天界

第197號（第17卷）　（昭和12年）9月號

計算の仕方 (1)

渡邊敏夫

I まへがき

科學的研究に於て計算といふことは，次の樣な場合に必要になつて來る．

1. 觀測或は實驗によつて得たデ１タを整理して，其れ等の間に存在する法則を探索せんとする場合．
2. 1. とは反對に，法則が與へられて，その法則から當然に起る樣な現象を豫報するため．
3. 全く純然たる數學公式を決算する樣な場合．例へば表などを作る場合．

之等の場合について計算の實行を必要とするのであるが，然しその目的とか計算の過程に應じて，計算の方法といふものに種々ある．例へば圖式計算，數値計算，或は同じ數値計算でも對數表とかその他の特殊な表によつて計算するとか，算盤，計算器とかいふ計算器械によるといふ樣な工合である．

以下之から少し述べて見やうと思ふ事は，種々の計算方法のうち，對數といふものについて一通りの知識を持つた人々が，數値計算を如何樣にすればよろしいか，又そういふ計算をせんとする計算者はどんな心懸が必要かといふ事を，出來るだけ難しい理屈は抜きにして，自分の計算に關する經驗から氣のついた若干の事柄についてである．

II 觀測誤差

觀測とか實驗によつて得たデ１タ，卽ち物理量の數値といふものは，純數學的の數とはその性質を異にして居る．計算者によつて使はれるデ１タは觀測とか實驗から得られた結果で，觀測誤差とか，實驗誤差といふものに影響されて居る．觀測者の感覺には制限があり，器械及びその調整には若干の缺

點があり，或は又例へば其を取卷く空氣の溫度の變化といふ樣な外的條件によつて，觀測者が實際求めて居る値とは違つたものを得て居るのである．之等の種々の影響から或るものは，觀測の方法を特別に整備することによつて取除くことが出來る．又或るものは觀測者の注意によつて，或は又もつと精度の高い器械を使用することに依つて減少さすことも出來るのである．然し器械製作者や，觀測者が夫々最善を盡したとしても，最後の結果には如何ともする事の出來ない不精確さが殘る．その量は觀測の性質や狀況によつて異る．例へば測量家のチエンを以て長距離を測定する樣な場合に於ては，最後の結果に於て何糎といふ程度の誤差に達するであらうが，スペクトル線の波長決定の場合に於ては，その誤差は1粍の10億分の2，3にも過ぎないであらう．或は又經緯儀で星の高度を測つた場合に弧の分にもその誤差は達するであらうが，精密なる天頂儀で緯度の精密觀測に於ては弧の秒で10分の2，3にも達しないこともある．

此の樣に觀測，實驗で得られる値は如何に最善を盡したとしても畢竟は近似的の値しか得られないものである．こういふ誤差について論じ，且つ之を如何に處理すれば最も合理的かと云ふことは誤差論に於て取扱ふ處のものである．

從つて例へば759.2なる數値は算術では759.200……の如く無限に0であると假定するのであるが，759.2なる測定値は眞の値が759.25と759.15の間にあることを意味するもので，最後の2といふ數字は確かな數値を意味しないものである．從つて759.2と759.20とは其の意味が違ふのである．地球と太陽の距離は1億5000萬粁であるが，然し之を150000000粁と書いたつて精確に之だけの距離があるといふのではない．此の場合0といふ數字は單に桁位を表はして居るだけのものであつて，1.5×10^8粁と書くべきものである．こう書いておけば1.5迄確で10^8は桁位を表はして居るのである．

Ⅲ　計算表の誤差

最も普通に使用される計算表は對數及び三角函數の表である．對數表中に含まれた表値といふものは，精確に一つの數で表はすことは出來ない．眞の

値と表値との違ひは小數の桁數を十分增せば，任意に假定した極限に導くことは出來る．然し小數の桁位を增したからと云つて其れで眞の値とは云へない．やはり近似値に過ぎないのである．7桁の表の近似値は5桁の表の近似値よりは，もつと精度が高いといふだけのことである．

實際に計算者が求むるのは函數の引數の中間の値に對する函數値である．例へば sin 19°53′15.″4 の對數を小數以下 6 桁迄必要とする樣な場合に，普通 6 桁の三角函數表では引數の 10″ 毎にその函數値が與へられて居るから，今求めんとする値は 19°53′10″ と 19°53′20″ に對する表値から Interpolation (内搜法) といふ一つの計算樣式に從つて之を求めなければならない．(内搜法といふのは一般的には計算は複雜であるが，對數表等に於ては特殊な場合で，函數値の變化は引數の變化に比例するとして計算する) 從つてこの事は更に計算の不精確さを導くことになるのである．interpolate された量に於ては，その誤差は最後の桁で一單位の極大値を持つが，然し一般にその平均はもつと小さいものである．一般にその結果は次の樣に云ひ表はすことが出來る．

$$E[f(x)]=10^{-r} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$[f(x)]$ の前にある E なる記號は $f(x)$ に於ける極大誤差を意味し，r は桁數を表はして居る．逆に與へられた $f(x)$ に相當して x の値を計算する場合には，interpolate された値の極大誤差は

$$E[x]=\frac{10^{-r}}{2f'(x)} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

である．ここで $f'(x)$ は函數 $f(x)$ の第一次微分であつて，近似的に表差を表はして居る．

(1) から明かな樣に，interpolation の結果に影響する極大誤差は函數の性質にも，又使用した表にも無關係で，たゞ採用した小數の桁位と共にのみ變るものである．之に反して逆の interpolation に對しては，誤差は小數の桁位ばかりでなく，函數の性質及び x の大さにも關係するのである．例として最もよく使はれる對數表及び三角函數の對數表について之を適用して見やう．

a) $f(x)=\log x$	c) $f(x)=\log\cos x$
b) $f(x)=\log\sin x$	d) $f(x)=\log \mathrm{tg}\, x$

等に (2) を適用すると

a) $E[x]=10^{-r}\frac{x}{2M}$

b) $E[x]=10^{-r}\frac{\rho}{2M}\mathrm{tg}\,x$

c) $E[x]=10^{-r}\frac{\rho}{2M}\cot x$　　$M=0.434\ldots\ldots$

d) $E[x]=10^{-r}\frac{\rho}{4M}\sin 2x$　　$\rho=206265''$

となる．即ち數の對數から x を求めた場合の極大誤差は數自身 x に比例する．log sin x, log ces x, log tg x から求めた x に於ける極大誤差は夫々 tg x, cot x, sin 2x に比例する．sine や cosine の場合には tangent や cotangent が因數として入つて居るために，その誤差は非常に大きくなり得ることを知る事が出來やう．この事實から角の値はその sine や cosine の對數から求めるよりも tangent の對數から求めた方が精確に決定出來ることが判るであらう．

Ⅳ 積算誤差

最後に問題を數値的に解くには數を數學公式に代入して，運算することによつて行はれる．この事は近似値である處の一組の數を組み合せることである．前述の様に觀測のデ１タ及び計算表に含まれる數値は近似的のものであつて，若干の誤差を含む．夫故に數式を運算して最後に得られた結果も又近似値であつて，その誤差は一部はデ１タの誤差から，一部は表の方から起つて來ることは明であらう．前者から起つて來る誤差を觀測の *Resultant error* と呼び，表に原因する誤差は計算の *Accumulated error*（積算誤差）と云はれるものである．前者の誤差の大さは使用する公式の性質に大いに關係して來る．例へば物指で或る長さを測つて 1 糎が n 目盛に相當したとすれば，一目盛の長さ d は

$$d=\frac{1}{n}$$

で與へられるであらう．此の場合觀測の誤差がどんなであらうと，最後の結果では即ちその Resultant error は $\frac{1}{n}$ になつて來る．又例へば $\frac{a}{b}$ を計算する様な場合 b に或る誤差があるとすれば，其の結果の誤差は b の誤差の $\frac{a}{b^2}$ 倍になつて來る．一般に Resultant error は計算公式をその中に入つて居る量によつて微分することによつて表はされる．

計算の積算誤差は常に各計算に入つて來る各量がもつ不確さよりは大きくなる．一般的に云へば計算回數が長くなる程誤差の積加は大きくなつて來るのである．非常に大きな數を掛るとか，又は小さな數で割るとか，或は又 sine とか cosine とかから求めた角といふ様な特殊な場合を含まない様な運算に對しては，對數計算を行つた場合の積算誤差は確率論によつて近似的に

$$U_L = 0.4 \times 10^{-r} \sqrt{n}$$

で求めることが出來る．此處で r は採用した小數位の桁數であり，n は運算の回數である．若し結果が眞數 N であるならばその平均の不確度は

$$U_N = 10^{-r} N \sqrt{n}$$

であり，又若し角度であるならば

$$U_A = 0.4 \times 10^{-r} \times 206265'' \sqrt{n}$$

によつてその平均不確度は求め得られる．

次表は3桁から7桁の表に對して上の3式によつて $n=1$ として得られた結果である．從つて任意の場合に於ける計算の積算誤差は，この表の適當な値に運算回數の平方根を掛けておけばよい．

小數位の數＝r	U_L	U_N	U_A
3	0.4×10^{-3}	$10^{-3}N$	1.′4
4	0.4×10^{-4}	$10^{-4}N$	8″
5	0.4×10^{-5}	$10^{-5}N$	0.″8
6	0.4×10^{-6}	$10^{-6}N$	0.″08
7	0.4×10^{-7}	$10^{-7}N$	0.″008

V 桁　　數

與へられた計算に於て使用すべき小數位の桁數を決定するといふことは，計算者にとつては重要な事柄である．若し選んだ桁數が餘り小さいと折角のデ丨タの精度は犧牲にされる．若し又餘りに桁數が大きいならば不必要に多くの勞力が費される．4桁，5桁，6桁，7桁を以て一つの計算を仕上ぐるに必要な勞力の割合は近似的に 1，2，3，5 の割で表はされる．卽ち7桁の對數を以て與へられた計算を完成するに要する時間は，4桁の表を以て同じ計算をするに要する時間の5倍を必要とするのである．

實際に於て採用さるべき桁數は普通は，與へられたデ１タの精度によつて決定すべきものである．若しデ１タの精度を十分に保存せんとするならば，桁數は觀測の Resultant error に比べて計算の積算誤差を小さくする様に採らなければならない．從つて觀測の Resultant error を決定すると，上表は桁數選擇に對する目安を與へる．例へば16回の對數計算から或る觀測の Resultant error が $10''$ 程度のものであるならば，4桁，5桁，6桁の表に相當する U_A の値に $\sqrt{16}$ をかけると，計算の積算誤差は $32''$，$3.''2$，$0.''3$ となる．この中最初のものは $10''$ を越して居るから，4桁の表を使用するといふことはデ１タの精度を犧牲にすることになる．又6桁の表は觀測の Resultant error に比較して必要以上に小さいから，6桁の表を使ふといふことは不必要な勞力を使ふことになる．この場合には5桁の表が要求された精度を最小の勞力で得られることを示して居る．

更に25回の運算で觀測の Resultant error が0.0001で最後の結果は100であると云ふ場合，必要な桁數は何程かといふと，

$$U_N=10^{-r}\times100\times\sqrt{25}=5\times10^{2-r}$$

は積算誤差で，之が0.0001より小さいためには $r=7$ と取らなければならない．卽ち7桁の表を必要とするのである．

なほ天文の計算の例について述べて見やう．彗星，小遊星等の天體の3回の觀測から，其の軌道要素を決定する樣な問題が與へられた場合——之を軌道決定法と云ふ——何桁の對數表を使用すべきかといふ事について一言しておこう．之等天體の位置觀測の結果は精密測定に於ては，赤經の方は $0.^s01$，赤緯の方は $0.''1$ 迄與へられるが，$0.''2$ 或は $0.''3$ 程度の不精確さはもつて居る．この場合運算の積算誤差を考へると7桁計算を採用すべきである．然しながら一般に彗星，小遊星等に於ては觀測の誤差が $1''$ 或は其れ以上に達することが多いのである．こんな場合に計算の精確度を $0.''1$ 以上におくといふことは，勞力の不經濟な使用である．小遊星の場合には普通6桁計算が採用される．運動の速い彗星に於ては，その觀測誤差は小遊星に於けるよりも大きいのであつて，假りの拋物線軌道計算には5桁の計算で十分なことが多い．（つづく）