

Frequency Adaptation in a Controlled Stochastic Resonance Utilizing Delayed Feedback Method ¹

京都大学 情報学研究科 筒 広樹 ²

ノイズによって信号の検出感度が高まる現象はこれまで広く研究されてきており、代表的なものとして確率共鳴やコヒーレント共鳴といったものがある。近年、時間遅れを持つ系における確率共鳴が関心を集めている。本研究では、確率共鳴のコヒーレンス度を増強するための仕組みとして時間遅れフィードバックループを有するモデル系を考え、その系の応答関数を計算するための有限極近似を考察した。発表ではその最も基本的な実装である2極近似の結果を示した。

モデル：時刻 t の状態 $X \equiv X(t)$ は次のようなランジュバン方程式に従うとする。

$$\dot{X} = -V'(X) + H_{ac} + H_{fb} + R(t),$$

$R(t)$ は強度 D の白色ガウスノイズである。 $V(X)$ は、双安定ポテンシャル: $V(X) = (1-X^2)^2/4$ 、 H_{ac} は、外部入力信号: $H_{ac} = h \cos(\Omega t)$ 、 H_{fb} は、フィードバック入力: $H_{fb} = -K \{X(t) + X(t-\tau)\}$ 、 $\tau = T/2$ (K : 定数) である。

連続変数 X に対するフォッカー-プランク方程式から $\sigma = \text{sgn}(X) \in \{\pm 1\}$ のように二値化した状態に対するマスター方程式を近似的に導出し、以下のような結果を得た。

$$\dot{P}(\sigma, t|\cdot) = W(\sigma, t|\cdot)P(-\sigma, t|\cdot) - W(-\sigma, t|\cdot)P(\sigma, t|\cdot),$$

ここで、 $P(\sigma, t|\cdot)$ は、 σ に対する条件付き確率であり、“ \cdot ” は付加条件を表す。 $W(\sigma, t|\cdot)$ は遷移確率であり、

$$W(\sigma, t|\cdot) \approx [w_A + \sigma \{w_h H_{ac}(t) - w_K B_1(t)\}] / 2,$$

となる。ただし、 $w_A \equiv 2E \exp\{-E^2/(4D)\} / \pi$ 、 $E \equiv 1 - KA_1(t|\cdot)$ 、 $w_K \equiv K(E^2 - D)w_A/(2D)$ 、 $w_h \equiv E^{3/2}w_A/D$ 、

$$A_1(t) \equiv \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}} \frac{P(\sigma, t-\tau; \sigma, t|\cdot)}{P(\sigma, t|\cdot)}, \quad B_1(t) \equiv \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}} \sigma \frac{P(\sigma, t-\tau; \sigma, t|\cdot)}{P(\sigma, t|\cdot)},$$

ここで、 $A_1(t)$ と $B_1(t)$ は、これから求める条件付き確率 $P(\sigma, t|\cdot)$ よりも高次の条件付き確率に依存しており、閉じた方程式を得るには何らの近似を行う必要がある。本研究では、文献 [1] にある

¹「平均場遅延フィードバック系における確率共鳴応答の二状態モデル解析」より タイトル変更。

²E-mail: tutu@acs.i.kyoto-u.ac.jp

ようなマルコフ近似を行った。マルコフ近似では、計算の最終段階で $A_1(t) \rightarrow \sum_{\sigma} P(\sigma, t - \tau | \sigma, t)$, $B_1(t) \rightarrow \sum_{\sigma} \sigma P(\sigma, t - \tau | \sigma, t)$ のような置き換えを行う。

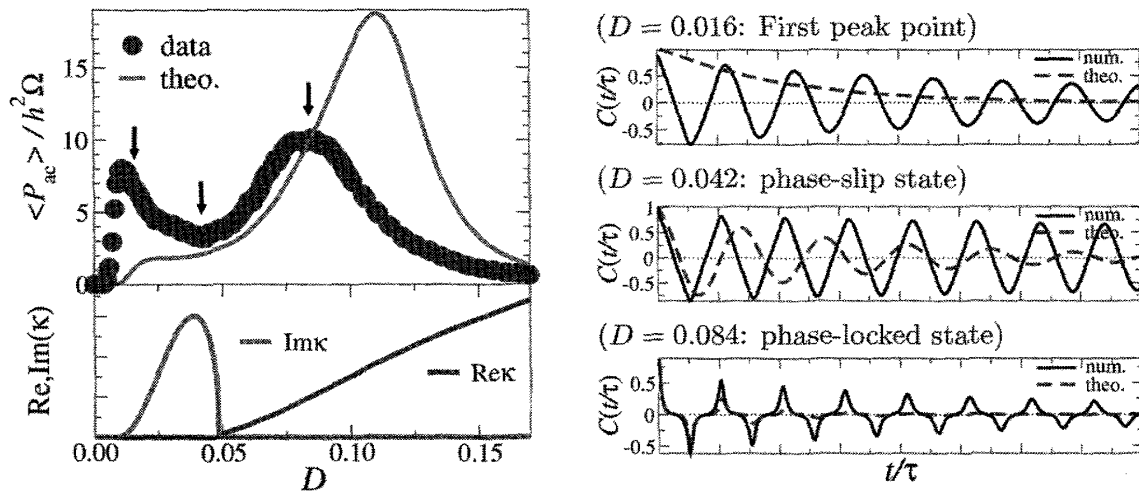
マスター方程式より、応答関数 $a(t, t') \equiv \sum_{\sigma} P(\sigma, t | \sigma, t') - 1$ に対する方程式が二極近似により次のように得られる。

$$\partial_t a(t, t') = -w_0 a(t, t') - w_1 a(t - \tau, t'),$$

ただし、 $a(t, t) = 1$, $a(t, t') = a(t', t)$ とする。 $\{w_j\}$ は、 A_1 に依存する係数であり、 A_1 はセルフコンシステントに決定される。応答関数を用いると、自己相関関数 $C(t, t') \equiv \sum_{\sigma, \sigma'} \sigma \sigma' P(\sigma, t; \sigma', t') \simeq \langle X(t)X(t') \rangle$ は、 $C(t, t') \approx a(t, t') + \langle \sigma \rangle_t B(t, t')$ と書ける。ただし、

$$\langle \sigma \rangle_t \approx \int_{-\infty}^t ds a(t, s) \{w_h H_{ac}(s) - w_K B_1(s)\},$$

$$B(t, t') \approx \int_{t'}^t ds a(t, s) \{w_h H_{ac}(s) - w_K B_1(s)\} \quad (t > t').$$



左上図は、パワーロス $P_{ac} = \int_0^{T_0} dt \dot{X} H_{ac} / T_0$ の数値計算結果と解析結果を示している。パワーロスは $\langle \sigma \rangle_t = \text{Re}[\tilde{\chi} e^{i\Omega t}]$ としたときの $\text{Im}[\tilde{\chi}]$ に比例する量である。この系における特徴は図のようにパワーロスが二つのピークを持つことである。左下図は、応答関数をラプラス変換した関数の極を D の関数としてプロットしたものである。極は D が小さいところでは純虚数であり、 D がある値より大きくなると実数となる。その境目の点では、極は 0 に縮重しており、パワーロスの極小点に対応している。右図は、パワーロスの三つの極値における D での自己相関関数をプロットしたものである。 D が小さいときは、理論と数値計算は全く一致していない。パワーロスの極小点に対応する D では、極が 0 であることを反映して相関時間の増大が見られる。極大における D では、理論と数値計算は比較的よい一致を示している。ここでは、紙面の都合上、計算の詳細を割愛した。詳細は現在投稿中の論文が出版された際にそれを見ていただくと幸いである。

参考文献

[1] H. Tutu, Prog. Theo. Phys. **123** p. 1-33 (2010).