

# 紙へのインクのしみ込みと自己組織化臨界現象

九州大学総合理工学府 坂口 英継<sup>1</sup>

## 1 Introduction

ランダム媒質中の界面成長は紙へのインクなどのしみ込みなど身近なところでよく見られる現象である。紙や布への液体のしみ込みは、顔を洗ってタオルで水をふく、ティッシュペーパーで鼻をかむなどの中で日常的に利用している現象である。このランダムな媒質中の界面成長の問題はセルフアフィンフラクタルの典型的な問題として近年詳しく研究されてきた。特に、1986年に Kardar-Paris-Zhang によっていわゆる KPZ 方程式が提出されてからそのスケーリング則に関して様々な理論、シミュレーション、実験がなされてきた。1次元的な成長界面の位置を  $h(x, t)$  とすると、時間が十分経過すると、 $\langle (h(x, t) - h(x', t))^2 \rangle^{1/2} \sim |x - x'|^\alpha$  のようなスケール則に従うことが予想され、そのべき指数  $\alpha$  の値が議論されてきた。KPZ 方程式に従う系では  $\alpha$  は  $1/2$  になる。これは、KPZ 方程式系の成長界面がランダムウォークのゆらぎと等価なスケール則を満たすことを表している。しかし、多孔質媒体への水の浸透や紙の燃焼など多くの実験では  $1/2$  より大きな指数が得られ、単純な KPZ 方程式では説明できない現象が多いことも分かってきた。Buldyrev 等はインクの紙への浸透の実験を行い  $\alpha = 0.63$  を得た。さらに彼らはある格子上の確率モデルを提案し、確率が臨界値を取るとき、界面が directed percolation の臨界状態で表現でき、directed percolation 問題の臨界指数を用いて  $\alpha$  の値として  $0.63$  が得られるとした。一方、ノイズ項が時間的にランダムに変動する KPZ 方程式の代わりに、時間的には一定であるが空間的にはランダムな値を取る KPZQ 方程式も研究された。この KPZQ 方程式には駆動力をあらわすパラメータ  $F$  が入っており、 $F$  が臨界点以下では界面はランダム媒質にピン止めされ成長が止まり、臨界点以上ではほぼ一定の速度で成長を続けるという動的な相転移現象があることが分かっている。 $F$  の臨界値で界面が  $\alpha$  が  $0.63$  をとるセルフアフィンフラクタルになる。この臨界指数は紙へのインクのしみ込みの実験値とよく合っている。 $\alpha = 0.63$  のランダム界面は KPZ 方程式系とは異なるユニバーサリティクラスをつくっていると考えられる。

ところで、Buldyrev 等の実験では臨界条件を満たす紙を探して実験したわけではなく、自然に紙がインクを吸い上げられた後の成長が止まった状態で界面を計測して、きれいなべき則を得ている。成長が終わった状態が自然に臨界状態になっているように見える。この系では成長とともに実効的な駆動力が変化する。すなわち、インクが吸い上げるにつれ重力効果が効いてきてしだ

---

<sup>1</sup>E-mail: sakaguchi@asem.kyushu-u.ac.jp

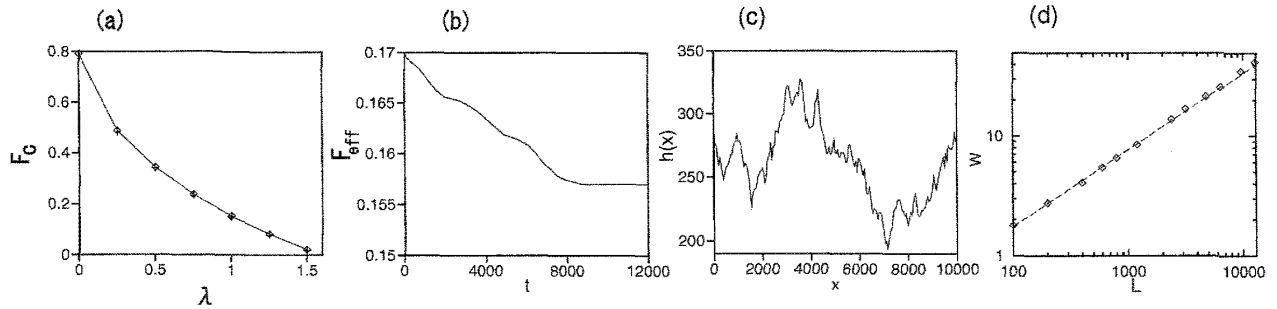


図 1: (a) KPZQ 方程式の臨界駆動力  $F_c$  (b) モデル式 (2) での実効的駆動力  $F_{eff} = F - \langle h \rangle$  の時間変化 (c) 成長が止まった時の  $h(x)$  (d) 界面のゆらぎの大きさ  $W = \langle (h(x,t) - \langle h \rangle)^2 \rangle^{1/2}$  と系のサイズ  $L$  の両対数グラフ。

いに成長速度が遅くなり最終的に成長が止まる。また、界面が成長し濡れた部分の面積が増大するにつれ、紙の表面から蒸発により水分が抜けることも成長速度を遅くして最終的に界面成長が止まる要因になっている。このように最初は駆動力が臨界値以上で大きな速度で成長するが、成長とともに駆動力が小さくなり最終的にランダム媒質にピン止めされ成長が止まる。成長が止まるとそれ以上駆動力が下がることもないので、実効的な駆動力はピン止めぎりぎりの値、すなわち、ちょうど臨界点付近で成長が止まることが自然に起こる。紙はインクの溶液に浸かっているため臨界状態に保たれたままの状態が維持される。このような自動的に臨界状態に漸近する現象を、ここでは自己組織化臨界現象と名付けたい。この現象は Bak 等が以前提案した砂山崩しのモデルのような非常に弱い力でゆっくり駆動した系に現われる self-organized criticality (SOC) とは異なり、もともと相転移がある系において、実効的なパラメータが界面の成長とともに変化し、自然に臨界点に近づくという単純なメカニズムで起こる現象である。

## 2 KPZQ 方程式のシミュレーション

KPZQ 方程式は次の形をしている。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \lambda \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \xi(x, h) + F. \quad (1)$$

ただし、クエンチされたノイズ項は

$$\langle \xi(x, h) \xi(x', h') \rangle = 2D \delta(x - x') \delta(h - h')$$

を満たすとする。KPZQ 方程式に成長とともに駆動力が弱くなる項を追加した次のモデル方程式を提案する。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \lambda \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \xi(x, h) + F - d \langle h \rangle. \quad (2)$$

ここで  $\langle h \rangle = (1/L) \int_0^L h(x, t) dx$ 、すなわち、 $h$  の空間平均値である。 $d$  は水分の蒸発率や重力に比例する係数である。平均を取らないモデルの方が実験の状況に近いが、空間平均を取った平

均場モデルの方が、駆動力  $F$  の値が平均の界面高さ  $\langle h \rangle$  に比例して実効的に小さくなっていく様子がよく分かるのでこのモデルの結果を示す。 $d$  の値が小さいときは、平均を取らないモデルと平均を取ったモデルではほとんど同じ結果が得られている。図 1(a) は、元の KPZQ 方程式 (1) の非線形パラメータ  $\lambda$  の関数として、系のサイズ  $L = 10000$  のシミュレーションで得られた駆動力  $F$  の臨界値を示している。ただし、 $\nu = 5$  で、 $\xi$  は 0 から 3 の間の一様乱数としている。 $F$  がこの曲線の下領域で成長界面はピン止めされる。この曲線直上だけで  $\alpha$  が 0.63 の臨界スケーリング則が成り立つ。 $\lambda = 1$  のときの臨界値  $F_c$  は 0.153 である。 $F_c$  は 50 個のランダムな媒質での平均値で求めた。図 1(b)-(d) は (2) 式のシミュレーション結果を示す。図 1(b) は  $\lambda = 1$  で  $F$  が 0.17 のときの実効的な駆動力  $F_{eff} = F - d \langle h \rangle$  の時間変化を表す。 $h$  の初期値は  $h(x, 0) = 0$  で  $d = 0.5 \times 10^{-4}$  としている。 $F_{eff}$  が 0.17 から単調に減少して、 $F_{eff} = 0.157$  になったとき、界面成長が止まった。界面成長が止まると  $F_{eff}$  の時間変化もなくなる。この値 0.157 は図 1(a) で示されている臨界値とはほぼ等しい。(ランダム媒質のランダムさにより系ごとに少しずつ異なる値で止まる。) すなわち、自己組織化臨界現象がこのモデル方程式系でも実現されたといえる。図 1(c) に成長が止まった時の  $h(x)$  を示す。図 1(d) は系のサイズ  $L$  を変えたときの成長が止まった時の、 $W = \langle (h(x, t) - \langle h \rangle)^2 \rangle^{1/2}$  と  $L$  の両対数グラフである。指数  $\alpha = 0.63$  のべき則がこのシミュレーションでも得られた。

以上要するに、減衰項をつけた KPZQ 方程式系を提案し、初期に駆動力  $F$  が臨界値以上になっている系が、成長とともに実効的な駆動力が減少していき、成長が止まった状態がちょうど元の KPZQ 方程式の臨界点になっていることを示した。この意味での自己組織化現象が起こることが、紙へのインクのみみ込みの実験で特に紙質などの条件をうまく選ばなくても自然に  $\alpha = 0.63$  という非自明なべき指数が得られた理由だと考えている。今回提案したモデルは非常に簡単なモデルであるが、臨界点にひとりでの漸近するというモデルはこれまで提案されていなかったのではないかと考えている。ただし、本田勝也先生の本「フラクタル」にはこの意味での自己組織化臨界現象に関する推測がすでになされている。

## 参考文献

- [1] M. Kardar, G. Parisi, and Y. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56** (1986), 889.
- [2] S. V. Buldyrev, A. L. Barabasi, F. Caserta, S. Havlin, H. E. Stanley, and T. Vicsek, Phys. Rev. A **45** (1992), R8313.
- [3] H. Sakaguchi, Phys. Rev. E **82** (2010), 032101.
- [4] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59** (1987), 381.
- [5] 本田勝也著「フラクタル」朝倉書店 12章