16. 三分ノ一の挿入算　3日目毎の數値を與へて，毎日の數値を求めよう．これには，$t = 1/3$ と置き，元の數値の各々にベッセル式を應用して，與へられた日の翌日の値を得，又，$t = 2/3$ と置いて，第2日目の値を得，これで全體を完成するのであるが，しかし此の挿入算はもつと迅速な方法で行ひ得る，卽ち，それは，挿入値の中央差を計算して，その他の差は第二挿入算に據つて求めるのである．今

f_1, f_3, f_6 等を，與へられた元の數値とし，

f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 等を，所要の挿入値とし，

$\Delta', \Delta'', \Delta'''$ 等を，元の數列の第一差，第二差，第三差とし，

$\delta', \delta'', \delta'''$ 等を，所要の數列の第一差，第二差，第三差等と

すれば，

$$f_3 - f_0 = \Delta'_{1/2} \qquad \text{（與へられた數列から）}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 - f_0 &= \delta'_{1/2} \\ f_2 - f_1 &= \delta'_{3/2} \\ f_3 - f_2 &= \delta'_{5/2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{（所要の數列から）}$$

故に
$$\delta'_{1/2} + \delta'_{3/2} + \delta'_{5/2} = \Delta'_{1/2}$$

又，$f_1 - f_0 = \delta'_{1/2}$の値は，ベッセル式に $t = 1/3$ と置けば得られる：卽ち，

$$\delta'_{1/2} = \Delta\frac{1}{3}\Delta'_{1/2} - \frac{1}{9}\,\frac{\Delta''_0 + \Delta''_1}{2} + \frac{1}{162}\Delta'''_{1/2} + \frac{5}{243}\,\frac{\Delta^{iv}_0 + \Delta^{iv}_1}{2} - \frac{1}{1458}\Delta^{V}_{1/2}$$

又，$t = 2/3$ と置けば，$f_2 - f_0$ の値，卽ち $\delta'_{1/2} + \delta'_{3/2}$ を得る．例へば

$$\delta'_{1/2} + \delta'_{3/2} = \frac{2}{3}\Delta'_{1/2} - \frac{1}{9}\,\frac{\Delta''_0 + \Delta''_1}{2} - \frac{1}{162}\Delta'''_{1/2} + \frac{5}{243}\,\frac{\Delta^{iv}_0 + \Delta^{iv}_1}{2} - \frac{1}{1458}\Delta^{V}_{1/2}$$

この兩式を邊々相減じて

$$\delta'_{3/2} = \frac{1}{3}\Delta'_{1/2} - \frac{1}{81}\Delta'''_{1/2} + \frac{1}{729}\Delta^{V}_{1/2}$$

これから容易に下の形となる：

$$\delta'_{3/2} = 1/3\left\{\Delta'_{1/2} - \frac{1}{27}\left(\Delta'''_{1/2} - \frac{1}{9}\Delta^{V}_{1/2}\right)\right\}$$

卽ち，挿入數値の中央差 $\delta'_{3/2}$ の計算は，$\delta'_{1/2}$ よりも遙かに容易である．故に，先づ此の中央差のみを求め，次ぎに又挿入法によつて他の差を求めることにすれば，計算は容易である．

若し第二差が可なり大きい場合には，此の方法は，同様な方式で，先づ挿入數列の第二差を計算して，容易に行ひ得る．この方法の公式は下の通り：

まづ，
$$\delta'_{7/2} = f_4 - f_3$$

又，所要の第二差とは $\delta''_3 = \delta'_{7/2} - \delta'_{5/2}$ であるが，$\delta'_{5/2}$ の値は次式によつて得ら

れる：

$$\delta'_{5/2}=\varDelta'_{1/2}-(\delta'_{1/2}+\delta'_{3/2})$$

尙，$\delta'_{7/2}$の値は，要するに其の次ぎの行のものなのだから，單に指數を1だけ增せば，$\delta'_{1/2}$から得られる．即ち，

$$\delta'_{7/2}=\frac{1}{3}\varDelta'_{3/2}-\frac{1}{9}\frac{\varDelta''_1+\varDelta''_2}{2}+\frac{1}{162}\varDelta'''_{3/2}+\frac{5}{243}\frac{\varDelta^{iv}_1+\varDelta^{iv}_2}{2}-\frac{1}{1458}\varDelta^{V}_{3/2}$$

$$\delta'_{5/2}=\frac{1}{3}\varDelta'_{1/2}+\frac{1}{9}\frac{\varDelta''_0+\varDelta''_1}{2}+\frac{1}{162}\varDelta'''_{1/2}-\frac{5}{243}\frac{\varDelta^{iv}_0+\varDelta^{iv}_0}{2}-\frac{1}{1458}\varDelta^{V}_{3/2}$$

これを相減じて，

$$\delta''_3=\frac{1}{3}(\varDelta'_{3/2}-\varDelta'_{1/2})-\frac{1}{9}\frac{\varDelta^{0''}+2\varDelta''_1+\varDelta''_2}{2}+\frac{1}{162}(\varDelta'''_{3/2}-\varDelta'''_{1/2})+\frac{5}{243}\frac{\varDelta^{iv}_0+2\varDelta^{iv}_1+\varDelta^{iv}_2}{2}$$

$$-1/1458(\varDelta^{V}_{3/2}-\varDelta^{V}_{1/2})$$

この第一項を直せば　　$\varDelta'_{3/2}-\varDelta'_{1/2}=\varDelta''_1$

第二項は，

$$\varDelta''_0=\varDelta''_1-\varDelta'''_{1/2}$$

$$\varDelta''_2=\varDelta''_1+\varDelta'''_{3/2}$$

故に　　$\varDelta''_0+\varDelta''_2=2\varDelta''_1+\varDelta'''_{3/2}-\varDelta'''_{1/2}=2\varDelta''_1+\varDelta^{iv}_1$

及び　　$\dfrac{\varDelta''_0+2\varDelta''_1+\varDelta''_2}{2}=2\varDelta''_1+\dfrac{1}{2}\varDelta^{iv}_1$

第三項は，　　$\varDelta'''_{3/2}-\varDelta'''_{1/2}=\varDelta^{iv}_1$

第四項は，$\varDelta^{vi}$が小さいため，省略して

$$\frac{\varDelta^{iv}_0+2\varDelta^{iv}_1+\varDelta^{iv}_2}{2}=2\varDelta^{iv}_1$$

第五項の差も，只第六差を含むのみであるから，省略する．

これ等のものを皆δ''_3に入れて，

$$\left.\begin{aligned}\delta''_3&=\frac{1}{3}\varDelta''_1-\frac{1}{9}\left(2\varDelta_1+\frac{1}{2}\varDelta^{iv}_1\right)+\frac{1}{162}\varDelta^{iv}_1+\frac{10}{243}\varDelta^{iv}_1\\&=\frac{1}{9}\varDelta''_1-\frac{2}{243}\varDelta^{iv}_1=\frac{1}{9}\left(\varDelta''_1-\frac{2}{27}\varDelta^{iv}_1\right)\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

これにより，δ''の三つ目づつの値を計算し，その中間の値を挿入する．これ等の方法により，δ'の中間値を加法によつて得，(16)によつて三つ目づつの値を得る．それから次ぎ次ぎにδ'の値を加へて，遂にfの値を得る．

この計算の實例として，次ぎに，1886年七月の三日目毎の正午の太陽の赤緯を下の如く揭げる：

日附け	太陽の赤緯	Δ'	Δ''	Δ'''
1886年七月3日	$+22^\circ\ 57'\ 37.6''$			
		$-16'\ 28.3''$		
6	$+22\ \ 41\ \ 9.2$		$-212.4''$	
		$-20\ \ 0.7$		$+4.5''$
9	$+22\ \ 21\ \ 8.5$		-209.9	
		$-23\ \ 28.6$		$+4.5$
12	$+21\ \ 57\ \ 39.9$		-203.4	
		$-26\ \ 52.0$		$+5.7$
15	$+21\ \ 30\ \ 47.9$		-197.7	
		$-30\ \ 9.7$		
18	$+21\ \ 0\ \ 38.2$			

これで見ると、Δ^{iv} は小さくて，結果には無影響である．

挿入算の全體は下の表に示されてゐる．こゝで，右側の行を先づ計算し，(16)式によつて $\Delta^{\rm I}-\frac{1}{27}\Delta^{\rm III}$ を得たのである．

日附け	太陽の赤緯	δ'	δ''	$\Delta'-1/27\,\Delta'''$
1886年七月**6**日	**$22^\circ\ 41'\ 9.2''$**		**$-23.60''$**	
		$-6'\ 16.86''$		
7	$22\ \ 34\ \ 52.4$		-23.43	
		$-6\ \ 40.29$		$-20'\ 0.87''$
8	$22\ \ 28\ \ 12.1$		-23.27	
		$-7\ \ 3.56$		
9	**$22\ \ 21\ \ 8.5$**		**-22.10**	
		$-7\ \ 26.66$		
10	$22\ \ 13\ \ 41.9$		-23.93	
		$-7\ \ 49.59$		$-23\ \ 28.77$
11	$22\ \ 5\ \ 52.3$		-22.78	
		$-8\ \ 12.37$		
12	**$21\ \ 57\ \ 39.9$**		**-22.61**	
		$-8\ \ 34.98$		
13	$21\ \ 49\ \ 4.9$		-22.42	
		$-8\ \ 57.40$		$-26\ \ 52.21$
14	$21\ \ 40\ \ 7.5$		-23.19	
		$-9\ \ 19.59$		
15	**$21\ \ 30\ \ 47.9$**		**-21.97**	

この例題の計算法を明瞭にするため，計算した差などを太い文字で記した．

尙，δ'' の三ヶ連續の値（一ヶの計算値と，その上下にある二ヶの挿入値と）の和は，これに相當する計算上の第一差の差に等しい筈である．例へば，

$$23.27'' + 23.10'' + 22.93'' = 7'\ 49.59'' - 6'\ 40.29''$$

しかし，最初の計算に於いては，四捨五入や其の他に因る誤差のため，この條件が成立することは甚だ稀である．若し元の數値が正確ならば，誤りは，元の數値の最後の桁の半單位（又は，更に其の次ぎの桁の5單位）を越えない筈である.――この小さい不完全を，第二差の挿入の後，第一差の挿入の前に修正するため，三つづつの第二差に於いて，最後の2桁の和を作り，若し之が第一差の差と一致しなければ，第二差の最後の桁を少しく變へて，和が一致するやうにするのである．

それから第一差を加へて得られる．

同様にして，第一差の三つづつ連續したものの和は，與へられた元の數値の相互の差に等しい筈であるが，若し之が成り立たなければ，差を少しく變へて

見るが宜い．しかし此の變更は，所要の挿入函數を作るやうに，暗算しながら，行ふべきである．

17. 四分ノ一の挿入法　これは二分ノ一の挿入法を2回行へば宜いのであつて，その方法は次の通りである．今，δ_1 と δ_2 と δ_3 と δ_4 とを4つの第一差とすれば，

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4=\varDelta'_{1/2}$$

ところが，(14) によつて，

$$\delta_2+\delta_1=\frac{1}{2}\varDelta'_{1/2}-\frac{1}{8}\,\frac{\varDelta''_0+\varDelta''_1}{2}+\frac{3}{128}\,\frac{\varDelta^{\text{iv}}_0+\varDelta^{\text{iv}}_1}{2}$$

$$\delta_4+\delta_3=\frac{1}{2}\varDelta'_{1/2}-\frac{1}{8}\,\frac{\varDelta''_0+\varDelta''_1}{2}-\frac{3}{128}\,\frac{\varDelta^{\text{iv}}_0+\varDelta^{\text{iv}}_1}{2}$$

又，ベッセル式に，順次 $t=1/4,\ 2/4,\ 3/4$ と置き，$\varDelta^{\text{v}}$ 以下を省略して，

$$\delta_2-\delta_1=\frac{1}{16}\,\frac{\varDelta''_0+\varDelta''_1}{2}-\frac{1}{64}\varDelta'''_{1/2}-\frac{11}{1024}\,\frac{\varDelta^{\text{iv}}_0+\varDelta^{\text{iv}}_1}{2}$$

$$\delta_4-\delta_3=\frac{1}{16}\,\frac{\varDelta''_0+\varDelta''_1}{2}+\frac{1}{64}\varDelta'''_{1/2}-\frac{11}{1024}\,\frac{\varDelta^{\text{iv}}_0+\varDelta''_1}{2}$$

實地には，下記の如く計算する：

$$1/2\,(\delta_2+\delta_1)=1/4\ \varDelta'_{1/2}-1/16\ \varDelta'''_{1/2}+3/256\,\varDelta^{\text{iv}}_{1/2}\equiv((1))$$

$$1/2\,(\delta_2-\delta_1)=1/32\ \varDelta''_{1/2}-1/128\ \varDelta'''_{1/2}+11/2048\ \varDelta^{\text{iv}}_{1/2}\equiv((2))$$

$$1/2\,(\delta_4+\delta_3)=1/4\ \varDelta'_{1/2}+1/16\ \varDelta'''_{1/2}-3/256\ \varDelta^{\text{iv}}_{1/2}\equiv((3))$$

$$1/2\,(\delta_4-\delta_3)=1/32\ \varDelta''_{1/2}+1/128\ \varDelta'''_{1/2}-11/2048\ \varDelta^{\text{iv}}_{1/2}\equiv((4))$$

從つて，

$$\left.\begin{array}{ll}\delta_1=((1))-((2)) & \delta_2=((1))+((2))\\ \delta_3=((3))-((4)) & \delta_4=((3))+((4))\end{array}\right\}\qquad(18)$$

18. 五分ノ一の挿入法　次ぎには，五ツ目毎の値が與へられてゐる場合に，その中間の欠けてゐる値を挿入法で求めることを研究しやう．ベッセル式に $t=2/5$ と置き，與へられた數値から2番目の挿入函數の値を求め，更に又，$t=3/5$ と置いて，3番目の挿入値を求めると，その差は挿入値の中央部の第一差である．即ち，(10) に $t=2/5$ と置けば，

$$u_{2/5}=u_0+\frac{2}{5}\varDelta'_{1/2}-\frac{2.3}{2.5^2}\,\frac{\varDelta''_0+\varDelta''_1}{2}-\frac{2.3.1}{2^2.3.5^3}\varDelta'''_{1/2}+\frac{2.3.7.8}{2.3.4.5^4}\,\frac{\varDelta^{\text{iv}}_0+\varDelta^{\text{iv}}_1}{2}-\frac{2.3.7.8.1}{2^2.3.4.5.5^5}\varDelta^{\text{v}}_{1/2}$$

又，$t=3/5$ と置けば，

$$u_{3/5}=n_0+\frac{3}{5}\varDelta'_{1/2}-\frac{2.3}{2.5^2}\,\frac{\varDelta''_0+\varDelta''_1}{2}-\frac{2.3.1}{2.^23.5^3}\varDelta'''_{1/2}+\frac{2.3.7.8}{2.3.4.5^4}\,\frac{\varDelta^{\text{iv}}_0+\varDelta^{\text{iv}}_1}{2}+\frac{2.3.7.8.1}{2^2.3.4.5.5^5}\varDelta^{\text{v}}_{1/2}$$

この二つの式の左右各邊の差を採り，形を整理すると，

$$u_{3/5}-u_{2/5}=\frac{1}{5}\varDelta'_{1/2}-\frac{1}{125}\varDelta'''_{1/2}+\frac{14}{15625}\varDelta^{\mathrm{V}}_{1/2}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\varDelta'_{1/2}-\frac{1}{25}\left(\varDelta'''_{1/2}-\frac{14}{125}\varDelta^{\mathrm{V}}_{1/2}\right)\right\}$$

若し第五差が大きくなければ，$\varDelta^{\mathrm{V}}$ の頁は殆んど影響するものでないし，若し假りに此の項を用ゐるとしても，14/125 は 1/9 と置いて差支へない．

與へられた數列に對する第二差は，スタトリング式 (9) によつて容易に得られる．卽ち，$t=1/5$ と置けば，與へられた數値の直ぐ次ぎの第一差は

$$u_{1/5}-u_0=\frac{1}{5}\ \frac{\varDelta'_{-1/2}+\varDelta'_{1/2}}{2}+\frac{1}{50}\varDelta''_0-\frac{24}{6.5.25}\ \frac{\varDelta'''_{-1/2}+\varDelta'''_{1/2}}{2}-\frac{24}{6.5.20.25}\varDelta^{\mathrm{iv}}_0+\cdots\cdots$$

又，$t=-1/5$ と置き，符號を變へると，與へられた數値の直前の第一差は

$$u_0-u_{-1/5}=1/5\frac{\varDelta'_{-1/2}+\varDelta'_{1/2}}{2}-1/50\,\varDelta''_0-\frac{24}{6.5.25}\ \frac{\varDelta'''_{-1/2}+\varDelta'''_{1/2}}{2}+\frac{24}{6.5.20.25}\varDelta^{\mathrm{iv}}_0-\cdots\cdots$$

この 2 つの式の差を採ると，求める第二差は

$$\delta_0=\frac{1}{25}\varDelta''_0-\frac{2}{625}\varDelta^{\mathrm{iv}}_0=\frac{1}{25}\left(\varDelta''_0-\frac{2}{25}\varDelta^{\mathrm{iv}}_0\right)\qquad(19)$$

實例及び練習題として，五ツ目の數の對數が與へられてある場合に，その欠けてゐる對數を，挿入算で求める方法を下に示す．

數	對 數	δ'	δ''	$\varDelta'$	$\varDelta''$
1000	3.000 0000				
				+21661	
1005	3.002 1661		−4.32		−108
		4319.2			
1006	3.002 5980		−4.31		
		4314.9			
1007	3.003 0295		−4.30		
		4310.6		+21553	
1008	3.003 4606		−4.30		
		4306.3			
1009	3.003 8912		−4.29		
		4302.0			
1010	3.004 3214		−4.28		−107
		4297.7			
1011	3.004 7512		−4.27		
		4293.5			
1012	3.005 1805		−4.26		
		4289.2		+21446	
1013	3.005 6094		−4.23		
		4285.0			
1014	3.006 0379		−4.20		
		4280.8			
1015	3.006 4660		−4.16		−104
				+21342	
1020	3.006 6002				

19. 數量微分及び積分　或る函數の數値が，等間隔の引數に對して與へられてある時は，この函數の微分係數も，任意の二つの引數間の積分も得られる．又，或る數値の順次の差から，中間の値が得られるのみならず，その引數に對する微分係數も得られる．今，數列の間隔を，この引數 t の單位とすれば，(9) により，t の次項として表はし，又，微分して，次ぎの諸式を得る：

$$\left.\begin{aligned} u_t &= u_0 + t(\varDelta_0' - 1/6\,\varDelta_0''' + 1/30\,\varDelta_0^{\mathrm{V}} - \cdots) + t^2/2(\varDelta_0'' - 1/12\,\varDelta^{\mathrm{iv}} + \cdots \\ &\quad + t^3/2.3\ (\varDelta_0''' + 1/4\,\varDelta_0^{\mathrm{V}} + \cdots) + \cdots\cdots \\ \frac{d}{dt}u_t &= \varDelta_0' - 1/6\,\varDelta_0''' + 1/30\,\varDelta_0^{\mathrm{V}} - \cdots\cdots + t\,(\varDelta_0'' - 1/12\,\varDelta_0^{\mathrm{iv}} + \cdots) + \cdots\cdots \\ \frac{d^2}{dt^2}u_t &= \varDelta_0'' - 1/12\,\varDelta_0^{\mathrm{iv}} + \cdots\cdots \\ &\text{等}\qquad\text{等}\qquad\text{等} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

若し，引數の間隔が單位の k 倍ならば，上の如くして得られた第 n 係數は k^n 倍だけ大き過ぎるから，

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_t &= \frac{1}{k}(\varDelta_0' - 1/6\,\varDelta_0''' + 1/30\,\varDelta_0^{\mathrm{V}} + \cdots\cdots) \\ \frac{d^2}{dt^2}u_t &= \frac{1}{k^2}(\varDelta_0'' - 1/12\,\varDelta_0^{\mathrm{iv}} + \cdots\cdots) \\ &\text{等}\qquad\text{等}\qquad\text{等} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

20. 時間の高次に展開すること　上記の式により，若しも等間隔の時間に對して，特別な數値が充分に與へられてゐる場合には，その數値を時間の高次項に展開することが出來る．實例として，歳差の理論中にある λ の値を採り，尙，順次の差を示すと：

元　期	λ	$\varDelta'$	$\varDelta''$	$\varDelta'''$
1850年	$0''.000$			
		$6''.114$		
1900	6.114		$-1''.193$	
		4.921		-1
1950	11.035		-1.192	
		3.729		0
2000	14.764		-1.192	
		2.537		0
2050	17.301		-1.192	
		1.345		
2100	18.646			

(22)

この問題では，先づ此の數列の中程に近い年を出發點として採用するのが宜い．即ち，t を 1950 年から測り，單位を 50 年として，

$$\varDelta_0' = 1/2\,(4''.921 + 3''.729) = 4''.325$$

$$\varDelta_0'' = -1''.192$$

$$\varDelta_0''' = -0''.0005$$

此等の値をスタ１リングの式に入れると，展開式は下の如くなる：

$$\lambda = 11''.035 + 4'.325\,t - 0''.596\,t^2 \tag{23}$$

尙，元期を，1950 年から 1850 年に移し，100 年を單位とすれば，有効範圍はもつと增大する．即ち，

$$t = 2\,(T-1) \qquad \text{及び} \qquad t^2 = 4\,(T^2 - 2T - 1)$$

これ等を，t 及び t^2 の項に入れると，

$$\lambda = 0''.001 + 13''.418\,T - 2''.384\,T^2 \tag{24}$$

この方法を應用するに當つて，注意すべきは，假想項を式の中に加へたがために，この展開式が或る特別な數値と正確に一致するためには，小數位に誤差が入ることである．故に，差が不揃ひになるあたりからは，t の高次の係數を皆省略しなければならぬ．上記の例では，第二差が明らかに一定なので，式は t^2 の項までに止めるのである．

こんな風に展開した後，この結果を，特別な數値と比べて見て，よく一致するか否かを檢べて，係數を適當に修正するが宜い．上記の例で言へば，λの6ケの特別値のうち，最初のものを除けば，(24) によつて皆良く表はされてゐる．1850年の嚴密な値は0であるが，若し (24) から第1項を省けば，他の總ての値の誤りは$0.''001$に止まる．この誤差は，T及びT^2の係數を少しく變じて，

$$\Delta\lambda = 0.''0010\,T - 0.''0002\,T^2$$

を加へると，(24) は

$$\lambda = 13.''4190\,T - 2.''3842\,T^2$$

となつて，λ を正しく表はす．6ケの特別値と，(22) から計算したものとの差は下の如くである．

1850年	$0.''0000$	差＝　0
1900	6.1134	－6
1950	11.0348	－2
2000	14.7640	0
2050	17.3012	＋2
2100	18.6462	＋2

函數との積分は，時間の高次項に展開して，その値を積分するのであるが，しかし此の方法は，應用に或る制限がある．又，永い時間にわたる積分は機械的積分法によるのだが，之は球面天文學には不要なので，本書には述べない．

第3章　最小二乘法

第1課　數量を平均すること

21. “最小二乘法”を充分に解說しやうとすれば一卷の書物となるのだが，しかし其の根本原理や，それが平常の天文研究に應用される最も簡單な方法などは，もつと短かく說明し得る．この方法の根本をなす事實は，およそ吾々が天文觀測をした結果から，出來るだけ精密な數値を得やうと欲する場合に，種々の避け難き原因による夥しき小誤差を伴ふといふことである．これ等の誤差のうちには，偶然のものもあり，又一般的のものもあつて，容易に其れ等は算定し得ないので，例へば2つの觀測値が完全に一致するやうなことは決してない．從つて，互ひに揃はない測定結果をいろいろと組み合はせて，最も良ささうな數値を得ることは，天文研究の中の重要事項の一つである．

22. 系統誤差と偶然誤差との區別　天文觀測の中に起る誤差は，その原因の性質上から，系統誤差と偶然誤差との2種類に分けられる．

系統誤差 (Systematic error) とは，多くの觀測全部に共通な原因から起るもの，又は，一定の法則に支配されてゐるものを云ふ．共通な原因とは，例へば晝と夜とか，夏と冬とかで，溫度の變化により，觀測器械が違つた結果を齎す場合だとか，又は，空氣の狀態が變じて，星の光の屈折が夜毎に變る場合だとか，觀測者の習癖のために起る誤差だとか，器械の構造が不完全なために，一方へ多少偏した誤差が常に現はれる場合などである――系統誤差の大きさが常に同一である場合，それを定常誤差 (Constant error) と呼ぶが，しかし又，一群の觀測中に含まれる系統誤差の平均値を同樣な言葉で呼ぶこともある．例へば長さや角度の物指しが大き過ぎたり小さ過ぎたりする場合には，定常誤差が起る．そんな場合には，その物指しで測つた全ての測定が大き過ぎたり小さ過ぎたりすることは明白である．若し此の物指しが或る溫度の場合に正しいとすれば，それとは違つた溫度で行はれた時の觀測の系統誤差の總平均は，その溫度の平均値に相當するものとなる．一般に（あらゆる場合に左樣だとは保證し得ないけれど）系統誤差は，適當に研究すれば其れは知れて來るものであつて，從つて，其の影響を除去するために，何等かの方法によつて適當な修正をなし得るものである．

偶然誤差 (Accidental error) の原因は種々雜多で，又，一時的な氣まぐれであるため，何としても其れを究明し得るものではない．例へば，若し吾々が一本の線を目測で2等分する場合には，視覺の認め得る最小空間の範圍に於いて，偶然誤差が起り得る．現に，絶えざる空氣の動搖のために，望遠鏡の視野中に見える星の像は，小さい不規則運動や，形狀の變化を，絶えずやつてゐる．從つて，觀測者が蛛蜘糸で星像を二等分 (bisect) しやうとする時には，豫期し得ない誤りが常に起るものである．――少なくとも，天文學上の一般法則としては，かやうな偶然誤差は，變幻極まりない複雜多樣な原因が個々別々に働らく結果であると見るのであつて，こうした誤差の理論を究め，それらの有害な影響を最小限度に止めやうとすることが，所謂“最小二乘法”の基本なのである．

從つて，この法は，たゞ偶然誤差にのみ應用されるものであつて，從つて，この方法から得られる最良の結果の中にも，尙，系統誤差は含まれたまゝ，殘つてゐることがある．それで，系統誤差は一つ一つ出來るだけ正確に調査研究し，いよ〻〻最後に現はれる結果の不揃ひなことは，偶然誤差のみに因るものであると見なすのである．（つづく）

注意：本號の表紙第3頁に正誤表があります．