

超流動流安定性の新たな判定法

東京大学 総合文化研究科 加藤 雄介¹
慶應義塾大学 理工学研究科 渡部 昌平²

(2010年10月28日受理)

ランダウ、ファインマンらにはじまる超流動の理論は冷却原子気体におけるボース・アインシュタイン凝縮 (BEC) の実現をきっかけに再び盛んに研究されるようになった。冷却原子気体実現以前に行われた数値的研究も、BEC 実現後に改めて掘り下げられ、分岐理論によって超流動の不安定性が分類された。

超流動に複数の不安定化機構があることは以前から知られていたが、渦やソリトンの生成をとまなう超流動の不安定化がサドル・ノード分岐として同一種類と判定されたことは、ランダウ不安定性とサドル・ノード分岐という二つの超流動不安定化機構の統一的記述という目標を生んだ。その目標を達成する試みのひとつを紹介するのが本記事の目的である。

超流動におけるランダウ不安定性 (素励起の不安定性) とソリトン生成不安定性 (サドル・ノード分岐) の2種類の不安定性は、局所密度ゆらぎを記述するスペクトル関数または局所密度の自己相関関数の振る舞いによって判定される。

1 背景

超流動とは、障害物の存在下におけるエネルギー散逸のない定常流のことである [1, 2, 3]。超流動現象はボース・アインシュタイン凝縮やフェルミオンの対凝縮と密接に関係があると考えられ、実際ヘリウム4、ヘリウム3、冷却原子気体などの量子多体系で観測されている。超流動の安定性あるいは不安定化は早くから議論されており、重要なものにランダウ (Landau) による素励起の不安定化機構の理論 (いわゆるランダウ不安定性の理論) [4]、ファインマン (Feynman) による渦生成不安定性の理論 [5, 6] がある。超流動体における臨界速度とは定常的に安定 (準安定) な超流動状態における流速の最大値を意味する。障害物などによって空間不均一性がある場合には流体の速度は場所の関数になる。その場合の臨界速度は、障害物から十分離れた地点における速度を意味するものとする。超流動ヘリウム4に関するある実験では臨界速度が渦生成不安定性で決定されるとする一方 [7]、別の実験ではランダウの臨界速度 (素励起のスペクトルにより不安定化が生じる速度) で超流動が崩壊するとされている [8]。超流動ヘリウム4の実験からは超流動には少

¹E-mail:yusuke@phys.c.u-tokyo.ac.jp

²E-mail:watabe@rk.phys.keio-u.ac.jp

なくとも2種類の不安定性があることが示唆され、実際の臨界速度は、より小さい臨界速度を与える不安定化機構で決まると考えられる。この二つの不安定化機構に共通する性質を応答関数の異常やゆらぎの増大といった観点から見いだせば、これが超流動安定化および不安定化に関する統一的理解への第一歩になると期待される。

ヘリウム4は相互作用の強いボース系であり、理論的に研究することが大変難しい。特に渦生成不安定性は、障害物が存在する系における超流動の不安定化を記述するものと期待されるが、相互作用の強いボース系でこのような空間不均一性まで取り入れることは困難である。そこで大胆な近似を用いた現象論によるアプローチが必要になる。1992年、フリッシュ(Frisch)・ポモー(Pomeau)・リカ(Rica)らは弱く斥力相互作用する希薄ボース系に適用可能なグロス(Gross)・ピタエフスキー(Pitaevskii)方程式[9, 10](後述)を用いて2次元系絶対零度における障害物存在下での超流動体の性質を数値的に調べた。彼らは臨界速度がランダウの臨界速度よりも小さいことと臨界速度より高速の流体では障害物表面から渦対が生成されることを確認した[11]。翌年ポモー・リカはその超流動不安定化は分岐理論におけるサドル・ノード分岐であると結論した[12]。後で簡単に述べるように分岐理論とは非線形科学の一分野であり、非線形方程式における定常解の個数と性質に関してパラメータ依存性を調べる理論を指す。サドル・ノード分岐とはこの分岐パターンのひとつである[13, 14]。

当時現存した唯一のボース・アインシュタイン凝縮系であるヘリウム4にとって、グロス・ピタエフスキー方程式は「大胆な近似を用いた現象論」でしかなかった。しかし、1995年にアルカリ原子気体のBECが実現[15, 16, 17]して以降、超流動の研究を取り巻く環境は一変した。実現したBECは希薄でかつ相互作用は短距離で、その大きさはフェッシュバハ(Feshbach)共鳴を用いて変えることができる。実際グロス・ピタエフスキー方程式あるいはその定常解周りの線形ゆらぎを記述するボゴリューボフ(Bogoliubov)方程式[18]の計算結果は実験状況を定量的に再現した。理論と実験が相互に刺激を与え合いながら急速に進展していくこの分野に、非線形物理学者からも多く参入した。1997年、ハキム(Hakim)は一次元グロス・ピタエフスキー方程式を用いて障害物下での超流動体の性質を解析した[19]。彼はある速度以下では無反射の定常流解(すなわち超流動性を示す解)が存在すること、ある速度(臨界速度)を超えると障害物まわりからソリトン(gray soliton)が生じ定常解が存在しないこと、そしてこの臨界速度の状態はサドル・ノード分岐に相当することを見出した。さらに障害物が接触型のポテンシャルであるとき、方程式の解析解が存在することを示した。ハキムが考えた系はフリッシュらが扱った系よりも簡潔な系であるが、フリッシュらの系と多くの共通点があることを彼の結果は示唆している。フリッシュらが扱った系の渦生成不安定性やハキムの扱った系のソリトン生成不安定性は2000年から2002年にかけて分岐理論の観点から整理されていった[20, 21, 22]。

1999年から2001年にかけてMITのケターレ(Ketterle)のグループによって冷却原子気体のBECを用いた臨界速度の研究が行われた[23, 24, 25]。共鳴周波数から高周波側にシフトさせたレーザービームを凝縮体に照射すると、凝縮体はこれを斥力ポテンシャルと感ずる。彼らはこのビームを凝縮体の中で動かし、ビーム速度がある閾値以下では粘性力は存在せず、それ以上で

粘性力が生じることを示した [23, 24]。粘性力はビームまわりの凝縮体密度の非対称性から評価した [24, 25]。ビームを動かしたとき生成される量子渦も、凝縮体波動関数の位相情報を干渉縞から得る手法により確認している [25]。

こうして 2002 年ころまでの間に、渦やソリトンといった位相欠陥を伴う超流動体の不安定化に関する我々の理解は、冷却原子気体の実験と分岐理論によって飛躍的な進歩を遂げた。しかし超流動の不安定性に伴って現れるゆらぎの増大や応答関数の異常をいかに記述するかという課題が残っており、分岐理論の知見を安定な超流動体まわりのゆらぎ（すなわち素励起の性質）に結びつける必要があった。これらの関係は超流動体における異常トンネル効果 [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34] の研究を手掛かりにして得られた。

異常トンネル効果とは、超流体の素励起（ボゴリューボフ励起）が斥力ポテンシャルをトンネルする際、励起エネルギーがゼロの極限で透過率 1 となり、無反射の完全透過を示す現象である。通常の量子力学のトンネル問題ではエネルギーがゼロの極限で完全反射する。このことと対照的であることを指して、ボゴリューボフ励起の低エネルギーにおける透過特性を異常トンネル効果と呼ぶ。この効果はポテンシャル障壁がデルタ関数の場合に 2001 年コブリジョン (Kovrizhin) によって見出され [26]、2003 年カガン (Kagan)・コブリジョン・マクシモフ (Maksimov) によって命名された [27]。この問題自体興味深く、本誌にもこの問題に取り組んできた研究者らによる記事が 2 編 [35, 36] 掲載されているが、ここでは本稿のテーマとの関連においてのみ言及する。ボゴリューボフ励起のトンネル問題は当初凝縮体速度 V がゼロの場合にのみ考察された。その後、段下・余越・栗原らによって臨界速度 V_c 以下の任意の速度をもつ超流動体でボゴリューボフ励起のトンネル問題が考察された [28]。その結果 (1) 透過率 $T(\epsilon, V)$ のエネルギー ϵ 依存性 (エネルギー分散) をスケールする特徴的エネルギーが $V \rightarrow V_c$ のときゼロになること、(2) 低エネルギーかつ臨界速度の状態への近づき方によって透過率 $T(\epsilon, V)$ が特異的にふるまうこと ($\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow V_c} T(\epsilon, V) \neq \lim_{V \rightarrow V_c} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon, V)$) がわかった。さらに 2009 年高橋・加藤によって、(3) ボゴリューボフ励起における低エネルギー極限（ゼロモード）での波動関数は臨界速度以外で凝縮体の位相ゆらぎを記述するが、臨界速度でのゼロモードには密度ゆらぎの成分も含まれることが見出された [32, 34]。(1)(2) は励起に関する低エネルギー、低周波数の動的な物理量または長時間相関において、臨界速度付近で臨界的な振る舞いが生じることを期待させる。(3) からそれは密度ゆらぎ、密度の時間相関に関連するものであることが示唆される。これらの考察に基づいてソリトン生成不安定性における臨界速度すなわちサドル・ノード分岐付近での動的密度ゆらぎが著者らにより調べられた [37, 38, 39]。その結果たしかに低エネルギーかつ臨界速度付近で動的密度ゆらぎの増大が見出された。また密度ゆらぎの臨界的振る舞いを特徴づけるスケーリング則も見出された。またその導出の過程からこれらの結果は超流動流の不安定化がサドル・ノード分岐である場合に一般に成立することを強く示唆していた。

さて超流動流不安定性の統一的記述という観点からランダウの臨界速度付近においても動的密度ゆらぎが増大するかは重要な問である。一般にランダウの臨界速度近傍では一粒子状態密度が低エネルギーで増大する。その大きな状態密度により密度ゆらぎが低エネルギーで増大する。これらの

結果を踏まえて動的密度ゆらぎに着目した超流動流不安定性の統一的判定法を提案した [37, 38, 39]。次章以降はその結果について解説する。

2章ではランダウ不安定性、グロス・ピタエフスキー方程式、サドル・ノード分岐、密度ゆらぎスペクトル関数などの概念、モデル、物理量について解説する。

3章では超流動のソリトン生成不安定性と臨界速度付近の密度ゆらぎについて議論する。4章では空間一様系におけるランダウ不安定性の密度ゆらぎについて述べる。5章では渦生成不安定性における密度ゆらぎについて議論したあと、密度ゆらぎを用いた超流動不安定性の統一的判定法に関する我々の提案を述べる。6章で結論を述べ、まとめとする。

2 用語とその解説

この章では次章以降の理解に必要な概念、物理量、模型についてまとめる。

2.1 ランダウ不安定性

静止している流体の基底状態からの励起を考え、その運動量を \mathbf{p} , その大きさを p , 励起エネルギーを $\varepsilon(p)$ とする。速度 \mathbf{V} で流れている流体に対する励起スペクトルは

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \varepsilon(p) + \mathbf{V} \cdot \mathbf{p} \quad (1)$$

で与えられる。流れている流体の状態が安定であるためには、全ての \mathbf{p} に対して $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p})$ が非負の量である必要がある。 p 一定の下では、 $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p})$ の最小値は \mathbf{p} と \mathbf{V} が反平行の時の値 $\varepsilon(p) - pV$ で与えられるから (V は \mathbf{V} の大きさ)、流れる流体が安定である条件は

$$V \leq \text{Min}(\varepsilon(p)/p) \equiv V_{c,L} \quad (2)$$

で与えられる。 $\varepsilon(p)/p$ は励起状態の位相速度を表しており、位相速度の最小値 $V_{c,L}$ がゼロでないとき、 $V_{c,L}$ 以下の速さで流れる流体は安定であることを示している。(2) をランダウの超流動安定性条件 (Landau criterion) と呼び、 $V_{c,L}$ をランダウの臨界速度という。ランダウの描像によると、 $V_{c,L} > 0$ では超流動状態が安定になり得、 $V_{c,L} = 0$ では超流動状態が安定になり得ないということになる。次節、次次節で説明する系は、静止している流体 (凝縮体) に対するボゴリューボフ励起のスペクトル (次次節の (19) で $V=0$ としたもの) の位相速度の最小値が正であり、超流動になり得る系である。一方、自由ボースガスは励起エネルギーが $\varepsilon(p) \propto p^2$ で与えられるので、 $V_{c,L} = 0$ となり超流動状態が安定になり得ない系ということになる。

2.2 グロス・ピタエフスキー方程式

短距離斥力相互作用する内部自由度を持たないボース系を絶対零度で考える。多粒子系のハミルトニアンは無次元化した表示で、

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} \nabla \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \nabla \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + (U(\mathbf{r}) - \mu) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

と与えられるとする。場の演算子は交換関係

$$\left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right] = 0 \quad (4)$$

と運動方程式

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{H} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + (U(\mathbf{r}) - \mu) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (5)$$

を満たす。相互作用が弱くあるいは粒子数密度が小さくほとんどの粒子が凝縮しているとして、場の演算子を凝縮体波動関数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ (c-数) で読み替えて (5) から得られるのが、時間に依存するグロス・ピタエフスキー方程式：

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + (U(\mathbf{r}) - \mu) \Psi(\mathbf{r}, t) + \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t)^2 \quad (6)$$

である。この方程式の定常解 $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r})$ が満足する方程式

$$0 = -\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi_0(\mathbf{r}) + (U(\mathbf{r}) - \mu) \Psi_0(\mathbf{r}) + \Psi_0^*(\mathbf{r}) \Psi_0(\mathbf{r})^2 \quad (7)$$

を時間に依存しないグロス・ピタエフスキー方程式と呼ぶ。(6) と (7) は、古典的ハミルトニアン

$$H = \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} \nabla \Psi^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \Psi(\mathbf{r}) + (U(\mathbf{r}) - \mu) \Psi^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \right] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} |\Psi(\mathbf{r})|^4 \quad (8)$$

を用いると、それぞれ

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\delta H[\Psi^*, \Psi]}{\delta \Psi^*}, \quad \frac{\delta H[\Psi^*, \Psi]}{\delta \Psi^*} = 0 \quad (9)$$

と表わされる。

2.3 ボゴリューボフ方程式

グロス・ピタエフスキーの定常解が安定である場合のボゴリューボフ方程式についてまとめる。導出は本記事末尾の付録にゆずる。場の演算子 $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ を凝縮体波動関数の定常解 $\Psi_0(\mathbf{r})$ とそれ以外に分け、

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}) + \delta \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (10)$$

とする。定常解からのずれ $\delta \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ については2次以上の項を小さいとして以下無視する。さらに、

$$\delta \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j \text{ s.t. } \epsilon_j \geq 0} \left(u_j(\mathbf{r}) \hat{a}_j \exp(-i\epsilon_j t) - v_j^*(\mathbf{r}) \hat{a}_j^\dagger \exp(i\epsilon_j t) \right) \quad (11)$$

と置く。s.t.(such that) は j のうち $\epsilon_j > 0$ のものだけについて和を取るという意味である。 $(u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r}))$ は次の固有値問題 (ボゴリューボフ方程式) の解

$$\epsilon \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} K & -\Psi_0^2 \\ (\Psi_0^*)^2 & -K \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$K = -\frac{1}{2}\nabla^2 + (U(\mathbf{r}) - \mu) + 2\Psi_0^*(\mathbf{r})\Psi_0(\mathbf{r}) \quad (13)$$

であり、かつ規格直交関係式

$$\int d\mathbf{r}(u_k^*u_j - v_k^*v_j) = \delta_{kj} \quad (14)$$

$$\int d\mathbf{r}(u_kv_j - v_ku_j) = 0 \quad (15)$$

を満たす。 $\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_j$ はそれぞれボソンの生成・消滅演算子であり、交換関係

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}, \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}] = 0 \quad (16)$$

を満たす。ハミルトニアン (3) を $\delta\hat{\Psi}, \delta\hat{\Psi}^\dagger$ について 2 次までの精度で求めると

$$\hat{H} = E_g + \sum_j \epsilon_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \mathcal{O}(\delta\hat{\Psi}^\dagger \delta\hat{\Psi}^2, (\delta\hat{\Psi}^\dagger)^2 \delta\hat{\Psi}) \quad (17)$$

$$E_g = E_0 - \sum_{\substack{j_i \\ \text{s.t. } \epsilon_j \geq 0}} \epsilon_j \int d\mathbf{r} |v_j(\mathbf{r})|^2$$

となる。 E_g を与える上式の右辺第二項は相互作用に起因する quantum depletion の効果を表す。以下、(17) の右辺第 3 項を無視する。この近似の下で、すべての j に対して $\epsilon_j > 0$ ならば、基底状態 $|g\rangle$ はすべての j に対して $\hat{a}_j|g\rangle = 0$ を満たす状態である。以下 $\langle g|g\rangle = 1$ であるとする。

外場 U がゼロのときボゴリューボフ方程式の解は、グロス・ピタエフスキー方程式の定常解 $\Psi = \exp(iVx)$, $\mu = 1 + V^2/2$ の下、

$$\begin{pmatrix} u_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{(\epsilon_{\mathbf{q}}^2 - 1)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\Omega}} \begin{pmatrix} \left[\epsilon_{\mathbf{q}} + (\epsilon_{\mathbf{q}}^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + Vx)} \\ \left[\epsilon_{\mathbf{q}} - (\epsilon_{\mathbf{q}}^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - Vx)} \end{pmatrix} \quad (18)$$

と与えられる。 Ω は体積、 \mathbf{q} は運動量を表す。励起エネルギーは

$$\epsilon_{\mathbf{q},V} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{q}}^2 - 1} + q_x V \quad (19)$$

で与えられる。ただし q_x は運動量 \mathbf{q} の x 成分である。また $\epsilon_{\mathbf{q}} \equiv \frac{q^2}{2} + 1$ and $q \equiv |\mathbf{q}|$ とした。

2.4 サドル・ノード分岐

1 章でも述べたように分岐理論は非線形時間発展方程式の定常解の個数と性質（安定性・不安定性）のパラメータ依存性を調べる理論である。サドル・ノード分岐は定常解の分岐のパターンのひとつである。非線形の時間発展方程式が実数パラメータ λ を含み

- $\lambda > \lambda_c$ のとき、安定な定常解ひとつと不安定な定常解ひとつを持ち
- $\lambda < \lambda_c$ のとき、定常解が存在しない

とき、 $\lambda = \lambda_c$ における定常解の分岐をサドル・ノード分岐という。また $\lambda = \lambda_c$ を分岐点という。これを理解するには典型例を見た方が早い。非線形微分方程式

$$\dot{x} = \lambda - x^2 \quad (20)$$

の定常解は、

- $\lambda > 0$ のとき、 $x = \pm\sqrt{\lambda}$
- $\lambda < 0$ のとき、定常解が存在しない。

この場合 $\lambda = 0$ が分岐点 λ_c になっている。 $\lambda > 0$ のとき、 $x = \sqrt{\lambda}$ の周りで、 $x(t)$ を展開する。 $x(t) = \sqrt{\lambda} + \delta x(t)$ とおき、 $\delta x(t)$ について (20) を線形化すると、

$$\delta \dot{x}(t) = -2\sqrt{\lambda}\delta x(t)$$

を得る。その解 $\delta x(t) \propto \exp(-2\sqrt{\lambda}t)$ は時間とともにゼロに収束するので $x = \sqrt{\lambda}$ は安定な定常解という。一方 $x = -\sqrt{\lambda}$ の定常解まわりで $x(t) = \sqrt{\lambda} + \delta x(t)$ とおくと、

$$\delta \dot{x}(t) = 2\sqrt{\lambda}\delta x(t)$$

となり、その解 $\delta x(t) \propto \exp(2\sqrt{\lambda}t)$ の絶対値は時間とともに増大する。発散する傾向にあるので、 $x = -\sqrt{\lambda}$ を不安定な定常解と呼ぶ。すなわち $\lambda > 0$ のとき、(20) は二つの定常解を持ち、それぞれが安定解、不安定解であるので、 $\lambda = 0$ がサドル・ノード分岐の分岐点であることがわかる。

2.5 単一モード近似

単一モード近似は空間的に一様かつ等方的な系における励起スペクトルの近似法である。絶対零度における中性ボース系を念頭において以下説明する。中性子散乱実験の散乱強度は動的構造因子

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \sum_l |\langle l | \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^\dagger | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g) \quad (21)$$

$$\hat{\rho}_{\mathbf{q}} = \Omega^{-\frac{1}{2}} \int d\mathbf{r} \hat{\rho}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (22)$$

に比例する。与えられた \mathbf{q} に対して、ある ω 周辺に散乱強度が集中しているとき $|\Phi_{\mathbf{q}}\rangle = \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^\dagger |g\rangle$ がエネルギー固有状態に対する良い近似になっていると考えられる。そこで $|\Phi_{\mathbf{q}}\rangle$ のエネルギー期待値を用いて

$$\varepsilon_{\mathbf{q}} = \frac{\langle \Phi_{\mathbf{q}} | \hat{H} | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle}{\langle \Phi_{\mathbf{q}} | \Phi_{\mathbf{q}} \rangle} - E_g = \frac{\langle g | \hat{\rho}_{\mathbf{q}} (\hat{H} - E_g) \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^\dagger | g \rangle}{\langle g | \hat{\rho}_{\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^\dagger | g \rangle} \quad (23)$$

を励起エネルギーの近似値とするのが単一モード近似である [40]。 E_g は基底状態のエネルギーを表す。(23) の最右辺の分子は空間並進対称性と反転対称性を用いると

$$\langle g | \hat{\rho}_{\mathbf{q}} (\hat{H} - E_g) \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^\dagger | g \rangle = \frac{q^2}{2m} \left(\frac{N}{\Omega} \right) \quad (24)$$

となり、系によらない値になる（いわゆる f-sum rule[2]）。 N は全粒子数を表す。一方分母は

$$\langle g | \hat{\rho}_{\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^\dagger | g \rangle = \int_0^\infty d\omega S(\mathbf{r}, \omega) \equiv \left(\frac{N}{\Omega} \right) S(q) \quad (25)$$

となる。 $S(q)$ は静的構造因子と呼ばれ、系の同時刻相関を表す量である。(24) と (25) から

$$\varepsilon_q = \frac{q^2}{2mS(q)} \quad (26)$$

を得る。(26) は励起状態の性質（左辺）と基底状態で決まる物理量（右辺）を結び付ける関係式である。 $S(q)$ は実験から決めることもできるし、基底状態の波動関数が分かっているとき、あるいはそれに対する良い近似波動関数が知られていれば、同時刻密度相関関数の計算から求めることもできる。

単一モード近似が成立する状況では動的構造因子は、

$$S(q) \sim A_q \delta(\omega - \varepsilon_q) \quad (27)$$

と書ける。このとき $S(q) \sim (\Omega/N)A_q$ となるので、(27) を用いて

$$A_q \sim \frac{q^2}{2m\varepsilon_q} \left(\frac{N}{\Omega} \right) \quad (28)$$

という関係式が得られる。(28) は励起スペクトル（右辺）と動的密度ゆらぎ（左辺）を結び付ける関係式である。

基底状態に対する良い近似波動関数が得られている場合にこの近似法は有効である。超流動ヘリウム 4 の場合以外にも、ラフリンの波動関数が知られている分数量子ホール系、Valence-bond-solid 状態が知られている $S = 1$ 反強磁性スピン鎖（いわゆるハルデイン系）に対して適用されている [41, 42]。

2.6 局所密度スペクトル関数

密度のゆらぎの強さを定量化するにはさまざまな方法がある。しかし静的構造因子や圧縮率など静的な密度ゆらぎの強さを測る物理量は後に述べるように超流動の安定性と関連付けるには適さない。一方動的構造因子 ($S(\mathbf{q}, \omega)$) は、ポテンシャル障壁が存在する場合のように空間不均一系における動的密度ゆらぎを測るには適さない。不均一系における密度ゆらぎを測るには空間的に局所的な物理量が適している。そこで次式で与えられる「局所密度スペクトル関数」を導入する：

$$I(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{l: \text{excited states}} |\langle l | \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g) \quad (29)$$

l は多体系の励起状態で、エネルギー固有状態である。上の表式は

$$\delta \hat{n}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) - \langle g | \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) | g \rangle \quad (30)$$

を用いて

$$I(\omega, \mathbf{r}) = \sum_l |\langle l | \delta \hat{n}(\mathbf{r}) | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g) \quad (31)$$

と書くこともできる。

3 ソリトン生成不安定性

3.1 グロス・ピタエフスキー方程式の解の性質

グロス・ピタエフスキー方程式 (7) で記述される超流動体の特性をここで見ていく。特にここでは外場 U が x にのみ依存し、 $x = 0$ 近傍でのみ値をもつようなポテンシャル障壁 (図 1) を考える。この外場によってその周りの超流体密度は減少するが、相互作用の効果により回復長程度で超流体密度は一定となる (図 1)。このような状況下で速度 V の超流動が流れていることを意味する境界条件

$$\Psi_0(x \rightarrow \pm\infty) = \exp[i(Vx + \varphi_{\pm})] \quad (32)$$

を課してみる。このような条件を満たす定常的に安定なグロス・ピタエフスキー方程式 (7) の解は、超流動の本質を記述する最もシンプルなものである。 $x \rightarrow \pm\infty$ における漸近形を (7) に代入すると、

$$\left(\frac{V^2}{2} - \mu + 1\right) \Psi_0 = 0 \quad (33)$$

となり、化学ポテンシャル μ は $\mu = 1 + V^2/2$ となる。 $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ は凝縮体波動関数がポテンシャル障壁から受ける位相のずれ (phase shift) である。

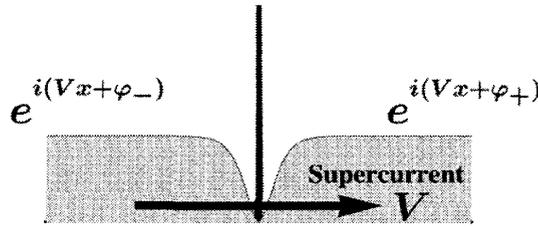


図 1: 最もシンプルな超流動体モデルの概念図。真ん中に立っている黒い線がポテンシャル障壁を表し、灰色で覆われているのが超流動体の粒子密度を表す。超流体は定常的に流速 V で流れており、凝縮体波動関数は境界条件 $\Psi_0(x \rightarrow \pm\infty) = \exp[i(Vx + \varphi_{\pm})]$ を満たす。

定常解が存在するのは $|V|$ がある閾値 V_c 以下のときである。臨界速度 V_c はポテンシャル障壁によって決まる物理量である。図 2 には $0 \leq V \leq V_c$ のときの V と φ の関係を示している。これは超伝導のジョセフソン接合系におけるジョセフソン関係式に相当するものである。もともとこの系の定常的な性質はジョセフソン接合系でギンツブルグ・ランダウ理論を用いて調べられた [43]。 $0 \leq V < V_c$ が与えられたとき、二つの定常解が存在し異なる φ を持つ。 $V = V_c$ では一つの定常解のみ存在する。その解の位相のずれを φ_c とすると、 $0 \leq \varphi < \varphi_c$ は安定な定常解、 $\varphi_c < \varphi \leq \pi$ は不安定な定常解に対応する。まとめると、

- $0 \leq |V| < V_c$ のとき、安定な定常解と不安定な定常解が一つずつ存在する。
- $|V| = V_c$ のとき、定常解が一つ存在する。

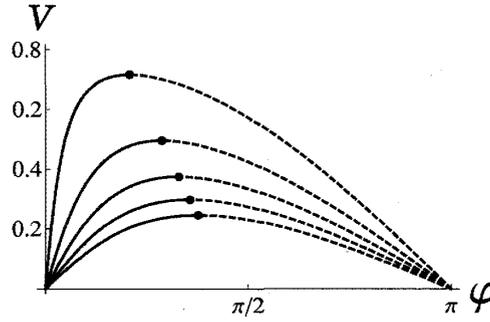


図 2: V の φ 依存性。各曲線は上から $U_0=0.2, 0.6, 1.0, 1.4, 1.8$ の時の結果。実線部分は安定定常解、破線部分は不安定定常解、黒点は臨界速度の状態を表す。この系のランダウの臨界速度は $V = 1$ で与えられる。

- $|V| > V_c$ のとき、定常解は存在しない。

という構造になっている。定常解の構造の変わり目 $V = V_c$ はサドル・ノード分岐点になっていることがわかる。 $|V| > V_c$ のとき、時間に依存するグロス・ピタエフスキー方程式の時間発展を追うと、障壁ポテンシャル近傍からソリトンが生成されるのが数値計算により観測されている [19]。ここではこの系の不安定性をソリトン生成不安定性と呼ぶことにする。文献 [22] において、 V_c 以下の不安定な定常解が安定な定常解に移行する緩和率 Γ と、 V_c より大きな V でソリトンがポテンシャル障壁から生じる際の生成率 Γ' は、ともに $\Gamma, \Gamma' \propto |V - V_c|^{\frac{1}{2}}$ と等価なスケール則（いわゆるサドル・ノードスケール則）に従うことが数値的に示されている [44]。

以上の結果はもともと一次元問題の解として考えられてきたが、超流動流の方向 (x 方向) と直交する方向に凝縮体が巨視的なスケールで広がっている系と考えることもできる。以下では系の空間次元 d を $d = 1, 2, 3$ とした場合の密度ゆらぎを考える。どの次元でも障壁ポテンシャル U は x にしかよらず、 x 方向には短距離ポテンシャルであるが、 $d = 2$ の場合は、 y 方向に一様な障壁、 $d = 3$ の場合は y, z 方向に一様に広がった平面状の障壁を考えることとする。

3.2 局所密度スペクトル関数

ボゴリューボフ理論において局所粒子数密度は

$$\begin{aligned} \delta\hat{n}(\mathbf{r}) &= \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} - |\Psi_0|^2 \\ &= \Psi_0^* \delta\hat{\Psi} + \Psi_0 \delta\hat{\Psi}^\dagger + \delta\hat{\Psi}^\dagger \delta\hat{\Psi} \end{aligned} \quad (34)$$

で与えられる。ボゴリューボフ方程式では $\delta\hat{\Psi}$ を微小量として扱うので (34) の右辺第 3 項を無視し (11) を用いて (31) に代入すると、

$$I(\omega, \mathbf{r}) = \sum_l |\langle l | \sum_i (\Psi_0(\mathbf{r}) u_i^*(\mathbf{r}) - \Psi_0^*(\mathbf{r}) v_i^*(\mathbf{r})) \hat{a}_i^\dagger |g\rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g) \quad (35)$$

となる。上の式の右辺の和に寄与し得る励起状態は $|l\rangle = \langle g|\hat{a}_i$ のタイプだけであるので、

$$I(\omega, \mathbf{r}) = \sum_i |\Psi_0^*(\mathbf{r})u_i(\mathbf{r}) - \Psi_0(\mathbf{r})v_i(\mathbf{r})|^2 \delta(\omega - \epsilon_i) \quad (36)$$

を得る。

3.3 $U(x) = U_0\delta(x)$ の場合の密度ゆらぎ

まず $U(x) = U_0\delta(x)$ の場合に前節の密度スペクトル関数を求めた結果を紹介する [37, 38]。 $d = 1$ のときにはボゴリューボフ方程式の基本解 $(u(x), v(x))$ が $x > 0$, $x < 0$ でそれぞれ知られている [28] のでそれを用いて $x = 0$ で接続し、 $I(x, \omega)$ を求める。 $d = 2, 3$ の場合、 $U(x)$ は y にも z にも依存しないので $\Psi_0(\mathbf{r})$ も同様に y, z に依存しない。従って $u(\mathbf{r})$ と $v(\mathbf{r})$ の y 依存性、 z 依存性は平面波にとることができる。 x 依存性については数値的に求める。結果として $d = 2, 3$ の場合でも $I(\mathbf{r}, \omega)$ は x と ω にしかよらない。図 3 は $d = 1$ のとき、ポテンシャルの強さを $U_0 = 10$ として、さまざまな超流動速度 $V (\leq V_c)$ に対する $I(x, \omega)$ をプロットしたものである。ポテンシャル近傍 $x = 0$ かつ低エネルギー $\omega = 0$ 付近の密度ゆらぎは臨界速度に近づくに従って増大していることが見て取れる。このような傾向は $d = 2$ や 3 のときの $I(x, \omega)$ でもほぼ同様である [38]。

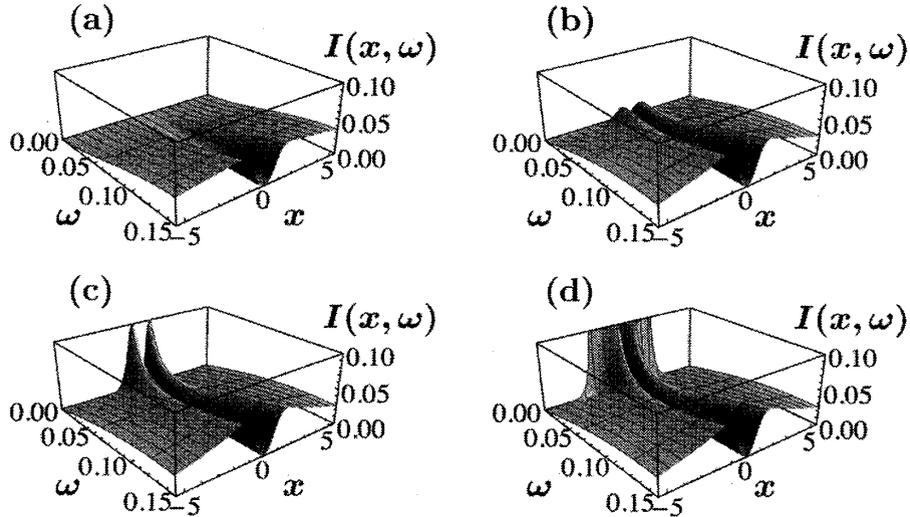


図 3: $d = 1$ のときの密度ゆらぎスペクトル関数 $I(x, \omega)$ [38]。障壁ポテンシャルは $U_{\text{ex}}(x) = U_0\delta(x)$ で $U_0 = 10$ の時の結果である。障壁から十分離れた場所 $x = \pm\infty$ での凝縮体の速度の大きさ V は (a) のとき $V = 0$ (b) のとき $V = 0.049$ (c) のとき $V = 0.0497$ 、そして (d) のとき $V = V_c (= 0.04975307 \dots)$ となっている。ポテンシャル近傍 $x = 0$ かつ低エネルギー $\omega = 0$ 付近の密度ゆらぎは臨界速度に近づくに従って増大していることが分かる。

次にスペクトル関数の空間依存性をみていく。図 6 は $\omega = 10^{-4}$ と固定したときの $I(x, \omega)$ の空間依存性を示している。各曲線は下から順に $V = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.045, 0.049, 0.0497, 0.04975, V_c (= 0.04975307 \dots)$ の時の結果である。 x の各点で、 V が V_c に近づくとともに密度ゆら

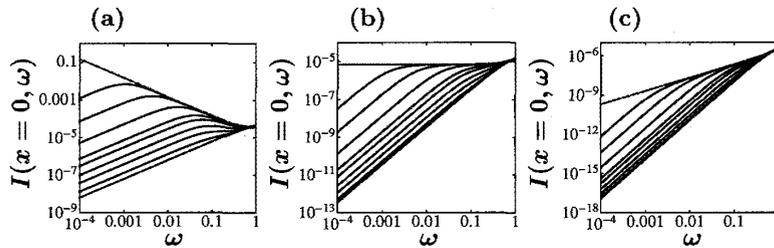


図 4: $x = 0$ の地点における $I(x, \omega)$ の ω 依存性 [38]。ポテンシャル障壁の強さは $U_0 = 10$ としている。それぞれ (a) $d = 1$, (b) $d = 2$ (c) $d = 3$ の場合を示す。各曲線は下から順に $V = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.045, 0.049, 0.0497, 0.04975, V_c (= 0.04975307 \dots)$ の場合に相当している。

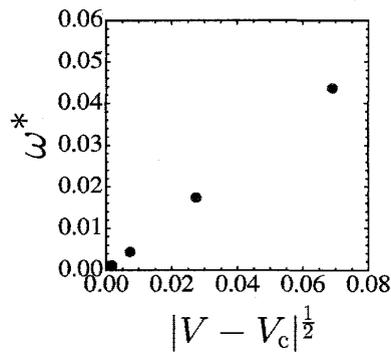


図 5: 図 4 の (a) において $V < V_c$ に対する $I(0, \omega)$ のピークを与える $\omega = \omega^*$ と $|V - V_c|$ の間のスケール則。サドル・ノード分岐近傍に特有のスケール則 $\omega \propto |V - V_c|^{1/2}$ が成立していることが分かる。

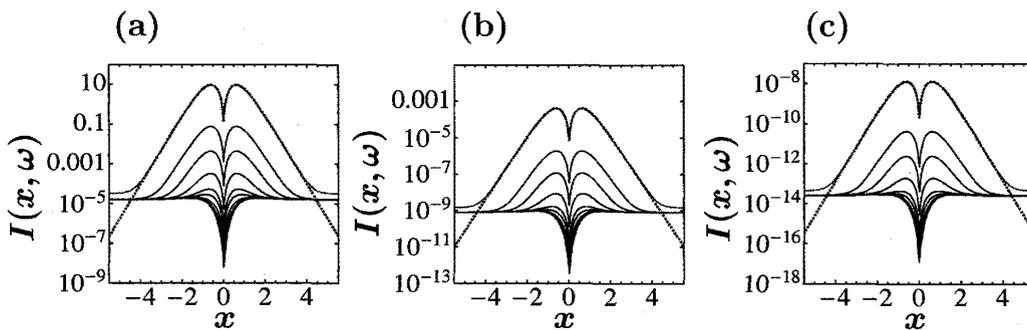


図 6: $\omega = 10^{-4}$ と固定したときの $I(x, \omega)$ の空間依存性 [38]。それぞれ (a) $d = 1$, (b) $d = 2$ (c) $d = 3$ の場合を示す。ポテンシャル障壁の強さは $U_0 = 10$ 。各曲線は下から順に $V = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.045, 0.049, 0.0497, 0.04975, V_c (= 0.04975307 \dots)$ の時の結果である。点線は後述の解析的結果 (69) を表す。

ぎが増大していることが見て取れる。また空間依存性は、 $V = 0$ (一番下の曲線) のときは $x = 0$ 付近で小さく x が大きいところで一定値に近づく様子を示すのに対し、 $V = V_c$ 近傍では、 $|x| \sim 1$ あたりに極大を持つ局在した空間依存性を示している。

まず x を固定して ω 依存性に注目する。図 4 は $x = 0$ の地点における $I(x, \omega)$ の ω 依存性を示している。それぞれ (a) $d = 1$, (b) $d = 2$ (c) $d = 3$ の場合の結果である。各曲線は $V \leq V_c (= 0.04975307 \dots)$ の時の結果を表しており、下から順に $V = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.045, 0.049, 0.0497, 0.04975, V_c (= 0.04975307 \dots)$ の場合に相当している。どの次元の場合も、 V を下から V_c に近づけていくと $I(0, \omega)$ が増大していることがわかる。広い ω 領域で $V = 0$ のとき $I(0, \omega)$ が ω^d に比例している一方、 $V = V_c$ のとき広い ω で $I(0, \omega)$ が ω^{d-2} に比例している。中間の速度においては $I(0, \omega) \propto \omega^{d-2}$ から $I(0, \omega) \propto \omega^d$ へのクロスオーバーが見られる。そのクロスオーバーを与える周波数 ω^* は V が V_c に近づくにつれて小さくなっていく。図 5 に $d = 1$ の時のクロスオーバー周波数 ω^* と $|V - V_c|$ の関係を示している。サドル・ノード分岐特有のスケーリング則 $\omega^* \propto |V - V_c|^{\frac{1}{2}}$ が成り立っていることが分かる。同様の関係式は $d = 2, 3$ の時にも成立することを我々は確認している。

3.4 ボゴリューボフ方程式のゼロエネルギー解

以下の話では、定常解まわりの低エネルギー励起の性質が重要になる。そこでボゴリューボフ方程式のゼロエネルギー固有値に対応する解について述べる。まず、 $0 \leq V \leq V_c$ のとき、すなわち定常解があるときにはいつでも存在するゼロエネルギー解について述べる。時間に依存しないグロス・ピタエフスキー方程式 (7) を式 (13) で導入した演算子 K を用いて書き直すと $0 = K\Psi_0 - \Psi_0^2\Psi_0^*$ となる。この両辺の複素共役に (-1) をかけて、 $0 = (\Psi_0^*)^2\Psi_0 - K\Psi_0^*$ を得る。この二つの式を連立微分方程式としてまとめて書くと、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \Psi_0(\mathbf{r}) \\ \Psi_0^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} K & -\Psi_0^2 \\ (\Psi_0^*)^2 & -K \end{pmatrix} \quad (37)$$

となる。(12) と比較すると、

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0(\mathbf{r}) \\ \Psi_0^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \equiv \psi_0 \quad (38)$$

がボゴリューボフ方程式のゼロエネルギー解になっていることがわかる。

次にもう一つのゼロエネルギー解を導くために、時間に依存しないグロス・ピタエフスキー方程式 (7) に戻る。各物理量の V 依存性をあらわに書くと

$$0 = \left(-\frac{1}{2}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) - 1 - \frac{V^2}{2} \right) \Psi_0(\mathbf{r}; V) + \Psi_0^*(\mathbf{r}; V)\Psi_0(\mathbf{r}; V)^2 \quad (39)$$

となる。さらに V を $0 \leq \varphi \leq \varphi_c$ の関数と見立て (39) を φ でパラメータ微分したものは

$$0 = K \frac{\partial \Psi_0}{\partial \varphi} + \Psi_0^2 \frac{\partial \Psi_0^*}{\partial \varphi} - V \frac{dV}{d\varphi} \Psi_0 \quad (40)$$

となる。(40)の複素共役

$$0 = K \frac{\partial \Psi_0^*}{\partial \varphi} + (\Psi_0^*)^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \varphi} - V \frac{dV}{d\varphi} \Psi_0^* \quad (41)$$

と(40)を連立微分方程式の形式にまとめたものは

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial \Psi_0^*(\mathbf{r})}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = V \frac{dV}{d\varphi} \begin{pmatrix} \Psi_0(\mathbf{r}) \\ \Psi_0^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (42)$$

と表される。(12)と比較すると、

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial \Psi_0^*(\mathbf{r})}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \equiv \psi_c \quad (43)$$

は $V = V_c$ のときに限りボゴリューボフ方程式のゼロエネルギー解になっていることがわかる。というのも図2より $V = V_c$ において $dV/d\varphi = 0$ となるからである。

3.5 低エネルギーの密度ゆらぎ (1次元)

スペクトル関数 $I(x, \omega)$ の低周波数 (低エネルギー) における振る舞いをこの節と次節で見ていく。その際、前節のゼロモードの結果を用いる。まずは最も単純な $d = 1$ の場合を見ていく。系の体積 Ω が十分大きくかつ有限であるとき、ある境界条件の下でのボゴリューボフ方程式の固有値の間隔 $|\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j|$ の典型的大きさ $\Delta\varepsilon$ は Ω^{-1} 程度の大きさである。

ここで行列要素を滑らかに補間する関数 $M(x, \omega)$ を導入する。 $M(x, \omega)$ は ω がある固有値 ε_j と一致するとき

$$M(x, \omega) = \Omega |\Psi_0^*(x)u_j(x) - \Psi_0(x)v_j(x)|^2 \quad (44)$$

を満たし、かつ ω 依存性の特徴的なスケールが $\Delta\varepsilon$ よりも十分大きい slowly varying な関数

$$\left| \frac{\partial M(x, \omega)}{\partial \omega} \right| \Delta\varepsilon \ll |M(x, \omega)| \quad (45)$$

であるとする。この $M(x, \omega)$ を用いてスペクトル関数は

$$I(x, \omega) = M(x, \omega) \Omega^{-1} \sum_j \delta(\omega - \varepsilon_j) \equiv M(x, \omega) D_1(\omega) \quad (46)$$

と表わすことができる。ここで $D_d(\omega)$ は d 次元におけるボゴリューボフ励起の固有値状態密度 (単位体積当たり) を表す。熱力学極限 ($\Omega \rightarrow \infty$) かつ低エネルギー (低周波数) のとき、 $D_1(\omega)$ は ω によらない一定値に近づく (ボゴリューボフ励起の分散関係は低エネルギーで運動量の大きさについて線形である)。よって低エネルギー (低周波数) のときの $I(x, \omega)$ の ω 依存性は $M(x, \omega)$ の ω 依存性で決まる。それを調べるために前節の結果 $(u(x), v(x))^t = (\Psi_0(x), \Psi_0^*(x))^t = \psi_0$ がボゴ

リユーボフ方程式 (12) のゼロモード (ゼロ固有値に対する固有関数) であることを思い起こす。このことは臨界速度以下の任意の V で成り立つ。また

$$(u(x), v(x))^t = (\partial\Psi_0(x)/\partial\varphi, -\partial\Psi_0^*(x)/\partial\varphi)^t = \psi_c \quad (47)$$

が臨界速度のときのみボゴリユーボフ方程式 (12) のゼロモードになる [22, 32]。

これらの結果を踏まえてボゴリユーボフ方程式 (12) の固有関数をエネルギーについての展開の形で求める。 $V < V_c$ のとき、状態 j の固有関数は次の漸近形を持つ [32, 38]:

$$(u_j(x), v_j(x))^t = (\varepsilon_j\Omega)^{-\frac{1}{2}} \{c\psi_0(x) + c\varepsilon_j\psi_1(x) + \mathcal{O}(\varepsilon_j^2)\} \quad (48)$$

ここで因子 $(\varepsilon_j\Omega)^{-1/2}$ は規格化因子である。 $\psi_1(x)$ は $\mathcal{L}\psi_1 = \psi_0$ の解のうち $|x|$ が大きいところで指数関数的な発散をしない解である。一方臨界速度状態 $V = V_c$ のとき、固有関数の低エネルギーにおける漸近形は [22, 32, 38]

$$(u_j(x), v_j(x))^t = (\varepsilon_j\Omega)^{-\frac{1}{2}} \{c\psi_0(x) + c'\psi_c(x) + \mathcal{O}(\varepsilon_j)\} \quad (49)$$

で与えられる。ここで c と c' は定数である。

ψ_0 は凝縮体の位相ゆらぎを表す [32] ので、密度ゆらぎに寄与しない。一方で ψ_c のほうは密度ゆらぎに寄与するゼロモードである [32]。そのことに対応して、行列要素 (の補間関数) $M(x, \omega)$ の低エネルギーにおける漸近形は

$$M(x, \omega) \rightarrow \bar{M}(x, \omega) \equiv \begin{cases} \omega f(x) & V < V_c \\ \frac{c'^2}{\omega} \left| \frac{\partial |\Psi_0(x, \varphi)|^2}{\partial \varphi} \right|^2 & V = V_c \end{cases} \quad (50)$$

となる。ここで $f(x)$ は ψ_1 からの寄与を表す。(46) と (50) を用いると低エネルギー (低周波数) における $I(x, \omega)$ は $d=1$ のとき $\bar{M}(x, \omega)D_1(\omega)$ で与えられる。

3.6 低エネルギーの密度ゆらぎ (2次元)

二次元の場合ボゴリユーボフ方程式 (12) の解は、

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{k_y}(x) \exp(ik_y y) \\ \bar{v}_{k_y}(x) \exp(ik_y y) \end{pmatrix} \quad (51)$$

と置くことができる。 $\bar{u}_{k_y}(x)$, $\bar{v}_{k_y}(x)$ が満たす方程式は、

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_x + \frac{k_y^2}{2} & -\Psi_0^2 \\ (\Psi_0^*)^2 & -\hat{K}_x - \frac{k_y^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{k_y}(x) \\ \bar{v}_{k_y}(x) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \bar{u}_{k_y}(x) \\ \bar{v}_{k_y}(x) \end{pmatrix} \quad (52)$$

$$\hat{K}_x \equiv -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) - \mu + 2|\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \quad (53)$$

である。与えられた $\epsilon > 0$ の下で、 k_y のとり得る値は $|k_y| \leq k(\epsilon)$ 、ただし $k(\epsilon)$ は

$$\epsilon = k\sqrt{1 + k^2/4}, \quad k > 0 \quad (54)$$

の解 $k = k(\epsilon)$ である。以下 $\theta = \arcsin[k_y/k(\epsilon)]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ であるとして、ボゴリューボフ方程式 (12) のエネルギー固有状態 i を θ の値によって分類する。区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ を微小な区間に分割する。 $1 \ll \pi/\Delta\theta \equiv N$ (N は自然数) として、

$$I_l \equiv [l\Delta\theta, (l+1)\Delta\theta], \quad l \in [-N/2, N/2 - 1] \quad (55)$$

と微小区間を定義する。またエネルギー固有状態 i がエネルギー ϵ_i 、 y 方向の運動量 k_y を持つとして

$$J(\theta) \equiv \{i \mid \arcsin(k_y/k(\epsilon_i)) \in [\theta, \theta + \Delta\theta]\} \quad (56)$$

と固有状態の部分集合を定義すると、エネルギー固有状態 i についての和は

$$\sum_i = \sum_l \sum_{i \in J(\theta_l)} \quad (57)$$

と分割することができる。ここで関数 $M(x, \omega, \theta)$ を以下の条件を満たす関数であるとする。

- $J(\theta)$ に属するエネルギー固有状態に対して、そのエネルギー準位の平均間隔が $\Delta\epsilon$ であるとすると、 $|\partial M(x, \omega, \theta)/\partial\omega| \Delta\epsilon \ll |M(x, \omega, \theta)|$ が成り立つ。すなわち $M(x, \omega, \theta)$ は $\Delta\epsilon$ よりももっと大きなエネルギースケールで緩やかに変化する関数である。
- $\omega = \epsilon_i$, $i \in J(\theta)$ が成り立つとき $M(x, \omega, \theta) = \Omega |\Psi_0^*(x)u_i(\mathbf{r}) - \Psi_0(x)v_i(\mathbf{r})|^2$ が成り立つ。

すなわち $M(x, \omega, \theta)$ は $J(\theta)$ に属するエネルギー固有状態の行列要素を、なめらかに補間する関数である。この $M(x, \omega, \theta)$ と (57) を用いて、スペクトル関数は

$$\begin{aligned} I(x, \omega) &= \sum_l \sum_{i \in J(\theta_l)} M(x, \omega, \theta_l) \Omega^{-1} \delta(\omega - \epsilon_i) \\ &= \sum_l M(x, \omega, \theta_l) \sum_{i \in J(\theta_l)} \Omega^{-1} \delta(\omega - \epsilon_i) \end{aligned} \quad (58)$$

と与えられる。以下 ω が小さいときの $M(x, \omega, \theta)$ の振る舞いをみていく。ボゴリューボフ方程式 (52) について、 $\omega \rightarrow 0$, $i \in J(\theta)$ は θ を固定しているので、 $k_y^2 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ となり、 $\mathcal{O}(\epsilon)$ までの精度では ($k_y = 0$ とおいた) $d = 1$ のときと同じ振る舞い ((48), (49)) をする。低エネルギーでは θ 依存性が落ちてしまうことに注意してほしい。これらに対応して、 ω が小さいときの $M(x, \omega, \theta)$ の振る舞いは (50) で与えられる。従って ω が小さい時のスペクトル関数は

$$I(x, \omega) \rightarrow \underbrace{\bar{M}(x, \omega) \sum_l \sum_{i \in J(\theta_l)} \Omega^{-1} \delta(\omega - \epsilon_i)}_{\equiv D_2(\omega)} \quad (59)$$

となる。 $D_2(\omega)$ は $d = 2$ におけるボゴリューボフ励起の一粒子状態密度である。

3.7 低エネルギーの密度ゆらぎ (3次元)

三次元の場合のボゴリユーボフ方程式の解は、

$$\begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}(x) \exp(i(k_y y + k_z z)) \\ \bar{v}(x) \exp(i(k_y y + k_z z)) \end{pmatrix} \quad (60)$$

と置くことができる。\$\bar{u}(x)\$, \$\bar{v}(x)\$ が満たす方程式は、

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_x + \frac{k_\perp^2}{2} & -\Psi_0^2 \\ (\Psi_0^*)^2 & -\hat{K}_x - \frac{k_\perp^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{v}(x) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{v}(x) \end{pmatrix} \quad (61)$$

である。但し \$k_\perp = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}\$ である。前節と同様に、\$0 \leq k_\perp \leq k(\epsilon)\$ が成り立つので、

$$k_z = k(\epsilon) \sin \theta \cos \phi, \quad k_y = k(\epsilon) \sin \theta \sin \phi \quad (62)$$

$$\theta \in [0, \pi/2], \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad (63)$$

とおく。(63) で与えられる単位半球面を微小面積要素 \$\Delta S_l\$ で分割する。エネルギー固有状態 \$i\$、単位半球面上の面積要素 \$\Delta S\$ において

$$(\cos \theta_i, \sin \theta_i \cos \phi_i, \sin \theta_i \sin \phi_i) \in \Delta S \quad (64)$$

が成り立つ時、\$i \in J(\Delta S)\$ と書く。エネルギー固有状態 \$i\$ についての和は

$$\sum_i = \sum_l \sum_{i \in J(\Delta S_l)} \quad (65)$$

と分割することができる。ここで関数 \$M(x, \omega, \Delta S)\$ を以下の条件を満たす関数であるとする。

- \$\Delta \epsilon\$ を \$J(\Delta S)\$ に属するエネルギー固有状態に対するエネルギー準位の平均間隔であるとする
と、\$|\partial M(x, \omega, \Delta) / \partial \omega| \Delta \epsilon \ll |M(x, \omega, \Delta S)|\$ が成り立つ。
- \$\omega = \epsilon_i, i \in J(\Delta S)\$ が成り立つとき \$M(x, \omega, \Delta S) = \Omega |\Psi_0^*(x) u_i(\mathbf{r}) - \Psi_0(x) v_i(\mathbf{r})|^2\$ が成り立つ。

\$M(x, \omega, \Delta S)\$, (65) を用いて、スペクトル関数は

$$\begin{aligned} I(x, \omega) &= \sum_l \sum_{i \in J(\Delta S_l)} M(x, \omega, \Delta S_l) \Omega^{-1} \delta(\omega - \epsilon_i) \\ &= \sum_l M(x, \omega, \Delta S_l) \sum_{i \in J(\theta_l)} \Omega^{-1} \delta(\omega - \epsilon_i) \end{aligned} \quad (66)$$

と与えられる。\$d=2\$ の時と同様の理由により \$\omega\$ が小さいとき

$$M(x, \omega, \Delta S) \rightarrow \bar{M}(x, \omega) \quad (67)$$

のようにふるまう。よって

$$I(x, \omega) \rightarrow \bar{M}(x, \omega) \underbrace{\sum_l \sum_{i \in J(\Delta S_l)} \Omega^{-1} \delta(\omega - \epsilon_i)}_{\equiv D_3(\omega)} \quad (68)$$

となる。 $D_3(\omega)$ は $d=3$ におけるボゴリューボフ励起の一粒子状態密度である。以上の結果と 3.5、3.6 の結果 ($d=1, 2$) をまとめると

$$I(x, \omega) \rightarrow \bar{M}(x, \omega) D_d(\omega) = \begin{cases} \omega^d f_d(x, V) & \text{for } V < V_c \\ \nu_d \omega^{d-2} \left| \frac{\partial |\Psi_0(x, \varphi)|^2}{\partial \varphi} \right|^2 & \text{for } V = V_c \end{cases} \quad (69)$$

となる。今の場合超流動速度はランダウの臨界速度よりも小さいので、 $D_d(\omega) \propto \omega^{d-1}$ であることを用いた。 $f_d(x, V)$ は V, d に依存する x の関数、 ν_d は d に依存する定数である。

$U(x) = U_0 \delta(x)$ のときの ν_d は [38] に与えられている。図 6 において $V = V_c$ のときの (69) (点線) と数値的結果 (実線) を比較した。両者が良く一致していることが確認できる。

3.8 密度ゆらぎのスケーリング則

(69) をみると、 V が V_c に下から近づくときに ω の指数が d から $d-2$ へ不連続に変化する。この振る舞いは、 $\omega \rightarrow 0$ の極限と $V \rightarrow V_c$ の極限を取る順序によってスペクトル関数の振る舞いが異なること、すなわち、 $V = V_c$ かつ $\omega = 0$ の地点が特異的であることを意味している。このことは $V \sim V_c$ かつ $\omega \sim 0$ の領域で、スペクトル関数が臨界的に振る舞うことを示唆する。この振る舞いを表すスペクトル関数のスケーリング則について議論する。3.3 における数値的結果において $(V_c - V)/V_c \ll 1$ に対するスペクトル関数 $I(x, \omega)$ の ω 依存性は、比較的大きい ω において $V = V_c$ のときと同様の振る舞いをするのに対し、小さい ω においては $V = 0$ のときと同様の振る舞いをするのを見た。その二つの振る舞いの境目を与える $\omega = \omega^*$ は $|V - V_c|^{1/2}$ に比例していた (図 5)。これはサドル・ノード分岐点付近特有のスケール則であるので、3.3 で扱った $U(x) = U_0 \delta(x)$ の場合だけでなく一般の $U(x)$ に対しても成り立つと考えてよさそうである。だとすると、 $\omega/\omega^* \propto \omega |V - V_c|^{-1/2}$ をスケーリング変数として、 $I(x, \omega)$ を次のように書くことができると期待される

$$I(x, \omega) = \omega^{d-2} F(x, \omega |V - V_c|^{-1/2}). \quad (70)$$

(70) と (69) がコンシステントであるためにはスケーリング関数 $F(x, \tilde{\omega} \equiv \omega |V - V_c|^{-1/2})$ は次のような漸近形を持つことが期待される。

$$F(x, \tilde{\omega}) \rightarrow \begin{cases} \tilde{\omega}^2 \tilde{f}_d(x) & \text{for } \tilde{\omega} \rightarrow 0, \\ \nu_d \left| \frac{\partial |\Psi_0(x, \varphi)|^2}{\partial \varphi} \right|^2 & \text{for } \tilde{\omega} \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (71)$$

ここで $\tilde{f}_d(x) = (V_c - V)f_d(x, V)$ とした。このスケーリング関係式が成立しているかどうか、3.3 で得た数値的結果を用いて確かめてみる。図 7 は図 4 の結果のうち $V = V_c$ 近傍のものを $\omega^{2-d}I(x=0, \omega)$ を縦軸に、 $\tilde{\omega}$ を横軸にしてプロットしたものである。各次元における様々な V に対するデータが一つの曲線に重なっている。このことはスケーリング関係式 (70) の妥当性を例証している。

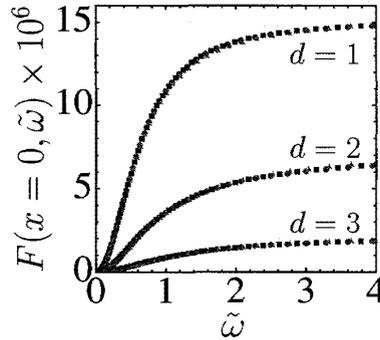


図 7: 臨界速度付近あるいはサドル・ノード分岐点付近における密度ゆらぎスペクトル関数のスケーリング関係式 [39]。各曲線は各次元 ($d = 1, 2, 3$) における結果を表す。 $\tilde{\omega} = \omega|V - V_c|^{-1/2}$ を横軸に、 $F(x=0, \tilde{\omega}) = \omega^{2-d}I(x=0, \omega)$ を縦軸にして図 4 の結果のうち $V = V_c$ 近傍のものをプロットした。円, 正方形, 三角形はそれぞれ $V = 0.04975, 0.0497, 0.049$ に対するデータを示す。各次元のさまざまな V に対するデータが一つの曲線に乗っているからスケーリング関係式 (70) が成り立っていることが分かる。

4 ランダウ臨界速度近傍の密度ゆらぎ

4.1 ボゴリューボフ励起

空間的に一様な場合 スペクトル関数 $I(x, \omega)$ は x に依存しないので $I(\omega)$ とかく。この場合ボゴリューボフ励起に対するランダウの臨界速度は位相速度の長波長極限で決まり $V_{c,L} = 1$ である。さまざまな $V (\leq 1)$ に対する $I(\omega)$ を (36) と (18) を用いて $d = 1, 2, 3$ の場合にプロットしたのが図 8 である。 $V < V_c$ のときと $V = V_{c,L}$ でスペクトル関数の ω 依存性が定性的に異なることが図から分かる。 $V < V_c$ のとき ω が小さいところで $I(\omega) \propto \omega^d$ となり、 $V = V_c$ のとき $I(\omega) \propto \omega^{(2d-3)/3}$ となっている。この結果は (36) と (18) を用いて直接導けるが、4.2.1 で行う単一モード近似での $I(\omega)$ の計算に含まれるのでそこで導くことにする。

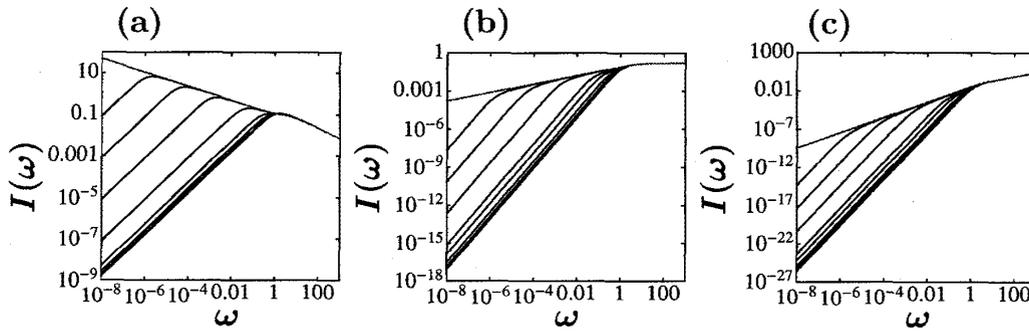


図 8: 空間一様な場合のボゴリューボフ励起の $I(\omega)$ の ω 依存性 [38]。 (a) $d = 1$, (b) $d = 2$, (c) $d = 3$ の場合をそれぞれ表す。それぞれの曲線は下から順に $V = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999$ と $V = V_c (= 1)$ の時の結果を表している。

4.2 単一モード近似の一般の場合

一様系においてスペクトル関数 $I(\mathbf{r}, \omega) = I(\omega)$ は動的構造因子 (21) を用いて以下のように表わせる。

$$I(\omega) = \sum_l |\langle l | \hat{\rho}(\mathbf{r} = 0) | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g) \quad (72)$$

$$= \sum_l |\langle l | \Omega^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q}} | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g) \quad (73)$$

ここで状態 l の運動量を $\mathbf{q}(l)$ と表わすと

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\substack{l \\ \text{s.t. } \mathbf{q}(l)=\mathbf{q}}} |\langle l | \Omega^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{q}'} \hat{\rho}_{\mathbf{q}'} | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g) \\ &= \Omega^{-1} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\substack{l \\ \text{s.t. } \mathbf{q}(l)=\mathbf{q}}} |\langle l | \hat{\rho}_{\mathbf{q}} | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g) \\ &= \Omega^{-1} \sum_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \omega) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} S(\mathbf{q}, \omega) \end{aligned} \quad (74)$$

最後の等式で熱力学極限 $\Omega \rightarrow \infty$ をとった。さて、今基底状態の運動量がゼロであるとする、単一モード近似では次の関係式が成立する。

$$\epsilon_{\mathbf{q}} = \frac{q^2}{2S(\mathbf{q})}, \quad S(\mathbf{q}) = \sum_l |\langle l | \hat{\rho}_{\mathbf{q}} | g \rangle|^2 \quad (75)$$

ここで $S(\mathbf{q})$ は静的構造因子と呼ばれる量で、動的構造因子と次のように関係している。

$$S(\mathbf{q}) = \int_0^{\infty} d\omega S(\mathbf{q}, \omega) \quad (76)$$

単一モードの仮定が成り立つとき、動的構造因子は $S(\mathbf{q}, \omega) = A_{\mathbf{q}} \delta(\omega - \epsilon_{\mathbf{q}})$ の形で与えられる。 $A_{\mathbf{q}}$ を (75), (76) から決めると

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{q^2}{2\epsilon_{\mathbf{q}}} \delta(\omega - \epsilon_{\mathbf{q}}) \quad (77)$$

となる。基底状態において流体全体が速さ V で x 方向に流れているとき、動的構造因子はガリレイ不変性より

$$S(q, \omega) = \frac{q^2}{2\epsilon_q} \delta(\omega - \epsilon_q - Vq_x) \quad (78)$$

で与えられる。ここで ϵ_q は流体全体が静止している時の励起状態の分散関係である。(74) と (78) を用いると一様系のスペクトル関数は、単一モード近似の下で、

$$I(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{q} \frac{q^2}{2\epsilon_q} \delta(\omega - \epsilon_q - Vq_x) \quad (79)$$

と表わされることがわかる。

4.2.1 ランダウ-フォノン不安定性

$|\mathbf{q}| = q = 0$ 付近で $\epsilon_q = c_1 q + c_3 q^3 + \mathcal{O}(q^5)$ 、 $c_1 > 0$ 、 $c_3 > 0$ として、 $\omega (\geq 0)$ が小さい時の各次元における (79) について調べる。

$d = 1$ の場合

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq_x \frac{q_x^2}{2\epsilon_{q_x}} \delta(\omega - \epsilon_{q_x} - Vq_x) \quad (80)$$

におけるデルタ関数の引数がゼロになるのは、 $q_x = k_+(\omega)$ 、 $-k_-(\omega)$ のときである。 $k_{\pm}(q)$ は

$$\omega = f_{\pm}(q), \quad f_{\pm}(q) \equiv \epsilon_q \pm Vq \quad (81)$$

を満たす正の解である。積分を実行すると

$$I(\omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=\pm} \left[\frac{q^2}{\epsilon_q} \left| \frac{df_i(q)}{dq} \right|^{-1} \right]_{q=k_i(\omega)} \quad (82)$$

となる。 $c_1 q \gg c_3 q^3$ が成り立つ程度に長波長であるのは、 $q \ll (c_1/c_3)^{\frac{1}{2}}$ のときである。このとき $\epsilon_q \sim c_1 q$ と近似することができ、また $\left| \frac{df_i(q)}{dq} \right|_{q=k_i(\omega)}^{-1} = \left| \frac{dk_i(\omega)}{d\omega} \right|$ を用いると

$$I(\omega) = \frac{1}{8\pi c_1} \sum_{i=\pm} \frac{dk_i^2(\omega)}{d\omega} \quad (83)$$

を得る。 $|\epsilon_q - c_1 q| \sim c_1 q$ が成り立つ波数を q_l とすると、 $q \ll q_l$ のとき

$$k_+(\omega) \sim (c_1 + V)^{-1} \omega \quad (84)$$

となる。 $q \ll q_l$ かつ $(c_1 - V)q \ll c_3 q^3$ のとき (すなわち $q_c = (c_1 - V)^{\frac{1}{2}} c_3^{-\frac{1}{2}}$ として $q_c \ll q \ll q_l$ が成り立つとき) は、

$$k_-(\omega) \sim (\omega/c_3)^{\frac{1}{3}} \quad (85)$$

となる。一方で $q \ll q_c$ のときは

$$k_-(\omega) \sim (c_1 - V)^{-1} \omega \quad (86)$$

となる。 $\omega^* = (c_1 - V)^{3/2}(c_3)^{-1/2}$ 、 $\omega_{1,+} \sim c_1^{3/2}c_3^{-1/2}$ 、 $\omega_{1,-} \sim (c_1 - V)c_1^{1/2}c_3^{-1/2}$ とおいてまとめると

$$k_-(\omega) \sim \begin{cases} (c_1 - V)^{-1}\omega & \text{for } \omega \ll \omega^* \\ (\omega/c_3)^{1/3} & \text{for } \omega^* \ll \omega \ll \omega_{1,-} \end{cases} \quad (87)$$

$$k_+(\omega) \sim (c_1 + V)^{-1}\omega, \quad \text{for } \omega \ll \omega_{1,+} \quad (88)$$

となる。これらを用いると (83) は

$$I(\omega) \sim \begin{cases} \frac{\omega(c_1^2 + V^2)}{2\pi c_1(c_1^2 - V^2)} & \text{for } \omega \ll \omega^* \\ \frac{\omega^{-1/3}}{12\pi c_1 c_3^{2/3}} & \text{for } \omega^* \ll \omega \ll \omega_{1,-} \end{cases} \quad (89)$$

となる。

$d = 3$ の場合

$d = 2$ について調べる前に、より簡単な $d = 3$ の場合を扱う。(79) は極座標表示で

$$I(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq q^2 \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{q^2}{2\epsilon_q} \delta(\omega - \epsilon_q - Vq \cos \theta) \quad (90)$$

と表わされる。デルタ関数の引数がゼロになり得るための条件

$$\left| \frac{\omega - \epsilon_q}{Vq} \right| \leq 1 \quad (91)$$

は、 $k_+(\omega) \leq q \leq k_-(\omega)$ と書き直すことができる。 θ についての積分を実行すると

$$I(\omega) = \frac{1}{8\pi^2 V} \int_{k_+(\omega)}^{k_-(\omega)} dq \frac{q^3}{\epsilon_q} \sim \frac{(k_-(\omega))^3 - (k_+(\omega))^3}{24\pi^2 V c_1} \quad (92)$$

となる。最右辺は $\omega \ll \omega_{1,-}$ のとき成立する近似式である。(87), (88) を用いると (92) は

$$I(\omega) \sim \begin{cases} \frac{(3c_1^2 + V^2)\omega^3}{12\pi^2 c_1 (c_1^2 - V^2)^3} & \text{for } \omega \ll \omega^* \\ \frac{\omega}{24\pi^2 V c_1 c_3} & \text{for } \omega^* \ll \omega \ll \omega_{1,-} \end{cases} \quad (93)$$

となる。

$d = 2$ の場合

$d = 2$ のとき (79) は、極座標表示で

$$I(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq q \int_0^{2\pi} d\theta \frac{q^2}{2\epsilon_q} \delta(\omega - \epsilon_q - Vq \cos \theta) \quad (94)$$

である。デルタ関数の引数がゼロになり得る条件 $k_+(\omega) \leq q \leq k_-(\omega)$ に q 積分の領域を制限し、 θ についての積分を実行すると

$$I(\omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{k_+(\omega)}^{k_-(\omega)} dq \frac{q^3}{\epsilon_q V q |\sin \theta_0|}, \quad \cos \theta_0 = \frac{\omega - \epsilon_q}{Vq} \quad (95)$$

を得る。

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega - \epsilon_q}{Vq} \right)^2}$$

を用いると

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{k_+(\omega)}^{k_-(\omega)} dq \frac{q^3}{\epsilon_q (f_+(q) - \omega)^{\frac{1}{2}} (\omega - f_-(q))^{\frac{1}{2}}} \\ &\sim \frac{1}{8\pi^2 c_1} \int_{k_+(\omega)}^{k_-(\omega)} dq q^2 (f_+(q) - \omega)^{-\frac{1}{2}} (\omega - f_-(q))^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (96)$$

となる。最右辺は $\omega \ll \omega_{1,-}$ のとき成立する近似式である。 $\omega \ll \omega^*$ が成り立つとき、 $k_+(\omega) \leq q \leq k_-(\omega)$ において $(c_1 - V)q \gg c_3 q^3$ が成り立つので $f_{\pm}(q) \sim (c_1 \pm V)q$ と近似できる。このとき

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{1}{8\pi^2 c_1} \int_{k_+(\omega)}^{k_-(\omega)} dq q^2 [(c_1 + V)q - \omega]^{-\frac{1}{2}} [\omega - (c_1 - V)q]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\omega^2}{8\pi^2 c_1} \int_{k_+(\omega)/\omega}^{k_-(\omega)/\omega} d\eta \eta^2 [(c_1 + V)\eta - 1]^{-\frac{1}{2}} [1 - (c_1 - V)\eta]^{-\frac{1}{2}} \\ &\sim \frac{\omega^2}{8\pi^2 c_1} \int_{(c_1+V)^{-1}}^{(c_1-V)^{-1}} d\eta \eta^2 [(c_1 + V)\eta - 1]^{-\frac{1}{2}} [1 - (c_1 - V)\eta]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (97)$$

である。一方 $\omega^* \ll \omega \ll \omega_{1,-}$ が成り立つとき、(96)における積分への主な寄与は、 $q = k_-(\omega)$ の近傍から来る。被積分関数を $q \sim k_-(\omega)$ として展開すると、主要項は、

$$\sim (2V)^{-\frac{1}{2}} (k_-(\omega))^{\frac{3}{2}} \left(\frac{dk_-(\omega)}{d\omega} \right)^{\frac{1}{2}} (k_-(\omega) - q)^{-\frac{1}{2}} \quad (98)$$

となる。これより

$$I(\omega) = \frac{1}{8\pi^2 c_1} \left(\frac{2}{V} \right)^{\frac{1}{2}} (k_-(\omega))^2 \left(\frac{dk_-(\omega)}{d\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 2^{-\frac{5}{2}} 3^{-\frac{1}{2}} \pi^{-2} V^{-\frac{1}{2}} c_1^{-1} c_3^{-\frac{5}{6}} \omega^{\frac{1}{3}} \quad (99)$$

を得る。最右辺を導くのに (87) を用いた。

4.2.2 ランダウ-ロトン不安定性

次に励起スペクトル ϵ_q が、長波長でフォノン型 $\epsilon_q \sim c_1 q$ ($c_1 > 0$)、有限波長で極小を持つフォノンロトン型スペクトルである場合を考える。ランダウの臨界速度 V_c は、 $\epsilon_q - V_c q = 0$ を満たす q が一つ存在するという条件から決まる。 $\text{Min}(\epsilon_q/q) = V_c$ を与える q を大きさにもち、超流動速度と反平行な運動量を q_c とする。 $q = q_c$ 付近で、 $\epsilon_q - V_c q_x$ は $\sim q_c (V_c - V) + \Delta (q - q_c)^2$ と展開できる。ここで Δ は正の定数である。臨界速度付近かつ低エネルギーのとき $S(q, \omega)$ は

$$\begin{aligned} S(q, \omega) &\sim (q_c^2 / (2\epsilon_{q_c})) \delta(\omega - \Delta (q - q_c)^2 - q_c (V_c - V)) \\ &\quad + (q / (2c_1)) \delta(\omega - c_1 q + V q_x) \end{aligned} \quad (100)$$

と与えられる。右辺の第一項、第二項はそれぞれ、長波長領域のフォノンからの寄与、 q_c 付近のロトンからの寄与を与える。これを用いると $I(\omega)$ は

$$I(\omega) \sim A\omega^{(d-2)/2}\theta(\omega - q_c(V_c - V)) + B\omega^d \quad (101)$$

と得られる。ここで A と B は定数である。 θ はヘビサイドのステップ関数を表す。前節の結果と合わせてランダウ臨界速度が長波長で決まっている場合でも、ロトン極小で決まっている場合でも共通して、動的密度ゆらぎがランダウの臨界速度付近かつ低エネルギーで増大することがわかる。またランダウ不安定性における密度ゆらぎの増大は、励起スペクトルの低エネルギーにおける状態密度の増大に由来するものであることが分かる。

5 議論

5.1 渦励起不安定性との関連

ソリトン生成不安定性における密度ゆらぎのスケール則 ((70) と (71)) を導出する際に次の二つの事実を用いた。(I) 密度ゆらぎに寄与し得るゼロモードは $V = V_c$ でのみ存在すること。(II) 周波数依存性をスケールするクロスオーバー周波数 ω^* は $\omega^* \propto |V_c - V|^{1/2}$ のようにスケールされること。この二つのことは超流動ボース系で、臨界速度の状態がサドル・ノード分岐になっている場合に成り立つ。障害物周りでの超流動の渦生成不安定性の場合もサドル・ノード分岐と同定されているので [11, 12, 20]、その場合でも (70) と似た関係式、臨界速度近傍での密度ゆらぎの増大が起きていると我々は考える。

5.2 超流動の安定性に関する新たな判定法

3章と4章でみた二つの超流動不安定化機構の議論を通じて臨界速度付近かつ低エネルギー（低周波数）領域で動的な密度ゆらぎが増大することを見た。ふたつの不安定化機構では密度ゆらぎが増大する起源も異なる。臨界速度付近で低エネルギー励起における波動関数の性質が変化することにより、密度ゆらぎと結合する成分が生じること、これがソリトン生成不安定性の起源である。ランダウ不安定性では、臨界速度付近における低エネルギーでの状態密度の増大が起源である。起源が異なるにせよ図4と図8を見比べてみれば、二つの不安定性においてゆらぎに共通点を見ることができる。実際その共通の性質を次のようにまとめることができる。

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, \omega) &= \omega^\beta f(\mathbf{r}) + I'(\mathbf{r}, \omega) \\ \lim_{\omega \rightarrow +0} \omega^{-\beta} I'(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \quad \text{for } \forall \mathbf{r} \end{aligned} \quad (102)$$

ここで β は

$$\beta = \begin{cases} \beta_c (< d) & V = V_c \\ d & V < V_c \end{cases} \quad (103)$$

を満たす指数である。関数形 $f(\mathbf{r})$ と $V = V_c$ での指数 β_c の値に、各不安定性の個別性が反映される。

低エネルギーにおける局所密度スペクトル関数の性質は、局所密度の時間相関関数（自己相関関数 (autocorrelation function)）における長時間相関の性質に反映される。したがって、(102) は局所密度の時間相関関数を用いて表わすこともできる。ここで粗視化された局所密度

$$\tilde{n}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' f_a(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}')$$

を導入する。これによって同時刻極限における自己相関関数の不必要な発散を除くことができる。ここで $f_a(\mathbf{r})$ は条件

$$f_a(\mathbf{r}) \sim 0, \quad |\mathbf{r}| \gg a (> 0), \quad \int d\mathbf{r} f_a(\mathbf{r}) = 1$$

を満たす重み関数である。 a は粗視化のスケールを表し、ボース系の特徴的長さ (回復長) より十分短くとる。重み関数として例えば

$$f_a(\mathbf{r}) = \pi^{-d/2} a^{-d} \exp(-|\mathbf{r}|^2/a^2) \quad (104)$$

を採ることができる。 $\tilde{n}(\mathbf{r})$ の自己相関関数 $C(\mathbf{r}, t)$ は、

$$C(\mathbf{r}, t) = \langle \tilde{n}(\mathbf{r}, t) \tilde{n}(\mathbf{r}, 0) + \tilde{n}(\mathbf{r}, 0) \tilde{n}(\mathbf{r}, t) \rangle / 2 - \langle \tilde{n}(\mathbf{r}, 0) \rangle^2$$

で与えられ、これは粗視化された密度スペクトル関数

$$\tilde{I}(\mathbf{r}, \omega) = \sum_l |\langle l | \tilde{n}(x) | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g)$$

を用いて

$$C(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty d\omega \tilde{I}(\mathbf{r}, \omega) \cos \omega t \quad (105)$$

と表わせる。粗視化された密度スペクトル関数の振る舞いは

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\mathbf{r}, \omega) &\sim 0, & \omega &\gg a^{-2} \\ \tilde{I}(\mathbf{r}, \omega) &\sim I(\mathbf{r}, \omega), & \omega &\ll a^{-2} \end{aligned} \quad (106)$$

で与えられ、低エネルギーの性質は $I(\mathbf{r}, \omega)$ と変わらない。一方で (105) において ω の大きい領域での積分の発散を回避できる。 $C(\mathbf{r}, t)$ の長時間相関の振る舞いは、 $\tilde{I}(\mathbf{r}, \omega) \sim I(\mathbf{r}, \omega)$ の低周波数 (低エネルギー) の振る舞いで決まる。結果として、長時間相関の漸近形を用いて判定法 (102) は、

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}, t) &= t^{-(\beta+1)} \tilde{f}(\mathbf{r}) + C'(\mathbf{r}, t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} C'(\mathbf{r}, t) t^{\beta+1} &= 0 \quad \text{for } \forall \mathbf{r} \end{aligned} \quad (107)$$

と (103) で与えられる。 $\tilde{f}(\mathbf{r})$ は \mathbf{r} のある関数である。(107) は、超流動状態の不安定化に伴い、密度ゆらぎの長時間相関が増大することを意味している。密度ゆらぎの時間相関を測りやすい系では (107) が、スペクトロスコープの方がやりやすい系では (102) が実験的検証にとって有用な関係式になる。われわれは (102) または (107) をランダウ不安定性とサドル・ノード不安定性を統一的に記述する超流動安定性の新たな判定法として提案している。

この判定法は動的な密度ゆらぎを用いた判定法だが、静的な密度ゆらぎを用いて超流動安定性の判定を試みてもうまくいかない。例えば、局所密度スペクトル関数に対応する局所静的帯磁率

$$\chi(\mathbf{r}) = \int d\omega \tilde{I}(\omega, \mathbf{r})/\omega$$

が、 $V = V_c$ の場合と $V < V_c$ の場合で定性的には変わらない例 (2,3次元系におけるランダウ不安定性と3次元におけるソリトン生成不安定性) が知られている。ソリトン生成不安定性におけるサドル・ノード分岐の場合、特徴的な時間スケール $1/\omega^*$ は発散する。これに対し空間スケールの増大はソリトンダイナミクスにも見られない。これらのことは超流動流安定性の判定法において動的な量を用いることが本質的であることを示唆している。

6 結論

動的密度ゆらぎに注目して超流動状態のソリトン生成不安定性とランダウ不安定性に共通するゆらぎの性質を導出し、これに基づいて超流動安定性に関する新たな判定法を提案した。ソリトン生成不安定性におけるゆらぎの性質はボゴリューボフ励起のゼロモードの構造とサドル・ノード分岐特有のスケーリング則によって決まっている。同様の分岐構造を持つ渦生成不安定性においても動的密度ゆらぎの増大が示唆される。これをより具体的な形で検証するのが今後の課題である。

付録 A ボゴリューボフ方程式 (古典波動版)

ボゴリューボフ方程式はもともと量子系に対するものであったが、この節では、まず時間に依存するグロス・ピタエフスキー方程式 (6) に対する線形近似としてボゴリューボフ方程式を導く (ボゴリューボフ方程式 (量子版) については次次節で説明する)。凝縮体波動関数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ を定常解 $\Psi_0(\mathbf{r})$ まわりで展開し

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}) + \delta\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (108)$$

とする。定常解からのずれ $\delta\Psi(\mathbf{r}, t)$ について2次以上の項を無視すると、 $\delta\Psi(\mathbf{r}, t)$ が満たす線形化された運動方程式

$$i \frac{\partial \delta\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = K \delta\Psi(\mathbf{r}, t) + \Psi_0^2(\mathbf{r}) \delta\Psi^*(\mathbf{r}, t) \quad (109)$$

を得る。ここで

$$K = -\frac{1}{2} \nabla^2 + (U(\mathbf{r}) - \mu) + 2\Psi_0^*(\mathbf{r})\Psi_0(\mathbf{r}) \quad (110)$$

は (13) で導入した演算子である。線形化運動方程式 (109) の基準振動を求めるべく変数分離形の解 $\delta\Psi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-i\epsilon t}$ を仮定してもうまくいかない。(109) の右辺に $\delta\Psi^*$ があり、 $e^{i\epsilon^* t}$ に比例する項が現れるからである。そこで、

$$\delta\Psi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-i\epsilon t} - v^*(\mathbf{r})e^{i\epsilon^* t} \quad (111)$$

とおき、これを (109) の両辺に代入する。両辺における e^{-iet} の係数の比較から

$$\epsilon u(\mathbf{r}) = Ku(\mathbf{r}) - \Psi_0^2 v(\mathbf{r}) \quad (112)$$

が得られ、 $e^{i\epsilon^* t}$ の係数の比較から

$$\epsilon^* v^*(\mathbf{r}) = (\Psi_0^*)^2 u^*(\mathbf{r}) - Kv^*(\mathbf{r}) \quad (113)$$

が得られる。(112) と複素共役を取った (113) を連立微分方程式の形式にまとめると

$$\epsilon \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} K & -\Psi_0^2 \\ (\Psi_0^*)^2 & -K \end{pmatrix} \quad (114)$$

を得る。これがボゴリューボフ方程式 ((114) として既に導入した式) である。(114) において $(u, v)^t$ が固有値 ϵ の固有関数であるとき、 $(v^*, u^*)^t$ が固有値 $-\epsilon^*$ の固有関数であることは直接試してみることによって確認できる。 $(v^*, u^*)^t$ が与える $\delta\Psi$ は

$$\delta\Psi = v^* \exp(-i(-\epsilon^*)t) - (u^*)^* \exp(i(-\epsilon^*)t) = -(u \exp(-iet) - v^* \exp(i\epsilon^* t)) \quad (115)$$

となり、 $(u, v)^t$ が与える $\delta\Psi$ と定数倍を除いて同じものである。このため (114) の解としては、 $(u, v)^t$ または $(v^*, u^*)^t$ のいずれか一つだけを残すべきである。以下 $\text{Re}(\epsilon) \geq 0$ とする。

(114) の固有関数のラベルを j とし、

$$\epsilon_j \begin{pmatrix} u_j(\mathbf{r}) \\ v_j(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} u_j(\mathbf{r}) \\ v_j(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (116)$$

とすると、(109) の一般解は、

$$\delta\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{j \text{ s.t. } \text{Re} \geq 0} (u_j(\mathbf{r}) a_j \exp(-i\epsilon_j t) - v_j^*(\mathbf{r}) a_j^* \exp(i\epsilon_j^* t)) \quad (117)$$

と表わすことができる。ここで a_j は複素数である。固有関数 (u_j, v_j) において以下の二つの関係式

$$(\epsilon_j - \epsilon_k^*) \int d\mathbf{r} (u_k^* u_j - v_k^* v_j) = 0 \quad (118)$$

$$(\epsilon_j + \epsilon_k) \int d\mathbf{r} (u_k v_j - v_k u_j) = 0 \quad (119)$$

が成り立つ。

(118) の導出

(116) の両辺に $(u_k^*, -v_k^*)$ を左からかけて \mathbf{r} について積分し、

$$\int d\mathbf{r} (u_k^*, -v_k^*) \mathcal{L} \begin{pmatrix} u_j(\mathbf{r}) \\ v_j(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \epsilon_j \int d\mathbf{r} (u_k^* u_j - v_k^* v_j) \quad (120)$$

を得る。この複素共役をとり、 k と j を入れ替えると

$$\int d\mathbf{r} (u_j, -v_j) \mathcal{L}^* \begin{pmatrix} u_k^*(\mathbf{r}) \\ v_k^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \epsilon_k^* \int d\mathbf{r} (u_k^* u_j - v_k^* v_j) \quad (121)$$

となる。 $\int d\mathbf{r} u_k^* K u_j = \int d\mathbf{r} (K u_k^*) u_j$ などを用いると (120) と (121) の左辺が等しいことが分かる。このことより (118) が導かれる。

(119) の導出

(116) の両辺に $(v_k, -u_k)$ を左からかけて \mathbf{r} について積分し、

$$\int d\mathbf{r} (v_k, -u_k) \mathcal{L} \begin{pmatrix} u_j(\mathbf{r}) \\ v_j(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \epsilon_j \int d\mathbf{r} (v_k u_j - u_k v_j) \quad (122)$$

を得る。 k と j を入れ替えると

$$\int d\mathbf{r} (v_j, -u_j) \mathcal{L} \begin{pmatrix} u_k(\mathbf{r}) \\ v_k(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \epsilon_k \int d\mathbf{r} (v_j u_k - u_j v_k) \quad (123)$$

となる。(122) と (123) の左辺が等しいことは示すことは $\int d\mathbf{r} v_k K u_j = \int d\mathbf{r} (K v_k) u_j$ などを用いると示すことができる。(122) と (123) の両辺差し引いて、(119) が導かれる。

時間に依存するグロス・ピタエフスキー運動方程式が正準方程式の形式で表わされることに対応し、ボゴリューボフ方程式も正準方程式の形式

$$i \frac{\partial \delta \Psi}{\partial t} = \frac{\delta H_B[\delta \Psi^*, \delta \Psi]}{\delta(\delta \Psi^*)} \quad (124)$$

で表わすことができる。 H_B は

$$H_B = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} [\delta \Psi^* (K \delta \Psi + \Psi_0^2 \delta \Psi^*) + \text{c.c.}] = \frac{i}{2} \int d\mathbf{r} \left[\delta \Psi^* \frac{\partial \delta \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \delta \Psi^*}{\partial t} \delta \Psi \right] \quad (125)$$

で与えられる。古典ハミルトニアン (8) を

$$H = E_0 + H_B + \mathcal{O}(\delta \Psi^* \delta \Psi^2, (\delta \Psi^*)^2 \delta \Psi) \quad (126)$$

のように $\delta \Psi, \delta \Psi^*$ について 2 次まで展開すれば、右辺第一項は

$$E_0 = \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} |\nabla \Psi_0(\mathbf{r})|^2 + (U(\mathbf{r}) - \mu) |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \right] + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} |\Psi_0(\mathbf{r})|^4 \quad (127)$$

である。ボゴリューボフ方程式が正準形式で与えられることから、 H_B が保存量になること ($dH_B/dt = 0$) も直ちに導かれる。

付録 B 安定定常解まわりのボゴリューボフ方程式 (古典波動版)

以下では、グロス・ピタエフスキー方程式の定常解が安定であると仮定して話を進める。ボゴリューボフ方程式の固有値 ϵ は一般には複素数値をとるが、固有値に虚部を持つモードは、時間とともに $\exp(|\text{Im} \epsilon| t)$ に比例して成長するので、グロス・ピタエフスキー方程式が不安定になる (動的不安定性)。よって安定な定常解まわりではボゴリューボフ方程式の固有値は実数であるはずである。前節で述べたように、モードの数え上げにおける重複を避けるため、以下では ϵ は非負の実数であるとする。このとき (118) は

$$\epsilon_j \neq \epsilon_k \rightarrow \int d\mathbf{r} (u_k^* u_j - v_k^* v_j) = 0 \quad (128)$$

となり、(119)は j, k のいずれかがゼロ固有値のモードでない場合に、

$$\int d\mathbf{r}(u_k v_j - v_k u_j) = 0 \quad (129)$$

となる。

有限系でエネルギー固有値が縮退している場合は考えないので、以下話を単純にし、有限系のボゴリューボフ方程式のエネルギー固有値に縮退はないとする。 $\delta\Psi$ のモード展開の式を(125)の最右辺の式に代入し、(128), (129)を用いて整理すると、

$$H_B = \sum_{\substack{j; \\ \text{s.t. } \epsilon_j \geq 0}} \epsilon_j a_j^* a_j \int d\mathbf{r}(|u_j|^2 - |v_j|^2) \quad (130)$$

となる。 a_j は任意の複素数なので、もし

$$\epsilon_j > 0, \quad \int d\mathbf{r}(|u_j|^2 - |v_j|^2) < 0$$

となるモードが存在すると H_B の下限が $-\infty$ になってしまう。今はグロス・ピタエフスキー方程式の定常解が安定であると仮定しているので

$$\epsilon_j > 0 \rightarrow \int d\mathbf{r}(|u_j|^2 - |v_j|^2) \geq 0 \quad (131)$$

となっているはずである。(131)の状態のうち、

$$\epsilon_j > 0 \text{ かつ } \int d\mathbf{r}(|u_j|^2 - |v_j|^2) = 0 \quad (132)$$

という状態は、エネルギーへの寄与はゼロなのに、有限の振動数を持つ非自明な状態である。この状態の有無や性質はよくわかっていないが本記事の後の章で現れない状態なので、以後考えない。

$$\epsilon_j > 0 \text{ かつ } \int d\mathbf{r}(|u_j|^2 - |v_j|^2) > 0 \quad (133)$$

の状態において、正值 $\int d\mathbf{r}(|u_j|^2 - |v_j|^2)$ は $(u_j, v_j)^t$ のノルムとみなすことができる。そもそも $(u_j, v_j)^t$ は線形方程式であるボゴリューボフ方程式の固有関数だから、スカラー倍の不定性がある。これを固定するために

$$\int d\mathbf{r}(|u_j|^2 - |v_j|^2) = \Delta_j > 0$$

と規格化条件を与えておく。 Δ_j としてどのような正数をとっても系の記述としては同等である。慣用として用いられる規格化条件 $\Delta_j = 1$ すなわち

$$\int d\mathbf{r}(|u_j|^2 - |v_j|^2) = 1 \quad (134)$$

を以下採用する。するとハミルトニアンが

$$H_B = \sum_{\substack{j; \\ \text{s.t. } \epsilon_j \geq 0}} \epsilon_j a_j^* a_j \quad (135)$$

と表わされ、量子系のボゴリューボフ方程式との対応が見やすい。以下 a_j を $\delta\Psi$ と $\delta\Psi^*$ を用いて表わした式(フーリエ展開の式)を求める。

$$a_k e^{-i\epsilon_k t} = \int d\mathbf{r} (u_k^*(\mathbf{r}) \delta\Psi(\mathbf{r}, t) + v_k^*(\mathbf{r}) \delta\Psi^*(\mathbf{r}, t)) \quad (136)$$

を求める。 $\delta\Psi$ のモード展開の式 (117) に u_k^* をかけて空間積分した表式

$$\int d\mathbf{r} u_k^* \delta\Psi = \sum_j e^{-i\epsilon_j t} a_j \int d\mathbf{r} u_k^* u_j - \sum_j e^{i\epsilon_j t} a_j^* \int d\mathbf{r} u_k^* v_j^* \quad (137)$$

と (117) の複素共役に v_k^* をかけて空間積分した表式

$$\int d\mathbf{r} v_k^* \delta\Psi^* = \sum_j e^{i\epsilon_j t} a_j^* \int d\mathbf{r} v_k^* u_j^* - \sum_j e^{-i\epsilon_j t} a_j \int d\mathbf{r} v_k^* v_j \quad (138)$$

の両辺を足し合わせて

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} (u_k^*(\mathbf{r}) \delta\Psi(\mathbf{r}, t) + v_k^*(\mathbf{r}) \delta\Psi^*(\mathbf{r}, t)) &= \sum_j e^{-i\epsilon_j t} a_j \underbrace{\int d\mathbf{r} (u_k^*(\mathbf{r}) u_j(\mathbf{r}) - v_k^*(\mathbf{r}) v_j(\mathbf{r}))}_{\delta_{kj}} \\ &+ \sum_j e^{i\epsilon_j t} a_j^* \underbrace{\int d\mathbf{r} (v_k^*(\mathbf{r}) u_j^*(\mathbf{r}) - u_k^*(\mathbf{r}) v_j^*(\mathbf{r}))}_{0} \\ &= a_k e^{-i\epsilon_k t} \end{aligned} \quad (139)$$

を得る。これは (136) に等しい。

付録 C 安定定常解まわりのボゴリューボフ方程式 (量子版)

もともとのボゴリューボフ方程式は (5) を近似的に解く際に得られる方程式である。

$$\hat{\Psi} = \Psi_0 + \delta\hat{\Psi} \quad (140)$$

として、(5) を線形化すると、

$$i \frac{\partial \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = K \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \Psi_0^2(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad (141)$$

となる。これを (109) と比較すると

$$\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\substack{j; \\ \text{s.t. } \epsilon_j \geq 0}} \left(u_j(\mathbf{r}) \hat{a}_j e^{-i\epsilon_j t} - v_j^*(\mathbf{r}) \hat{a}_j^\dagger e^{i\epsilon_j t} \right) \quad (142)$$

が一般解であることがわかる。 $\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger$ は、古典系の場合 (136) と同様に

$$\hat{a}_j e^{-i\epsilon_j t} = \int d\mathbf{r} (u_j^*(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + v_j^*(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)) \quad (143)$$

$$\hat{a}_j^\dagger e^{i\epsilon_j t} = \int d\mathbf{r} (u_j(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) + v_j(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)) \quad (144)$$

と表わすことができる。前節と異なり、 $\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger$ は演算子であり、場の演算子の交換関係

$$\left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right] = 0$$

と規格化条件 (134) や直交条件 (128), (129) を用いて導かれる交換関係

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}, \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}] = 0 \quad (145)$$

を満たす。

多体のハミルトニアン (3) を $\delta\hat{\Psi}, \delta\hat{\Psi}^\dagger$ についての 2 次まで展開すると、

$$\hat{H} = E_0 + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\delta\Psi^\dagger \left(K\delta\Psi + \Psi_0^2 \delta\Psi^\dagger \right) + \left(K\delta\Psi^\dagger + (\Psi_0^*)^2 \delta\hat{\Psi} \right) \delta\Psi \right] + \mathcal{O}(\delta\hat{\Psi}^\dagger \delta\hat{\Psi}^2, (\delta\hat{\Psi}^\dagger)^2 \delta\hat{\Psi}) \quad (146)$$

となる。右辺第一項は (127) で与えられ、右辺第二項は (142) を用いると

$$\sum_{\substack{j; \\ \text{s.t. } \epsilon_j \geq 0}} \epsilon_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \sum_{\substack{j; \\ \text{s.t. } \epsilon_j \geq 0}} \epsilon_j \int d\mathbf{r} |v_j(\mathbf{r})|^2 \quad (147)$$

を得る。まとめると

$$\hat{H} = E_g + \sum_{\substack{j; \\ \text{s.t. } \epsilon_j \geq 0}} \epsilon_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \mathcal{O}(\delta\hat{\Psi}^\dagger \delta\hat{\Psi}^2, (\delta\hat{\Psi}^\dagger)^2 \delta\hat{\Psi}) \quad (148)$$

$$E_g = E_0 - \sum_{\substack{j; \\ \text{s.t. } \epsilon_j \geq 0}} \epsilon_j \int d\mathbf{r} |v_j(\mathbf{r})|^2$$

となる。(148) 式右辺第 3 項を無視する近似の下で、すべての j に対して $\epsilon_j > 0$ ならば、基底状態 $|g\rangle$ はすべての j に対して $\hat{a}_j|g\rangle = 0$ を満たす状態である。

謝辞

水島健氏 (岡山大学) と柳瀬陽一氏 (新潟大学) には執筆の機会を与えて頂いたことに感謝いたします。この原稿に関して有益なコメントを頂いた國見昌哉氏 (東京大学) に感謝します。この研究は特定領域研究 (20029007) と基盤研究 C(21540352) から援助を受けました。

参考文献

- [1] 山田一雄, 大見哲巨, 超流動, (培風館, 東京, 1995).
- [2] P. Nozieres and D. Pines, The theory of quantum liquids, (Perseus books, Cambridge,).
- [3] A. Leggett, Quantum Liquids, (Oxford Univ. Press, Oxford, 2006).
- [4] L. D. Landau, J. Phys. (Moscow) **5** (1941), 71.

- [5] R. P. Feynman, in Prog. Low Temp. Phys. Vol. I ed. by C. J. Gorter (North-Holland, Amsterdam, 1955).
- [6] P. W. Anderson, Rev. Mod. Phys. **38** (1966), 298.
- [7] J. Wilks, The Properties of Liquid and Solid Helium, (Clarendon Press, Oxford, 1967); É. Varoquaux, C. R. Physique **7** (2006), 1101.
- [8] T. Ellis, C. I. Jewell, and P. V. E. McClintock, Phys. Lett. **78A** (1980), 358.
- [9] E. P. Gross, Nuovo Cimento, **20** (1961), 454.
- [10] L. P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor.Fys., **40** (1961), 646. [Sov. Phys. JETP, **13** (1961), 451].
- [11] T. Frisch, Y. Pomeau, and S. Rica, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 1644.
- [12] Y. Pomeau and S. Rica, C. R. Acad. Sci. (Paris), Série II **316** (1993), 1523.
- [13] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, (Springer, Berlin, 1983).
- [14] 小室元政, 基礎からの力学系—分岐解析からカオスの遍歴へ—, (サイエンス社, 東京, 2002).
- [15] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman and E. A. Cornell, Science **269** (1995), 198.
- [16] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 3969.
- [17] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 1687.
- [18] N. N. Bogoliubov, J. Phys. USSR, **11** (1947), 23.
- [19] V. Hakim, Phys. Rev. E **55** (1997), 2835.
- [20] C. Huepe and M. -E. Brachet, Physica D **140** (2000), 126.
- [21] S. Rica, *Vortex Nucleation and Limit Speed for a Flow Passing NonLinearly Around a Disk in the Nonlinear Schrodinger Equation* in Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence pp. 258-267. (Eds. by C. F. Barenghi, R. J. Donnelly and W. F. Vinen, Springer, Berlin/Heidelberg, 2001).
- [22] C.-T. Pham and M. -E. Brachet, Physica D **163** (2002), 127.

- [23] C. Raman, M. Kohl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999), 2502.
- [24] R. Onofrio, C. Raman, J. M. Vogels, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **82** (2000), 2228.
- [25] S. Inouye, S. Gupta, T. Rosenband, A. P. Chikkatur, A. Gorlitz, T. L. Gustavson, A. E. Leanhardt, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001), 080402.
- [26] D. L. Kovrizhin, *Phys. Lett. A* **287** (2001), 392.
- [27] Y. Kagan, D. L. Kovrizhin, and L. A. Maksimov, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003), 130402.
- [28] I. Danshita, N. Yokoshi, and S. Kurihara: *New J. Phys.* **8** (2006), 44.
- [29] Y. Kato, H. Nishiwaki, and A. Fujita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **77** (2008), 013602.
- [30] Y. Ohashi and S. Tsuchiya, *Phys. Rev. A* **78** (2008), 043601.
- [31] S. Watabe and Y. Kato, *Phys. Rev. A* **78** (2008), 063611.
- [32] D. Takahashi and Y. Kato, *J. Phys. Soc. Jpn.* **78** (2009), 023001.
- [33] S. Watabe and Y. Kato, *J. Low Temp. Phys.* **158** (2010), 23.
- [34] D. Takahashi and Y. Kato, *J. Low Temp. Phys.* **158** (2010), 65.
- [35] 段下一平, *物性研究* **1** (2005), 1.
- [36] 土屋俊二, *物性研究* **4** (2010), 2.
- [37] Y. Kato and S. Watabe, *J. Low. Temp. Phys.* **158** (2010), 92.
- [38] S. Watabe, Doctor Thesis, Chap 5 (The University of Tokyo, 2010).
- [39] Y. Kato and S. Watabe, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010), 035302.
- [40] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **102** (1956), 1189.
- [41] S. M. Girvin, A. H. MacDonald and P. M. Platzman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985), 581.
- [42] D. P. Arovas, A. Auerbach and F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988), 531.
- [43] A. Baratoff, J. A. Blackburn and B. B. Schwartz, *Phys. Rev. Lett.* **25** (1970), 1096.
- [44] 正確にいうと、[22] で確かめられたスケーリング則において、サドル・ノードの分岐点までの「距離」は $|V - V_c|$ ではない。あるバリアーの高さ g について、その値から V 一定のもとで分岐点を与える $g = g_c$ までの距離 $|g - g_c|$ を用いている。