

円筒容器中の超流動³He-A 相における織目構造

岡山大学大学院 自然科学研究科 堤 康雅¹

(2009年11月4日受理)

最近、東大物性研で、細い円筒容器中に閉じ込めた超流動³He-A 相に形成される織目構造を、NMRを用いて観測する実験が行われた。その結果、外部回転によるNMRスペクトルの変化が観測され、これは織目構造が転移しているためであると考えられた。本稿では、この現象をGinzburg-Landau理論、“Hydrodynamic”理論に基づいて議論した研究を紹介する。数値計算の結果、静止下で安定な織目構造はradial disgyrationであり、回転下でMermin-Ho textureに転移することが分かった。また、高回転下でcontinuous unlocked vortexが侵入し、織目構造が再構成されることも分かった。これらの計算結果は、実験結果を矛盾なく説明することができる。

1 はじめに

³Heの超流動相が発見されてから[1]、多くの研究が実験、理論の両面で精力的に行われてきている[2, 3, 4, 5, 6, 7]。超流動³Heはスピン三重項 p 波超流動であることが知られており、初めての異方的超流動から得られた知見は、重い電子系超伝導における異方的超伝導を理解する上でも非常に有用であった[8]。異方的超伝導の理解に大きな役割を果たしただけでなく、現在に至るまでスピン状態と軌道状態を外部パラメーターにより同時に制御することができる系は超流動³He以外には見つかっておらず、重要な研究舞台であることは依然として変わっていない。また、近年ではフェルミ原子気体⁶Li [9], ⁴⁰K [10]において、 p 波束縛状態を介したFeshbach共鳴も観測されており、新たな p 波超流動の実現の可能性があり、その理解にも超流動³Heで得られた知見が活かされることが大いに期待できる。

超流動³Heの秩序変数は、スピン状態($S = 1$)、軌道状態($L = 1$)の自由度を持つ複素変数であるため、合計で $3 \times 3 \times 2 = 18$ の自由度を持つ。秩序変数が多自由度であることを反映して、バルクではA、B、A₁相の対称性の異なる相が実現している。本稿では、特に、Anderson-Brinkman-Morel (ABM) 状態[11]のA相に注目し、筆者らの研究[12]とその周辺的话题を紹介する。

超流動³He-A相では、 $S_z = 0$, $L_z = 1$ のCooper対が形成されており、Cooper対のスピン成分がゼロである向きを d ベクトルで、Cooper対の軌道角運動量の向きを l ベクトルで記述できるという特徴がある。秩序変数、つまり、 d ベクトル、 l ベクトルの空間変化により形成される構造は、織目構造(texture)と呼ばれている。秩序変数の空間変化は自由エネルギーを増加させるため、

¹E-mail: tsutsumi@mp.okayama-u.ac.jp

バルクでは一様な構造が実現しているが、容器の形状の影響や渦構造の侵入により織目構造が形成される。

容器の形状による影響は、超流動 ^3He を閉じ込めた容器の壁から受ける。壁近傍では、壁に垂直な方向への運動量を持つ秩序変数の成分が抑圧されるため、ポイントノードの方向を指す l ベクトルが壁と垂直に向くことになる [13]。自由エネルギーへの影響は凝縮エネルギーのオーダーであるため、壁と l ベクトルが垂直であるのは絶対的な境界条件である。そのため、微小な容器では、円筒、スラブ（板間隔の狭い並行平板）、球等の形状が織目構造に大きな影響を与える。本稿では、細い円筒容器を取り上げ、形成可能であることが知られている Mermin-Ho (MH) texture [14], radial disgyration (RD) [15], Pan-Am (PA) texture [16] について議論を行う。

超流動 ^3He では、 s 波超伝導体や超流動 ^4He の量子渦とは異なる、特異点を持たない渦構造を形成することもできる。これは、秩序変数の多自由度性を反映している。多自由度であるため、回転の角速度、外部磁場によって、渦周りには様々な織目構造が形成される [17]。その中でも、本稿の内容に関係するのは、continuous unlocked vortex (CUV) [18] である。continuous は特異点を持たないことを意味しており、unlocked は l ベクトルと d ベクトルが異なる織目構造を形成することを意味している。超流動 ^3He には、軌道状態とスピン状態を結合する双極子相互作用が働くため、バルクでは l ベクトルと d ベクトルは平行になるが、CUV ではその関係が破れている。CUV は、MH vortex [14] と mixt-twist (MT) vortex の組から成っており、渦度 2 を持つ渦構造である。

織目構造を観測するには、NMR による実験が有力な手段となる。本稿で取り上げる横磁場 NMR は、定常磁場と垂直な方向への振動磁場を用いた NMR である。双極子相互作用が l ベクトルと d ベクトルを平行にし、磁場が d ベクトルを磁場と垂直に向けるので、バルクの超流動 ^3He -A 相では $l \parallel d \perp H$ となっている。このため、NMR の横磁場共鳴周波数に Larmor 周波数からの大きなシフトが現れる。織目構造が形成されると、 $l \parallel d \perp H$ となっていない領域が NMR スペクトルにサテライトピークを作り出す。サテライトピークが現れることは、織目構造が作る引力ポテンシャルにスピン波モードの束縛状態が存在することが原因であり、NMR スペクトルの形状からポテンシャルを作っている織目構造を知ることができる。実際に、渦構造の侵入による様々な織目構造について、異なる NMR スペクトルが観測されている [19]。

最近、東大物性研において、細い円筒容器に超流動 ^3He -A 相を閉じ込め、外部回転による織目構造の変化を横磁場 NMR で観測する実験が行われた [20, 21, 22, 23, 24, 25]。試料は、平均半径 $50 \mu\text{m}$ 、 $100 \mu\text{m}$ の円筒容器 150 本、半径 $115 \mu\text{m}$ の円筒容器 1 本の 3 種類であり、織目構造の空間変化のスケールを特徴付けるダイポールコヒーレンス長 ($\sim 10 \mu\text{m}$) の数倍の半径を持つ。そのため、容器の壁が織目構造に大きな影響を与える。複数の円筒容器を束ねているのは織目構造からの NMR シグナルを観測しやすくするためであり、1 本の円筒容器を用いているのは円筒容器ごとに異なる織目構造が形成されることを避けるためである。3.2 MPa 程度の高圧下で A 相を実現し、数十 mT の定常磁場を円筒軸方向にかけて横磁場 NMR が行われた。細い円筒容器中の超流動 ^3He に渦構造が侵入することで形成される織目構造を観測することは、mK 以下まで冷却できる巨大な冷凍機を高速回転させなければならない非常に困難な実験であるが、それが可能な冷

凍機が開発され [26]、現在、最高回転速度が ~ 12 rad/s に達している [23]。この回転冷凍機を用いて、平均半径 $100 \mu\text{m}$ の円筒容器に渦構造が侵入することで、NMR スペクトルの形状が変化することが観測された [20]。半径 $115 \mu\text{m}$ の円筒容器においては、 ~ 1 rad/s で NMR スペクトルのメインピーク強度の急激な減少が [21]、 ~ 3.7 rad/s, ~ 7.0 rad/s, ~ 10.1 rad/s でメインピーク強度の減少と同時に、サテライトピークの強度が増加することが観測されている [22]。半径 $50 \mu\text{m}$ の円筒容器においても、 1 rad/s 以下で NMR スペクトルの形状の変化が観測されている [25]。

本稿では、東大物性研で行われた半径 $50 \mu\text{m}$, $115 \mu\text{m}$ の円筒容器を用いた実験に基づいて、実現している織目構造を理論的に議論した研究を紹介する。第 2 章では、低回転領域に適用された Ginzburg-Landau (GL) 理論と、高回転領域に適用された “Hydrodynamic” 理論について定式化を行う。また、織目構造が生み出すスピン波モードの解析から、NMR スペクトルを導く方法についても述べる。第 3 章では、細い円筒容器の壁が与える影響について述べた後に、実現している織目構造について、GL 理論を用いて議論した筆者らの研究 [12] と、“Hydrodynamic” 理論を用いて議論した Takagi の研究 [27, 28, 29] を紹介する。最後に第 4 章で、まとめを行うと共に、筆者らが興味を持っている超流動 ^3He における Majorana フェルミオンの今後の展望についても述べる。

2 定式化

一般的なスピン三重項 p 波超流動の秩序変数は、スピン状態に関する添字 μ と軌道状態に関する添字 i を持つ階数 2 のテンソル $A_{\mu i}$, ($\mu, i = x, y, z$) を用いて記述される。

$$\Delta(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k}) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{k}) \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k}) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = A_{\mu i} (\sigma_{\mu}^i \sigma_y) \hat{k}_i. \quad (1)$$

ここで、 σ はスピン $\frac{1}{2}$ の Pauli 行列であり、 $\hat{\mathbf{k}}$ は運動量の方向を表す単位ベクトルである。また、繰り返される添字は和をとることを意味している。

円筒容器中の超流動 ^3He -A 相で安定となる織目構造を調べるためには、秩序変数から求められる自由エネルギーの比較が必要である。本章では、この目的のために有用な Ginzburg-Landau (GL) 理論、“Hydrodynamic” 理論による自由エネルギーの定式化を説明する。GL 理論は、超流動転移温度近傍でのみ、一般的な秩序変数に対して適用できる。一方で、“Hydrodynamic” 理論は、温度に依らず適用できるが、系全体に渡って Anderson-Brinkman-Morel (ABM) 状態が実現していなければならない。このように、これらの理論にはそれぞれ長所と短所があり、短所を補い合う必要がある。エネルギー的に最も安定な織目構造が、実現している織目構造であることを確認するためには、実験で観測された NMR スペクトルについての議論を行う必要がある。本章の最後では、そのための定式化についても紹介する。

2.1 Ginzburg-Landau 理論

GL 理論を用いて、超流動状態の自由エネルギーを導く。GL 理論は、超流動転移温度近傍 ($T_c - T \ll T_c$) でのみ適用できる理論ではあるが、低温においても定性的に正しい結果を与えることが

経験的に知られている。また、適用条件として、秩序変数の空間変化が緩やかであることも要請されるが、織目構造はコヒーレンス長よりも十分長いダイポールコヒーレンス長のオーダーで変化するため、この条件は満足されている。

バルクからの自由エネルギーへの寄与は、スピン空間、実空間の回転に対して不変であり、ゲージ不変性も持っている。よって、 $\text{SO}(\text{S})(3) \times \text{SO}(\text{L})(3) \times \text{U}^{(\phi)}(1)$ の対称性を持つ自由エネルギー密度を秩序変数の4次まで書き下すと、

$$f_b = -\alpha A_{\mu i}^* A_{\mu i} + \beta_1 A_{\mu i}^* A_{\mu i}^* A_{\nu j} A_{\nu j} + \beta_2 A_{\mu i}^* A_{\nu j}^* A_{\mu i} A_{\nu j} \\ + \beta_3 A_{\mu i}^* A_{\nu i}^* A_{\mu j} A_{\nu j} + \beta_4 A_{\mu i}^* A_{\nu j}^* A_{\mu j} A_{\nu i} + \beta_5 A_{\mu i}^* A_{\mu j}^* A_{\nu i} A_{\nu j} \quad (2)$$

となる。また、軌道角運動量の合成を行うことで、空間変化によるグラディエントエネルギーには独立な項が3項あることがわかる。つまり、 $(\text{L}=1) \times (\text{S}=1) \times (\text{L}=1) \rightarrow (\text{S}=1) \times (\text{L}=0, 1, 2)$ である。

$$f_g = K_1 (\partial_i A_{\mu j})^* (\partial_i A_{\mu j}) + K_2 (\partial_i A_{\mu j})^* (\partial_j A_{\mu i}) + K_3 (\partial_i A_{\mu i})^* (\partial_j A_{\mu j}). \quad (3)$$

ここで、 $\partial_i \equiv \nabla_i - i \frac{2m_3}{\hbar} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})_i$ であり、 m_3 は ^3He 原子の質量、 $\boldsymbol{\Omega}$ は外部回転の角速度を表す。外部回転の寄与は、回転系への局所ゲージ変換を行うことで、秩序変数の位相変化として議論することができる。

超流動 ^3He には、一般的な超流動の自由エネルギーに加えて、双極子相互作用と磁場による自由エネルギーへの寄与が存在する。軌道状態とスピン状態が結合する双極子相互作用による双極子エネルギーは、スピン空間と実空間の独立な回転の対称性を破り、 $\text{SO}(\text{S})(3) \times \text{SO}(\text{L})(3) \rightarrow \text{SO}(\text{S}+\text{L})(3)$ に自由エネルギーの対称性を落とす。

$$f_d = g_d \left(A_{\mu\mu}^* A_{\nu\nu} + A_{\mu\nu}^* A_{\nu\mu} - \frac{2}{3} A_{\mu\nu}^* A_{\mu\nu} \right). \quad (4)$$

また、磁場 \mathbf{H} により、スピン空間の対称性が $\text{SO}(\text{S})(3) \rightarrow \text{U}^{(S_z)}(1)$ となり、自由エネルギー密度へ

$$f_m = g_m H_\mu A_{\mu i}^* H_\nu A_{\nu i} \quad (5)$$

の寄与を与える。

超流動 ^3He の自由エネルギーは、これらの項の総和を系全体に渡って積分したものとなる。

$$F = \int (f_b + f_g + f_d + f_m) d^3\mathbf{r}. \quad (6)$$

また、超流動の流れにともなう運動量密度は $\mathbf{j} = \frac{\partial f_g}{\partial (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})} \Big|_{\Omega=0}$ から

$$j_i = \frac{4m_3}{\hbar} \text{Im} [K_1 A_{\mu j}^* \nabla_i A_{\mu j} + K_2 A_{\mu j}^* \nabla_j A_{\mu i} + K_3 A_{\mu i}^* \nabla_j A_{\mu j}] \quad (7)$$

と求まる。

実験との定量的な比較を行うために、圧力に依存する GL 係数を Thuneberg [30], Kita [31] に従って決定する。弱結合でのバルクエネルギー、グラディエントエネルギーの係数は、

$$\alpha = \frac{N(0)}{3} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \equiv \alpha_0 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right), \quad (8)$$

$$-2\beta_1^{WC} = \beta_2^{WC} = \beta_3^{WC} = \beta_4^{WC} = -\beta_5^{WC} = \frac{7\zeta(3)N(0)}{120(\pi k_B T_c)^2}, \quad (9)$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = \frac{7\zeta(3)N(0)(\hbar v_F)^2}{240(\pi k_B T_c)^2} \equiv K \quad (10)$$

である。ここで、 $N(0)$ はフェルミ面での状態密度であり、 v_F はフェルミ速度である。 α_0, K は、GL 理論の適用できる範囲では、強結合による補正は小さいので、弱結合の表式 (8), (10) で評価し、 $N(0), T_c, v_F$ には実験から得られた値を用いる [32]。一方で、 β_i には A 相を安定化させる強結合補正が必要である。この補正として Sauls と Serene [33] により導かれた値を用いる。ただし、この値を用いると、常流動相、A 相、B 相の三重臨界点が 2.85 MPa で与えられ、実験で得られている 2.1 MPa とは定量的に異なるということには注意が必要である。

双極子エネルギーの係数 g_d としては、BCS モデルから Thuneberg [34] により導かれた

$$g_d = \frac{\mu_0}{40} \left(\gamma \hbar N(0) \ln \frac{1.1339 \times 0.45 T_F}{T_c} \right)^2 \quad (11)$$

を用いる。ここで、 μ_0 は真空の透磁率、 γ は磁気回転比、 T_F はフェルミ温度である。磁場によるエネルギーの係数 g_m には弱結合の表式

$$g_m = \frac{7\zeta(3)N(0)(\gamma \hbar)^2}{48[(1 + F_0^\alpha)\pi k_B T_c]^2} \quad (12)$$

を用い、Landau パラメーター F_0^α には Wheatley [35] の値を用いるが、Landau パラメーターに含まれる準粒子の有効質量には Greywall [32] により新しく得られた値を用いる。

本稿で紹介する GL 理論の結果は、東大物性研での実験が行われた圧力 3.2 MPa での GL 係数を用いて得られた。それらの値をまとめると、

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 3.81 \times 10^{50} \text{J}^{-1} \text{m}^{-3}, \\ \beta_1 &= -3.75 \times 10^{99} \text{J}^{-3} \text{m}^{-3}, \\ \beta_2 &= 6.65 \times 10^{99} \text{J}^{-3} \text{m}^{-3}, \\ \beta_3 &= 6.56 \times 10^{99} \text{J}^{-3} \text{m}^{-3}, \\ \beta_4 &= 5.99 \times 10^{99} \text{J}^{-3} \text{m}^{-3}, \\ \beta_5 &= -8.53 \times 10^{99} \text{J}^{-3} \text{m}^{-3}, \\ K &= 4.19 \times 10^{34} \text{J}^{-1} \text{m}^{-1}, \\ g_d &= 5.61 \times 10^{44} \text{J}^{-1} \text{m}^{-3}, \\ g_m &= 1.35 \times 10^{44} \text{J}^{-1} \text{m}^{-3} (\text{mT})^{-2} \end{aligned}$$

となる。

GL 係数の比からコヒーレンス長、ダイポールコヒーレンス長、双極子磁場が決められる。

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{K}{\alpha}} = \sqrt{\frac{K}{\alpha_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}} \equiv \xi_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}}, \quad (13)$$

$$\xi_d \equiv \sqrt{\frac{K}{g_d}}, \quad (14)$$

$$H_d \equiv \sqrt{\frac{g_d}{g_m}}. \quad (15)$$

ゼロ温度でのコヒーレンス長は $\xi_0 \sim 10\text{nm}$ であり、織目構造の変化する長さを特徴付けるダイポールコヒーレンス長は $\xi_d \sim 10\mu\text{m}$ となるので、オーダーが3桁異なる。また、双極子エネルギーと磁場によるエネルギーが同程度になる磁場の大きさである双極子磁場は $H_d \sim 2\text{mT}$ である。通常、NMR による実験ではそれよりも大きな磁場がかけられているため、磁場が織目構造に大きく影響する。

2.2 Anderson-Brinkman-Morel 状態

$^3\text{He-A}$ 相では ABM 状態 [11] が実現している。ABM 状態の Cooper 対は、 $S_z = 0$, $L_z = 1$ の状態にあり、秩序変数は、

$$A_{\mu i} = \frac{\Delta_A}{\sqrt{2}} \hat{d}_\mu (\hat{m} + i\hat{n})_i \quad (16)$$

と単位ベクトル \hat{d} , \hat{m} , \hat{n} を用いて記述することができる。ここで、 Δ_A は ABM 状態の秩序変数の大きさである。 \hat{d} はスピン状態を表す d ベクトルであり、その方向のスピン成分がゼロの Cooper 対が実現している。Cooper 対の軌道角運動量の向きを表す l ベクトルは $\hat{l} \equiv \hat{m} \times \hat{n}$ で定義され、その方向にはポイントノードが存在する。

ABM 状態での双極子エネルギーは定数項を無視すると、

$$f_d = -g_d \Delta_A^2 (\hat{l} \cdot \hat{d})^2 \quad (17)$$

となり、 l ベクトルと d ベクトルを平行に向けるように働く。磁場によるエネルギー密度 (5) は、

$$f_m = g_m \Delta_A^2 (\hat{d} \cdot \mathbf{H})^2 \quad (18)$$

と記述され、磁場に対して d ベクトルを垂直に向けるように働く。

また、超流動速度と \hat{m} , \hat{n} とは

$$v_i = \frac{\hbar}{2m_3} \hat{m} \cdot \nabla_i \hat{n} \quad (19)$$

の関係を持ち、これから Mermin-Ho の関係式 [14]

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\hbar}{4m_3} \epsilon_{ijk} \hat{l}_i (\nabla \hat{l}_j \times \nabla \hat{l}_k) \quad (20)$$

が導かれる。

2.3 “Hydrodynamic”理論

系全体に渡って ABM 状態が実現している場合には、GL 理論のように転移温度近傍という制限を受けずに、織目構造の自由エネルギーを定量的に比較できる “Hydrodynamic”理論が適用できる。“Hydrodynamic”理論は、超流動 ^3He では転移温度がフェルミ温度よりも十分に小さい $T_c \ll T_F$ の関係が成り立つことに基づいている。

GL 理論のグラディエントエネルギーに対応する、 \hat{d} , \hat{m} , \hat{n} の空間変化によるベンディングエネルギーは、 \hat{d} , \hat{l} , \mathbf{v} で記述することができる。 ∇ の 2 次までで、 T_c/T_F のオーダーまでのベンディングエネルギーが求まる [36]。

$$\begin{aligned}
f_b = & \frac{1}{2}\rho_{\perp} (\hat{l} \times \mathbf{v})^2 + \frac{1}{2}\rho_{\parallel} (\hat{l} \cdot \mathbf{v})^2 \\
& + \frac{\hbar}{2m_3} \left[C_{\perp} \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \hat{l}) - (C_{\perp} - C_{\parallel}) (\mathbf{v} \cdot \hat{l}) \hat{l} \cdot (\nabla \times \hat{l}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m_3} \right)^2 \left\{ K_s (\nabla \cdot \hat{l})^2 + K_t [\hat{l} \cdot (\nabla \times \hat{l})]^2 + K_b [\hat{l} \times (\nabla \times \hat{l})]^2 \right. \\
& \left. + \rho_{\text{sp}\perp} \sum_{\mu} (\hat{l} \times \nabla \hat{d}_{\mu})^2 + \rho_{\text{sp}\parallel} \sum_{\mu} [(\hat{l} \cdot \nabla) \hat{d}_{\mu}]^2 \right\}. \tag{21}
\end{aligned}$$

ここで、外部回転の寄与があるときは、 $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ と回転座標系への変換を行えばよい。各項の係数は、弱結合極限でフェルミ液体補正も含めて求められている [36, 37]。さらに、強結合補正や [38]、磁場の影響 [39] も調べられている。よって、“Hydrodynamic”理論から求められるベンディングエネルギーは、ABM 状態であれば温度、圧力によらず適用することができる。

ベンディングエネルギー (21)、双極子エネルギー (17)、磁場によるエネルギー (18) で表される自由エネルギー密度の総和を系全体に渡って積分することで、ABM 状態のみで構成される織目構造の自由エネルギーを比較することができる。バルクエネルギーは、系全体に渡って ABM 状態が実現しているので、全ての織目構造で等しくなっている。

超流動流密度の表式 (7) は、ABM 状態では超流動速度と l ベクトルを用いて記述できる [13, 40]。

$$j_i = \rho_{ij} v_j + \frac{\hbar}{2m_3} C_{ij} (\nabla \times \hat{l})_j. \tag{22}$$

ここで、テンソル ρ , C は、 l ベクトルの向きを z 方向とすると、

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & C_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & C_{\parallel} \end{pmatrix} \tag{23}$$

である [36]。(22) 式の第一項は、通常の超流動速度に比例する超流動流密度であるが、 l ベクトルの方向による非等方性を持つ。一方で、第二項は $\nabla \times \hat{l}$ に比例しており、 l ベクトルの空間変化に伴い流れる超流動流である。この項は、磁性体での磁化 M の空間変化に伴う有効電流 $\nabla \times M$ との類似性を持つ。

2.4 NMR スペクトル

NMR スペクトルの観測を行うことは、超流動 ^3He で実現している織目構造を知るために非常に有効である。今までに、大きな試料で実現している織目構造に応じて様々な NMR スペクトルの形状が観測されており [19]、細い円筒容器でも NMR スペクトルの形状から織目構造を決定できると期待される。本節では、東大物性研における実験で、主に用いられている横磁場共鳴についての定式化を簡単に紹介する。

振動磁場によるスピンと秩序変数の運動は、Leggett 方程式 [41, 42] によって与えられる。ただし、ABM 状態では軌道状態の運動は非常にゆっくりであり、スピンの運動する間に l ベクトルは平衡状態から変化しないと仮定することができる。つまり、秩序変数の運動は d ベクトルの運動とみなすことができる。結局、Leggett 方程式は、スピン、 d ベクトルについて、それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} &= \gamma \mathbf{S} \times \mathbf{H} - \mathbf{d} \times \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{d}} + \mathbf{d} \times \nabla_i \frac{\partial f_b}{\partial (\nabla_i \mathbf{d})}, \\ \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} &= \gamma \mathbf{d} \times \left(\mathbf{H} - \frac{\gamma \mathbf{S}}{\chi} \right)\end{aligned}\quad (24)$$

となる。ここで、 χ は常流動状態の帯磁率である。

通常、NMR による実験では数十 mT の定常磁場がかけられている。これは、双極子磁場 $H_d \sim 2$ mT よりも一桁大きいので、 d ベクトルは磁場に垂直に向いているとみなすことができる。定常磁場を z 軸方向にとると、平衡状態の d ベクトルは、

$$\mathbf{d}_0(\mathbf{r}) = \hat{x} \cos \alpha(\mathbf{r}) + \hat{y} \sin \alpha(\mathbf{r}) \quad (25)$$

と表される。定常磁場に垂直に振動磁場をかけることで d ベクトルは

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}) = \mathbf{d}_0(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r}) \hat{z} \quad (26)$$

のように平衡状態からわずかにずれる。横磁場によるスピン波モードの固有関数 ψ の波動方程式は (24) 式より求められ [4]、

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\gamma^2 H^2 + \Omega_A^2) \psi + \Omega_A^2 (U \psi + D \psi) \quad (27)$$

である。ここで、スピン波ポテンシャル U は、

$$U = - \left\{ (l \times \mathbf{d}_0)^2 + l_z^2 + \xi_d^2 \frac{\rho_{\text{sp}\perp}}{\rho_{\text{sp}\parallel}} \left[(l \times \nabla \alpha)^2 + \frac{\rho_{\text{sp}\parallel}}{\rho_{\text{sp}\perp}} (l \cdot \nabla \alpha)^2 \right] \right\} \quad (28)$$

であり、微分演算子 D は、

$$D \psi = -\xi_d^2 \frac{\rho_{\text{sp}\perp}}{\rho_{\text{sp}\parallel}} \left\{ \Delta \psi + \frac{\rho_{\text{sp}\parallel} - \rho_{\text{sp}\perp}}{\rho_{\text{sp}\perp}} \nabla \cdot [l (l \cdot \nabla) \psi] \right\} \quad (29)$$

を与える。 $\Omega_A = \sqrt{\frac{\gamma^2 \Delta_A^2 g_d}{\chi}}$ は、 $^3\text{He-A}$ 相の縦磁場共鳴周波数である。

バルクの $^3\text{He-A}$ 相の平衡状態では、 $l \parallel d \perp H$ であるので、 $U = 0$, $D\psi = 0$ となり、横磁場共鳴周波数は

$$\omega_{\text{bulk}}^2 = \gamma^2 H^2 + \Omega_A^2 = f_L^2 + \Omega_A^2, \quad (f_L \gg \Omega_A) \quad (30)$$

で与えられる。横磁場共鳴周波数は、Larmor 周波数 $f_L = -\gamma H$ から $\frac{\Omega_A^2}{2f_L}$ だけシフトしている。このシフトは、Osheroff ら [43] によって初めて観測された。ダイポールコヒーレンス長 ξ_d よりも十分大きな半径を持つ円筒容器中の織目構造では、 $l \parallel d \perp H$ となる領域が大部分を占めるので、 ω_{bulk} の周波数に NMR スペクトルのメインピークが観測される。

織目構造の l ベクトルと d ベクトルが平行にならない領域からのスピン波ポテンシャル U は引力として働き、Schrödinger 方程式に似た

$$E\psi = (D + U)\psi \quad (31)$$

で与えられる固有値 $E < 0$ のスピン波モードの束縛状態が存在する。このスピン波モードの共鳴周波数は、

$$\omega^2 = \omega_{\text{bulk}}^2 + E\Omega_A^2 = \gamma^2 H^2 + (1 + E)\Omega_A^2 = \gamma^2 H^2 + R_t^2 \Omega_A^2 \quad (32)$$

で与えられ、織目構造による NMR スペクトルのサテライトピークとして観測される。このサテライトピークの周波数、すなわち、 R_t^2 が織目構造を決定する有力な情報となる。定性的には $l \parallel d$ からのずれが大きい織目構造ほど、 R_t^2 の値は小さくなる。

3 円筒容器中の織目構造

半径 $50 \mu\text{m}$ と $115 \mu\text{m}$ 、高さ数十 mm の二種類の円筒容器中に $^3\text{He-A}$ 相を閉じ込め、円筒軸方向に定常磁場をかけた横磁場 NMR を用いて、外部回転による織目構造の変化を観測する実験が行われた [21, 22]。実験により観測された NMR スペクトルの回転変化は、低回転下では織目構造の転移として [12]、高回転下では渦の侵入として理解された [27]。

本章では、まず、円筒容器中で形成可能な織目構造を列挙し、実現の可能性について議論する。次に、A 相の織目構造に対して妥当であるスピン状態と軌道状態の分離を行うことで、自由エネルギーの表式を簡略化できることを紹介する。続いて、 l ベクトルが円筒容器の壁に垂直に向くという境界条件と、それから導かれる織目構造の渦度について述べる。これらの準備の後、GL 理論により、安定な織目構造を求める数値計算の手法を紹介する。その結果を基に、半径 $50 \mu\text{m}$ 、 $115 \mu\text{m}$ の円筒容器で静止下および低回転領域で実現している織目構造を実験結果を踏まえて議論する。さらに、高回転領域での渦の侵入についての“Hydrodynamic”理論と実験の比較も紹介する。

3.1 可能な織目構造

超流動 ^3He の秩序変数の成分 $A_{\mu i}$ は軌道状態によって壁による影響が異なる [13]。準粒子が鏡面反射する“specular”な壁では、壁に垂直な運動量を持つ成分はコヒーレンス長のオーダーで空

間変化し、壁ではゼロとなる。一方で、壁に平行な運動量を持つ成分は壁の影響を受けない。準粒子がランダムな方向に散乱される “diffusive” な壁でも、壁に垂直な運動量を持つ成分が壁でゼロとなるように空間変化することは specular な壁と同様である。ただし、diffusive な壁の場合には、壁に平行な運動量を持つ成分も、より短い距離で急激に抑圧される。いずれの壁の場合でも、壁に垂直な運動量を持つ成分が遠くから抑圧されるため、 $^3\text{He-A}$ 相の壁近傍では、(16) 式の m ベクトル、 n ベクトルが壁に平行な方向を向くことになり、それらに垂直な l ベクトルは壁に垂直な方向を向く。壁による影響は、自由エネルギーに凝縮エネルギーのオーダーで寄与するので、双極子相互作用、磁場による相互作用に比べて大きく、 $^3\text{He-A}$ 相では常に壁に垂直に l ベクトルが向いていると考えてよい。一方で、 d ベクトルは壁が非磁性である限り影響を受けない。

l ベクトルが壁に垂直に向くため、円筒容器中で形成可能な織目構造は制限されている。 l ベクトルの織目構造としては、Mermin-Ho (MH) texture [14], radial disgyration (RD) [15, 13], Pan-Am (PA) texture [16] が形成可能であることが知られている (図 1 上部)。

MH texture の l ベクトルは、円筒中心では円筒軸方向を向いた状態から、ダイポールコヒーレンス長程度の距離に渡って連続的に変化し、壁の位置では壁と垂直に向く。 l ベクトルの特異点を持たないので、系全域に渡って ABM 状態で記述できることがわかる。超流動 ^3He の渦度は量子化されておらず、MH texture の渦度も周回積分する経路によって異なり、壁に沿った経路を周回積分した場合に量子化された値 1 が得られる。有限の渦度を持つことは、自発的超流動流が存在する織目構造であることを意味している。

RD は円筒中心に、コヒーレンス長程度の半径の l ベクトルの特異点を持っている。今回の議論では、静止下での RD の安定性に興味があるため、特に、渦度ゼロの RD を考える。有限の渦度を持つ RD も l ベクトル周りの m ベクトル、 n ベクトルの回転によって形成可能であるが、自発的超流動流が存在するため静止下では安定とならない。渦度ゼロの RD の特異点では、(16) 式の n ベクトルがゼロとなった、polar 状態

$$A_{\mu i} = \Delta_p \hat{d}_\mu \hat{m}_i \quad (33)$$

が実現していることが指摘されている [44]。ここで、 Δ_p は polar 状態の秩序変数の大きさである。

PA texture は RD の特異点が 2 つに分かれて、壁に位置した構造をしている。凝縮エネルギーの損失を伴う特異点が壁にあるので、specularity が低く、秩序変数が抑圧されやすい壁であるほど、PA texture が MH texture, RD に比べて安定化しやすくなる。specularity は、壁で準粒子が鏡面反射する確率で、壁の滑らかさを示しており、 ^4He 原子で壁を覆うことで大きくすることができる。

l ベクトルの織目構造と対応させて、 d ベクトルの織目構造としては、axial (ax) 型、radial disgyration (rd) 型、hyperbolic (hb) 型が形成可能であると考えられる (図 1 下部)。ただし、 l ベクトルの特異点が ABM 状態に対する特異点であるのとは異なり、 d ベクトルの特異点はスピン状態が定義できない、超流動状態に対する特異点である。そのため、 d ベクトルの特異点では、凝縮エネルギーがゼロとなる大きなエネルギー損失が起こるので、特異点を持つ rd 型は実現しないと考えることができる。ax 型は、MH texture, RD と組み合わせることで、 $l \parallel d$ の領域を

増やすことができ、双極子エネルギーが小さくなる。hb 型の d ベクトルは、円筒軸に垂直な面内にあり、壁から離れた所では一方向に揃った構造をしているので、磁場によるエネルギー、グラディエントエネルギーが小さくなる。PA texture に ax 型の d ベクトルを組み合わせても、双極子エネルギーは小さくならないので、この組み合わせは実現しない。結局、織目構造の候補として、MH-ax, MH-hb, RD-ax, RD-hb, PA-hb の組み合わせを挙げるができる。

Buchholtz と Fetter [45] により、円筒容器中での MH-ax, RD-rd, RD と円筒軸に垂直な面内方向に揃った d ベクトルの組み合わせについて、自由エネルギーの変分法による比較が行われた。その結果、ダイポールコヒーレンス長よりも十分大きな半径の円筒容器で、円筒軸方向に双極子磁場よりも十分大きな磁場がかけられているときには、静止下で RD-rd が安定であることが導かれた。このことから、実験で観測された低回転での織目構造の転移は、RD から自発的超流動流が存在する MH への転移だと考えられる。ただし、Buchholtz と Fetter の研究では、特異点である RD の渦芯は London 近似で扱われているが、そこでは polar 状態が実現する可能性があることには注意が必要である。

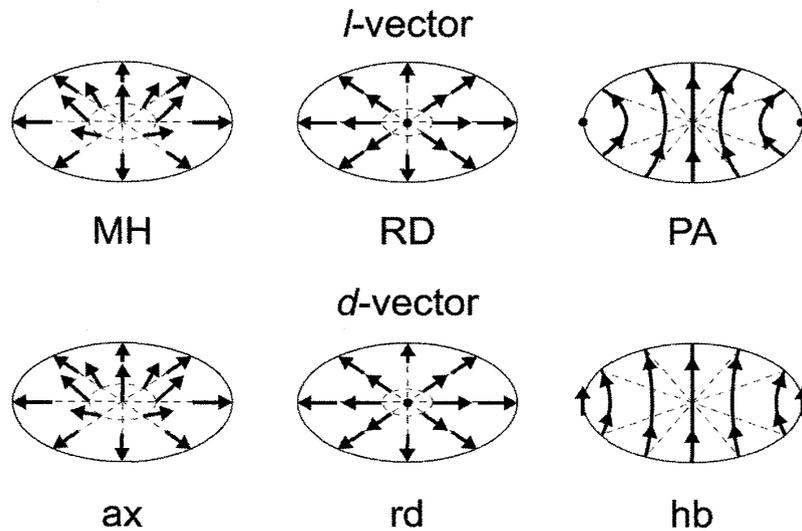


図 1: 円筒容器中で形成可能な l ベクトルと d ベクトルの織目構造の模式図。 l ベクトル (上部) については、左から Mermin-Ho (MH) texture, radial disgyration (RD), Pan-Am (PA) texture を表し、 d ベクトル (下部) については、左から axial (ax) 型、radial disgyration (rd) 型、hyperbolic (hb) 型を表す。RD, PA, rd のドットは、それぞれのベクトルの特異点を表す。

3.2 スピン、軌道状態の分離

$^3\text{He-A}$ 相での秩序変数はスピン状態と軌道状態を分離することができる。

$$A_{\mu i} = \hat{d}_\mu A_i. \quad (34)$$

スピン状態は単位ベクトルである d ベクトル \hat{d} を用いて記述できる。軌道状態は複素ベクトル A により記述され、秩序変数の大きさ、位相もこれに含まれている。この表記は ABM 状態だけで

なく、RD の特異点で実現することが指摘されている polar 状態も記述することができるので、前節で挙げた織目構造の自由エネルギーを比較するには十分である。このような、スピン、軌道状態の分離をすることにより、秩序変数の自由度を 18 から 9 へ減少させることができる。

(34) 式を用いると、バルクエネルギー密度 (2) は単位ベクトルで記述できるスピン状態には依存しなくなる。

$$f_b = -\alpha A_i^* A_i + \beta_{13} A_i^* A_i^* A_j A_j + \beta_{245} A_i^* A_j^* A_i A_j. \quad (35)$$

ここで、 $\beta_{13} = \beta_1 + \beta_3$, $\beta_{245} = \beta_2 + \beta_4 + \beta_5$ である。2.1 節で Sauls と Serene [33] により求められた β_i の強結合補正を用いると、三重臨界点の圧力が正しく与えられないことを注意しておいたが、 β_{13} , β_{245} に関しては、Sauls と Serene の強結合補正と、Choi ら [46] により様々な実験結果から考察された強結合補正はよい一致を示す。グラディエントエネルギー密度 (3) は、

$$f_g = K_1 \left(\partial_i \hat{d}_\mu A_j \right)^* \left(\partial_i \hat{d}_\mu A_j \right) + K_2 \left(\partial_i \hat{d}_\mu A_j \right)^* \left(\partial_j \hat{d}_\mu A_i \right) + K_3 \left(\partial_i \hat{d}_\mu A_i \right)^* \left(\partial_j \hat{d}_\mu A_j \right) \quad (36)$$

と記述できる。

同様の表記を双極子エネルギーと磁場によるエネルギーにも適用する。双極子エネルギー密度 (4) は、

$$f_d = g_d \left[\hat{d}_\mu \hat{d}_\nu \left(A_\mu^* A_\nu + A_\nu^* A_\mu \right) - \frac{2}{3} A_\nu^* A_\nu \right] \quad (37)$$

と記述され、磁場によるエネルギー密度 (5) は、

$$f_m = g_m A_i^* A_i \left(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{H} \right)^2 \quad (38)$$

と記述される。

l ベクトルは複素ベクトル \mathbf{A} を用いて、次のように定義できる。

$$l_i \equiv -i \epsilon_{ijk} \frac{A_j^* A_k}{|\mathbf{A}|^2}, \quad (39)$$

$$|\mathbf{A}|^2 \equiv A_i^* A_i. \quad (40)$$

ここで、 ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルである。このように定義された l ベクトルは、polar 状態ではゼロベクトルとなり、ABM 状態では単位ベクトルとなる。超流動流密度 (7) は、スピン状態には依存せず、

$$j_i = \frac{4m_3}{\hbar} \text{Im} \left[K_1 A_j^* \nabla_i A_j + K_2 A_j^* \nabla_j A_i + K_3 A_i^* \nabla_j A_j \right] \quad (41)$$

となる。

3.3 境界条件

円筒容器の壁では、 l ベクトルが壁と垂直に向くが、 d ベクトルは制限を受けない。つまり、複素ベクトル A が制限を受けることになる。秩序変数を軌道角運動量の z 成分の基底で展開すると、

$$\Delta(\mathbf{k}) = A_{\mu i} (\sigma_{\mu} i \sigma_y) \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,i}(\hat{\mathbf{k}}) \equiv A_{\mu i} (\sigma_{\mu} i \sigma_y) \hat{k}_i \quad (42)$$

となる。ここで、 $\mu = x, y, z$ であり、 $i = -1, 0, +1$ である。直交座標での基底との関係は、

$$\hat{k}_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{k}_x \pm i \hat{k}_y), \quad \hat{k}_0 = \hat{k}_z, \quad (43)$$

$$A_{\mu\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\mu x} \mp i A_{\mu y}), \quad A_{\mu 0} = A_{\mu z} \quad (44)$$

となる。

スピン状態と軌道状態の分離 (34) を行い、 l ベクトルを A_i ($i = -1, 0, 1$) で記述すると、

$$\begin{aligned} l_x &= \frac{\sqrt{2}}{|A|^2} \text{Re} [(A_+ + A_-) A_0^*], \\ l_y &= \frac{\sqrt{2}}{|A|^2} \text{Im} [(-A_+ + A_-) A_0^*], \\ l_z &= \frac{|A_+|^2 - |A_-|^2}{|A|^2} \end{aligned} \quad (45)$$

となる。円筒容器の壁での境界条件を議論するために、円筒座標系で書き直すと、

$$\begin{aligned} l_r &= \frac{\sqrt{2}}{|A|^2} \{ \text{Re} [(A_+ + A_-) A_0^*] \cos \theta + \text{Im} [(-A_+ + A_-) A_0^*] \sin \theta \}, \\ l_{\theta} &= \frac{\sqrt{2}}{|A|^2} \{ -\text{Re} [(A_+ + A_-) A_0^*] \sin \theta + \text{Im} [(-A_+ + A_-) A_0^*] \cos \theta \}, \\ l_z &= \frac{|A_+|^2 - |A_-|^2}{|A|^2} \end{aligned} \quad (46)$$

となる。

ここからの議論では、壁に特異点を持つ PA texture は考えない。壁では l ベクトルが壁と垂直に向くので、 $l_r = \pm 1, l_{\theta} = l_z = 0$ となる。このとき、壁での秩序変数 $A_i = a_i e^{i w_i \theta}$ には

$$\begin{aligned} a_0 &= \pm \sqrt{2} a_+ = \pm \sqrt{2} a_-, \quad (l_r = \pm 1), \\ w_+ &= w_0 - 1 = w_- - 2 \end{aligned} \quad (47)$$

の条件が課される。ここで、 a_0 を実数に選べば、一般性を失わずに a_+, a_- も実数とすることができる。また、 w_i は軌道角運動量の成分ごとの位相の巻き数を表す整数である。壁での秩序変数の比率だけではなく、系全体の位相の巻き数の組み合わせも決まることが重要であり、このことにより形成可能な織目構造が決まる。この組み合わせは、軸対称な渦構造の必要条件でもある [47]。境界条件 (47) の詳細な導出は Appendix に記す。

超流動速度

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\hbar}{2m_3} \frac{\text{Im} [A_i^* \nabla A_i]}{|A|^2} \quad (48)$$

を用いて、織目構造の量子化された渦度は

$$n \equiv \frac{2m_3}{h} \oint_R \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (49)$$

で定義される。ここで、 \oint_R は円筒容器の壁に沿った周回積分を示す。円筒中心に渦が 1 本だけ存在する状況を考えれば、位相の巻き数の組 $\langle w_+, w_0, w_- \rangle = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $\langle -2, -1, 0 \rangle$ はそれぞれ渦度 1, -1 の MH texture を表す。円筒中心では、位相の巻き数がゼロの成分のみが有限であり、 $n = \pm 1$ に対応して $l_z = \pm 1$ となる。また、 $\langle w_+, w_0, w_- \rangle = \langle -1, 0, 1 \rangle$ は渦度 0 の RD を表し、渦芯では polar 状態が実現する。それ以外の $\langle w_+, w_0, w_- \rangle = \langle m-1, m, m+1 \rangle$ は渦度 m の RD を表し、渦芯では秩序変数がゼロとなり、超流動状態の特異点となる。

3.4 数値計算

GL 理論による数値計算は、円筒軸方向に一様な織目構造を仮定した円筒座標系で行われた [12]。実験で使われた円筒試料の半径が $50 \mu\text{m}$, $115 \mu\text{m}$ であるのに対して、高さは数十 mm であり [20, 21, 22]、ダイポールコヒーレンス長よりも十分長いので、円筒容器の端から十分に離れた位置では、円筒軸方向に一様な織目構造が形成されていると考えることができる。円筒座標系を使用する利点は、円筒中心付近の渦構造を細かく見られること、壁での境界条件の扱いが容易であることである。ただし、円筒座標系では、特異点が壁にある PA texture を扱えないという欠点がある。このため、PA texture については、実験が行われた半径での数値計算は行わず、実験により得られた NMR スペクトルと比較して、定性的な議論を行うにとどめた。

数値計算を行う上で、円筒容器の壁では、specular な壁での境界条件

$$A_{\mu r} = \frac{\partial}{\partial r} A_{\mu z} = 0, \quad K_2 \frac{\partial}{\partial r} A_{\mu \theta} = K_3 \frac{1}{R} A_{\mu \theta} \quad (50)$$

を課した。ここで、 $A_{\mu r} = A_{\mu x} \cos \theta + A_{\mu y} \sin \theta$, $A_{\mu \theta} = -A_{\mu x} \sin \theta + A_{\mu y} \cos \theta$ であり、 R は円筒容器の半径である。この境界条件は、壁に垂直な方向への超流動流密度がゼロとなる条件でもある [45]。MH texture, RD は壁近傍での l ベクトルの構造が同じであるため、相対的な自由エネルギーは specularity により異なる境界条件の詳細には依らない。

エネルギー的に安定となる自由エネルギーの極小値は、数値緩和法により求めた。自由エネルギー (6) の変分

$$\delta F = \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{d}_\mu} \right) \delta \hat{d}_\mu + \left(\frac{\partial f}{\partial A_i} \right) \delta A_i \right] d^3 \mathbf{r} \quad (51)$$

の $\delta \hat{d}_\mu$, δA_i として、

$$\delta \hat{d}_\mu = -c \frac{\partial f}{\partial \hat{d}_\mu}, \quad \delta A_i = -c \frac{\partial f}{\partial A_i^*} \quad (52)$$

を用いれば、

$$\delta F = -c \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{d}_\mu} \right)^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial A_i} \right|^2 \right] d^3 \mathbf{r} \leq 0 \quad (53)$$

となる。ここで、 f は (6) 式の被積分関数である自由エネルギー密度、 c は正の定数である。結局、

$$\hat{d}_\mu(n+1; \mathbf{r}) = \hat{d}_\mu(n; \mathbf{r}) - c \frac{\partial f}{\partial \hat{d}_\mu}, \quad A_i(n+1; \mathbf{r}) = A_i(n; \mathbf{r}) - c \frac{\partial f}{\partial A_i^*} \quad (54)$$

に従って、自由エネルギー密度の偏微分がゼロ近傍に収束するまで、計算の繰り返し回数 n を増加させることで、自由エネルギーの極小値を得ることができる。

数値パラメーターは、東大物性研での実験に合わせて、2.1 節にまとめた圧力 3.2 MPa での GL 係数の値を用い、円筒軸方向に 21.6 mT の磁場がかかっている状況を想定した。温度は A 相の過冷却が観測されている $0.7T_c$ までの計算を行った。

3.5 低回転領域

本節では、GL 理論により導かれた、半径 $50 \mu\text{m}$ と $115 \mu\text{m}$ の円筒容器で、静止下、および、数 rad/s の低回転下で安定な織目構造を紹介する。半径 $50 \mu\text{m}$ の円筒容器では、静止下で RD-hb が、回転下で MH-hb が安定となる。一方で、半径 $115 \mu\text{m}$ の円筒容器では、静止下で安定な織目構造は RD-ax である。これらの結果と実験で得られた NMR スペクトルを比較する。

3.5.1 半径 $50 \mu\text{m}$

まず、半径 $50 \mu\text{m}$ の円筒容器中で安定となる織目構造を示す。

静止下で安定となる織目構造は、渦度 0 の RD-hb である。温度 $T/T_c = 0.95$ での RD-hb の織目構造と円筒軸方向への超流動流を図 2 に示す。ここで、円筒軸方向を z 軸にとっている。円筒中心へ向かうにつれて、コヒーレンス長程度の距離で l ベクトルが短くなり、円筒中心では l ベクトルの大きさがゼロになる polar 状態が実現している。 l ベクトル、 d ベクトルともに円筒軸に垂直な x - y 面内に倒れており、 d ベクトルは円筒中心周りのダイポールコヒーレンス長程度の半径では、ほぼ x 方向に揃っている。このため、磁場によるエネルギーと、 d ベクトルのグラディエントエネルギーを小さくすることができる。この結果は、Buchholtz と Fetter [45] の半径の小さい円筒容器では、RD と円筒軸に垂直な面内方向に揃った d ベクトルの組み合わせが安定であるという結果と定性的に一致している。ただし、今回得られた織目構造の方が、円筒中心で polar 状態が実現していること、 l ベクトル、 d ベクトルともに双極子エネルギーを減少させるために、両ベクトルの成す角が小さくなるように変形していることにより、さらに自由エネルギーが低い織目構造となっている。

この織目構造では、 x - y 面内には超流動流は存在しない。しかし、円筒軸方向には自発的な超流動流が存在する。このことは、双極子相互作用により、hb 型の d ベクトルにつられて、 l ベクトル

の向きが動径方向からはずれることによって、 $(\nabla \times \hat{l})_z$ が有限となるため、(22) 式より明らかである。ただし、円筒軸方向への超流動流のみが存在するのは、円筒軸方向に一様な織目構造が形成される円筒の内部でのことであり、バルクの超流動 ^3He とつながっている円筒容器の端では異なった状況になるはずである。

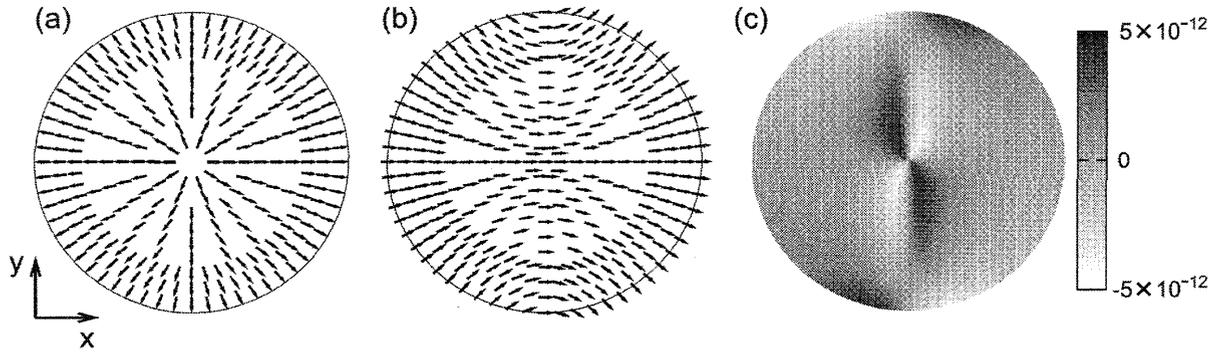


図 2: 静止下で安定な RD-hb の (a) l ベクトル、(b) d ベクトルの織目構造と (c) 円筒軸方向の超流動流密度。 $R=50 \mu\text{m}$, $T/T_c=0.95$ での計算結果を示す。(a), (b) の矢印がそれぞれのベクトルの x, y 成分を表し、 z 成分は無い。(c) のグレイスケールが円筒軸方向の超流動流の向きと大きさを表す。単位は $\text{J m}^{-3} (\text{m/s})^{-1}$ 。左下に本文中で述べる円筒容器の座標を示している。

円筒容器をわずかな角速度で回転させると、マイナスカイラルの運動量 $\hat{k}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{k}_x - i\hat{k}_y)$ を持つ成分 A_- が連続的に増加し、 l ベクトルは z 軸の負方向の成分を持つようになる。これは、位相の巻き数が 1 であるマイナスカイラル成分が、回転により誘起されるためである。

もう少し回転の角速度を上げると、安定な織目構造は渦度 1 の MH-hb へと一次転移する。温度 $T/T_c = 0.95$ のときに得られた MH-hb の織目構造を図 3 に示す。織目構造の渦度が、0 から 1 へと変化しており、回転によって渦度 1 を持つ渦構造が円筒容器に侵入したと考えることもできる。 l ベクトルは、円筒中心では z 軸方向を向き、壁の位置では動径方向を向く。 d ベクトルは、RD-hb と同様に、主として x 方向を向いているが、双極子相互作用により、わずかに z 軸方向の成分も持つ。つまり、磁場によるエネルギーと、 d ベクトルのグラディエントエネルギーを RD-hb とほとんど変えずに、角運動量を持つ MH texture に l ベクトルの織目構造が転移している。MH-hb も $(\nabla \times \hat{l})_z$ が有限であるため、回転軸周りの超流動流だけでなく、円筒軸方向にも超流動流が存在する。注意すべき点は、 l ベクトルの空間変化が、 x 軸方向にはダイポールコヒーレンス長程度のスケールであるのに対して、 y 軸方向には円筒容器の半径のスケールでゆっくり変化していることである。これは、 d ベクトルが基本的に x 方向に向いているため、 x 方向では双極子相互作用が働くが、常に l ベクトルと d ベクトルが垂直である y 方向では双極子相互作用が働かないからである。

自由エネルギーの回転変化を詳細に見ると、図 4 挿入図に示すように、回転とともに、渦度 0 の RD-hb (実線) は自由エネルギーが増加し、渦度 1 の MH-hb (破線) は自由エネルギーが減少する。これらの自由エネルギーが臨界角速度 Ω_c で逆転し、織目構造の一次転移が起こる。図 4 に示すように、臨界角速度 Ω_c は温度上昇とともに増加し、転移温度近傍では RD-hb が高回転

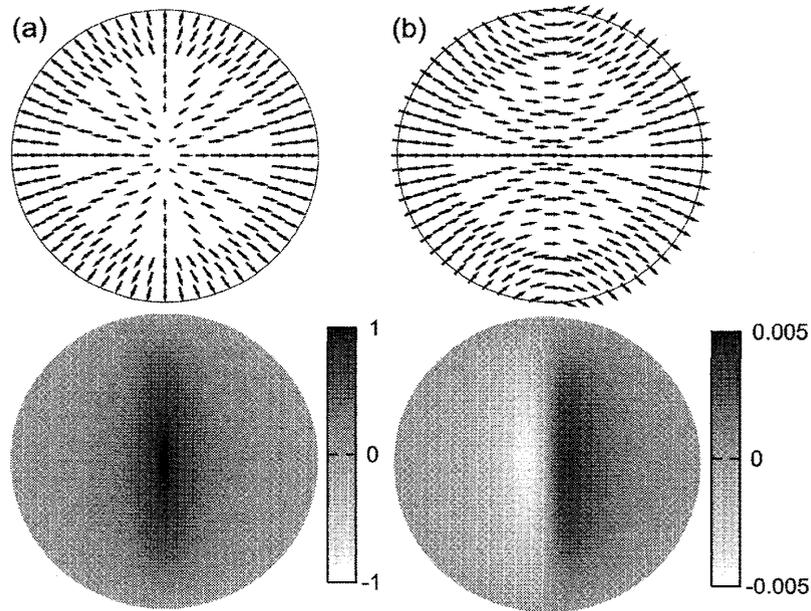


図 3: 回転下で安定な MH-hb の (a) l ベクトルと (b) d ベクトルの織目構造。 $R=50\mu\text{m}$, $T/T_c=0.95$ での計算結果を示す。矢印がそれぞれのベクトルの x, y 成分を表し (上部)、グレイスケールで z 成分を表す (下部)。

まで安定となる。これは、温度上昇とともにコヒーレンス長が $\xi \propto (1 - T/T_c)^{-1/2}$ に比例して長くなるため、RD-hb のコヒーレンス長程度の半径の渦芯周りのグラディエントエネルギーの損失 $\sim \ln(R/\xi)$ [45] が減少することが原因である。

ここで、これらの計算結果の妥当性を、実験で得られた NMR スペクトルについて議論することで評価する。静止下での NMR スペクトルのサテライトピークの位置 [25] は、RD-hb から計算されるサテライトピークの位置 $R_t^2 \sim 0.8$ [29] とよく一致している。数値計算を行わなかった PA texture が構成する PA-hb の d ベクトルは、定常磁場に垂直な $x-y$ 面内を向いている。さらに、考えている円筒容器の半径はダイポールコヒーレンス長よりも大きいので、 l ベクトルと d ベクトルはほぼ平行になる。つまり、PA-hb が実現していれば、 $l \parallel d \perp H$ となる領域が大部分を占めるので、実験結果とは異なり、サテライトピークは観測されないと考えることができる。また、RD-hb は角運動量を持っていないため、回転方向に対して対称な変化をするという実験結果とも一致している [25]。

転移後の織目構造が MH-hb であるということは、Takagi [27] により “hydrodynamic” 理論を用いて導かれた、低回転領域では MH-hb が実現するという結果ともコンシステントである。Takagi [27] により導かれた MH-hb のサテライトピークの位置 $R_t^2 = 0.31$ は、転移後に観測されるサテライトピークの位置とよく一致している。RD-hb から MH-hb に一次転移する臨界角速度は、実験では $R_t^2 \sim 0.8$ のサテライトピークが消失する角速度として決めることができるが、その温度依存性は、GL 理論の計算結果と定量的には一致していない [25]。これは、低温領域への GL 理論の適用による定量性の問題であると考えられる。しかしながら、転移前の織目構造が RD-hb であること、転移後の織目構造が MH-hb であることは、実験結果と一致していることを強調しておく。

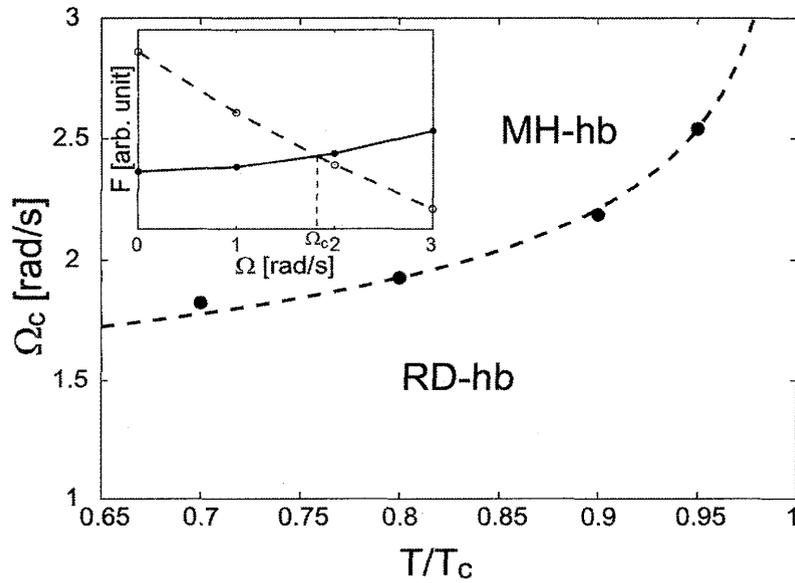


図 4: RD-hb から MH-hb へ織目構造の転移が起こる臨界角速度 Ω_c の温度変化。丸印が計算結果、点線はガイドラインである。挿入図は $T/T_c=0.7$ での RD-hb (実線) と MH-hb (破線) の自由エネルギーの温度変化。 $\Omega_c=1.8$ rad/s で織目構造の転移が起こる。

3.5.2 半径 $115\mu\text{m}$

次に、半径 $115\mu\text{m}$ の円筒容器中で安定となる織目構造を示す。

静止下で安定となる織目構造は渦度 0 の RD-ax である。温度 $T/T_c = 0.95$ での RD-ax の織目構造を図 5 に示す。半径 $50\mu\text{m}$ の円筒容器の場合との大きな違いは、 d ベクトルの織目構造が hb 型ではなく、ax 型となっていることである。 d ベクトルは、円筒中心では z 軸方向を向いた状態から、磁場コヒーレンス長 $\xi_m = \sqrt{\frac{K}{g_m H^2}} \sim 1\mu\text{m}$ 程度の距離に渡って変化して、動径方向を向いた状態になる。円筒中心には polar 状態の特異点があり、 l ベクトルの大きさはゼロとなるが、双極子相互作用により、特異点からダイポールコヒーレンス長程度の半径内に位置する l ベクトルは z 軸方向の成分を持っている。つまり、円筒中心からダイポールコヒーレンス長 ξ_d よりも離れた位置では、 l ベクトル、 d ベクトルともに動径方向を向き、 $l \parallel d$ となるので、 $\pi(R - \xi_d)^2 L$ の体積で双極子エネルギーを小さくすることができる。ここで、 L は一様な織目構造が形成されていると考えられる円筒領域の長さである。RD-ax では、双極子エネルギーは、円筒容器の半径 R が大きくなるほど減少することがわかる。それに対して、RD-hb の自由エネルギーのうち、 $\pi\xi_m^2 L$ の体積で磁場によるエネルギーが、 d ベクトルが一方向に揃う $\pi\xi_d^2 L$ の体積でグラディエントエネルギーが RD-ax に比べて小さくなる。これらの自由エネルギーの利得は円筒容器の半径には依存していないので、大きい半径の円筒容器では RD-ax の方が安定になる。この結果は、Buchholtz と Fetter [45] の半径の大きい円筒容器では、RD-rd が安定であるという結果と定性的に一致している。ただし、今回得られた安定な織目構造の d ベクトルは、rd 型ではなく ax 型であり、円筒中心で磁場によるエネルギーを損することになるが、超流動状態の特異点を持つ rd 型よりは安定となっている。

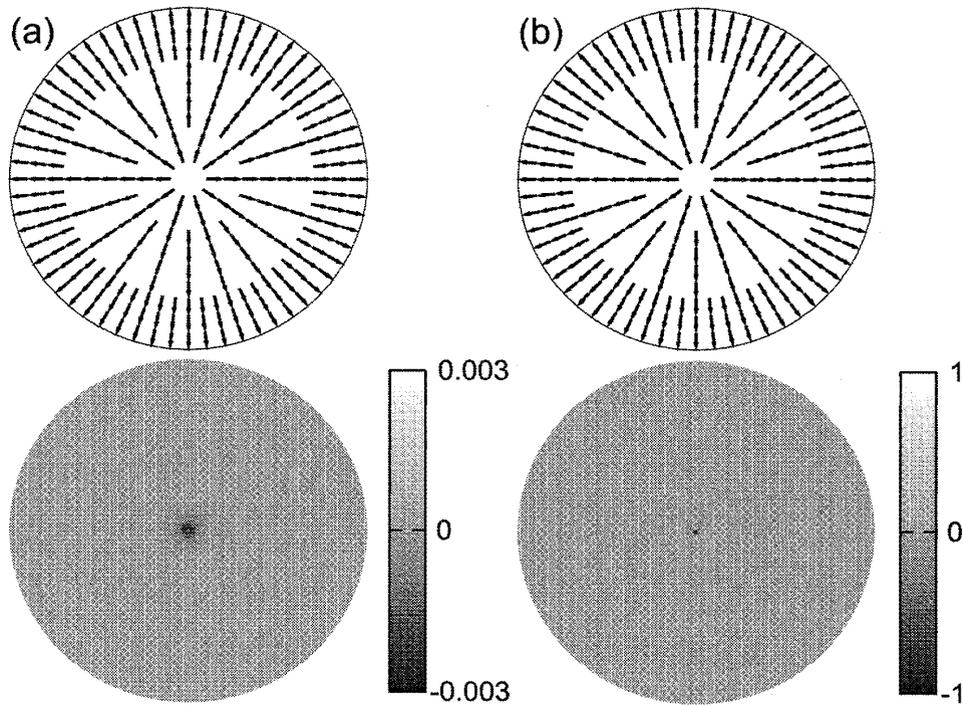


図 5: 静止下で安定な RD-ax の (a) l ベクトルと (b) d ベクトルの織目構造。 $R=115\mu\text{m}$, $T/T_c=0.95$ での計算結果を示す。矢印がそれぞれのベクトルの x, y 成分を表し (上部)、グレイスケールで z 成分を表す (下部)。

RD-ax では、円筒中心での d ベクトルの方向に l ベクトルも z 軸方向の成分を持つため円筒軸周りに自発的な超流動流が存在する。図 5 のように、 d ベクトルが z 軸の負方向に向いている場合を例にとると、 l ベクトルも z 軸の負方向の成分を持つようになるということは、位相の巻き数が 1 であるマイナスカイラル成分 A_- が、位相の巻き数が -1 であるプラスカイラル成分よりも大きくなっていることを意味している。よって、円筒軸周りに正方向への超流動流が存在する。織目構造の軌道角運動量の方向は l ベクトルが z 軸の正負どちらの成分を持つかに依存しており、それを引き起こす円筒中心での d ベクトルの向きによって軌道角運動量の方向が決まることになる。この場合にも、円筒容器の壁に沿っての周回積分から得られる渦度は 0 である。一方で、円筒軸方向への超流動流は、 $(\nabla \times \hat{i})_z$ がゼロとなるため存在しない。

RD-ax (実線)、MH-hb (破線)、MH-ax (一点鎖線) の外部回転による自由エネルギーの変化を図 6 に示す。静止下で安定な RD-ax は、回転によって位相の巻き数 1 を持つマイナスカイラル成分が誘起され、 l ベクトルは円筒容器の全領域で z 軸の負方向の成分を持つようになる。前述したように、RD-ax は軌道角運動量を持つ織目構造ではあるが、渦度が 0 であるので、回転によって自由エネルギーは増加する。低回転下で安定となる織目構造は、半径 $50\mu\text{m}$ の円筒容器の場合と同様に、渦度 1 の MH-hb である。臨界角速度 Ω_c で RD-ax から MH-hb へと一次転移して、渦度 1 の渦構造が侵入するとともに、 d ベクトルの織目構造も ax 型から hb 型へと変化する。図 6 からわかるように、静止下では、MH-ax の方が MH-hb よりも自由エネルギーが小さいが、この関係は回転によって逆転する。静止下で MH-ax の自由エネルギーが小さいのは、RD-hb と RD-ax

についての議論と同じで、円筒容器の半径が大きいほど MH-ax の双極子エネルギーが小さくなるからである。回転によって自由エネルギーの逆転が起きるのは、MH-ax の l ベクトルの空間変化は双極子相互作用によってダイポールコヒーレンス長で制限されているのに対して、図3に示すように、MH-hb の y 方向に位置する l ベクトルは壁までに y 方向を向けばよいからである。このため、MH-hb の l ベクトルは超流動流を伴うように変化しやすく、回転によって、より自由エネルギーが小さくなる。大きな半径の円筒容器中では、静止下での MH-ax と MH-hb の自由エネルギーの差が大きくなるので、自由エネルギーの逆転が起こらず、回転下で MH-ax が安定になると予測することができる。

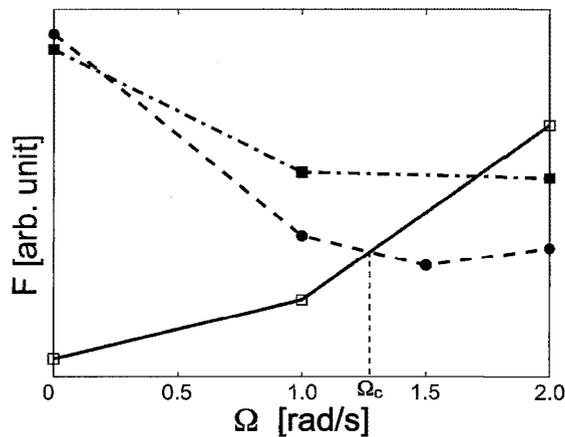


図 6: $R=115 \mu\text{m}$, $T/T_c=0.95$ での自由エネルギーの回転変化。RD-ax (実線)、MH-hb (破線)、MH-ax (一点鎖線) を示す。静止下では RD-ax が安定であり、臨界角速度 Ω_c で MH-hb に一次転移する。

ここで、実験で得られた NMR スペクトルに基づいて、これらの計算結果を議論する。半径 $115 \mu\text{m}$ の一本の円筒容器を用いた実験において、低回転下で織目構造の転移があると判断されたのは、NMR スペクトルのメインピーク強度の急激な変化が観測されたからである [21]。試料が一本であるため、サテライトピークのシグナルは小さく、その位置から織目構造を特定するのは難しい。しかし、静止下で形成された織目構造の NMR スペクトルのメインピーク強度が回転方向によって異なる変化をすることが観測されており [20, 22]、円筒中心での d ベクトルの方向によって異なる方向に軌道角運動量を持つという RD-ax の特徴と一致している。一方で、PA-hb は軌道角運動量を持たないので、この実験事実とは合わない。計算された RD-ax から MH-hb への一次転移が起こる臨界角速度 $\Omega_c = 1.3 \text{ rad/s}$ も、メインピーク強度が急激に変化する角速度 $\sim 0.5 \text{ rad/s}$ とオーダーとしては一致している。

3.6 高回転領域

半径 $50 \mu\text{m}$ の円筒容器では、高回転下においても、MH texture への渦の侵入と見られる NMR スペクトルの変化は観測されていない。これは、系の断面積が小さいため、渦が侵入する角速度まで回転をかけられないことが原因である。系の断面積が大きい、半径 $115 \mu\text{m}$ の円筒容器では、

MH texture が安定となっている状態にさらなる回転を加えると、角速度 3.2~4.8 rad/s で NMR スペクトルのメインピーク強度が大きく減少し、サテライトピークが現れることが観測されている [20, 22, 23]。メインピーク強度が大きく変化している角速度の範囲では、円筒容器の端につながっているバルクの超流動 ^3He から侵入した渦の端が、スペクトルを観測している NMR コイルの領域を上下していることが、円筒軸方向に磁場勾配をかけた MRI により確認されている [23]。さらに角速度を大きくすると、7.0 rad/s, 10.1 rad/s 付近でも、NMR スペクトルのメインピーク強度が大きく減少し、サテライトピーク強度が増加することも観測されている [22]。

この実験に対応して、高回転領域での渦の侵入によって再構成される織目構造が Takagi [27] により理論的に研究された。低回転領域で MH texture への転移が起こると特異点を持たなくなるので、円筒容器の全領域に渡って ABM 状態が実現することになる。よって、温度領域に依らずに、ABM 状態の織目構造の自由エネルギーを求められる “Hydrodynamic” 理論を適用することができる。

円筒容器の壁での境界条件 (47) から、渦度 m の織目構造の位相の巻き数の組は $\langle w_+, w_0, w_- \rangle = \langle m-1, m, m+1 \rangle$ でなければならない。渦度 1 の MH texture の次に大きい渦度を持ち、特異点を持たない織目構造の渦度は 3 である。渦度 3 の織目構造は、MH texture に位相の巻き数の組が $\langle 0, 1, 2 \rangle$ の MH vortex と、 $\langle 2, 1, 0 \rangle$ の mixt-twist (MT) vortex が組となった continuous unlocked vortex (CUV) [18] が侵入することで形成される。回転の角速度を大きくすると、もう一組の CUV が侵入し、渦度 5 の織目構造が形成される。このとき、3つの MH vortex と 2つの MT vortex が交互に並んだ、vortex sheet [48] のような織目構造が形成される。実験で観測された角速度 10.1 rad/s 付近での転移後の織目構造に対応する、渦度 7 の安定な織目構造も導かれており、計算された渦の侵入する角速度、織目構造の変化に伴う NMR スペクトル形状の変化は、実験結果とよく一致している [28]。さらに、高回転では、渦度 9 の織目構造が安定であることも計算されており、Fujita らによって示された渦格子 [49] のように、MH vortex と MT vortex が隣り合う織目構造となる。

4 終わりに

4.1 まとめ

本稿では、細い円筒容器中で実現する超流動 ^3He -A 相の織目構造についての、GL 理論、“Hydrodynamic” 理論による議論を紹介した。これらの議論は、東大物性研で行われた超流動 ^3He の回転実験に基づいている。GL 理論から、半径 50 μm の円筒容器では、静止下で RD-hb が、回転下で MH-hb が安定であるという結論が得られている。一方、半径 115 μm の円筒容器では、静止下で RD-ax が、低回転下で MH-hb が安定であるという結論が得られている。これらの結論は、実験結果と矛盾しておらず、実験で観測された NMR スペクトルの変化を織目構造の転移として定性的に説明することができる。しかし、転移の起こる角速度と NMR スペクトルの変化する角速度の定量的な不一致という問題が残っている。“Hydrodynamic” 理論から、半径 115 μm の円筒

容器で観測された NMR スペクトルの高回転下での変化は、CUV が円筒容器に侵入し織目構造が再構成されることが原因であると結論された。この結果は、実験により得られた渦侵入の角速度、NMR スペクトルの形状の変化と定量的によい一致を示している。

4.2 Majorana フェルミオン

最後に、筆者が興味を持っている Majorana フェルミオンについて述べる。ここで述べる Majorana フェルミオンとは、生成と消滅の演算子が同一のフェルミオンのことであり、 p 波超流動体の量子渦や表面に存在可能であることが知られている [50, 51]。Feshbach 共鳴を利用した、フェルミ原子気体での p 波超流動は未だ実現しておらず [9, 10]、 Sr_2RuO_4 が p 波超伝導体であることは議論の余地がある [52]。超流動 ^3He は、誰もが認める p 波超流動体であり、Majorana フェルミオン研究の格好の舞台である。Majorana フェルミオンをトポロジカル量子コンピュータに利用することも提案されており [53]、分野横断的に重要な研究である。

超流動 $^3\text{He-A}$ 相をスラブ中に閉じ込めると、 l ベクトルがスラブと垂直に向き、カイラル p 波超流動が実現する。スラブ中で形成可能な渦構造は、half quantum vortex (HQV) [54] か singular vortex (SV) であり、どちらの量子渦にも Majorana フェルミオンが存在することが知られている [55, 56]。磁場をスラブに垂直にかければ HQV もしくは SV が [57]、平行にかければ SV が [56] 実現する。スラブ中の超流動 $^3\text{He-A}$ 相を回転させて渦構造を観測する実験が行われている [58] が、Majorana フェルミオンの存在を示すには何を観測すればよいか分かっておらず、今後解明すべき課題となっている。

また、最近、 $^3\text{He-B}$ 相を閉じ込めた容器の壁に接する表面でも、Majorana フェルミオンが存在することが議論されている [51]。この場合には、量子渦を作る必要がなく、境界の specularity に依らない [59] ので、Majorana フェルミオンの存在条件が緩やかである。 $^3\text{He-B}$ 相表面の Majorana フェルミオンに関する議論は始まったばかりであり、今後の発展が期待される。

Appendix 円筒容器の壁での境界条件

ここでは、円筒容器の壁での秩序変数の境界条件を導出する。壁と垂直な l ベクトルは $l_r = \pm 1$, $l_\theta = l_z = 0$ である。また、壁での秩序変数は、

$$A_i(\mathbf{R}) = |a_i(R, \theta)| e^{i(w_i \theta + \gamma_i)}, \quad (i = -1, 0, 1) \quad (55)$$

と置ける。ここで、 R は円筒容器の半径であり、秩序変数の大きさは θ の座標によって変化する。実際に、 d ベクトルの織目構造が hb 型有的时候には、 l ベクトルと d ベクトルの成す角度が変化しているため、双極子相互作用によって秩序変数の大きさも変化している。一方で、位相定数 γ_i は変化しない。また、 w_i は軌道角運動量の成分ごとの位相の巻き数を表す整数である。

l ベクトルの円筒座標表記 (46) を用いると、 $l_z = 0$ より、

$$|a_+| = |a_-| \quad (56)$$

である。関係 (56) を用いて、 $l_r = \pm 1$ より、

$$\frac{\sqrt{2}|a_+||a_0|}{|A|^2} \{ [\cos \{(w_+ - w_0)\theta + (\gamma_+ - \gamma_0)\} + \cos \{(w_- - w_0)\theta + (\gamma_- - \gamma_0)\}] \cos \theta \\ + [-\sin \{(w_+ - w_0)\theta + (\gamma_+ - \gamma_0)\} + \sin \{(w_- - w_0)\theta + (\gamma_- - \gamma_0)\}] \sin \theta \} = \pm 1. \quad (57)$$

まとめると、

$$\frac{2\sqrt{2}|a_+||a_0|}{|A|^2} \cos \left[\frac{w_+ + w_- - 2w_0}{2}\theta + \frac{\gamma_+ + \gamma_- - 2\gamma_0}{2} \right] \cos \left[\frac{w_+ - w_- + 2}{2}\theta + \frac{\gamma_+ - \gamma_-}{2} \right] = \pm 1. \quad (58)$$

また、 $l_\theta = 0$ より、

$$\frac{\sqrt{2}|a_+||a_0|}{|A|^2} \{ -[\cos \{(w_+ - w_0)\theta + (\gamma_+ - \gamma_0)\} + \cos \{(w_- - w_0)\theta + (\gamma_- - \gamma_0)\}] \sin \theta \\ + [-\sin \{(w_+ - w_0)\theta + (\gamma_+ - \gamma_0)\} + \sin \{(w_- - w_0)\theta + (\gamma_- - \gamma_0)\}] \cos \theta \} = 0. \quad (59)$$

まとめると、

$$\cos \left[\frac{w_+ + w_- - 2w_0}{2}\theta + \frac{\gamma_+ + \gamma_- - 2\gamma_0}{2} \right] \sin \left[\frac{w_+ - w_- + 2}{2}\theta + \frac{\gamma_+ - \gamma_-}{2} \right] = 0. \quad (60)$$

ここで、(58), (60) 式を比べると、(60) 式の $\sin[\dots] = 0$ でなければ両式が満たされないことがわかる。恒等式は θ に依らず成り立つので、

$$w_+ - w_- + 2 = 0, \quad \gamma_+ - \gamma_- = 2n\pi \quad (61)$$

である。ここで、 n は整数である。関係 (61) を (58) 式に代入すると、

$$\frac{2\sqrt{2}|a_+||a_0|}{|A|^2} \cos [(w_+ - w_0 + 1)\theta + (\gamma_+ - \gamma_0 - n\pi)] \cos n\pi = \pm 1. \quad (62)$$

恒等式が θ に依らず成り立つので、

$$w_+ - w_0 + 1 = 0. \quad (63)$$

$|A|^2$ の定義 (40) を用いれば、(62) 式は、

$$\frac{2\sqrt{2}|a_+||a_0|}{2|a_+|^2 + |a_0|^2} \cos(\gamma_+ - \gamma_0) = \pm 1. \quad (64)$$

相加相乗平均の関係

$$2|a_+|^2 + |a_0|^2 = (\sqrt{2}|a_+|)^2 + |a_0|^2 \geq 2\sqrt{2}|a_+||a_0| \quad (65)$$

より、

$$\sqrt{2}|a_+| = |a_0|, \quad \gamma_+ - \gamma_0 = m\pi. \quad (66)$$

ここで、 $l_r = 1$ のとき m は偶数、 $l_r = -1$ のとき m は奇数である。

結局、(56), (61), (63), (66) より、位相の基準を γ_0 にとれば、境界条件は、

$$\begin{aligned} |a_0| &= \sqrt{2}|a_+| = \sqrt{2}|a_-|, \\ \gamma_0 = 0, \quad \gamma_+ = \gamma_- &= \begin{cases} 0 & (l_r = 1), \\ \pi & (l_r = -1), \end{cases} \\ w_+ = w_0 - 1 &= w_- - 2 \end{aligned} \quad (67)$$

である。

謝辞

本稿は、共同研究者である町田一成 教授との議論の積み重ねにより成立しています。日頃の議論に感謝いたします。泉名健 博士、石黒亮輔 助教、久保田実 准教授、石川修六 教授、佐々木豊 准教授には、実験に関する議論をして頂くとともに、筆者らの提案に沿った実験を行って頂きました。深く感謝いたします。特に、泉名健 博士には精力的な実験を行って頂き、重ねて感謝いたします。これらの議論の一部は、東京大学物性研究所の共同研究員として議論する機会を頂きました。高木丈夫 准教授、大見哲巨 先生には、実験の考察に関する理論面からの議論をして頂きました。深く感謝いたします。高木丈夫 准教授には NMR スペクトルの解析についてもご教示頂きました。本研究室の市岡優典 准教授、水島健 助教、川上拓人 氏には、超伝導、フェルミ原子気体、Majorana フェルミオンに関する議論をして頂きました。感謝いたします。最後に、本稿を執筆する機会を与えて下さった、「物性研究」編集委員会の皆様に感謝いたします。

参考文献

- [1] D.D. Osheroff, R.C. Richardson, and D.M. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972), 885.
- [2] A.J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975), 331.
- [3] A.L. Fetter, in *Progress in Low Temperature Physics*, ed D.F. Brewer (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1986) Vol. X, p. 1.
- [4] M.M. Salomaa and G.E. Volovik, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987), 533.
- [5] D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid phase of Helium 3* (Taylor and Francis, London, 1990).
- [6] G.E. Volovik, *Exotic Properties of Superfluid ^3He* (World Scientific, Singapore, 1992).
- [7] 山田一雄, 大見哲巨, 「超流動」 (培風館, 東京, 1995).

- [8] K. Machida, M. Ozaki, and T. Ohmi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989), 4116; K. Machida, T. Nishira, and T. Ohmi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999), 3364; K. Machida and M. Ozaki, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991), 3293.
- [9] Y. Inada, M. Horikoshi, S. Nakajima, M. Kuwata-Gonokami, M. Ueda, and T. Mukaiyama, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008), 100401; **101** (2008) 139901.
- [10] J.P. Gaebler, J.T. Stewart, J.L. Bohn, and D.S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007), 200403.
- [11] P.W. Anderson and P. Morel, *Phys. Rev.* **123** (1961), 1911; P.W. Anderson and W.F. Brinkman, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1108.
- [12] Y. Tsutsumi and K. Machida, to be published in *J. Phys. Soc. Jpn.* **78**, No. 11 (2009).
- [13] V. Ambegaokar, P.G. de Gennes, and D. Rainer, *Phys. Rev. A* **9** (1974), 2676; **12** (1975), E345.
- [14] N.D. Mermin and T.-L. Ho, *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976), 594.
- [15] P.G. de Gennes, *Phys. Lett. A* **44** (1973), 271.
- [16] K. Maki, *J. Low Temp. Phys.* **32** (1978), 1.
- [17] J.M. Karimäki and E.V. Thuneberg, *Phys. Rev. B* **60** (1999), 15290.
- [18] X. Zotos and K. Maki, *Phys. Rev. B* **30** (1984), 145.
- [19] V.M.H. Ruutu, Ü. Parts, and K. Krusius, *J. Low Temp. Phys.* **103** (1996), 331.
- [20] R. Ishiguro, O. Ishikawa, M. Yamashita, Y. Sasaki, K. Fukuda, M. Kubota, H. Ishimoto, R.E. Packard, T. Takagi, T. Ohmi, and T. Mizusaki, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004), 125301.
- [21] R. Ishiguro, K. Izumina, M. Kubota, O. Ishikawa, Y. Sasaki, and T. Takagi, presented at JPS 62nd Annual Meeting, 2007.
- [22] K. Izumina, T. Igarashi, M. Kubota, R. Ishiguro, O. Ishikawa, Y. Sasaki, and T. Takagi, presented at JPS 62nd Annual Meeting, 2007; K. Izumina, M. Kubota, R. Ishiguro, O. Ishikawa, Y. Sasaki, and T. Takagi, presented at JPS 2008 Autumn Meeting, 2008.
- [23] R. Ishiguro, K. Izumina, Y. Sasaki, M. Kubota, O. Ishikawa, and T. Takagi, *J. Phys.: Conf. Ser.* **150** (2009), 032033.
- [24] K. Izumina, R. Ishiguro, M. Kubota, Y. Sasaki, T. Takagi, and O. Ishikawa, *J. Phys.: Conf. Ser.* **150** (2009), 032034.

- [25] K. Izumina, private communication.
- [26] M. Kubota, T. Obata, R. Ishiguro, M. Yamashita, T. Igarashi, E. Hayata, O. Ishikawa, Y. Sasaki, N. Mikhin, M. Fukuda, V. Kovacic, and T. Mizusaki, *Physica B* **329-333** (2003), 1577.
- [27] T. Takagi, *J. Phys. Chem. Solids* **66** (2005), 1355.
- [28] T. Takagi, presented at JPS 63th Annual Meeting, 2008.
- [29] T. Takagi, private communication.
- [30] E.V. Thuneberg, *Phys. Rev. B* **36** (1987), 3583.
- [31] T. Kita, *Phys. Rev. B* **66** (2002), 224515.
- [32] D.S. Greywall, *Phys. Rev. B* **33** (1986), 7520.
- [33] J.A. Sauls and J.W. Serene, *Phys. Rev. B* **24** (1981), 183.
- [34] E.V. Thuneberg, *J. Low Temp. Phys.* **122** (2001), 657.
- [35] J.C. Wheatley, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975), 415.
- [36] M.C. Cross, *J. Low Temp. Phys.* **21** (1975), 525.
- [37] A.L. Fetter, *Phys. Rev. B* **20** (1979), 303.
- [38] J.W. Serene and D. Rainer, *Phys. Rev. B* **17** (1978), 2901.
- [39] H. Brand and M. Dörfle, *J. Low Temp. Phys.* **42** (1981), 333.
- [40] P. Wölfle, *Phys. Lett. A* **47** (1974), 224.
- [41] A.J. Leggett, *Ann. Phys.* **85** (1974), 11.
- [42] L.J. Buchholtz, *Phys. Rev. B* **18** (1978), 1107.
- [43] D.D. Osheroff, W.J. Gully, R.C. Richardson, and D.M. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **14** (1972), 920.
- [44] P. Muzikar, *J. Physique Colloq.* **39** (1978), C6-53.
- [45] L.J. Buchholtz and A.L. Fetter, *Phys. Lett. A* **58** (1976), 93; L.J. Buchholtz and A.L. Fetter, *Phys. Rev. B* **15** (1977), 5225.
- [46] H. Choi, J.P. Davis, J. Pollanen, T.M. Haard, and W.P. Halperin, *Phys. Rev. B* **75** (2007), 174503.

- [47] J.A. Sauls and M. Eschrig, *New J. Phys.* **11** (2009), 075008; M. Eschrig and J.A. Sauls, *New J. Phys.* **11** (2009), 075009.
- [48] Ü. Parts, E.V. Thuneberg, G.E. Volovik, J.H. Koivuniemi, V.H.M. Ruutu, M. Heinilä, J.M. Karimäki, and M. Krusius, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994), 3839.
- [49] T. Fujita, M. Nakahara, T. Ohmi, and T. Tsuneto, *Prog. Theor. Phys.* **60** (1978), 671.
- [50] N. Read and D. Green, *Phys. Rev. B* **61** (2000), 10267.
- [51] X.-L. Qi, T.L. Hughes, S. Raghu, and S.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009), 187001.
- [52] K. Machida and M. Ichioka, *Phys. Rev. B* **77** (2008), 184515.
- [53] C. Nayak, S.H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S.D. Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008), 1083.
- [54] G.E. Volovik and V.P. Mineev, *JETP Lett.* **24** (1976), 561.
- [55] D.A. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001), 268.
- [56] Y. Tsutsumi, T. Kawakami, T. Mizushima, M. Ichioka, and K. Machida, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008), 135302.
- [57] T. Kawakami, Y. Tsutsumi, and K. Machida, *Phys. Rev. B* **79** (2009), 092506.
- [58] M. Yamashita, K. Izumina, A. Matsubara, Y. Sasaki, O. Ishikawa, T. Takagi, M. Kubota, and T. Mizusaki, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008), 025302.
- [59] G.E. Volovik, *Pis'ma ZhETF* **90** (2009), 440.