粉体せん断流の弱非線形解析

京都大学 基礎物理学研究所　齊藤 国靖 [1], 早川 尚男 [2]

粉体は非弾性衝突によってエネルギーを散逸する散逸粒子であり、粉体集団の「流れ」は通常の Newton 流体とは異なる様々な特徴が知られている。また、粉体集団の流れを制御することは工学などの応用面においても極めて重要な課題である。粉体集団は常にエネルギー散逸を伴うため、定常な流れを生じさせるためには常に外部からのエネルギー注入が必要である。特に、粉体せん断流においては境界からのエネルギー供給と粉体集団の内部でのエネルギー散逸がバランスすることで定常流が実現し、容器の中心付近に高密度な領域（シェアバンド）が形成されることが数値計算で知られている [1]。この様な空間的に不均一な状態が実現することは線形安定性解析でも示されており、密度、流速、粉体温度が一様な状態は基本的に不安定である [2]。

最近、Khain は比較的高密度な粉体集団のせん断流を分子動力学シミュレーションによって再現し、粉体の跳ね返り係数をコントロールパラメータとした分岐解析を行った [3]。これによると、比較的高密度であるため、せん断によって形成されたシェアバンド内の粉体は結晶化し、系は固液共存の様な状態に陥る。さらに、跳ね返り係数を変えることでオーダーパラメータのヒステリシスを見出した。一方、Shukla と Alam は密度が希薄な粉体ガスの 2 次元せん断流に対して弱非線形解析を行い、密度、流速、粉体温度の撹乱の振幅が従う Stuart-Landau 型の振幅方程式を導出した [4]。これによると、粉体が比較的高密度な場合だけではなく、低密度な場合にも Subcritical 分岐が見られる。

ところで、Shukla と Alam による縮約の方法 [5] では空間スケールを残すことが出来ず、2 次元せん断流に見られるシェアバンドの時空間構造を調べることが出来ない。また、一様解と撹乱に別々の境界条件を用いるなどの問題点も含んでいる。そこで我々は、複雑な境界条件を避けるため上下の仮想セルを速さ $\pm U/2$ で動かす Lees-Edwards 境界条件を適用する。また、粉体ガスのダイナミクスを良く記述する流体力学的な方程式 [6]

$$
\begin{aligned}
(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)\,\nu &= -\nu\nabla\cdot\mathbf{v} & (1)\\
\nu\,(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} &= -\nabla\cdot\mathbf{P} & (2)\\
(\nu/2)\,(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)\,\theta &= -\mathbf{P}:\nabla\mathbf{v} - \nabla\cdot\mathbf{q} - \chi\,, & (3)
\end{aligned}
$$

を縮約の出発点とし、長さスケールを残した弱非線形解析を行う [7]。ここに、ν, $\mathbf{v}=(u,w)$, θ, $\mathbf{P}$, $\mathbf{q}$, χ はそれぞれ粉体の被覆率、流速、粉体温度、圧力テンソル、熱流、エネルギー散逸率であ

[1] E-mail: saitoh@yukawa.kyoto-u.ac.jp
[2] E-mail: hisao@yukawa.kyoto-u.ac.jp

り、長さおよび時間のスケールとして、粉体の粒径 d および $2d/U$ を用いている。我々は、主流 $\mathbf{v}_0 = (\dot{\gamma}Y, 0)$ と共に動く座標系を考え、せん断の convective term を消去する。但し、$\dot{\gamma}$ はせん断率である。また、一様解 $(\nu, u, w, \theta) = (\nu_0, 0, 0, \theta_0)$ の線形安定性解析により、臨界波数は常に最小の波数 $\mathbf{k}_c = (2\pi d/L, 2\pi d/L)$ で与えられることが分かる。但し、L は Y 方向の幅である。

粉体せん断流では、粉体の跳ね返り係数 e に加え、せん断率 $\dot{\gamma}$ と一様な被覆率 ν_0 がパラメータに成り得るが、我々は $L/d \to \infty$ の流体力学的な極限を考え、複数あるパラメータを一つの微小量 $\epsilon = (1-e^2)^{1/4}$ でスケールする。つまり、一様な粉体温度 θ_0 を固定して考えれば $\dot{\gamma} = \epsilon^2$ であるし、臨界波数 $\mathbf{k}_c = 0$ から少し離れた波数は $\mathbf{k} = \epsilon\mathbf{q}$ となる。但し、$\mathbf{q}$ は ϵ でスケールした後の波数を表す。以上の準備の後、ϵ の 3 次までの摂動計算を行えば、攪乱の振幅に対して time dependent Ginzburg-Landau (TDGL) 方程式が導かれる。得られた TDGL 方程式の 3 次の非線形項の係数の符号から、粉体の密度が低い領域から高い領域にかけて、Supercritical 分岐から Subcritical 分岐へ変わることが分かった。これは、比較的高密度な領域に Subcritical 分岐が現れるという Khain の分子シミュレーションの結果と同じである。さらに我々は摂動計算を 5 次まで進め、一般化した振幅 [8] の TDGL 方程式の 5 次の非線形項の係数を計算した。これにより、Supercritical と Subcritical のそれぞれの場合について TDGL 方程式を数値的に解くことができ、シェアバンドの時空間構造を明らかにすることができた。

参考文献

[1] M.L. Tan and I. Goldhirsh, Phys. Fluids **9** (1997), 856; K. Saitoh and H. Hayakawa, Phys. Rev. E **75** (2007), 021302.

[2] P. J. Schmid and H. K. Kytömaa, J. Fluid Mech. **264** (1994), 255; C. H. Wang, R. Jackson and S. Sundaresan, J. Fluid Mech. **308** (1996), 31; M. Alam and P. R. Nott, J. Fluid Mech. **377** (1998), 99.

[3] E. Khain, Phys. Rev. E **75** (2007), 051310; E. Khain, Eur. Phys. Lett. **87** (2009), 14001.

[4] P. Shukla and M. Alam, Phys. Rev. Lett. **103** (2009), 068001; P. Shukla and M. Alam, J. Fluid Mech. in press (2010).

[5] W. C. Reynolds and M. C. Potter, J. Fluid Mech. **27** (1967), 465.

[6] J. T. Jenkins and M. W. Richman, Phys. Fluids **28** (1985), 3485.

[7] A. C. Newell and J. A. Whitehead, J. Fluid Mech. **38** (1969), 279; K. Stewartson and J. T. Stuart, J. Fluid Mech. **48** (1970), 529.

[8] M. C. Cross, P. G. Daniels, P. C. Hohenberg and E. D. Siggia, J. Fluid Mech. **127** (1983), 155; W. van Saarloos, Phys. Rev. A **39** (1989), 6367; T. S. Komatsu and H. Hayakawa, Phys. Lett. A **183** (1993), 56.