リズム現象の物理学：基礎・モデリング・生物の話題・ネットワーク関係など

郡　宏
お茶の水女子大学　お茶大アカデミック・プロダクション

概　要

この世界には様々なリズムが存在します。例えば、メトロノームや振り子時計などの機械が作り出すリズム、歩行や鼓動、活動と睡眠の繰り返し、ホタルの明滅といった生き物が持つリズムなどがあります、また化学反応でも周期的反応を作り出すことができます．このサブゼミでは様々な振動現象を紹介し、振動現象を取り扱う物理学的手法について解説します。以下の４つの内容を軸にします。また、みなさんが主体的に参加できるように、質問、議論、実験の時間をなるべくとりたいと思います。

（1）諸分野でのリズム現象の話題：生物を中心に、ざっとレビューします。体内時計や文節時計など生物にはリズムがたくさんあります。今後の発展には、物理学者の積極的な参加が絶対に必要です。

（2）モデリング基礎：メトロノーム振動のモデル化を通して、現象をモデルで記述する意義や楽しさについて考えます。

（3）位相縮約の基礎：位相モデルは振動子集団のダイナミクスを記述する強力なもので、その方程式は位相縮約によって導出されます。位相縮約では、遅い自由度に着目して運動方程式を簡略化するのですが、同様の思想に基づく縮約方法は流体方程式の導出に使われるなど、物理学の中で決定的な役割を果たしてきています。位相縮約を直感的に理解できるよう、エッセンスを解説します。そして、位相縮約を通して、振動子集団ダイナミクスについてわかること、わからないことを簡単に紹介します。

（4）ネットワークの話題：近頃「ネットワーク」が物理学でたいへんはやっていますが、ネットワークが絡むダイナミクスの研究には確立された理論があまりありません。縮約の考え方を、ネットワーク上のダイナミクスに適用すると面白いことがわかります。例えば、ネットワークのどの素子が、ネットワーク全体の挙動に対して重要な寄与をしているのか、また、各素子が揺らぎをもっているときに全体の揺らぎはどのようになるのか。これらはネットワーク構造によって決まり、固有値問題で特徴付けることができます。縮約の考え方が、多方面に適用できることを実感してもらえれば幸いです。

このテキストでは、サブゼミだけではフォローが難しい部分について重点的に説明します。

1 はじめに

振動、あるいは、リズムと呼ばれるものは、ありとあらゆるところに顔をだす。物理学で振動といえば、やはり振り子であろう。振り子の勉強を通して物理学を深く理解し始めた人もいれば、物理学を深く憎むことになった人もいるだろう。そういった意味で、振り子は偉大な題材である。

1.1 リミットサイクル

しかし、振り子には、自然界に存在する多くの振動（リズム）が持っている、非常に重要なファクターが欠けている。それは**振動の安定性**である。

試しに、メトロノームを手に取ってみよう。小さな振幅から振動を始めると、針はしだいに大きく振れ、やがてある一定の振幅に落ち着く。では、大きな振幅から始めたら？　今度は、しだいに振幅は小さくなり、さきほどと同じ一定の振幅にやがて落ち着く。このような性質は、普通の振り子にはない。さて、ここで問う。振り子とメトロノームの差は何であろう？

いろんな答えがあり得る。メトロノームは自己駆動である、というのがたぶん良い答えであろう。しかし、物理屋である私は、**散逸**、と答えたい。散逸というとエネルギーが逃げていくという印象を持つかもしれないが、ここでいう散逸は、系（例えばメトロノーム）にエネルギーが何らかの方法で供給され、そして系が外界に対して仕事をする、という意味で捉えておこう。

具体的にはこうである。

メトロノームの針は摩擦を受けている。その効果で系のエネルギーは時間と共に失われていく。一方、メトロノームにはゼンマイがあり、これがエネルギー源となっている。メトロノームはその針が中央付近を通過するときに、このエネルギーを利用して、針の運動にトルクが与えられる。ここで振動の1周期でのエネルギーの収支を考えよう。摩擦によって放出されるエネルギーは、振動の振幅と共に増大する。一方、ゼンマイから得るエネルギーは、振幅によらず、だいたい一定であると考えよう。これをグラフにしたのが、図1である。振幅が大きいと失うエネルギーの方が大きい。だから振幅は小さくなっていく。一方、振幅が小さいと得るエネルギー

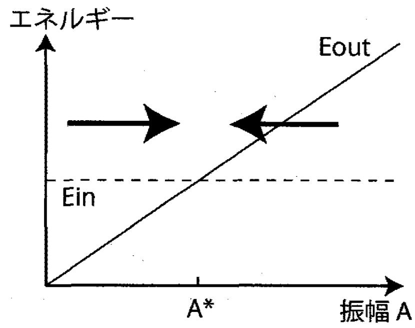

図 1: 一周期のエネルギー収支の振幅依存性。交点 A^* に自発的に収束し、そこでは得るエネルギーと失うエネルギーがバランスする。この図では振幅依存性を直線としているが、交点さえあれば、曲線でもいい。

の方が大きい。だから振幅は大きくなる。その結果、エネルギーのバランスする交点に、メトロノームは自発的にたどり着くのである。

かくしてメトロノームは安定性を持つ。適当な初期条件から初めても、系はこの周期軌道に時間がたつにつれて接近していく (図 2)。このような振動のことを数学用語で、**リミットサイクル (limit cycle)** と呼ぶ。時間無限大の極限 (リミット) で閉軌道 (サイクル) に落ちるのである。リミットサイクルを持つ系のことを**リミットサイクル振動子**と呼ぶ。散逸があって初めて安定性は生まれる。

ここでもう一点注意したいのは、リミットサイクル振動子は**自律系 (autonomous system)** であることである。自律系とは運動方程式が陽に時間によらないという意味である。つまり運動方程式が $\dot{x} = f_x(x,y), \dot{y} = f_y(x,y)$ のように、状態変数だけで記述できる。リミットサイクル振動子は外力を受けて駆動されているのではなく、自己駆動であり、自己の状態によって自己の運動を決めている。実際どのような運動方程式がたてられるのかは、ゼミの時に考えてみよう。

1.2 自励振動子の例

摂動に対して安定な振動はすべからずリミットサイクルである、と言い切るのにはためらいがある。散逸系に現れるほぼ周期的な運動は、カオスである可能性もある。ただし、リミットサイクル振動子になんらかのノイズがある系と、カオスとを実験的に区別するのは非常に難しい。またほぼ周期的な振動を

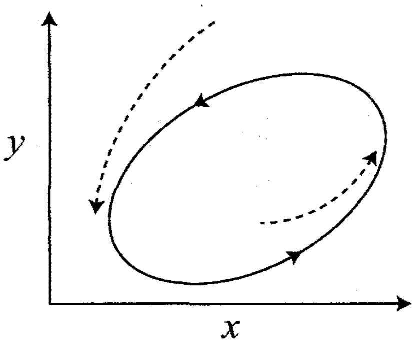

図 2: リミットサイクル軌道。メトロノームの場合では、状態空間を位置 x を速度 $y = \dot{x}$ ととるのが自然だろう。

するカオスは、リミットサイクルと非常に似た性質があることが知られている。ここではデリケートな問題を避けるために、リミットサイクルとカオスの両方を含む安定な振動子のことを**自励振動子 (self-sustained oscillator)** とひっくるめて呼んで、これの例を挙げていこう[1]。

まず機械だとメトロノームや振り子時計がある。化学反応系では **Belousov–Zhabotinsky (BZ) 反応**と呼ばれる酸化還元反応が有名である。生物にはたくさん例がある。心臓のペースメーカー細胞 (心臓の同房結節と呼ばれる部位の細胞) が自励振動をする [1]。また他の心筋細胞も培養条件によって振動する。**概日リズム (circadian rhythms)** と呼ばれる生物の約 24 時間の体内時計も、細胞レベルの振動現象である [2]。歩行も自励振動とみなせる。制御系の組み込まれていない完全に機械仕掛けの歩行ロボットが坂道を安定にリズミカルに歩く。ちなみに、こういった歩行は**受動歩行 (passive walk)** と呼ばれ、制御やロボットの分野で今熱心に研究されている題材である。

1.3 振動子集団の同期

自励振動子の集団がなんらかの相互作用を持つと、たとえ固有の振動周期が異なる場合でも、その周期を一致させ、また振動の位相もそろえる現象がよく見られる。このような現象は**同期現象 (Synchronization)** と呼ばれる [3, 4]。これもまた例を挙げ出すときりがない。まず、ホタルの明滅の集団同期が極めて有名である。また、吊り橋に歩行者がたくさん集まったときに歩行が集団で同調してしまったロンドン・ミレニアム橋での事件もよく知られている。メトロノームも吊り橋みたいな物に複数のせると同期する。ろうそくも何本も束ねると酸素の使いすぎで炎が振動するのだが、それを 2 セット近づけるとやはり同期する。心筋細胞の振動や概日リズム振動細胞も同期して、生物学的な機能を実現している。ジョセフソン・ジャンクションでも同期があって、技術的に重要なトピックである。多くの例がストロガッツの書いた Sync という本に紹介されている [5]。しかし、同期は実験してみたり、ムービーで見たりするとその感動は倍増である。ゼミのお楽しみとしよう。

1.4 同期の物理学

ここまで、いくつかの話題を紹介してきたが、本ゼミの主題 (そして、著者の研究内容) は、同期を物理学的に理解することである。物理学的理解というと、少々曖昧な言い方だが、著者は次のような解釈をしている。まず、現象を数学的に捉える。そして、「美しい記述だ…」と自己満足に浸る。だけではいけなく、それが現象の予言や制御にきちんと使えることを実証していくことである。本ゼミでは、そのための強力な道具立てや近似方法をいくつか紹介したい。そしてゼミだけでは難しいであろう部分について、本稿で少し丁寧に解説をしていく。

簡単にお品書きを提示しておこう。道具立ては力学系、つまり微分方程式系である。近似方法は遅いタイムスケールの運動を抜き出す**縮約 (reduction)** である。この縮約が位相記述やネットワークの集団ダイナミクスに適用でき、すると手計算でいろんなことがわかるようになる。

2 振動子の位相記述

リミットサイクル振動子になんらかの弱い外力が加わった状況を考える。状態変数を $\boldsymbol{W} = (x, y, \dots)^\top$ とし、状況をできるだけ単純にするために、外力は加法的にかかると仮定しよう。

$$\frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) + \epsilon \boldsymbol{p}(t). \qquad (1)$$

[1] リミットサイクルや後で紹介する位相振動子など、摂動がなければ完全に周期的な運動をする振動子のことを周期的振動子 (peridic oscillator)、カオス的ダイナミクスを持つ振動子のことをカオス振動子 (chaotic oscillator) と呼んで、それぞれ区別することがある。

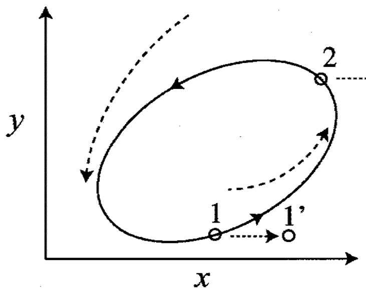

図 3: リミットサイクル振動子に摂動を与える。

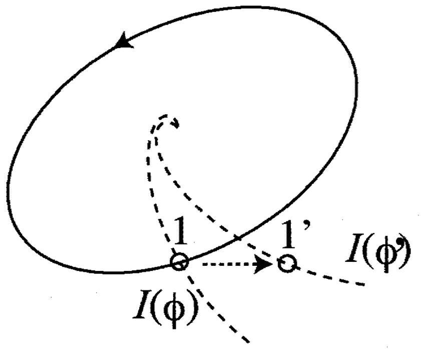

図 4: アイソクロン。

このリミットサイクル振動子のダイナミクスは、ϵ が小さいとき、次の位相方程式に簡単化することができる。

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega + \epsilon \boldsymbol{Z}(\phi) \cdot \boldsymbol{p}(t). \tag{2}$$

まずはこの位相方程式を導出しよう。そのときに式の説明をする。さらにその後、複数の振動子の弱結合系を考え、さらなる近似方法を解説する。

2.1 位相の定義と位相応答曲線

位相記述を行うためには、まず位相を定義する必要がある。位相は状態変数の成分の1つであり、つまり、$\boldsymbol{W} = (x, y, \ldots)^{\top}$ を、$\boldsymbol{W} = (\phi, \boldsymbol{r})^{\top}$ と表すのである。ここで ϕ は位相、$\boldsymbol{r}$ は振幅の自由度を表す変数である。当然、そのような状態変数の取り方には任意性があるのだが、この後で位相方程式を導出するために、Winfree の導入した定義方法を採用する [6, 7]。

まず、次のように運動方程式で記述されるような、外力を受けていないリミットサイクル振動子を考える。

$$\frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}). \tag{3}$$

外力を受けないリミットサイクル振動子は、図2のように安定な周期軌道 $\boldsymbol{W}_0(t)$ を持つ。リミットサイクルの周期を T とすると、$\boldsymbol{W}_0(t+T) = \boldsymbol{W}_0(t)$ が成り立つ。

位相とは、振動子が持つ時計のようなものである。今 $t=0$ で、リミットサイクル上にどこかに状態があるとし、その状態を $\phi = 0$ と決める。どの状態を $\phi = 0$ と選ぶかは任意であり、好きに決めて構わない。時間と共に状態点はリミットサイクル上を動き、$t = T$ でもとに戻る。$0 < t < T$ ではリミットサイクル軌道上のどこかの状態をとるのだが、時刻 t で取っている状態の位相を $\phi = 2\pi t/T$ と定義する。つまり、リミットサイクル軌道上では $\dot{\phi} = \omega = 2\pi/T$ が成り立ち、位相は時間的に均等に決められていることになる。ω を**固有振動数 (intrinsic freqnency)** と呼ぶ。今、位相の定義をリミットサイクル軌道上の状態に対して行った。実は、このあとに位相をリミットサイクル軌道外の状態に対しても定義するのだが、その理由と方法は少し後に説明する。

さて、この振動子の変数 x に対して摂動を与えてみよう (図 3)。例えば、状態がリミットサイクル軌道の状態 1 にあるとし、ここにデルタ関数的な摂動が入り、瞬間的に状態 $1'$ に状態がジャンプしと想定する。このとき、この振動の位相はどれだけ変化したと考えればいいのだろう。

摂動による位相の変化は通常次のように考える。摂動後に十分な時間が経過したとしよう。すると、状態 $1'$ から再び limit-cycle 軌道に状態は戻る。しかし、このとき摂動を与えていない状態 1 と比べると、limit-cycle 軌道上で違う状態にあり、位相的に先行、あるいは、遅れた状態にある。このときの位相差 $\Delta\phi$ を**位相シフト (phase shift)** と呼ぶ。

位相シフトは、摂動を受けたときの状態の位相に依存して変化する 2π の周期関数である。直感的には状態 $1'$ では状態 1 に比べて位相が進んでいそうであり、また、状態 $2'$ では状態 2 に比べて位相が後退していそうである。また、位相シフトは、摂動の与え方、つまり、摂動の関数 $p(t)$ の波形やその大きさ ϵ にも当然依存する。先の例では、デルタ関数的な摂動 ($p(t) = \delta(t)$) を考えた。摂動の与え方を固定して、位相シフトを位相の関数として表した

$\Delta\phi(\phi)$ を、**位相応答曲線**、あるいは、**位相反応曲線**と呼ぶ。英語だと、**phase response curve** や **phase resetting curve** と呼ばれ、**PRC** と略して表すことが多い。

位相シフトは、次のように状態空間全体に位相を定義すると自然に表現できる。状態空間の中で、無限の時間が経過したときにリミットサイクル上の同じ点に収束するような部分空間を考える。状態1と同じ点に収束する部分空間を $I(\phi)$ とすると、これは図4のような曲線になる。この「曲線」は、より正確にいうと、状態空間が m 次元であれば、$m-1$ 次元の超曲面である。さて、先ほどの位相シフトの定義によれば、もし摂動によってこの曲線上のどこかの状態点にジャンプした場合は、位相シフトがないことになる。そこで、この曲線上の状態点が同一の位相を持っていると定義しよう。さきほどの摂動の例は、図4のように、位相 ϕ の状態点から位相 ϕ' の状態点に摂動によって移ったことになり、つまり、位相シフトは $\Delta\phi = \phi' - \phi$ である。このような大域的な位相の定義は Winfree によって提案され、曲線 $I(\phi)$ は等位相面 (isochron) と呼ばれている [7]。このようにして、空間全体に位相 $\phi(\boldsymbol{W})$ が定義された。位相を定義したので、状態変数 $\boldsymbol{W} = (x, y, \ldots)^\top$ は、$\boldsymbol{W} = (\phi, \boldsymbol{r})^\top$ と表すこともできる。便利のため、リミットサイクル軌道を位相の関数として $\boldsymbol{\chi}(\phi)$ と表しておこう。

アイソクロンについてもう少し考察する。あるアイソクロン $I(\phi_1)$ 上の状態点 $\boldsymbol{W}(t)$ を考えよう。この状態点の位相は $\phi(t) = \phi_1$ である。アイソクロンの定義は、$\boldsymbol{W}(t+nT) \to \boldsymbol{\chi}(\phi_1)$ $(n \to \infty)$ であった。これは、状態点 $\boldsymbol{W}(t+mT)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ に対しても成立するので、状態点 $\boldsymbol{W}(t+mT)$ はすべて同一のアイソクロン $I(\phi_1)$ 上の点であり、つまり、$\phi(t+mT) = \phi(t) = \phi_1$ である。これがどのアイソクロンでも成り立つということは、$\dot{\phi} = \omega$ が状態空間全体で成り立っていることを意味する。したがって、アイソクロンによる位相の定義は、リミットサイクル軌道上のみでなく、状態空間全体で

$$\dot{\phi} = \omega \tag{4}$$

が成り立つように定義することと同値である。

式 (4) は、(有用ではないが)、摂動を受けていないリミットサイクル振動子の位相方程式である。

2.2 位相方程式

さきほど定義した位相を用いると、外力を受けているリミットサイクル振動子の位相方程式が自然に導出できる。

まず、次の恒等式に注意する。

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{W}} \cdot \frac{d\boldsymbol{W}}{dt}. \tag{5}$$

ここで、$\partial\phi/\partial\boldsymbol{W} = (\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \ldots)^\top$ は**位相勾配 (phase gradient)** であり、アイソクロンに直交したベクトルである。式 (5) に無摂動の運動方程式 (3) を代入すると、次を得る。

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{W}} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}). \tag{6}$$

無摂動の場合は式 (4) が成り立つので、つまり、次の関係がわかる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{W}} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) = \omega. \tag{7}$$

アイソクロンによる位相の定義は、式 (7) を満たすように位相を定義しているとも言える。

次に外力のある運動方程式 (1) を恒等式 (5) に代入する。

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{W}} \cdot \{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) + \epsilon\boldsymbol{p}(t)\} = \omega + \epsilon\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{W}} \cdot \boldsymbol{p}(t). \tag{8}$$

この式は位相の発展方程式ではあるが、右辺の $\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{W}}$ を評価するためには、状態 $\boldsymbol{W}(t)$ を知る必要があり、したがって位相のみで閉じた式にはなっていない。

しかし、外力が弱い場合には、ϵ の最低次で、式 (8) を位相のみで閉じた式に近似することがすることができる。まず、外力が弱いときは、状態点はリミットサイクル軌道近傍にあることに注意する。どの程度近傍にあるかは次のように評価できる。リミットサイクル軌道の振幅方向の安定性を決める固有値の実部を $-\lambda$ としよう。このとき、ざっくばらんにいうと、状態点のリミットサイクル軌道からの距離を r としたとき、その運動方程式は

$$\dot{r} = -\lambda r + O(\epsilon) \tag{9}$$

にだいたい従う。したがって状態点は、典型的には、それらの力のバランスする $O(\epsilon/\lambda)$ だけリミットサイクル軌道から離れていることになる。

$$\boldsymbol{W}(t) = \boldsymbol{\chi}(\phi(t)) + O\left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right). \tag{10}$$

この状態点における位相勾配はテイラー展開によって次のように評価できる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{W}} = \boldsymbol{Z}(\phi) + O\left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right). \tag{11}$$

ただし、$\boldsymbol{Z}(\phi)$ は、$W = \boldsymbol{\chi}(\phi)$ における位相勾配である。

$$\boldsymbol{Z}(\phi) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{W}}\right|_{\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\chi}(\phi)} \tag{12}$$

式 (11) を式 (8) に代入すると次を得る。

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega + \epsilon \boldsymbol{Z}(\phi)\cdot \boldsymbol{p}(t) + O\left(\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right). \tag{13}$$

したがって、ϵ の最低次では、位相のみで閉じた記述を得ることがわかった。なお、$Z(\phi)$ は**位相感受関数 (phase sensitivity function)** とよく呼ばれる。これはリミットサイクル振動子の外力に対する線形応答を決める関数であるからである。

いくつか補足する。外力は、状態 $\boldsymbol{W}(t)$ に依存して作用する状況がよくあるだろう。これは式 (1) の $\boldsymbol{p}(t)$ を $\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{W})$ と置き換えた場合に対応する。この場合も式 (10) より $\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{\chi}(\phi)) + O(\epsilon/\lambda)$ と評価でき、したがって式 (13) の $\boldsymbol{p}(t)$ を $\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{\chi}(\phi))$ に置き換えるだけでよい。

また、外力は、通常は系に加法的にかかるのではなく、系のパラメタに作用することの方が一般的であろう。このときの運動方程式は次のように表す。

$$\frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W};q), \quad q = q_0 + \epsilon p(t). \tag{14}$$

ここで q は系のパラメタで、q_0 が無摂動時のパラメタ値である。このときは、右辺をテイラー展開する。

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W};q) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W};q_0) + \epsilon p(t)\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial q} + O(\epsilon^2). \tag{15}$$

これと式 (5) を使い、さらに状態点がリミットサイクル軌道近傍にあることを考慮すると次を得る。

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega + \epsilon Z_q(\phi)p(t) + O\left(\frac{\epsilon^2}{\lambda}\right), \tag{16}$$

$$Z_q(\phi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{W}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial q}\right)_{\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\chi}(\phi)}. \tag{17}$$

この $Z_q(\phi)$ も位相感受関数である。実際に実験的に振動子に摂動を与えて応答を調べた場合は、得られる位相感受関数は $Z_q(\phi)$ であると解釈すべきである。

2.3 結合系の位相方程式

外力を受けるリミットサイクル振動子の位相記述を行った。ここではさらに、結合する複数の振動子系の位相記述を行う。次のような、同一な性質をもつ振動子が 2 つ結合した系を考えよう。

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{W}_1}{dt} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}_1) + \epsilon \boldsymbol{G}(\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2),\\ \frac{d\boldsymbol{W}_2}{dt} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}_2) + \epsilon \boldsymbol{G}(\boldsymbol{W}_2,\boldsymbol{W}_1).\end{aligned} \tag{18}$$

このとき、2.2 節と全く同じ議論により、次の位相方程式が得られるのは自明であろう。

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt} &= \omega + \epsilon \boldsymbol{Z}(\phi_1)\cdot \boldsymbol{G}(\phi_1,\phi_2),\\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega + \epsilon \boldsymbol{Z}(\phi_2)\cdot \boldsymbol{G}(\phi_2,\phi_1).\end{aligned} \tag{19}$$

ここで、$\boldsymbol{G}(\phi_1,\phi_2)$ は正確に書くと $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\chi}(\phi_1),\boldsymbol{\chi}(\phi_2))$ であり、ほかの状態変数の関数も同様である。

次に、性質がわずかに異なる振動子の結合系を考える。振動子 2 の運動方程式を次のように書く。

$$\frac{d\boldsymbol{W}_2}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}_2) + \delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{W}_2) + \epsilon \boldsymbol{G}(\boldsymbol{W}_2,\boldsymbol{W}_1). \tag{20}$$

ここで、$\boldsymbol{f}(\cdot)$ は振動子の性質の違いを表す関数であり、δ は性質の違いの大きさを表す微小パラメタである。この場合も、右辺第 2 項と第 3 項の両方を摂動項として扱うことにより、δ と ϵ の最低次で次を得る。

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega + \delta h(\phi_2) + \epsilon \boldsymbol{Z}(\phi_2)\cdot \boldsymbol{G}(\phi_2,\phi_1), \tag{21}$$

$$h(\phi_2) = \boldsymbol{Z}(\phi_2)\cdot \boldsymbol{f}(\phi_2). \tag{22}$$

なお、わずかに不均一な振動子集団に対して位相を定義するときは、通常、いずれかの振動子に対して位相を定義し、他の振動子に対しても同じ位相の定義を使うことが多い。

以上の導出は、振動子集団にもそのまま適用できることは明らかである。また、任意の結合ネットワークや結合関数を考えることができる。

2.4 平均化近似

結合振動子系に対して得られた位相方程式、例えば式 (21) は、位相変数だけで閉じているという意味で、もとの方程式に比べて格段に簡単になってい

る。たとえば N 個の振動子集団で、各振動子の変数の数を m とすると、もとの運動方程式では mN 次元であった力学系が、N 次元にまで逓減されている。

しかし、このような位相方程式はまだまだ複雑で、解析計算にはあまり適さない。実は、位相方程式は、さらなる近似を行うことによって、もっと簡単化することができる。この近似法は**平均化近似**と呼ばれる。この平均化近似に伴って生じる誤差は、微小量の2次のオーダーなので、最低次ではもとの位相方程式と一致する。

平均化近似をなるべく簡単に説明するために、次の位相方程式を考えよう。

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega + \epsilon Z(\phi_1)G(\phi_2), \tag{23}$$
$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega + \delta h(\phi_2) + \epsilon Z(\phi_2)G(\phi_1). \tag{24}$$

平均化近似は、ϵ が ω に比べて十分小さいとき、1周期での位相の変化が $\phi_i(t+T) - \phi_i(t) = O(\epsilon/\omega)$ という微小量であることに基づく。

まずは、0次近似として、位相の1周期にわたる時間発展に対する摂動項の効果を無視する。つまり、$\dot{\phi}_1 = \omega$、$\dot{\phi}_2 = \omega$ である。この0次近似をつかって、式 (23) の右辺の結合項を1周期にわたって時間平均してみよう。つまり、式 (23) で $\phi_i = \psi_i + \omega t$ と置き (ψ_i は初期位相)、次のように平均する。

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} Z(\psi_1 + \omega t')G(\psi_2 + \omega t')dt' \tag{25}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z(\psi_1 + \theta)G(\psi_2 + \theta)d\theta \tag{26}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z(\psi_1 - \psi_2 + \theta)G(\theta)d\theta \tag{27}$$
$$= \Gamma(\psi_1 - \psi_2) = \Gamma(\phi_1 - \phi_2). \tag{28}$$

ここで関数 $Z(\cdot)$ と $G(\cdot)$ が 2π 周期関数であることを使った。平均化によって、位相の関数の積で与えられていた結合項が、位相差の関数 $\Gamma(\phi_1 - \phi_2)$ になった。この関数 $\Gamma(\cdot)$ は**位相結合関数 (phase coupling function)** と呼ばれる。同様に振動子の不均一性を表す関数 $h(\phi_2)$ も次のように平均化する。

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta = \omega_2. \tag{29}$$

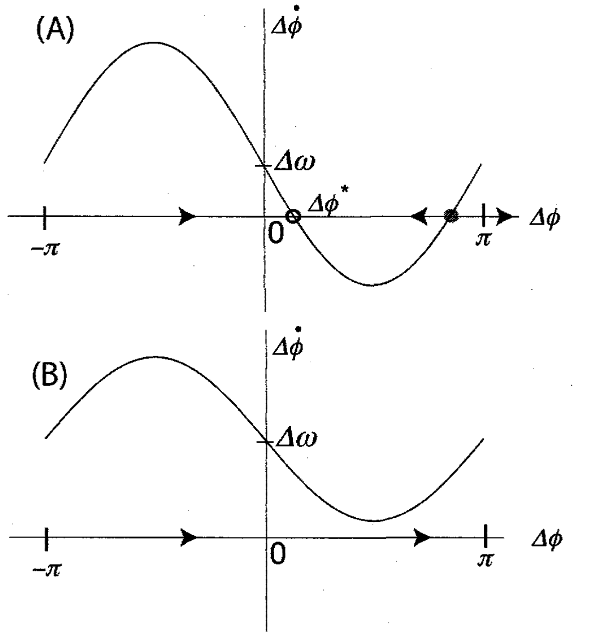

図 5: 位相差の運動方程式のベクトル場。

結局、式 (23),(24) は次のように簡略化された。

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega + \epsilon\Gamma(\phi_1 - \phi_2), \tag{30}$$
$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega + \delta\omega_2 + \epsilon\Gamma(\phi_2 - \phi_1), \tag{31}$$

平均化によって、不均一性は固有振動数差(定数)になり、また、結合は位相差の関数となる。これによって、位相シフトに対する対称性が生まれ、かなり解析しやすい方程式となる。式 (30) と式 (31) の解析方法は、次章で説明する。

さて、この平均化近似によて生じる誤差は本当に高次の量なのであろうか? これをきちんと示すためには、near identity transformation(著者はこの言葉の訳を知らないが、意味的には「ほとんど同一な変数変換」である) を用いるのだが、本稿では説明しない。興味のある方は、文献を参照してもらいたい [3, 8, 9]。

3 位相モデルの基本的性質

導出した位相モデルの基本的性質を抑えておこう。式 (30)、(31) のタイプのものを考えるのだが、結合

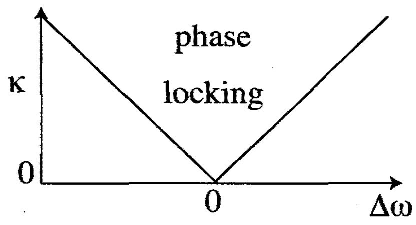

図 6: 位相ロック解の領域。

強度を非対称にし、$\Gamma(\cdot) = -\sin(\cdot)$ とする。

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 + \epsilon_1 \sin(\phi_2 - \phi_1), \tag{32}$$
$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + \epsilon_2 \sin(\phi_1 - \phi_2). \tag{33}$$

まず同期の条件について調べる。式を辺々引くことにより、位相差 $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ の運動方程式を求める。

$$\frac{d\Delta\phi}{dt} = \Delta\omega - \kappa \sin(\Delta\phi). \tag{34}$$

ここで、$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ は振動数差、$\kappa = \epsilon_1 + \epsilon_2$ は実効的な結合強度である。これは1次元力学系であり、その解と安定性はベクトル場を考えれば簡単にわかる。図5は、横軸を $\Delta\phi$ として、縦軸に $\Delta\dot{\phi}$ をプロットしたものである。定性的に異なる2つの状況がありうる。1つは $\Delta\dot{\phi} = 0$ という交点のある場合 (A) であり、もう1つは交点のない場合 (B) である。(A) ではベクトル場を見ればすぐにわかるとおり、安定解と不安定解が1組存在し、一般の初期状態に対して、安定解 $\Delta\phi^*$ に収束する。この安定解は、$\Delta\phi$ が時間的に一定な値を取っているので、つまり2つの位相振動子はその振動数が完全に一致した**振動数同期状態**となる。同期しているときの振動数を Ω とすると、$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = \Omega$ である。このような現象は**位相ロック (phase locking)** と呼ばれる[2]。一方 (B) では、そのような定常状態は存在せず、位相差は時間と共に大きくなり続ける。したがって振動数同期は起こらない。

位相ロックの条件は、式 (34) の右辺が 0 となる解が存在することである。$|\sin(\cdot)| \leq 1$ であることに注意すれば、結合強度の臨界値

$$\kappa_{\rm cr} = \Delta\omega \tag{35}$$

より κ が大きければ位相ロックが起こることがわかる。したがって、κ と $\Delta\omega$ のパラメタ空間において、(A) と (B) の境界は図6のような直線となる。位相ロックの起きる三角形の領域は**アーノルドの舌 (Arnold's tongue)** と呼ばれることが多い。

また、2つの振動子が振動数同期しているときの位相差と同期振動数 Ω を求めることも簡単にできる。まず位相差は $\sin\Delta\phi = \Delta\omega/\kappa$ である。さらに、これを式 (32) に代入すると

$$\Omega = \frac{\epsilon_2\omega_1 + \epsilon_2\omega_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tag{36}$$

を得る。つまり、結合強度 ϵ_1 と ϵ_2 の比によって、同期振動数が決まっている。特殊な状況として、$\epsilon_1 = \epsilon_2$ の場合と、$\epsilon_1 = 0$ の場合を考えよう。前者は同期振動数は2つの振動数のちょうど平均となる。後者は、振動子1は外部の影響を受けず、振動数2が周期外力を受けている状況に対応し、この場合は $\Omega = \omega_1$ となる。つまり、振動子1が振動数2を強制的に引き込んでいる。

なお、$\phi_1 = \phi_2$ となる、2つの振動子が完全に同期している状況を**完全同期 (complete synchronization)** と呼ぶ。このような状況は、式 (32), (33) では、$\omega_1 = \omega_2$ あるいは、$\kappa \to \infty$ の状況でしかあり得ない。その意味で完全同期というのは、あまり現実的な同期状態ではない。しかし理論研究においては、固有振動数が同一な振動子集団は、解析的に取り扱いやすいので、しばしば完全同期というものがでてくる。これは位相振動子に限らず、結合リミットサイクル振動子系や結合カオス系においても完全同期に関する研究が多くある。

4 振動子ネットワーク

ここ10年ほど、物理学や工学などの分野でネットワークの研究が盛んに行われている。ネットワークとは、ノードと、ノードとノードをつなぐリンクで構成されるもので、数学ではグラフと呼ばれる物である。ネットワーク研究のブームは、実在のネットワーク構造の統計的性質を調べた研究から始まっており、スケールフリーネットワークやスモールワールドネットワークといった重要なクラスのネットワーク構造の発見があった [10]。その後、ネットワークで結合する振動子集団など、ネットワーク結合系のダ

[2] 位相差が完全にロックしていなくても、位相差がある領域にバウンドされていれば、振動数同期状態と呼ばれる。その意味で、振動数同期のほうが位相ロックよりもゆるい条件である。

イナミクスに興味が集まりだした [11, 12]。特に、集団のもつ動的性質とネットワーク構造の関係がターゲットとなっている。ネットワーク結合系は、系統的な理論があまり提案されていない、発展途上の分野である。

さてそのようなネットワーク業界であるが、位相縮約の考え方を使うとネットワーク上のダイナミクスについても強力なアプローチができる。ここでは著者がこの数年間共同研究者と取り組んできた、ネットワークにおけるノードの重要性を示す指標と、それを用いたネットワークダイナミクスの縮約理論、さらに、その応用として振動の精確性に対するネットワーク構造の効果について解説しよう [9, 13, 14, 15]。

4.1 同期解の安定性

位相が完全にロックした状態が安定解であるような、N 個の位相振動子ネットワークを考える。モデルは次で与える。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\sin(\phi_j - \phi_i). \tag{37}$$

ここで、A_{ij} は結合ネットワークを与える**近接行列 (adjacency matrix)** である。A_{ij} はノード i がノード j から受ける結合の重みで、任意の実数である。一般には非対称 ($A_{ij} \neq A_{ji}$) なものを考える。この系には、完全同期解が常に存在する。3 節で説明したとおり、これは同一な振動数を持つ振動子集団を考えているためである。以下の解析は、振動数が同一でなく、位相ロック状態が得られる場合にも容易に拡張でき、また結合関数も位相ロック状態が得られるならば何でもいいのだが、話を単純にするため、式 (37) に限定して解析を進める。

まず、完全同期解の線形安定性を調べよう。式 (37) の同期解は $\phi_i^0 = \omega t + \psi$ と表される。ψ は定数である。この解からの微少な擾乱 $x_i = \phi_i - \phi_i^0$ を定義し、これを微小量として式 (37) を線形化すると次を得る。

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}(x_j - x_i) = \sum_{j=1}^{N} L_{ij}x_j. \tag{38}$$

ここで行列 L は次式で与えられるヤコビアンである。

$$L_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{for } i \neq j, \\ -\sum_{j\neq i} A_{ij} & \text{for } i = j. \end{cases} \tag{39}$$

便利のためベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)^\top$ を用いて、式 (38) を書き換えておく。

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = L\boldsymbol{x}. \tag{40}$$

なお、ネットワーク研究では、L(あるいは $-L$) はネットワーク・ラプラシアン (network Laplacian) と呼ばれる。ネットワーク上の拡散過程を記述する基本的な行列であるためにそう呼ばれているのだろう。ネットワーク・ラプラシアンは、規格化のしかたや符号などの違いでいくかの異なる定義がある。

さて、解の安定性は L の固有値によって決まる。式 (37)、あるいは、式 (38) に存在する並進対称性 (すべての位相をシフトに対して方程式が不変) のため、L の各列の和は 0 となる。このため、固有ベクトル $\boldsymbol{u} = (1, 1, \ldots)^\top$ はゼロ固有値 $\lambda_0 = 0$ に対応する固有ベクトルとなっている。

$$L\boldsymbol{u} = \lambda_0\boldsymbol{u} = 0. \tag{41}$$

残り $N-1$ 個の固有値の実部が全て負の時、完全同期解は線形安定である。

$$0 = \lambda_0 > \mathrm{Re}\lambda_1 \geq \mathrm{Re}\lambda_2 \geq \ldots \geq \mathrm{Re}\lambda_{N-1}. \tag{42}$$

この安定性は、比較的ゆるい条件下で成り立ち、たとえば A_{ij} が全て非負の場合 (結合が引力的な場合) は、ネットワークが**強結合 (strongly connected)** であればよい[3]。

以後、L は対角化可能とし、安定性の条件 (42) を満たすことを仮定して、解析を進める。なお、L は一般には非対称行列とする。非対称行列に対する固有値・固有ベクトルとその性質については付録 A に簡単にまとめておく。

4.2 外力に対する応答

このネットワークに弱い外力を与える。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\sin(\phi_j - \phi_i) + \epsilon p_i(t). \tag{43}$$

[3] ネットワークが強結合であるという意味は、ネットワークのどのノードからも、重みが 0 でないリンクをたどっていくことにより、全てのノードにたどり着けるようなネットワーク構造のことである。

このような系は、位相縮約と同じ考え方のもと、1変数の運動方程式に縮約することができる。

まず、ϵ が十分小さいとして、式 (43) を線形化する。

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = L\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{p}. \tag{44}$$

ここで $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots)^\top$ である。次に $\boldsymbol{x}$ を固有ベクトルを使って分解する。

$$\boldsymbol{x}(t) = y(t)\boldsymbol{u} + \sum_{\ell=1}^{N-1} y_\ell(t)\boldsymbol{u}^{(\ell)}. \tag{45}$$

ここで $\boldsymbol{u}^{(\ell)}(1 \le \ell \le N-1)$ は固有値 λ_ℓ に対応する固有ベクトルである。特に、$y\boldsymbol{u}$ を集団モードと呼ぼう。成分 y と y_ℓ は、対応する**左固有ベクトル** (列ベクトル) を用いて次のように得られる (付録A参照)。

$$y = \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}, \quad y_\ell = \boldsymbol{v}^{(\ell)}\boldsymbol{x}. \tag{46}$$

式 (46) の時間微分を取ることにより、各成分の運動方程式を導くことができる。

$$\dot{y} = \boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(L\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{p}) = \epsilon\boldsymbol{v}\boldsymbol{p}, \tag{47}$$

$$\dot{y}_\ell = \boldsymbol{v}_\ell\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}_\ell(L\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{p}) = \lambda_\ell y_\ell + \epsilon\boldsymbol{v}_\ell\boldsymbol{p}. \tag{48}$$

ここで式 (47) と式 (48) を注意深く見てみよう。式 (47) には式 (48) にあるような束縛力 ($\lambda_\ell y_\ell$) が働いていない。このため、y は外力によって自由に運動するのに対し、y_ℓ は $O(\epsilon/\lambda_\ell)$ 程度までしか発展しない。一方、他のモードはネットワーク結合によって束縛されている。

このような性質があるため、系の長時間挙動では $y \gg y_\ell$ となり、y_ℓ の運動を無視できる。式 (45) より次のように近似できることになる。

$$\boldsymbol{x} \approx y\boldsymbol{u}, \quad \text{or,} \quad x_i \approx y. \tag{49}$$

と近似できることになる。つまり、集団モードの1次元ダイナミクスがネットワーク全体の長時間の挙動を決めている。

この節の最後に、位相縮約との対応を説明しておく。集団モード y は、リミットサイクル振動子に対して定義した位相 ϕ に対応しており、他のモード y_ℓ は振幅の自由度 $\boldsymbol{r}$ に対応している。位相は摂動を受けないときは中立であり、固有振動数による増加分を引けば保存量となっていた ($\dot{\phi} - \omega t = 0$)。摂動をうけると、この保存量がゆっくりと動きだすのだが、これを記述したのが位相方程式である。同様に集団モード y は、摂動をうけないときは保存量であり ($\dot{y} = 0$)、摂動をうけると式 (47) にしたがってゆっくりと動く。どちらの場合も、系の長時間挙動に興味がある場合は、位相 ϕ、あるいは、集団モード y の1次元ダイナミクスのみを解析すればいい。

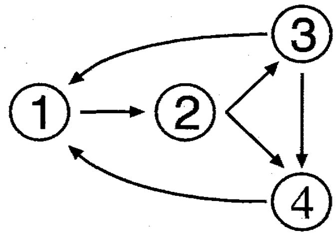

図 7: ネットワークの例。どのノードが一番重要か？

4.3 ノードの影響力と左0固有ベクトル

式 (47) をさらに注意深く見てみよう。式 (43) で、振動子 i に入力された外力 p_i は、集団モードの運動方程式では左0固有ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_N)$ の成分 v_i によって重み付けられている。つまり、v_i の大きさは、ネットワーク全体のダイナミクスにおける、振動子 i の重要性を表している。そこで v_i を振動子 i の**影響力 (influence)** と呼ぼう。

影響力について直感的な理解を得るために、式 (38) で外力のない場合 ($\epsilon = 0$) を考えよう。初期状態 ($t = 0$) を、振動子 i のみ $x_i(0) = 1$、他は $x_j(0) = 0$ として、この状態からどのような同期状態に至るかを調べる。系は式 (47) と式 (48) で $\epsilon = 0$ とした方程式に従って発展し、$y(t)$ は初期条件によって決まる保存量で、$y_\ell(t)$ は指数関数的に0に緩和する量である。$y = \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}(0) = v_i$ である。すると式 (45) から明らかなとおり、すべての j に対し、$x_j \to v_i$ ($t \to \infty$) である。したがって、位相が先行している振動子 i に全体が引きづられる量が v_i である。

例として図7のネットワークを考えよう。矢印のあるリンクは重み $+1$ で、あとは0である。このネットワークの上述の意味において、一番重要なノードはどれであろうか？解析に入る前に直感的に考えてみよう。ノード1とノード4は比較的従順なノードである。というのも、1人にしか意見を言わないのに対して、2人の意見に耳を傾けている。一方、ノー

ド2とノード3はその逆で、自分勝手な奴らである。したがって、ノード2かノード3がより高い影響力をもっていると考えられる。では、どっちがより高いであろうか？

まじめに図7のネットワークに対して左0固有ベクトルを求めてみよう。このネットワークの L は次のように与えられる。

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

この L に対する左0固有ベクトルは規格化条件 ($\boldsymbol{vu} = 1$) に注意すると、次式となる。

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{10}(2 \ \ 4 \ \ 3 \ \ 1) \tag{51}$$

これは $\boldsymbol{v}L$ を計算すれば簡単に確かめられる。したがって、このネットワークでもっとも影響力があるのはノード2であり、その影響力はノード4に比べると4倍あることがわかる。

なお、この影響力であるが、これまでに様々な研究対象に対して導入されてきた量である。また、影響力が、各ノードから張られる**スパニングツリー (spanning tree)** と呼ばれるグラフの総数に比例していることが、matrix tree theorem としてとして知られている。これらについて詳しくは文献 [9, 13] を参照してもらいたい。

4.4 ネットワークの集団ゆらぎ

現実の振動子は、通常、外部からの擾乱や内在するノイズのため、揺らぎをもったダイナミクスを持つ。そういう揺らぎをもった振動子が集団をつくると、揺らぎが実効的に減衰することが予想できるが、それはどのような法則に従うのだろうか？この重要な問題に対して、4.2節の理論枠組みが適用できる状況下では、明解に答えることができる [15]。

外力として、独立ガウスノイズを考える。$\epsilon p_i(t) = \sqrt{D}\xi_i(t)$, $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_i(t)\xi_j(t) \rangle = \delta_{ij}$ とする。このとき式 (47) は

$$\dot{y} = \sqrt{D}\sum_{i=1}^{N} v_i \xi_i(t) = \sqrt{D}\sigma\xi(t), \tag{52}$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2} \tag{53}$$

ここで $\xi(t)$ は $\xi_i(t)$ と同じ統計性を持つ独立ガウスノイズである。また式 (52) の最後の等号は、独立ガウスノイズの和が (適切に分散をスケールした) 独立ガウスノイズであることから得られる。σ はネットワーク構造によって決まる。式 (52) は、ネットワークの各振動子が実効的にうける揺らぎの大きさが、σ であることを意味している。したがって、揺らぎの大きさはネットワーク構造が決定する。

σ の性質を調べてみよう。まず、ネットワークが無向の場合、つまり、隣接行列やラプラシアンが対称行列の場合を考える。この場合、左固有ベクトルと右固有ベクトルは平行であり、$\boldsymbol{vu} = 1$ の規格化条件から全ての i について $v_i = 1/N$ となる。よって次を得る。

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{54}$$

これは名高い中心極限定理と全く同じスケーリングである。しかし、今取り扱っている問題は、結合振動子ネットワークなので、各素子は必ずしも独立にふるまうわけでないことに注意しよう。したがってこのスケーリングが出るのは自明なことではない。事実、有向ネットワークでは $v_i = 1/N$ には一般にはならず、そのため

$$\sigma \geq \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{55}$$

であることが示せる (規格化条件 $\sum_i v_i = 1$ を使うと証明できる)。例えば、有向スケールフリーネットワークでは近似的に v_i を求めることが可能であり、その場合、

$$\sigma \geq N^{-\beta}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2} \tag{56}$$

という法則を示すことができる [15]。

5 おわりに

振動子集団ダイナミクスを解析する手法を解説した。弱結合・弱摂動の系で有効な近似理論が主な内容である。結合や摂動が強いときには残念ながらこれらの手法は使えない。しかし、これらの手法によって到達できる理解は深い。実際、位相方程式をつかって化学振動子の集団ダイナミクスも制御できてしまう [16]。縮約、侮るべからず。

A 実非対称行列の固有値問題

非対称で対角化可能な $N \times N$ の実行列 J に対する固有値問題を考える。N 個の固有値 λ_ℓ $(0 \le \ell \le N-1)$ とそれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}^{(\ell)}$ が存在し、これらは次式を満たす。

$$J\boldsymbol{u}^{(\ell)} = \lambda_\ell \boldsymbol{u}^{(\ell)}. \tag{57}$$

ここで、実対称行列の固有値は全て実数であること、また、実非対称行列の固有値は一般には複素数であることに注意しておこう。さて、$\boldsymbol{u}^{(\ell)}$ が J の右側から作用している。非対称行列に対しては左から作用する固有ベクトル $\boldsymbol{v}^{(\ell)}$ も独立に存在しこれは次式を満たす。

$$\boldsymbol{v}^{(\ell)} J = \lambda_\ell \boldsymbol{v}^{(\ell)}. \tag{58}$$

これらを2種類の固有ベクトルを区別するために、$\boldsymbol{u}^{(\ell)}$ は**右固有ベクトル**、$\boldsymbol{v}^{(\ell)}$ は**左固有ベクトル**と呼ばれる。$\boldsymbol{u}^{(\ell)}$ は列ベクトル、$\boldsymbol{v}^{(\ell)}$ は行ベクトルであることに注意する。量子力学になじみのある人であれば、エルミート行列に対して定義された、ブラとケットを思い出すといいかもしれない。ブラは左固有ベクトル、ケットは右固有ベクトルである。

式(58)の転置をとると次を得る。

$$(\boldsymbol{v}^{(\ell)} J)^\top = \lambda_\ell \boldsymbol{v}^{(\ell)\top}. \tag{59}$$

$$\Leftrightarrow \quad J^\top (\boldsymbol{v}^{(\ell)})^\top = \lambda_\ell \boldsymbol{v}^{(\ell)\top}. \tag{60}$$

したがって、$\boldsymbol{v}^{(\ell)\top}$ は J の転置行列 $J^\top$ の右固有ベクトルである。J と $J^\top$ の固有値は等しいことは、固有方程式を考えれば明らかである。また、J が対称行列(つまり $J^\top = J$)のときは、左固有ベクトルと右固有ベクトルが同一であることもわかる。

左右の固有ベクトルの重要な性質はその直交性である。次の2つの式を考える。

$$J\boldsymbol{u}^{(\ell)} = \lambda_\ell \boldsymbol{u}^{(\ell)}, \tag{61}$$

$$\boldsymbol{v}^{(m)} J = \lambda_m \boldsymbol{v}^{(m)}, \tag{62}$$

次に、式(61)の左側から $\boldsymbol{v}^{(m)}$ を、式(62)の右側から $\boldsymbol{u}^{(\ell)}$ を作用させ、辺々ひくと次を得る。

$$(\lambda_\ell - \lambda_m)\boldsymbol{v}^{(m)}\boldsymbol{u}^{(\ell)} = 0. \tag{63}$$

したがって、異なる固有値を持つ左固有ベクトルと右固有ベクトルは直交する。ここでさらに規格化条件 $\boldsymbol{v}^{(\ell)}\boldsymbol{u}^{(\ell)} = 1$ を全ての ℓ に対して課すと、左右の固有ベクトルの関係は次のようになる。

$$\boldsymbol{v}_m \boldsymbol{u}_\ell = \delta_{m\ell}. \tag{64}$$

さて、左固有ベクトルの有用性は、それが射影を行う作用素であることである。量子力学では $\boldsymbol{u}_m \boldsymbol{v}_m$（つまりケットブラ）を射影演算子と呼んでいたことを思い出そう。射影を理解するために、なんらかの状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ を固有ベクトルで次のように展開してみよう。

$$\boldsymbol{x} = \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell \boldsymbol{u}^{(\ell)} \tag{65}$$

ここで y_ℓ は固有ベクトル $\boldsymbol{u}(\ell)$ 成分の大きさを表す。ベクトル $\boldsymbol{x}$ に左固有ベクトル $\boldsymbol{v}^{(m)}$ を作用させると次を得る。

$$\boldsymbol{v}_m \boldsymbol{x} = \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell \boldsymbol{v}^{(m)} \boldsymbol{u}^{(\ell)} = y_m \tag{66}$$

つまり、固有ベクトル $\boldsymbol{u}^{(m)}$ 方向の成分である y_m を抜き出すことができる。

参考文献

[1] Leon Glass. Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature*, Vol. 410, pp. 277–284, 2001.

[2] S. M. Reppert and D. R. Weaver. Coordination of circadian timing in mammals. *Nature*, Vol. 418, pp. 935–941, 2002.

[3] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence.* Springer, New York, 1984.

[4] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences.* Cambridge Univ. Press, 2001.

[5] スティーブン・ストロガッツ, 蔵本由紀 [監修], 長尾力 [約]. *SYNC.* 早川書房, 2005.

[6] A. T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.*, Vol. 16, pp. 15–42, 1967.

[7] A. T. Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer, New York, 2nd edition, 2001.

[8] F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich. *Weakly Connected Neural Networks*. Springer, 1997.

[9] H Kori, Y Kawamura, H Nakao, K Arai, and Y Kuramoto. Collective-phase description of coupled oscillators with general network structure. *Physical Review E*, Vol. 80, p. 036207, Jan 2009.

[10] R. Albert and Albert-LászlóL. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 74, pp. 47–97, 2002.

[11] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D-U. Hwang. Complex networks: structure and dynamics. *Phys. Rep.*, Vol. 424, pp. 175–308, 2006.

[12] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, and C. Zhou. Synchronization in complex networks. *Phys. Rep.*, Vol. 469, pp. 93–153, 2008.

[13] N. Masuda, Y. Kawamura, and H. Kori. Analysis of relative influence of nodes in directed networks. *Physical Review E*, Vol. 80, No. 4, p. 46114, 2009.

[14] N. Masuda, Y. Kawamura, and H. Kori. Impact of hierarchical modular structure on ranking of individual nodes in directed networks. *New J. Phys.*, Vol. 11, p. 113002, 2009.

[15] Naoki Masuda, Yoji Kawamura, and Hiroshi Kori. Collective fluctuations in networks of noisy components. *arXiv:0911.5013*, 2009.

[16] Istvan Z. Kiss, Craig G. Rusin, Hiroshi Kori, and John L. Hudson. Engineering complex dynamical structures: Sequential patterns and desynchronization. *Science*, Vol. 316, pp. 1886–1889, 2007.