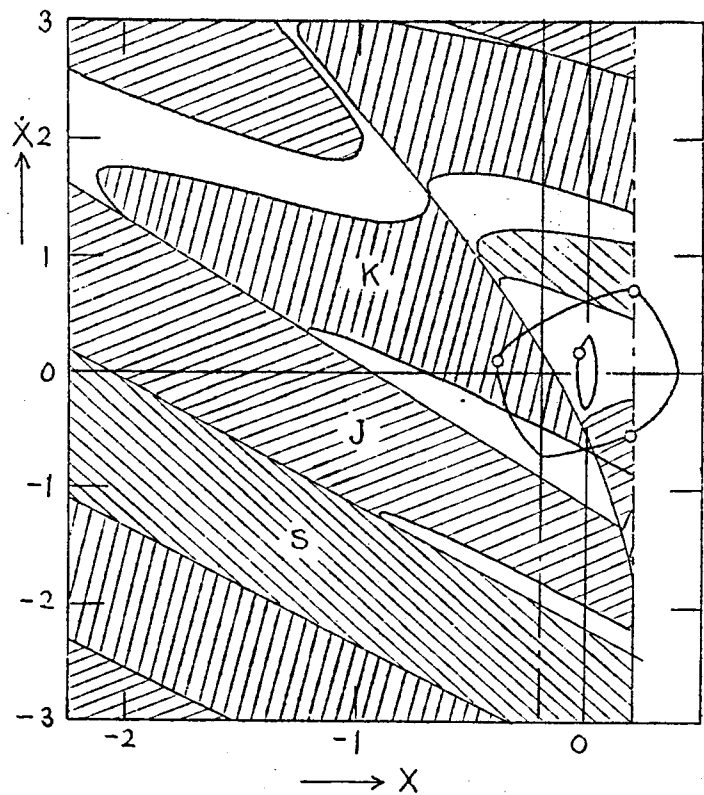
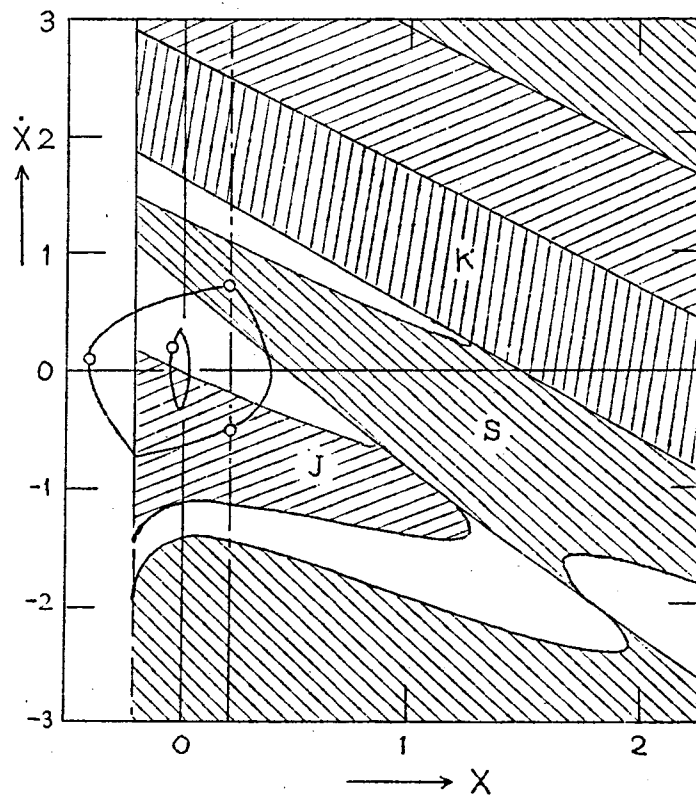


図 5.20 入力位相角が  $\phi_0 = \pi/2$  の場合の初期条件の領域  
 ( $A = 0.32, \omega = 5, b = 0.20$ )

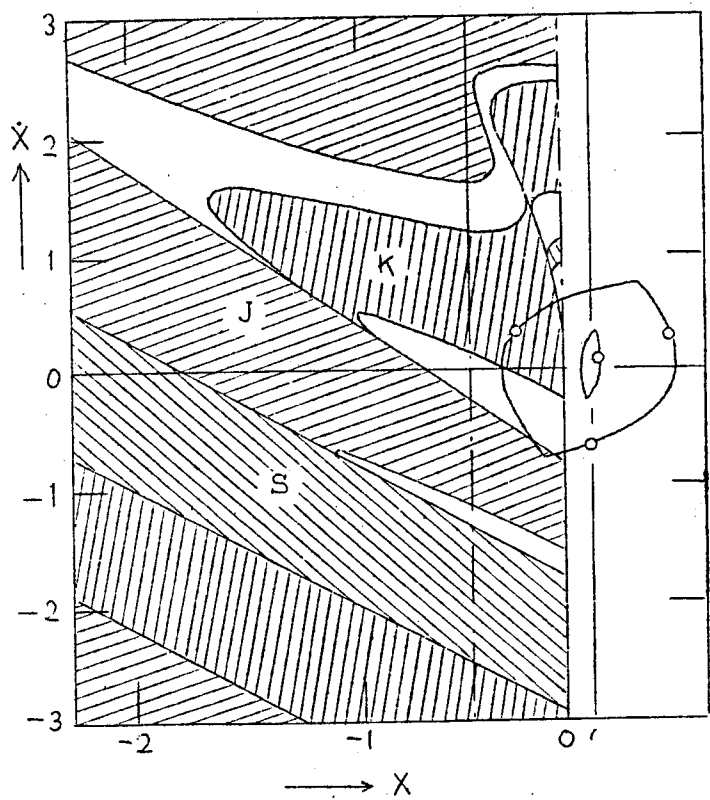


(a)  $\phi_0 = 1$

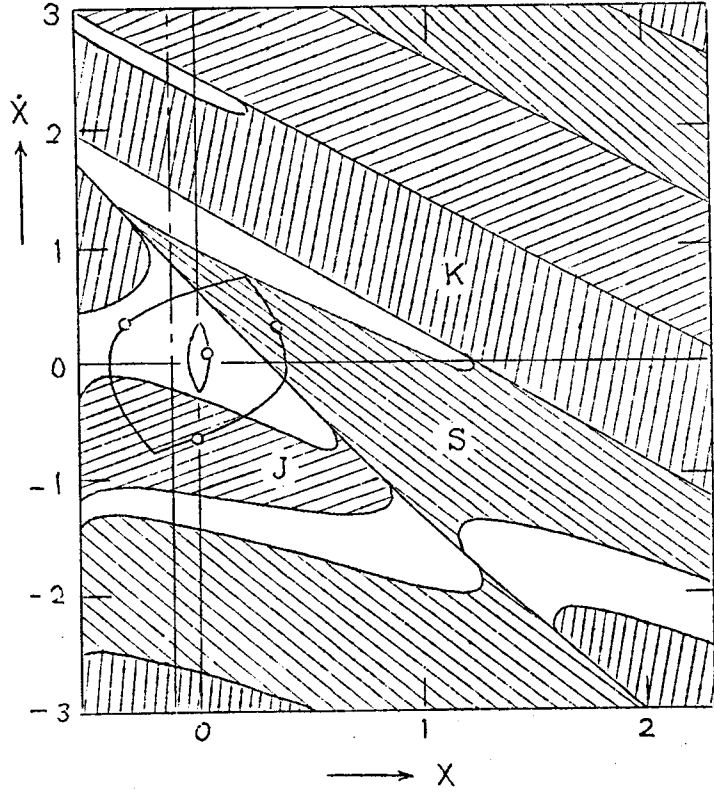


(b)  $\phi_0 = -1$

図 5. 21 入力位相角が  $\phi_0 = \pi$  の場合の初期条件の領域  
( $A=0.32$ ,  $\omega=5$ ,  $b=0.20$ )

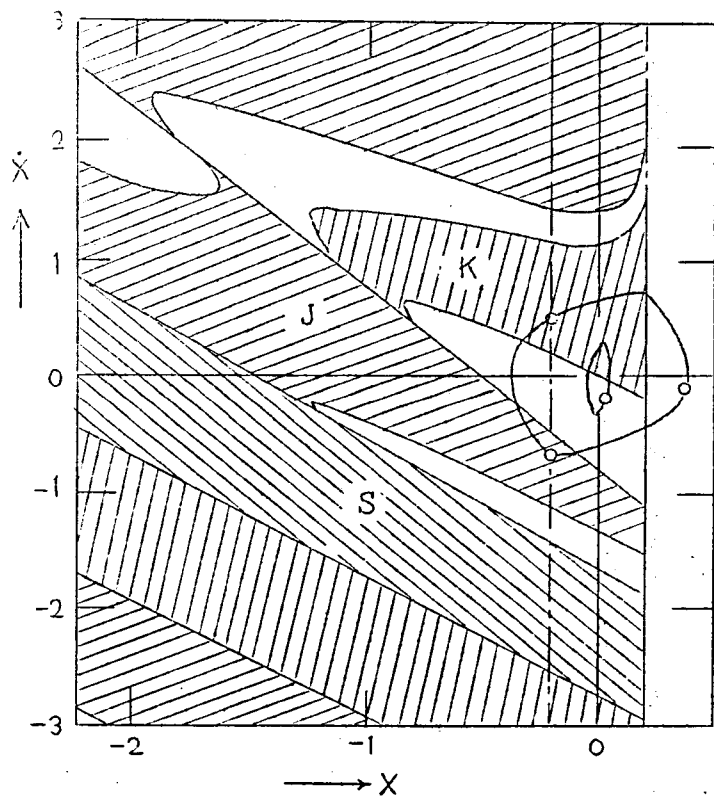


(a)  $\Phi_0 = 1$

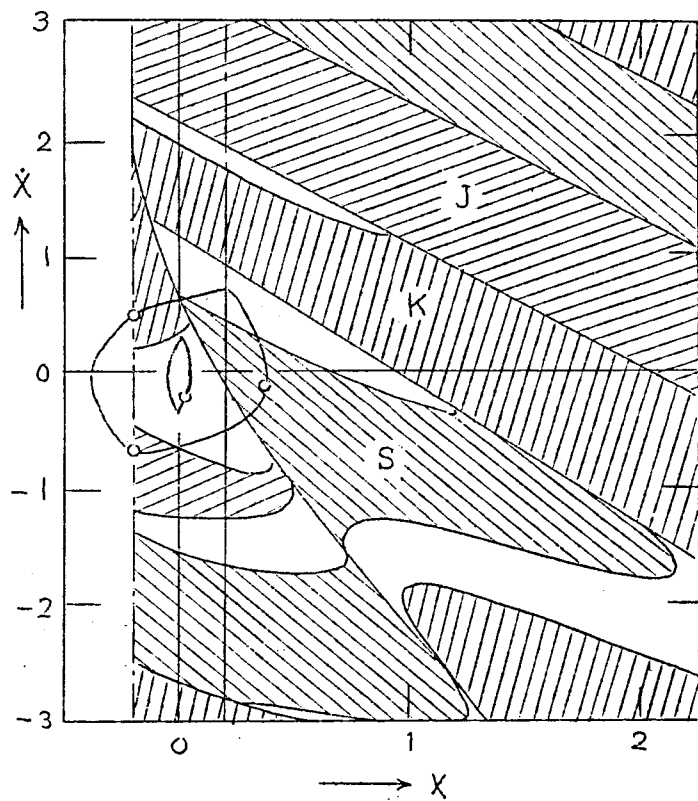


(b)  $\Phi_0 = -1$

図 5. 22 入力位相角が  $\Phi_0 = 3\pi/2$  の場合の初期条件の領域  
 ( $A = 0.32$ ,  $\omega = 5$ ,  $b = 0.20$ )



(a)  $\Phi_0 = 1$



(b)  $\Phi_0 = -1$

図 5.23 入力位相角が  $\Phi_0 = 2\pi$  の場合の初期条件の領域  
( $A=0.32$ ,  $\omega=5$ ,  $b=0.20$ )

## 参 考 文 献

- (1) Цыпкин Я.З.; Теория релейных систем автоматического регулирования. Гостехиздат. Москва, (1955).
- (2) 同上; pp. 239~242 (強制振動の存在条件)
- (3) 同上; pp. 245~251 (不安定周期解の存在限界)
- (4) 同上; pp. 92~120 (過渡応答)
- (5) 林・坂和; 非対称リレー要素を含む制御系に発生する振動について 日本自動制御協会研究例会資料 No. 90および93
- (6) Sakawa; Subharmonic Oscillations in Relay-Control systems. Automatic & Remote Control, pp. 404~409, Butterworths Ltd. (1961).
- (7) 坂和; リレー制御系の研究 学位論文 (1961・9京大)
- (8) 同上; pp. 74~75
- (9) 林・坂和・橋本; 非対称リレー要素を含むサーボ系における分数調波振動, 昭34.電気関西連大 No. 28
- (10) 林・坂和・安倍; リレー制御系における分数調波振動発生の初期条件. 昭36 電四連大 No. 247
- (11) 西村, 丸橋; リレーサーボの分数調波振動について 制御工学 vol. 3, No. 2, p 349 (昭34.11)
- (12) 山口, 西村, 丸橋; リレーサーボの分数調波振動のモードについて 昭35 電四連大 No. 255
- (13) 山口, 西村, 丸橋; リレーサーボにおける複雑な波形の分数調波振動について. 昭36 電四連大 No. 256
- (14) Yamaguchi, Nishimura, Maruhashi & Fujii; Subharmonic Oscillation of the Relay Servomechanism, Automatic & Remote Control, pp. 398~403, Butterworths Ltd. (1961).

- (15) 山口, 西村, 丸橋 : 非対称リレーサーボの分数調波振動について 昭 34 電関連大 No, 29
- (16) 丸橋 ; リレー制御系の振動に関する研究、学位論文 (1961. 9 阪大)
- (17) 榎木, 明石 ; リレー制御系に生ずる分数調波振動の発生条件 制御工学 Vol. 4, No. 2, pp 101~108 (1960)
- (18) Akashi; Fundamental Research on Problems of Relay Control Systems, Dr. Thesis, Kyoto Univ., May, 1960.
- (19) Sawaragi & Akashi ; Oscillating Response of Relay Control Systems, Proc. 9th JNCAM, March, 1960.
- (20) 林, 坂和, 田村 ; リレー要素を含む 0 型の制御系における偶数次分数調波振動, 昭 34 電気関西連大 No. 27
- (21) 林, 坂和, 田村 ; 直流分巻電動機を用いたリレーサーボの実験 昭 35, 電四連大 No. 285
- (22) 田村 ; リレー制御系における振動状態の決定 制御工学 Vol. 6, No. 4. pp. 214 ~ 222 (1962)
- (23) 田村 ; リレー制御系における振動状態の決定 - 1 昭 36, 電四連関西大 No. 4-11
- (24) 田村・遠藤 ; 同上 - 2 第 4 回自動制御連合講演会 No. 126 (1961)
- (25) 田村 ; 同上 - 3 日本自動制御協会学術講演会 No. 4 (1962)
- (26) 田村 ; 同上 - 4 昭 37 電四連関西大 No. 4-25
- (27) 田村 ; 同上 - 5 第 5 回自動制御連合講演会 (1962) 昭 38 電四連大 No. 315
- (28) 田村 ; 同上 - 6 昭 38 電四連大 No. 315



- (29) 田村 ; 周期的入力を有する二次リレー制御系の過渡応答の解析法 計測制御学会第2回學術講演会(1963), 「計測と制御」(投稿中)
- (30) 田村 : 二次リレー制御系の分枝調波振動の初期値問題(投稿予定)
- (31) Gille, Paquet ; Subharmonic Oscillations in ON-OFF Control Systems, AIEE Trans. pt. II. A & I pp. 210~216 (1962).
- (32) 電気工学ハンドブック、第5版、p.18. [1.8.6] 電気学会
- (33) 古屋・雨雲 ; 非線形振動論、岩波現代応用数学講座
- (34) 林 : 低速度型電子管式アナログ計算機およびその応用 電気三学会関西支部専門講習会講演論文集 昭34.3
- (35) Hayashi : Forced Oscillations in non-linear Systems. pp. 81~124, Nippon Printing & Publishing Co. Japan (1953).
- (36) Hayashi S; Periodically Interrupted Electric Circuits, pp23~39, Denki-Shoin, Japan (1961)

## 謝 辞

本研究を行なうに際し、終始懇切な御指導、御鞭撻を賜わりました京都大学工学部林千博教授に心から感謝いたします。また本研究の遂行にあたり、京都大学工学部桑原直義教授には常に暖い激励と御援助をいただき感謝に耐えません。

本研究に際し、有益なる御討論をいただきました京都大学工学部西川達一助教授、坂和愛季助教授ならびに例題の計算に際しアナログ計算機使用の御便宜を御計りいただきました安陪稔講師に厚く御礼申し上げます。

さらに日頃多くの御援助をいただいた林千博研究室の諸兄をはじめ電気関係教室の各位に御礼申し上げます。

昭和 39 年 1 月 23 日

著 者