企業サイズデータにおける成長率分布のテールと非ジブラ則との関係*)

金沢学院大学　石川 温**), 藤本 祥二　一橋大学　水野貴之

経済物理学の大きな目標の一つは、物理学における熱力学に対応するものを、経済を対象として構築することだと考えられる。本研究では、売上、利益、資産など企業サイズデータを題材とし、それら大規模・高精度データに観られる性質の関係を明らかにすることにより、経済現象の熱力学構成への足がかりを探る。

この方向への第一歩は、100年以上前から知られていたPareto則：

$$P(x) \propto x^{-(\mu+1)} \quad \text{for} \quad x > x_0 \tag{1}$$

を詳細釣合則：$P_{12}(x_1, x_2) = P_{12}(x_2, x_1)$ と、Gibrat則：$Q(R|x_1) = Q(R)$ から導出したことに始まる。[1] ここで x は企業サイズ、x_1, x_2 は初年度, 次年度の企業サイズ、$R \equiv x_2/x_1$ はその成長率である。また $P(x)$ は確率密度関数、$P_{12}(x_1, x_2)$ は同時分布、$Q(R|x_1)$ は条件付確率を表す。経済データに観られる3つのマクロな法則が、大規模・高精度データの入手と分析が容易になった近年になって、初めて関係付けられたのである。

確率密度関数に観られるPareto則は高額データに限られた（$x > x_0$）性質であり、中額データ領域では対数正規分布が観られるとされてきた。また成長率分布は、高額領域では初年度の値に依らない（Gibrat則）が、中額領域では初期値に依存することも幾つかの研究で報告されていた。著者の一人（石川）は、日本企業の正の利益データに観られる中額領域の初期値依存性（非Gibrat則）を特定し、その非Gibrat則と詳細釣合則より対数正規分布が導かれることを示した。[2] また興味深い性質として、成長率分布が両対数プロットで直線近似できる場合、詳細釣合則と両立する非Gibrat則は一意に定まることも示された。***)

そこで興味が出てくるのは、直線近似できない場合の非Gibrat則である。売上や資産などの企業サイズデータの成長率分布は、直線近似できないことが様々な研究により報告されている。[3] このような流れにより、本稿では中額領域を含んだ売上データを用い、上記の問題を検討する。使用するデータは、経済産業研究所（RIETI）に所蔵される東京商工リサーチ（TSR）提供の年間約90万社の売上データである。実態を持って活動している中額規模以上の企業は、ほぼ網羅されていると考えられる。売上データの確率密度分布を観ると、およそ 10^5 千円（= 1億円）以上でPareto則に従い、それ未満かつ 10^3 千円（100万円）の間で対数正規分布に従っている。また、詳細釣合則も確認できる。†)

次に、Gibrat則および非Gibrat則の特定のため、売上初期値を $x \in [10^{1+0.4n}, 10^{1+0.4(n+1)}]$

*) この原稿は、京都大学基礎物理学研究所2009年度研究会『経済物理学2009』での発表をもとに書かれている。

**) E-mail: ishikawa@kanazawa-gu.ac.jp

***) 以降の表記で、$u_+(x) = u_-(x) = 0$ つまり $\gamma = \delta = \beta = \eta = C_3 = 0$ の場合に対応する。

†) 両法則の図はページの都合で割愛する。

$(n = 1, 2, \cdots, 20)$ 千円のビンに入れ、それらの成長率分布を観る (Figs 1, 2)。

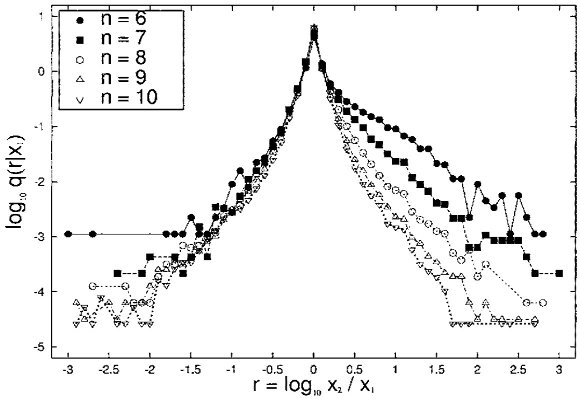

Fig. 1. 売上中額領域での成長率分布

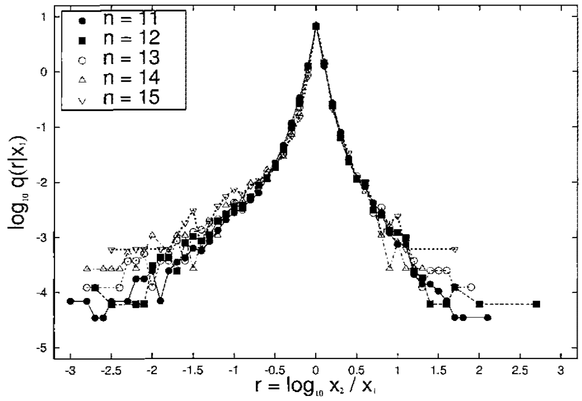

Fig. 2. 売上高額領域での成長率分布

Figs 1, 2 より、成長率分布を次式で近似する：

$$\log_{10} q(r|x_1) = c \mp t_\pm(x_1)\ r + \ln 10\ u_\pm(x_1)\ r^2 \qquad \text{for} \quad r \gtrless 0\ . \tag{2}$$

売上成長率分布は直線近似できないので、$r = \log_{10} R$ の 2 次の項が加わっているのが特徴である。$R > 1$ の場合、詳細釣合則は次式のように表現できる：

$$\frac{P(x_1)}{P(x_2)} = \frac{1}{R}\frac{Q(R^{-1}|x_2)}{Q(R|x_1)} = R^{\ 1+t_+(x_1)-t_-(x_2)-[u_+(x_1)-u_-(x_2)]\ln R}\ . \tag{3}$$

上式において $x_1 \to x$, $x_2 = Rx_1 \to (1+\epsilon)x$ とし、ϵ の 5 次まで展開して得られる微分方程式の解が次のように一意に得られる（この解は必要十分条件を満たしており、$R > 1$ の場合も同様である。)：

$$t_+(x) = \frac{\gamma}{3}\ln^3 x + \frac{\beta}{2}\ln^2 x + \alpha \ln x + C_1\ , \tag{4}$$

$$t_-(x) = -\frac{\gamma}{3}\ln^3 x + \frac{\delta - \beta}{2}\ln^2 x + (\eta - \alpha)\ln x + C_2\ , \tag{5}$$

$$u_+(x) = -\frac{\gamma}{6}\ln^2 x - \frac{\delta + \beta}{6}\ln x + C_3\ , \tag{6}$$

$$u_-(x) = -\frac{\gamma}{6}\ln^2 x + \frac{2\delta - \beta}{6}\ln x + C_3 + \frac{\eta}{2}\ , \tag{7}$$

$$P(x) = C\ x^{-(\mu+1)}\ \exp\left[-\frac{\gamma}{6}\ln^4 x + \frac{\delta - 2\beta}{6}\ln^3 x - (\alpha - \frac{\eta}{2})\ln^2 x\right]\ . \tag{8}$$

Fig. 2 では、成長率分布が初期値 n の違いでほとんど変化していない（Gibra 則）。一方 Fig. 1 では、正の成長率分布は n の違いで大きく変化するが、負の成長率分布はほとんど変化しない。これを売上データに関する非 Gibrat 則（第 2 非 Gibrat 則）と呼ぶことにする。ここで簡単のための第 1 次近似として、負の成長率分布は初期値に依存しないとする。[*] このとき (5), (7) 式より $\gamma = \delta = \beta = 0$, $\eta = \alpha$ となり、$t_+(x) = \alpha \ln x + C_1$, $t_-(x) = C_2$, $u_+(x) = C_3$, $u_-(x) = C_3 + \alpha/2$, $P(x) = C\ x^{-(\mu+1)}\ \exp\left[-\alpha/2 \ln^2 x\right]$ と表せる。

[*] η を α からずらすことにより、以下の分析を大きく変えることなしに負の成長率分布の変化も議論できる。

Fig. 1の正の成長率分布変化から、$\alpha = 0.92 \pm 0.06$ と評価できる。一方、中額領域の確率密度関数を上記の $P(x)$ でフィットすることにより、$\alpha = 1.0 \pm 0.16$ と評価され、この議論が無矛盾になっていることが分かる。つまり本研究により、成長率分布が両対数プロットで直線より裾野が広くなる売上データの場合、詳細釣合則と両立する（利益データとは違った）非 Gibrat 則が存在し、両者から対数正規分布が導かれることが明らかとなった。

謝辞

独立行政法人経済産業研究所（RIETI）からは本稿で使用するデータセットの提供を受けた。記して感謝したい。また、本研究は科研費（20510147）の助成を受けたものである。

References

1) Y. Fujiwara, W. Souma, H. Aoyama, T. Kaizoji and M. Aoki, Physica **A321** (2003), 598;
Y. Fujiwara, CD. Guilmi, H. Aoyama, M. Gallegati and W. Souma, Physica **A335** (2004), 197.
2) A. Ishikawa, Physica **A371** (2006) 525; Physica **A383** (2007) 79.
3) A. Ishikawa, Economics -Special Issues Reconstructing Macroeconomics **2009 - 11**.