遊星軌道要素の研究

三　輪　一　郎

拜啓　(前略)その後研究を進めました結果，遊星の軌道要素に就いて包括的な研究が，一先づ完成しましたので，御送り致します．半長徑に關しましては，此の前のものと重複しますけれども，新しい式を用ひ，稍異つた結果が出ましたし，又，全體の釣り合ひ上，更に，補筆を加へました．尚，この前，プルトの對星に關する想像を書きましたが，間違ひですから，取消します．此小論を書きますに就いては，萬有科學大系第一卷の「天體と宇宙」を何時も參考にし，ラプラースの言葉その他を引用させていたゞきました．その他參照しましたものは下の樣です．

山本先生：「海王星外の新遊星の話」(昭和三年六月十日，サンデー毎日)

日下部四郎太，菊田善三兩氏共著：「天文學汎論」

青山信雄氏：「太陽系講話」

天文月報，昭和六年六月號，其他

I. 序　　說

太陽系は，現在，その中心に質量大なる太陽と，それを廻る九個の遊星，それに附屬する二十七個の衞星，及び，火星と木星との間の千餘個の小遊星，其他約六百に近い彗星と無數の流星團から成立つて居るものであります．然しながら，太陽系が，一見複雜極まる成員と構成を持つて居るにも拘はらず，太陽の質量が飛び拔けて大きい事，遊星間の距離が相當大きく，且つその軌道が圓形に近い事，その他，太陽系の近所に，攪亂を起す程の質量がない事，等の理由から，力學的には極めて安定の狀態にあります．これは，ラプラース以來幾多の人々に依つて證明が試みられ，尙ほ完全に解く事の出來ない至難の大問題であります．太陽系の力學的平衡に就いて，ラプラースは次の樣に云つて居ります．「總て，觀察や，計算の結果でなければ，本統の信賴は出來ないものと知りつゝ，自分が茲に提唱する太陽系生成論は，將來如何になり行くとも，兎に角，外界からの妨害がこれを亂すことさへなければ，此の宇宙の部分々々は，非常に安定を維持する樣に出來てゐることだけは確かである．」

この樣に，太陽系が安定して居ることは，取りも直さず，遊星相互が，整然たる調和を保つて居ると云ふことでありまして，その軌道要素間に，何等

かの法則の存在を豫想することは，當然の話と云はねばなりません．現に，遊星の距離に關しましては，ボーデの法則が有名であります．然し，この様な法則性は單に距離のみにあるものでせうか？例へば，離心率にしても，軌道面傾斜しても，その値は小さいものですけれど，其處に，何かの調和がなければなりません．この様な考への下に，私は遊星の軌道要素に就いてその相互關係を研究して見ました．その結果は，豫想通りでありました．以下述べますものは，私の誘導し得ましたものを列記して，計算値と，實際の値を比較し，更に進んで，未知遊星の軌道要素を計算し，卑見を加へて纒めたものであります．

II.　遊星の距離(半長徑)

1.　ボーデの法則及その類似法則．

遊星の分布が簡單な法則の下にあると云ふことは，既にケプレルに依つて氣付かれて居たものでありますが，1772年チチウスに依つて確認されました．チチウスは又ヲルフと云ふ人から教へられたと傳へられて居ります．これが有名な「ボーデの法則」であります．その後，ベロー，アルメリー等が類似法則を誘導し，最近，カズエル，ペンニストン兩氏が，更に新しい法則を案出しました．これ等の諸法則を列記して見ますと，下の様であります．

ボーデ	$x_n=0.4+0.3\times 2^n$	nは水星から順に	$-\infty$, 0, 1, 2, 3, …………
ベロー	$x_n=0.28+\dfrac{1.883^n}{214.45}$	〃	5, 7, 8, 9, 10, …………
アルメリー	$x_n=1.53^n$	〃	−2, −1, 0, 1, 2, …………
カズウエル	$x_n=0.0425n^2$	〃	3, 4, 5, 6, 8, …………
ペンニストン	$x_n=0.05n(n+1)$	〃	2, 3, 4, 5, 7, 9, ………

この様に非常に簡單な法則に依つて表はされますけれども，その理由に就いては，全く知られて居りません．或人は單なる一致であるとし，或人は確かに理論的根據のあるものだと云ひます．ボーデの法則は，曾つてはセレスの發見を速め，海王星の存在を豫想せしめました．然し，海王星が發見されて見ますと，ボーデの法則とは可成りの違ひがあることから，この法則は甚だしくその價値を減じたものであります．ボーデの法則の生れたときは，まだ海王星が發見されて居ませんでしたので，天王星まではよく合つて居るのであります．最近冥王星(プルートー)が發見されて，其れが寧ろ此れを指示

して居た様にも思はれます．これと同様なことが他の法則にも云へるのでありまして，例へば，アルメリニの法則は海王星までは合ひますけれども，冥王星になると，既に合ひません．ガスウエル，ペンニストンの法則は冥王星もよく合ひますけれども，nを非常に多く入れなければならず，寧ろ，偶然の一致としか見えません．

2.　新しい法則

前項で述べました様に，此等の法則が，距離の増加に連れて，混亂して來るのは，何を意味するものでせうか？試みに，冥王星までの距離を，グラフとして見ますと，海王星邊りから，距離の增加率が，減少して來てゐるのを，看ることができます．私は，叙上の諸法則が，二次曲線類似の曲線であるのに對しまして，これは確かに，他の曲線でなければならない――遊星の距離は，大體簡單な法則に依つて支配されて居るものゝ事實は，然らずと考へまして，法則の形の複雜さは嫌はず，自由に距離を表示する様なものを得やうとしました．そこで，先づ，各遊星の軌道速度を研究して見ました所が，それは，次の様に，表はすことが出來ることが解りました．

$$v = e^{n\left\{\Phi(n) - \sum_{n=1}^{n} \frac{A}{\Psi(n)!}\right\}} \qquad (1)$$

vは軌道速度，eは自然對數の底，$\Phi(n)$ や $\Psi(n)$は，夫々，nの函數，Aは常數，nは水星から順に1より初まる連續整數であります．從つて，

$$v = \mu\sqrt{\frac{1}{a}}, \quad \mu = K\sqrt{M+m} \qquad (2)$$

から，距離aは次の様になります．

$$a_n = \mu^2 e^{-2n\left\{\Phi(n) - A\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\Psi(n)!}\right\}} \qquad (3)$$

この式は，單に遊星系のみならず，衛星系にも適用され，(その場合，$\Psi(n)$は，全系共通なものとすることが出來ます）又，次節で述べます様に，遊星の近日點の分布にも用ひる事が出來ます．尚，$\Phi(n) - A\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\Psi(n)!}$は略双曲線であります．かくて遊星系に就いて，(3)の諸系數を決定しますと，

$$a_n = 887.44 e^{-n\left\{31.3750 - 0.07071\sqrt{1-\cos 39^\circ \times (n-3.3)} - \sum_{n=1}^{n} \frac{190}{\Psi(n)!}\right\}}$$

$$\Psi(n) = 5.87117 - 1.37387n + \sqrt{1.88753(n-3.4)^2 - 1.96203} \qquad (4)$$

この式で計算しましたものは第一表の最初の行にあります.

III. 近日點距離 (q), 離心率 (e), 及び, 軌道面傾斜 (i)

1. 近日點距離と, 離心率

離心率に關して, 獨立な法則は不幸見出し得ません. aと關聯して, 直線關係を得ますけれども, 滿足なものでありません. 然し, 近日點距離が(3)に依つて表示されますために, それに依つて, 離心率は見出されます. 近日點距離算出の式は次の樣であります.

$$q_n = 897.3e^{-n\left\{29.3250-0.15910\sqrt{1-\cos 37^\circ\times(n-3.3)}-\sum_{n=1}^{n}\frac{134}{\Psi(n)!}\right\}}$$

$$\Psi(n)=4.3937-0.8234n+\sqrt{0.7071n^2-5.6567n+12.4932} \qquad (5)$$

(4)の887.44と, (5)の897.3は, 同じものですけれど, 計算の都合で稍異るものとなりました. 別に意味はありません. 離心率は,

$$e=1-\frac{q}{a} \qquad (6)$$

計算したeは表の樣でありますが, 餘りよい値ではありません. 然し, aの大きくなる程, qが小さくなりますので, 後節で述べる未知遊星の研究には差支へないと思はれます.

2. 軌道面傾斜

eとiとの間には元來下の樣な關係がある樣に見えます.

$$\log(1+i)=A+B\varphi-Ce^{-D\varphi}\sin(E+\varphi\Phi) \qquad (7)$$

但し, φは離心角, A, B, C, D, Eは常數, Φはφの函數, eは自然對數の底であります. 然し與へられた値10個では少いためと, 式が複雜なために, 係數の決定が困難であります. 從つて, 他の關係を求めるために, aとの關係を研究して見ますと, $L.\sin(1+i)+\frac{1}{L.\sin(1+i)}$とaとは, 第一圖の樣に, 二つの双曲線を作ります. 但し, 地球は考慮に入れません. (I)は5個, (II)は4個の値があり, (II)は, 漸近線が, 軸に平行であるとの假定で, 辛うじて方程式を解く事が出來ます. その結果は $I=L.\sin(1+i)+\frac{1}{L.\sin(1+i)}$ としますと.

$$(\mathrm{I})\quad I=0.14768\log a-2.58264\pm\sqrt{0.04873(\log a)^2-0.24093\log a+0.27821} \qquad (8)$$

$$(\mathrm{II})\quad I=-0.00680\log a-2.05640\pm\sqrt{0.00005(\log a)^2-0.00118\log a+0.00172} \qquad (9)$$

與へられた値がよく揃つて居るために，最小自乘法を用ひずに，消去法で解いたものであります．これに依りますと，既知の i は，正確に計算されますけれど，n=11以上は解がなくなつて來ます．從つて，n=11 以上の i を求めるためには，第一圖の様な双曲線を假定しなければなりません．これに依りますと，

(Ⅰ) $I=-(0.32014+1.25514\log a)-\sqrt{1.38570(\log a)^2-4.07558\log a+3.00394}$ (10)

(Ⅱ) $I=-(0.98286+0.43876\log a)-\sqrt{0.19497(\log a)^2-0.87152\log a+1.05743}$ (11)

$$\text{L. }\sin(1+i)=\frac{I\pm\sqrt{I^2-4}}{2} \qquad (12)$$

Iは，次の様に，交互に (I) (II) の兩式に依つて計算されます．

(Ⅰ) (1)＼　　／(4)＼　　／(6)＼　　／(8)＼　　／(10)＼　　／12＼
(Ⅱ) 　　(2)　　　　(5)　　　　(7)　　　　(9)　　　　11　　　　13

數字は，n で，第一表參照．(12) 式に於いては，根號の前の符號の關係は全く不規則であります．解は二つ出て來ます．第一表の値は，(10) (11) に依る値であります．

IV. 昇交點黃經(Ω)，近日點黃經($\bar{\omega}$)，及び質量(m)

1. 昇交點黃經

$\log\frac{1-\sin i}{a}$ と，$\log\Omega$ との間には，第二圖の様な關係があります．これは，$\log(1-\sin i)$との間にも認められますけれども，前者に於いて，より明確であります．これから，次の様な關係式を得ます．

(Ⅰ) $\log\Omega=2.0000\pm0.077\tan^{1/2}\left\{-180^\circ\times\left(0.3182+0.4545\log\frac{1-\sin i}{a}\right)\right\}$ (13)

(Ⅱ) $\log\Omega=1.8150\pm0.077\tan^{1/2}\left\{-180^\circ\times\left(0.4583+0.4545\log\frac{1-\sin i}{a}\right)\right\}$ (14)

$\tan^{1/2}\theta$ は θ の絶對値の開平であり，その符號は θ の符號に依つて決めます．各遊星の (I) (II) への所屬は次の様であります．

(Ⅰ) (1)—(2)＼　　／(5)—(6)—(7)＼　　／(9)—(10)
(Ⅱ) 　　　　　(4)　　　　　　　　　(8)

(Ⅰ)に於いては　$\log\frac{1-\sin i}{a}=(0.4+2.2n)$ 或は$(\bar{2}.2-2.2n)$

(Ⅱ)に於いては　$\log\frac{1-\sin i}{a}=(0.0917+2.2n)$ 或は$(\bar{3}.8917-2.2n)$（但nは正の整數）

のとき，$\log\Omega$ は∞又は−∞となつて，不定であります．

2.　近日點黄經

$\log\pi$ と $\log\sqrt{e\sin(1+i)}+\dfrac{1}{\log\sqrt{e\sin(1+i)}}$ との間には，第三圖の様な關係があります．これから，

$$(\text{Ⅰ})\quad \log\bar{\omega}=2.6800-0.018\tan\left[180^\circ\times\left\{5.7697+2.6316\left(\log\sqrt{e\sin(1+i)}+\frac{1}{\log\sqrt{e\sin(1+i)}}\right)\right\}\right] \tag{15}$$

$$(\text{Ⅱ})\quad \log\bar{\omega}=2.5840-0.018\tan\left[180^\circ\times\left\{5.7171+2.6316\left(\log\sqrt{e\sin(1+i)}+\frac{1}{\log\sqrt{e\sin(1+i)}}\right)\right\}\right] \tag{16}$$

(Ⅰ)に於いては　$\log\sqrt{e\sin(1+i)}+\dfrac{1}{\log\sqrt{e\sin(1+i)}}=(\bar{3}.9975+0.38n)$ 或は $(\bar{3}.6175-0.38n)$

(Ⅰ)に於いては　〃　+　〃　$=(\bar{2}.0175+0.38n)$ 或は $(\bar{3}.6375-0.38n)$

(但 n は正の整數)

の限界があります．此等の値のとき $\log\pi$ は∞又は−∞となつて，不定であります．

3.　質　　量

これは軌道要素ではありませんけれども，それと緊密な關係にあるものとして，e, i から，計算出來るものであります．即ち，$\log\dfrac{1}{\sqrt{e\sin(1+i)}}$ と $\log m$ は抛物線的關係にあります．(但し，地球＝1 とした値) これは，e 及 i の各々との間にも，不明瞭ながら認められるものであります．(第四圖)

$$(\text{Ⅰ})\quad \log m=2.1817+0.5209\log\{e\sin(1+i)\}\pm\sqrt{12.3654+3.4605\log\{e\sin(1+i)\}} \tag{17}$$

$$(\text{Ⅱ})\quad \log m=1.8028+0.5209\log\{e\sin(1+i)\}\pm\sqrt{7.9486+2.4161\log\{e\sin(1+i)\}} \tag{18}$$

(Ⅰ)　(1)　　(3)　　　⑥　　　⑨
(Ⅱ)　　(2)　　(4)—(5)　　⑦—⑧　　(10)

(　) を附したものは，根號の前の符號が負，○の中のものは，正なることを示します．計算した値は，第一表の様であります．(4) 及 (10) は適當にその所屬を決定しました．プルートーは火星より稍小さい位のもので，一般に豫想された所と一致するものであります．小遊星も，同大であります．これは，小遊星全部の質量の和と考へることが出來るだらうと思ひます．この兩

式から，遊星の質量の限界を求めることが出來ます．即ち，質量の極大は地球の約50萬倍，木星を單位にとれば，約1600倍．極小は地球の約22分の1，水星と略同大であります． 一般に，遊星のみならず，彗星に於いても，e, i の増加するに從つて，即ち，$\log\frac{1}{\sqrt{e \sin(1+i)}}$の減少するに從つて（その極値は0）質量は減少する（此處に得た關係では兩意があり．質量増大も考へられます）傾向があるために，第四圖のグラフは，下邊に於いて，幾分變更されなければならないかも知れません．尚，(I)(II) とも，グラフでも解ります樣に，$\log\frac{1}{\sqrt{e \sin(1+i)}}$ に上限があつて，(I) に依つて計算しますと，$\log m=0.3370$ で極大，そのときの $\log\frac{1}{\sqrt{e \sin(1+i)}}$は，1.7886であります．

(10) 以下の諸式に就いて，詳細な吟味は長くなるので止めます．尚，以上書きました關係以外に，二三の關係を見出しましたけれども，正確に要素を算出出來ない性質のものでありますから，述べないことにします．

V. 未知遊星に就いて

ボーデその他の類似法則では，未知の部分に就いては，全然信が置けません．然し，(4)乃至(18)の式を用ひますときには，半長徑は勿論の事，その他の軌道要素及質量をも計算することが出來ます．尤も，半長徑は，計算法を少し變更すると，稍異つた値が出ますし，又，冥王星以上の新遊星はないと云ふ結果も出ますから，安心は出來ません．然し，こゝに計算したものは前世紀末葉以來，未知遊星として，力學的に計算されたものと，よく一致します．表では此等の値が對比してあります．尚，水星よりも太陽に近い所に新遊星があるかも知れないと云はれて居ますけれども，(4)に依りますと，nを，0 又は −1 と置くべきでせうけれど，(3)の e の指數の形からは，水星以內には存在しないらしいことが云へます．

離心率の正確さがまだ不足であります．軌道面傾斜も，(8)(9) の式に依りますと，解がありませんので，半長徑の方の解がない場合もある事を考へますと，未知遊星の存在に就いては，未だ保留があることになります．

(10) 以下總て兩意の解があり，未知遊星がその何れに屬するかは，略推定し得られるものもあります．例へば，傾斜は，

(I)　(1)　　(4)　　(16)　　(8)　　(10)　　(12)　　(14)
(II)　　(2)　　(5)　　(7)　　(9)　　(11)　　(13)　　(15)

の様になります．計算も，これに從つたものでありますけれども，他のものに就いては，何か法則性があるだらうと云ふ事は解りますが，尙，容易に決定が出來ません．第二表にはそれ等總ての場合を計算したものが示してあります．但し，質量は，殆ど總て，火星又は水星の質量と同大になりますので，表には省略しました．

參考のために，$\log\dfrac{1}{\sqrt{e\sin(1+i)}}$ の値を擧げますと，下の様になります．

n=11	0.54790	0.84644
12	0.32168	1.15613
13	0.38500	0.72394
14	0.27136	1.69537
15	0.32373	0.91334

初めの行のものは，iを，(12)式で，根號の前の符號を+として計算したもの，後の行の値は －として計算したものであります．これ等から，各々，四

第一表　遊　星

n	遊　星	半長徑 (a) 實測値(O)	半長徑 (a) 計算値(C)	近日點距離 (q) O	近日點距離 (q) C	離心率 (e) O	離心率 (e) C
		A.U.		A.U.			
1	水　星	0.39	0.37	0.31	0.31	0.206	0.16
2	金　星	0.72	0.74	0.72	0.74	0.009	0.00
3	地　球	1.00	1.00	0.98	0.99	0.017	0.01
4	火　星	1.52	1.52	1.38	1.37	0.093	0.10
5	小遊星 (平均)	2.78	2.77	2.42	2.48	0.13	0.09
6	木　星	5.20	5.39	4.95	4.99	0.048	0.07
7	土　星	9.54	10.39	9.10	7.19	0.056	(0.31)
8	天王星	19.19	18.62	18.29	18.44	0.047	0.01
9	海王星	30.07	29.45	29.81	27.31	0.009	0.07
10	冥王星	39.46	39.70	29.65	30.43	0.249	0.23

つづゝの解が出る譯ですが，木星より大きい質量は考へられませんので，總て，(17)(18)に於いて，負の符號を採るのが至當でありませう．此結果，未知遊星の質量の總和は，大きくても，地球の數倍を出ない程度だらうと云ふことが云へます．

× × ×

以上は，現在知られて居る遊星の軌道要素を研究して，その間の諸關係を求め，それから，未知遊星の存在を推定したものであります．此等の諸關係は，力學的に，どう説明されるものでありませうか，又，説明され得るものでせうか？ 由來，三體問題は，現代の數學を以つてしては解けない事が，ポアンカレーに依つて證明されて居るそうであります．一介の素人としての私には，それ等は想像も附かないことであります．

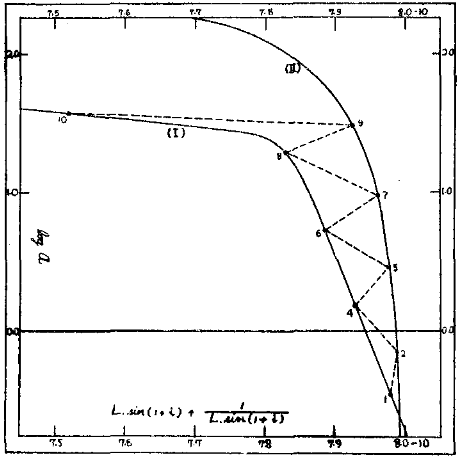
此の研究は，まだ不完全ではありますけれども，一應は完成したと思ひますので，御高評を仰ぎ度く，御送り申上げる次第で御座います． 敬具

昭和七年八月廿四日，朝． 山口市田町九 三 輪 一 郎

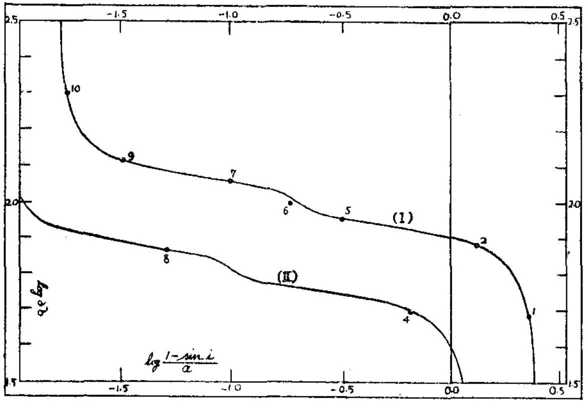
軌 道 要 素 表

軌道面傾斜 (i)		昇交點黄經 (Ω)		近日點黄經 (ω)		質 量 (m)	
O	C	O	C	O	C	O	C
7° 0′	6° 50′	47.°69	49.°4	76.°35	87.°	0.06	0.05
3 23	3 33	76.04	76.4	130.57	129.	0.81	0.92
0 0	0 0	—	—	101.72	94.	1.00	0.94
1 51	1 54	49.01	50.0	334.75	342.	0.11	0.12
7°	6 43	90.00	90.9	10.0	354.	—	0.09
1 19	1 19	99.73	103.5	13.16	12.	318.3	313.5
2 30	2 30	113.04	112.5	91.66	67.	95.2	84.2
0 46	0 48	73.64	73.3	109.51	106.	14.6	23.7
1 47	1 49	131.00	129.5	44.01	44.	17.3	17.1
17 9	17 21	199.36	191.2	223.27	214.	—	0.09

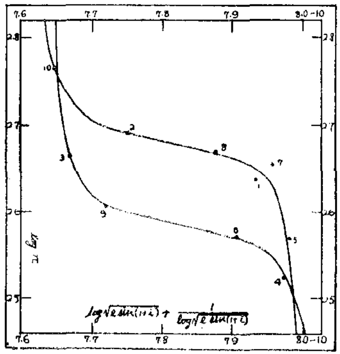
質量は地球 =1 とす．



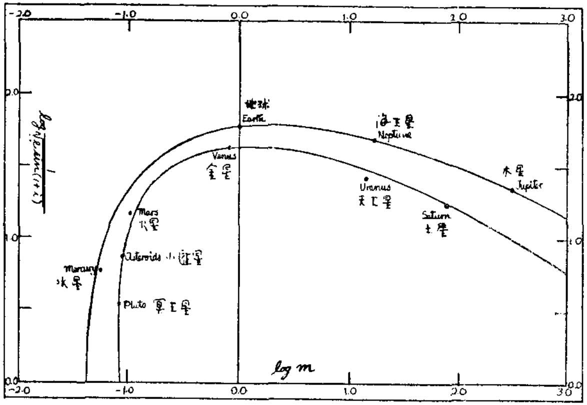
第一圖



第二圖



第三圖



第四圖

第二表 未知遊星の軌道要素表

n	半長徑	近日點距離	離心率	傾斜	用ひた式	昇交點黄經	近日點黄經	力學的に計算された半長徑
11	A.U. 44.67	A.U. 24.38	0.45	9° 16′	(I)	172.°4	112.°1	44A.U. ガヨー
					(II)	125.6	238.6	44 ローウエル
				1 35	(I)	105.0	97.2	46.5 ラウ
					(II)	124.8	11.5	47 フラムマリオン
12	43.34	14.15	0.67	18 50	(I)	14.5	139.9	
					(II)	129.9	47.9	
				−35	(I)	143.2	6.4	
					(II)	121.8	338.5	
13	55.38	6.16	0.89	10 0	(I)	39.8	123.6	52 ピケリング
					(II)	131.2	30.8	54 デビド・トド
				1 20	(I)	198.7	101.5	66 ガヨー
					(II)	126.9	13.9	71.8 ラウ
14	109.4	15.31	0.86	28 28	(I)	83.1	78.9	
					(II)	72.8	2.6	100 } フオブス
				−58	(I)	73.9	107.3	105 } フオブス
					(II)	166.0	137.1	
15	237.8	38.57	0.84	14 33	(I)	91.4	103.3	
					(II)	67.6	41.4	
				1	(I)	84.3	201.9	
					(II)	68.0	318.9	

三論氏の論文について

所謂ボーデの法則といふのは，Johann Kepler の Mysterium Cosmographicum (1596) に端を發し，Christian Wolf を經て，Johann Daniel Titius の Contemplation de la nature (1766) の中に形が出來上り，Johann Elert Bode が第十八世紀末に之れをやかましく論じて，遂に天王星や小遊星や海王星の發見を導くに至つたものであるが，海王星の半長經が此の法則に少くし合はないことが知れて以來，學界からは多少信用を失つた．しかし，西洋でもアマチュアの中にはやはり此の法則に興味を持ち，いろいろと多方面に研究を進めて居る人が多くある．一種の數學遊戯とも言ひ得る．しかし，事實はあくまでも事實で，各遊星の平均距離が一定の數列と併行することが，決して偶然でないとして見れば，何時かは此の謎の意味が解ける日が來る筈であるし，尙ほ，三輪氏が，單に距離だけでなしに，殆んで總ての軌道要素にわたつて，(質量までも)，一定の數式を發見されたことは大なる功績である．專問家と言ふものは，知らず知らずの內に，とかく長い傳統の殼に閉ぢこもつて，自由な見地を見出しにくいものであるから，一般のアマチュアの中から天才的な自由人が現はれて，專門家の見忘れてゐる所を注意し，鞭達されんことが望ましい．百餘年の昔，ロンドン市の郊外に軒をならべながら，グリニチ天文臺は傳統を守りつゞけ，ハーシエルは新天文學を開拓し進んだことなど，全くアマチュアのために氣を吐くものである．——近いうちに．西洋諸國に於いて，遊星の諸要素の間に數列關係を研究した人々の文献總覽といつたやうなものを誌上に載せるつもりである．見やうによつては，わが太陽系の生成論上，最も重要な問題であるが，其れが殆んど處女地のまゝ，天日に曝されてゐる有樣である．もつと研究が進められたい．(編輯)