結合塩水振動子系の位相モデルによる同期解析

大阪大学大学院 生命機能研究科　田尻道子，宮崎淳，木下修一

はじめに　底に細い管を取り付けたコップに塩水を入れ、真水で満たした大きな容器の中に固定すると、管を通して下向きの流れが起き、しばらくすると上向きの流れに変わり、周期的な上下振動を示す。これは塩水振動子と呼ばれるリミットサイクル振動であり、緩和振動のモデルとなる現象である。また、複数のコップを固定すると、流れのリズムが同期することが知られている。このとき、一対の塩水振動子では同位相より反位相の同期の方が安定で、独立に振動している状態に比べて周期が同位相の状態では短くなり、反位相の状態では長くなる現象が観測されている。本研究ではこれらの現象を定量的に調べるために、位相モデルによる解析を行った。

理　論　位相モデルは、位相という自由度のみで振動現象を記述し、振動子間の結合を、位相差を変数とした結合関数で表わしたものである。そこで、まず結合塩水振動子系の結合関数を実験的に求めることにする。導出方法は、宮崎らにより BZ 反応系に適用された方法で[1]、2 個の結合振動子の振動子間の位相差(ψ)と振動周期の固有周期に対する変化量(ΔT)との関係から結合関数 $q(\psi)$ を求める方法である。2 個の振動子の位相方程式が

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 + \varepsilon q(\phi_1 - \phi_2), \qquad \frac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + \varepsilon q(\phi_2 - \phi_1) \tag{1}$$

と記述できる場合に、i番目の振動子の振動周期を$T_i + \Delta T_i$とする。ここで、ΔT_iは自然周期T_iに対する変化量である。この場合に

$$2\pi = \oint d\phi = \int_0^{T_i+\Delta T_i} dt \frac{d\phi_i}{dt} \simeq (T_i + \Delta T_i)[\omega_i + \varepsilon q(\psi)] \tag{2}$$

と記述でき、(2)式に(1)式を代入することにより、結合関数

$$q(\psi) = \frac{-2\pi \Delta T_1(\psi)}{\varepsilon T_1^2}, \qquad q(-\psi) - \frac{\Delta\omega}{\varepsilon} = \frac{-2\pi \Delta T_2(\psi)}{\varepsilon T_1^2} \tag{3}$$

を求めることができる。ここで、$\psi = \phi_1 - \phi_2$、$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$、$\varepsilon$は結合強度である。また、$q(-\psi)$については独立した 1 番目の振動子を基準振動子とし、2 番目の振動子の振動周期を$T_1 + \Delta T_2$として記述している。

実　験　塩水で満たした振動子 2 個を、真水で満たした外容器内に水面の高さがほぼ同じになるように設置し、塩水の水面の変位をレーザー変位計により測定した。計測は、同位相で振動している状態から十分長い時間行った。結合強度εは振動子の塩水と外容器の真水の水面の面積比に比例する値であり、面積比を変化させた場合についても行った。ここでは、面積比 0.135 での結合強度を$\varepsilon = 1.0$としている。また、固有周期を得るために振動子 1 個の系での測定も行った。

解析結果と考察　実験により得られた振動周期を用いて、(3)式より図 1 に示すような結合関数$q(\psi)$および$q(-\psi) - \Delta\omega/\varepsilon$を得た。これは 5 つの異なる結合強度（面積比）

について得られた結合関数の重ね合わせであるが、それらすべての形状および振幅が一致していることが分かる。得られた結合関数$q(\psi)$を塩水振動子系の結合関数として解析を行う。(1)式より、周期は、$q(\psi)$が負では固有周期より長くなり、正では短くなる。位相差が 0 で$q(\psi)$は正、位相差がπ、$-\pi$で$q(\psi)$は負となり、周期は同位相で固有周期より短く、反位相で長くなるという実験結果と一致している。

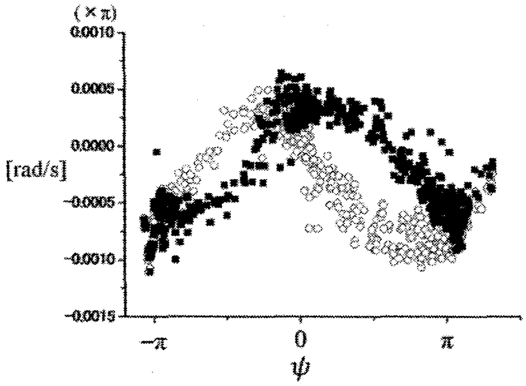

図 1. 結合関数$q(\psi)$(■)および$q(-\psi)-\Delta\omega/\varepsilon$(○)。面積比が 0.135, 0.066, 0.060, 0.048, 0.031 で得られた結合関数の重ね合わせ。

次に同期について考える。(1)式より

$$\frac{d\psi}{dt}=\Delta\omega+\varepsilon Q(\psi) \tag{4}$$

が得られる。ここで、$Q(\psi)=q(\psi)-q(-\psi)$は結合関数$q(\psi)$の反対称部分であり、同期解は$d\psi/dt$が 0、すなわち、$Q(\psi)=-\Delta\omega/\varepsilon$から求められる。図 2(a)に$Q(\psi)$を示す。$Q(\psi)=0$の解を考えた場合に$\psi=0$ では勾配が正で不安定解、$\psi=\pi,-\pi$では勾配が負で安定解である。従って、反位相での同期の方が安定であることを示している。同期している時の位相差ψ_{sync} は、$-\pi<\psi_{sync}<-0.5\pi$ ($\pi<\psi_{sync}<1.5\pi$)に存在する$Q(\psi)=-\Delta\omega/\varepsilon$の解である。結合強度$\varepsilon$と同期する位相差$\psi_{sync}$との関係を図 2(b)に示すが、結合関数から得られたψ_{sync} (●)と実験結果(◇)とはほぼ一致する結果となった。このことから、得られた結合関数$q(\psi)$が定量的にも実験結果をよく表わしていることを示している。

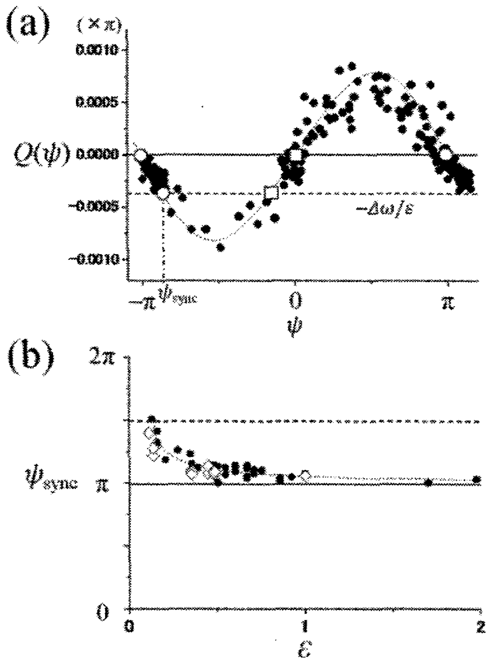

図 2. (a) 結合関数の反対称部$Q(\psi)$ (●)と(-----)は(●)の平滑化した曲線。
$Q(\psi)=0$、$Q(\psi)=-\Delta\omega/\varepsilon$における安定解(○)と不安定解(□)。($\Delta\omega=0.000115\pi$)
(b) 結合強度εと同期する位相ψ_{sync}位相との関係。(●) $Q(\psi)$から得られたψ_{sync} (◇) 実験結果

振動子は実際には揺らぎを伴っており、こうした結合に対する揺らぎの効果についても考える必要がある。それには、(4)式にノイズの項を含めた Langevin 方程式を考えることにより可能になる。このような方法で、位相差のダイナミクスを Fokker-Planck 方程式で扱うこともでき、今後、揺らぎを含めた解析を行っていくことが重要と思われる。

参考文献 [1] J. Miyazaki and S. Kinoshita, Phys. Rev. Lett. **96**, 194101 (2006)