不確実性を伴うマルクス的最適成長論

金　江　　亮・形　岡　亮太郎

Ⅰ　はじめに

新古典派成長論モデルにおいて，労働を唯一の本源的生産要素とする「新古典派マルクスモデル」が山下・大西［2002］等によって扱われている。しかし,これらはすべて確定系であり,不確実性を考慮した場合にどうなるかは扱われていない。

そこで本論文では，資本財部門に確率項を加えて確率系モデルへと拡張した場合，どういう違いが生ずるかを調べる[1)]。

Ⅱ　確率制御モデル

資本財は労働のみで生産される基本モデル，また社会計画者モデル（代表的個人モデル）を考える。経済には２つの生産部門があるとする。消費財部門と資本財部門である。

各部門の生産関数をそれぞれ

消費財生産部門

$$Y_t = K_t^{\alpha}(u_t L)^{\beta} \tag{1}$$

資本財生産部門

$$dK_t = (1-u_t)Ldt + \sigma K_t dB_t \tag{2}$$

とする。Y_t：消費財，K_t：資本財，L：労働，B_t：ブラウン運動（標準ウィナー過程），u_t：制御関数（$0<u_t\leq 1$），$\alpha+\beta=1$ とする。σ は定数であり，$\dfrac{dK_t}{K_t}$ の単位時間当たりの標準偏差である。各変数の右下の添え字 t は，各時点 t での値を意味する。また，資本財の単位を十分大きくとって，$K_t \leq \dfrac{L}{\rho\beta}$ となるようにしておく[2)]。

通常の確定系と違い，資本財生産関数 (2) の右辺第２項にブラウン運動の項が加わり確率微分方程式で表されているのが，この確率制御モデルの特色である。

代表的個人の時点 t における期待通時的効用は時点 0 で測って

$$U_t = E_t\left[\int_t^{\infty} e^{-\rho s}\log Y_s ds\right] \tag{3}$$

であり，代表的個人はこれを最大化するように行動する。ここで，$\rho>0$ は時間選好率である[3)]。

この最適化問題は，最適評価関数 Φ と最適制御関数 u^* を見つけることである。

$$\Phi(t, K) = \sup_{0<u_t\leq 1} U_t^u \tag{4}$$

ここで，U の右上にある添え字 u は，制御関数 u のことである。

Ⅲ　モデルの解法

(2) に Girsanov の定理を用いて測度変換を行

1）フローである消費財よりも，ストックである資本財の生産に不確実性を入れた方が有意な結果を得られやすいので,資本財部門にのみ確率項を導入した。

2）この仮定と (15) から $u_t\leq 1$ となる。$u_t>1$ となるケースを排除するために必要な仮定である。

3）ρ が大きいほど，将来の消費はより割り引いて評価されることになる。資本財を生産すればその資本財を使って将来，より多くの消費財を生産できるようになるがそのために労働が $(1-u_t)L$ だけ割かれるため，現在の消費が少なくなる。つまり，将来の生産増と現在の消費がトレードオフになっているが，その度合いが ρ によって決まる。

う。$d\hat{B}_t = dB_t + \dfrac{L}{\sigma K_t}dt$ とおくと

$$dK_t = -u_t L dt + \sigma K_t d\hat{B}_t$$

となる。これに対応する伊藤拡散過程の微分生成作用素 A^u は

$$A^u f = \frac{\partial f}{\partial t} - u_t L \frac{\partial f}{\partial K} + \frac{1}{2}(\sigma K_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} \tag{5}$$

である。

$$\eta(u) := e^{-\rho t}\log Y_t + A^u \Phi \tag{6}$$

とおくと，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式は

$$\sup_u \eta(u) = 0 \tag{7}$$

となる。これを満たす最適制御関数 u^* が存在するならば，当然

$$\eta(u^*) = 0 \tag{8}$$

となっていなければならない。

(7) から，１階条件は

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = 0 \Longleftrightarrow u_t = \frac{e^{-\rho t}\beta}{L\dfrac{\partial \Phi}{\partial K}} \tag{9}$$

となる。最適評価関数が未知なので，適当な関数型を仮定して求めてみる[4)]。

$$\Phi(t, K) = e^{-\rho t}(a \log K_t + b) \tag{10}$$

と置く。a，b は未知の定数であり，これを求めるのが目標である。(9) の右辺に代入して

$$u_t = \frac{\beta K_t}{aL} \tag{11}$$

となる。

(10)(11) を (8) に代入するが，計算の簡略化のために (8) の両辺に $e^{\rho t}$ をかけた式 $0 = e^{\rho t}\eta(u^*)$ に代入すると，

$$\begin{aligned} 0 = & -\rho(a\log K_t + b) - L\frac{\beta K_t}{aL}\frac{a}{K_t} \\ & -\frac{1}{2}(\sigma K_t)^2\frac{a}{K_t^2} + a\log K_t \\ & + \beta\log L + \beta\log\left(\frac{\beta K_t}{aL}\right) \\ = & (1-\rho a)\log K_t - \rho b \\ & + \left(-\frac{1}{2}a\sigma^2 + \beta\log\beta - \beta\log a - \beta\right) \end{aligned} \tag{12}$$

これが任意の t で恒等的に成立するためには

$$a = \frac{1}{\rho} \tag{13}$$

$$b = \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\sigma^2}{2\rho} + \beta\log\beta + \beta\log\rho - \beta\right) \tag{14}$$

でなければならない。

1　最適制御関数及び最適評価関数

(13)(14) を (11)(10) に代入して

$$u_t^* = \frac{\beta\rho K_t}{L} \tag{15}$$

$$\Phi(t, K) = \frac{1}{\rho}e^{-\rho t}\left(\log K_t - \frac{\sigma^2}{2\rho} + \beta\log\beta + \beta\log\rho - \beta\right) \tag{16}$$

が得られる。

(15) から，労働の消費財生産への配分比率 u_t は，各時点で資本量 K_t に比例するように決定されることが分かる。資本が少なければ労働は資本財生産へ多く配分され，資本が多ければ消費財生産へ多く配分されることが分かる。

(16) から，最適評価関数は資本や時間選好率だけでなく，分散 σ^2 を含むことが分かる。確定系では起こりえなかったことである。

2　定常期待資本ストック

最適評価関数が決定したので，$t \to \infty$ での K_t を求めることができる。(15) を (2) に代入して

$$dK_t = (L - \beta\rho K_t)dt + \sigma K_t dB_t \tag{17}$$

となる。両辺を 0 から t まで積分して

$$K_t - K_0 = \int_0^t (L - \beta\rho K_s)ds + \int_0^t \sigma K_s dB_s \tag{18}$$

期待値をとると，右辺第２項は平均 0 であるから消えて

$$E[K_t] - E[K_0] = E\left[\int_0^t (L - \beta\rho K_s)ds\right] \tag{19}$$

t で微分して

$$\frac{dE[K_t]}{dt} = L - \beta\rho E[K_t] \tag{20}$$

これは１階非同次線形常微分方程式であり，解

4）最適評価関数は，通時的効用の被積分関数と同一の関数になることが多い。(3) の被積分関数から，こう仮定した。

は

$$E[K_t]=\frac{L}{\beta\rho}+(K_0-\frac{L}{\beta\rho})\exp(-\beta\rho t) \tag{21}$$

となる。$t\to\infty$ とすると定常状態における期待資本量が求まり

$$E[K^*_{stochastic}]=\frac{L}{\rho\beta} \tag{22}$$

である。この式と(15)から $t\to\infty$ で $u^*_t\to 1$，すなわち長期定常状態で資本蓄積が停止することが分かる[5)]。

以上から，本論文の確率系モデルでは以下の命題が成り立つことが分かる。

(i) $K^*_{deterministic}<E[K^*_{stochastic}]$，すなわち同じ生産関数でも，確定系よりも確率系の方が定常状態における資本量が大きくなる。（ただし，ブラウン運動の項がない通常の確定系最適成長モデルの定常状態の資本量を $K^*_{deterministic}=\frac{\alpha L}{\rho\beta}$ としている[6)]。）

(ii) σ は0でない限り定常期待資本量に影響しない。

(iii) 最適効用関数 Φ の中括弧内の右辺第2項が負であり，分散 σ^2 の影響が出てくる。

(iv) しかも，ρ が小さいほど分散 σ^2 の影響をより増大させてしまう。

これらは，以下のように解することができる。(i)は，確率系では不確実性に備えるために確定系よりも多くの資本を蓄積しておかなければならないことを意味している。(ii)は(22)で σ が現れていないことから分かる。ところで，σ が0の場合が確定系である。σ は0.01でも1でも100でも，0でない限り定常期待資本量はすべて同一の $E[K^*_{stochastic}]=\frac{L}{\rho\beta}$ となるのに，確定系モデルとなる σ が0のときには定常資本量が $K^*_{deterministic}=\frac{\alpha L}{\rho\beta}$ となる。σ が0か0でないかということが大きな違いをもたらすことが分かる。ただし(iii)より，定常期待資本量が同一であっても，σ が大きいほど総効用は小さくなる。また，(iv)は確率系と確定系の間でのきわめて興味深い違いと思われる。確定系では動学の（鞍点）安定性のためには ρ が0に十分に近いことが望ましいのだが[7)]，確率系ではそれが分散 σ^2 の影響を大きくし，期待通時的効用を小さくしてしまうため，必ずしも望ましいとは言えないのである。

Ⅳ　結語

確率項を導入した最適成長論を考えた。確率系では，定常期待資本量が確定系より大きくなる。そして確率系では，σ は0でない限り何であっても定常期待資本量は同一である。つまり，資本財生産に不確実性があるとないとでは資本ストック量にはっきりとした違いがあることが分かる。また分散 σ^2 が大きいほど，すなわち不確実性が大きいほど期待通時的効用が小さくなる。しかも時間選好率が小さいほどその影響が大きい。確定系では時間選好率は小さい

5）資本財生産関数にブラウン運動の項があるため，長期定常状態においても絶えず資本量は変動している。正確には長期定常状態での新規資本財生産 dK_t の平均が0であるということである。

6）山下・大西［2003］では
消費財生産部門 $Y=AK^\alpha(sL)^{1-\alpha}$
資本財生産部門 $\dot{K}=B(1-s)L-\delta K$
通時的効用 $U=\int_0^\infty e^{-\rho t}\log Y dt$
の場合に，定常資本量が $\left(\frac{K}{L}\right)^*=\frac{B\alpha}{\rho(1-\alpha)+\delta}$ となることが示されている。
$A=1$，$B=1$，$\delta=0$，$s=u$，$1-\alpha=\beta$ の場合が，本論文の確率系モデルに対応する確定系モデルである。

7）最適成長モデルにおいて時間選好率 $\rho>0$ は十分0に近いと仮定するのは，通常一般的である。時間選好率と安定性の問題は，西村・矢野［2007］や，Benhabib，Nishimura［1979］を参照。

ほど動学的安定性には望ましく，また定常状態での資本量も大きい。しかし確率系では資本量が多いほどその変動も大きくなるため，期待通時的効用には負の影響も出てくる。確定系との顕著な相違である。

資本ストックの量が多いと景気変動も大きくなることも含めて考えると，これは一種の資本主義の不安定性を示しているとも言える。一方で定常期待資本ストック量は一定であるから，資本主義は長期的・平均的に見るなら安定であるが，短期的には不安定だとも見ることができる。

参考文献

板垣有記輔［1985］「動的最適化と経済理論」多賀出版。

大西広［2005］「市場と資本主義の関係についての史的唯物論的理解について」『季刊経済理論』第 42 巻 1 号。

大西広・藤山秀樹［2003］「マルクス派最適成長論における労働による資本の「搾取」」京都大学 working paper no. J-33。

大西広・山下裕歩［2003］「新古典派成長論型マルクス・モデルにおける資産格差と時間選好率格差」『政経研究』第 81 号。

形岡亮太郎［2007］「The Marxian Optimal Growth Model under Uncertainty」「マルクス派最適成長論」の到達点と課題（科研費補助金研究成果報告書，研究代表者大西広）。

西村和雄・矢野誠［2007］『マクロ経済動学』岩波書店。

山下裕歩［2005］「新古典派『マルクス・モデル』における Roemer 的『搾取』の検討」『季刊経済理論』第 42 巻 3 号。

山下裕歩・大西広［2002］「マルクス理論の最適成長論的解釈―最適迂回生産システムとしての資本主義の数学モデル―」『政経研究』第 78 号。

山下裕歩・大西広［2003］「マルクス・モデルの諸性質と生産要素としての労働の本源性」『経済論叢』第 172 巻第 3 号。

Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin［2004］*Economic Growth*（2nd edition），MIT Press（大住圭介訳『内生的経済成長論（第 2 版）』九州大学出版会 2006 年）.

Benhabib, J. and K. Nishimura［1979］“The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multi-sector Models of Optimal Economic Growth,” *Journal of Economic Theory*, 21, pp. 421–444.

Brock, W. A. and M. J. P. Magill［1979］“Dynamics under Uncertainty,” *Econometrica*, 47, pp. 843–868.

Chang, F.［2004］*Stochastic Optimization in Continuous Time*, Cambridge University Press.

Shinkai, Y.［1960］“On the Equilibrium Growth of Capital and Labor,” *International Economic Review*, 1, pp. 107–111.

Uzawa, H.［1961］“On a Two-sector Model of Economic Growth,” *Review of Economic Studies*, 29, pp. 40–47.