Understandings of Transport Phenomena in Multi-Dimensional Dynamical Systems

— Normally Hyperbolic Invariant Manifold (NHIM) and Its Stable/Unstable Manifolds and Their Breakdown —

[A] Molecule & Life Nonlinear Sciences Laboratory, Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University, Kita 20 Nishi 10, Kita-ku, Sapporo 001-0020, Japan

[B] Complex System Laboratory, Department of Physics, Faculty of Science, Nara Women's University, Nara, 630-8506, Japan

Hiroshi Teramoto[A], Mikito Toda[B] and Tamiki Komatsuzaki[A]

高次元力学系における輸送現象の理解の広がり

— 法双曲不変多様体、安定多様体、不安定多様体とその崩壊 —

[A] 北海道大学電子科学研究所

[B] 奈良女子大学理学部物理科学科

寺本　央[A1]、戸田　幹人[B2]、小松崎　民樹[A3]

Abstract

In this paper, we discuss our recent development for the understandings of transport phenomena in dynamical systems in terms of normally hyperbolic invariant manifolds (NHIMs) and their stable/unstable manifolds, following a discussion with Professor Shuichi Tasaki by one of the authors, Komatsuzaki, while they chatted with drinking coffee or tea at the institute for fundamental chemistry in Kyoto. In dynamical systems, a NHIM is a representative invariant structure that is structually stable. In addition, the stable/unstable manifolds emanating from the NHIM, especially those that have codimension one, play an important role for transports in phase space. The importance of the NHIM and its stable/unstable manifolds, to turn the other way, indicates that the breakdown of these structures can have a big consequence for the transports. For example, a phenomena recently found by the authors, a switching of the reaction coordinate with the other nonreactive coordinate, is one of the consequences for the breakdown of the NHIM. In order to investigate the breakdowm mechanism of the NHIM, we focus on unstable periodic orbits embedded in the NHIM. We classify the breakdown patterns at these periodic orbits into six patterns. In the last section, we discuss more global features of the breakdown mechanism and its dependency on the system dimensions.

[1]E-mail: teramoto@es.hokudai.ac.jp
[2]E-mail: toda@ki-rin.phys.nara-wu.ac.jp
[3]E-mail: tamiki@es.hokudai.ac.jp

本稿では、小松崎と田崎秀一氏との17年前の（財）基礎化学研究所でのお茶のみ場での議論等から、はじまった一連の研究が、法双曲不変多様体、安定/不安定多様体の研究を経て、どのような展開をむかえ、どのように広がっているかを、高次元系への展開を中心にして、それらの研究の一翼を担った著者たちの視点から論ずる。力学系において、法双曲不変多様体は構造安定な不変多様体を代表するものであり、そこから伸びる安定/不安定多様体は、特にそれらの力学系の余次元が低いものは、相空間中の輸送現象を理解するために重要な役割を果たす。そのことは裏を返せば、法双曲不変多様体の崩壊も、輸送現象に重要な影響を与えうるということを示唆する。例えば、我々が近年発見した「反応座標のスイッチング」と呼ばれる現象も法双曲不変多様体の崩壊により引き起こされるものである。法双曲不変多様体の崩壊メカニズムを論ずるために、我々は、その法双曲不変多様体に埋め込まれている不安定周期軌道に着目する。我々の分類によると、一般力学系に対しては、法双曲不変多様体の不安定周期軌道周りの崩壊パターンは6種類に分類できることがわかる。最後に、より大域的な崩壊メカニズムとそのメカニズムの次元依存性に関して述べる。

1 Introduction

法双曲不変多様体は、高次元力学系における構造安定な不変多様体の代表的な構造である。法双曲不変多様体は、コンパクトであれば構造安定であるということが、Fenichelらによって示されている[1]。また、そこから伸びる安定/不安定多様体に対しても、同様にFenichelのoverflowing/incoming invariant manifoldに対する構造安定性の定理から、構造安定になることが直ちにわかる。さらに、Hamilton力学系に限らない一般の力学系に対しては、逆に、Mañéによって力学系のベクトル場に対する任意のC^1の摂動に対して頑強に残る不変多様体は、法双曲的でなければならないということが示されている[2][4]。Hamilton力学系に対しては、法双曲不変多様体のほかにも、KAMトーラスのような法双曲的ではないが、構造安定な不変多様体が存在する。しかし、KAMトーラスの余次元[5]はN自由度系に対してはNであるのに対し、先に紹介した法双曲不変多様体の余次元はNによらずに2、そこから伸びる安定/不安定多様体の余次元は1であるので、単純に次元の考察だけからすれば、法双曲不変多様体あるいはそれから伸びる安定/不安定多様体の方が全空間に占める次元は大きい[6]。特に、余次元1の構造物は、局所的には、相空間を二つの領域に分断できるので、相空間中の輸送に対して、本質的に重要な役割を果たす。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、次の節で、法双曲不変多様体の性質を簡単にまとめる。その法双曲不変多様体の構造安定性を保証しているのは、不変多様体の持つ法双曲性と呼ばれる性質だが、次にその法双曲性が破れて、不変多様体が崩壊していくメカニズムに関する著者らの最近の研究を紹介する。特に、法双曲不変多様体の崩壊に着目する理由は以下の二つの理由からである。まず、第一に一般の化学反応系において、系の自由度とともに法双曲不変多様体の崩壊が普遍的に起こると期待されるからである。なぜなら、化学反応系における法双曲不変多様体の重要な例は、双曲型 $\times$ 楕円型 $\times \cdots \times$ 楕円型 の双曲固定点近傍に存在する法双曲不変多様体であ

[4]以上のFenichel [1] とMañé[2] をあわせると、一般力学系においては、法双曲不変多様体は、構造安定な不変多様体の代表選手であるということができる。このような構造安定な構造は力学系を理解するのに重要な役割を果たすが、高次元力学系においては、構造安定な構造を理解するだけでは十分ではないこともわかっている。つまり、ある空間中に定義される力学系の全体の集合を考えたとき、その力学系のうち構造安定となるものはその力学系全体の空間でC^1位相等で稠密にはならない。

[5]力学系の定義されている空間の次元 − その構造物の次元。余次元が小さいほど全空間に占める次元は大きい。

[6]実際に、自由度の数Nに対して、その相空間に占めるトーラスの割合がどの程度になるかという理論的な見積もりは存在しない。数値的に検証した例としては [3] を参照のこと。

り、この場合には、一般に自由度 N が大きくなるほど、楕円型自由度間に共鳴が起こりやすくなり、その共鳴が法双曲不変多様体を崩壊させやすくすると期待されるからである。第二に、法双曲不変多様体が崩壊することにより、相空間の輸送現象が大きな影響を受けるからである。例えば、近年、我々が提案した「双曲自由度のスイッチング機構」[4] も、法双曲不変多様体の崩壊とともに起こる。これは、法双曲不変多様体の崩壊とともに主要な双曲型自由度が切り替わるというものである。その双曲自由度のスイッチングの例を Fig. 1 に示す。この例は、三次元空間 (x_1, x_2, x_3) 中を電子が、静止している水素原子 (proton) からのクーロン力と x_3 方向から一様な磁場、x_1 方向からの一様な電場を受けて運動するモデルである [5]。Fig. 1 (a) に電子が感じるポテンシャルエネルギー U の等高面を示す。このポテンシャルエネルギーと電子が持っている運動エネルギーを加えたものが電子が持っている全エネルギーに相当する。Fig. 1 の全エネルギー $E = 0.0$ の等高面上 $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0}$ にポテンシャルの停留点が存在する。この停留点に対応する Hamilton ベクトル場の固定点は、双曲型 $\times$ 楕円型 $\times$ 楕円型 というタイプの安定性を持っている。この固定点近傍では、x_1 方向が双曲型自由度に対応しており、その固定点のエネルギーに十分近い $E = 0.10$ では、電子は典型的には、Fig.1 (b) の黒の実線の矢印で示すような赤の軌跡を描く。しかし、電子のエネルギーを $E = 1.45$ にするとそれとは質的に異なる電子の挙動が観測される。そのエネルギーの電子の典型的な軌跡を書いたものが Fig. 1 (b) の黒の点線の矢印で示す青の軌跡である。このエネルギーでは、固定点近傍に近づくときに電子は、$x_3 < 0$ の方向から漸近して $x_3 > 0$ 方向に飛び去る。このときの電子の主要な反応座標となっているのは、x_1 方向ではなくて、x_3 方向となっている [4]。この場合の固定点近傍における主要な反応経路は、背後にある法双曲不変多様体の法線方向が決めているのだが、法双曲不変多様体が存在する限りは、その法線方向もエネルギーとともに連続的に変化するはずである。よって、一般的に[7]は反応座標のスイッチングが起こるためには、あるエネルギーで背後にある法双曲不変多様体が壊れていなければならないことになる。実際に、その法双曲不変多様体が崩壊しているということを我々は [4, 6] で示した。また、もうひとつ重要な点は、この法双曲不変多様体の崩壊は、Hamilton 系の場合には、3 自由度以上の自励系で初めて起こる現象である、ということである。現在まで、3 自由度以上の系ではじめて起こる現象として、普遍的であると考え得るものは、Arnold 拡散等の数えるほどしかなく、また、それ以上の自由度ではじめて生起する現象は筆者らの知る限り知られていない。高次元 Hamilton 力学系を理解するためには、まだ、圧倒的に言葉が不足していると考えられるが、筆者らの研究がその一助となれば幸いである。最後の節で、我々の研究の展望と課題について紹介する。

[7]ある性質や現象が力学系の中で一般的であるとは、次のように定義されているとする。ある性質を持つ（現象を内包する）力学系が、力学系全体の集合の中で稠密に存在するとき、その性質（現象）は一般的であるとする。このときの稠密性は、力学系の C^1 等の位相に関するものであるとする。

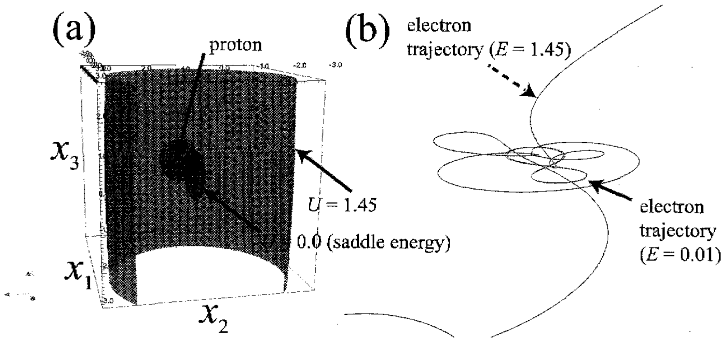

Figure 1: **(a)** 三次元空間中電場磁場中を水素原子 (proton) からのクーロンポテンシャルを受けながら運動する電子が感じるポテンシャルの等ポテンシャル面。**(b)** 電子のエネルギーが $E = 0.10$、$E = 1.45$ それぞれのときの同空間中での電子の描く軌跡。

2　法双曲不変多様体の性質

2.1　設定

可微分多様体 $\mathcal{M}$ 上に C^r 級のベクトル場 X が $T\mathcal{M}$ 上で定義されているとする。また、$\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ から出発して、そのベクトル場 X が定める流れに沿って $\mathcal{M}$ 上を時間 $t \in \mathbb{R}$ だけ動いたときの $\mathcal{M}$ 上の位置 $\phi^t(\mathbf{x})$ を対応させる写像を $\phi^t : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ とする。これは、微分方程式の解の存在と一意性定理より、well-defined であり、C^r 級の滑らかさをもつ。部分多様体 $M \subset \mathcal{M}$ を滑らかな不変多様体であるとする。つまり、C^r 級の可微分多様体であり、すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して、$\phi^t(M) = M$ を満たすとする。ϕ^t の微分を $D\phi^t : T\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ とすると、その微分は、TM を不変に保つ。つまり、$D\phi^t(TM) = TM$。このような不変多様体 M が法双曲的であるとは、M が次のような性質を満たすことをいう。接バンドル $T\mathcal{M}$ の底空間 M への制限 $T\mathcal{M}|M$ が、$D\phi^t$ 不変な分解 $T\mathcal{M}|M = TM \oplus NE^u \oplus NE^s$ をもち、$D\phi^t$ を NE^u に制限したときの接ベクトルの単位時間当たりの伸び率が、$D\phi^t$ を TM に制限したときの接ベクトルの伸び率よりも大きいこと、および、$D\phi^t$ を NE^s に制限したときの接ベクトルの単位時間当たりの縮み率が、TM に制限したときの接ベクトルの単位時間当たりの縮み率よりも大きいこと、である。ただしここで、接ベクトルの長さを測るために可微分多様体 $\mathcal{M}$ 上にメトリックが導入されている必要があるが、以上の伸び率、縮み率はメトリックのとり方によらないことが示される [1]。以上のような法双曲的である不変多様体のことを、法双曲不変多様体と呼ぶ。このような法双曲不変多様体の重要な性質として、あるベクトル場 X が法双曲不変多様体 M を持てば、そのベクトル場に C^r の摂動（r 階微分まではあまり変えないような摂動）を加えたベクトル場 X' も同様に法双曲不変多様体 M' を持ち、この法双曲不変多様体 M' と元の法双曲不変多様体 M は微分同相で写りあえる、という性質である。この性質は、冒頭で構造安定性と呼んでいたものである。特にこの微分同相写像の滑らかさは、先の NE^u 方向の単位時間当たりの接ベクトルの伸び率の最大値 λ_u、NE^s 方向の単位時間当たりの接ベクトルの縮み率最大値 λ_s と TM 方向の伸び、縮み率の最大値 $\lambda_{Mu}, \lambda_{Ms}$ か

ら決まる定数を

$$\tilde{r} = \min\left\{ r, \lfloor \frac{\lambda_u}{\lambda_{Mu}} \rfloor, \lfloor \frac{\lambda_s}{\lambda_{Ms}} \rfloor \right\} \tag{1}$$

とすると、$C^{\tilde{r}}$ 級の滑らかさをもつ[8]。この事実から、法双曲不変多様体が崩壊するためには、少なくとも不変多様体のどこかで法双曲性が破れる必要がある。しかし、不変多様体の法双曲性の破れが直ちに、不変多様体の崩壊を意味するわけではない。不変多様体が法双曲性を失ってもなお滑らかさを失わない例としては、[7] を参照のこと。しかし、先の Mañé の結果を用いると、この不変多様体は C^1 摂動に対して構造安定ではありえない[9]ので、この状況は、C^1 位相においては一般的な状況ではない。次の節では、法双曲不変多様体の崩壊メカニズムを概説する。

3 法双曲不変多様体の崩壊メカニズム

法双曲不変多様体の崩壊メカニズムを探るために重要な鍵となるのは、Fig. 2 に示すような法双曲不変多様体上の不安定周期軌道（黒い曲線）およびそれらを繋ぐホモクリニック/ヘテロクリニック軌道である。考えている法双曲不変多様体の種類によってはこのような不安定周期軌道およびホモクリニック/ヘテロクリニック軌道が一本も無い状況が考えられる。例えば、準周期軌道によって埋め尽くされた双曲的トーラスのような場合である。このような準周期軌道によって埋め尽くされた双曲的トーラスは典型的には、Strange Non-chaotic Attractor (SNA) を経由して崩壊することが報告されている [8, 9, 10, 11]。しかし、このような準周期軌道によって埋め尽くされている場合は、一般的ではないということが、2 次元トーラスの場合には Peixoto の定理 [12] として知られている[10]。より一般の次元 $m \geq 3$ のトーラス上の運動に対しても、そのトーラス上が無理数回転の準周期軌道で埋め尽くされている流れは構造安定ではありえず、C^2 の摂動で、ストレンジアトラクターをもつようにできるということが証明されている [13]。よって、一般には、法双曲不変多様体は、

$$\text{法双曲不変多様体} = \text{不安定周期軌道} + \text{ホモクリニック/ヘテロクリニック軌道} + \text{それ以外の軌道} \tag{2}$$

となっていると期待される。はじめの不安定周期軌道およびホモクリニック/ヘテロクリニック軌道は、法双曲不変多様体内部の不変多様体であること、および、分岐が起こらなければ[11]構造安定で、法双曲不変多様体が崩壊した後もその近傍にカオティックサドルとして存在し続けると期待される。その概念図を書いたものが Fig. 2 の (b) である。また、不変多様体が法双曲的である限り、それにのっている不安定周期軌道は、系のパラメータを変化させてもその不変多様体から出ることができないということがわかっている。これは、法双曲不変多様体が「孤立している」という

[8]ただし、$a \in \mathbb{R}$ に対して、$\lfloor a \rfloor$ は a を超えない最大の整数であるとする。

[9]構造安定であれば法双曲的であるはずなので

[10]非遊走集合（準周期軌道で埋め尽くされている場合には、トーラス全体）は有限個の双曲型固定点と周期軌道だけからなる。

[11]不安定周期軌道の場合には、対応するモノドロミー行列の特性乗数が 1 以外であること [14](例えば、-1 のときにも周期倍分岐が起こるが、そのときには、着目している周期軌道周りで新たに周期が倍の周期軌道が生成あるいは消滅するだけで、着目している周期軌道自体はそのまま残る。)。ホモクリニック/ヘテロクリニック軌道の場合には、それらが不安定周期軌道の安定多様体と不安定多様体の横断的交差に対応していること、が分岐が起こらない条件である。

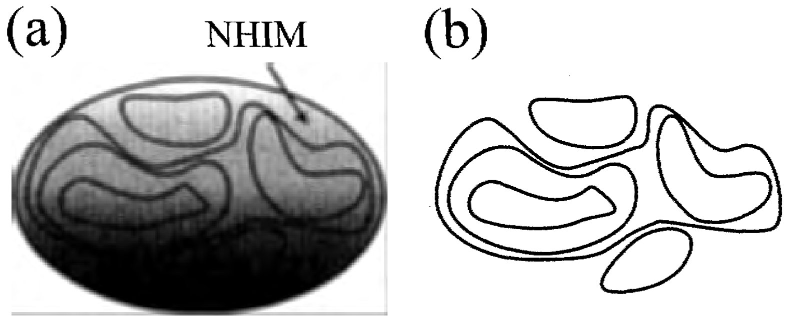

Figure 2: **(a)** 法双曲不変多様体 (NHIM) とその上の不安定周期軌道 (黒の曲線) の概念図 **(b)** 法双曲不変多様体崩壊後の概念図.

性質から導かれる。よって、Fig. 2 に示すような不安定周期軌道は、法双曲不変多様体の骨格を成しており、分岐が起きない限り、法双曲不変多様体が崩壊した後にもその近傍に存在し続けると期待される。この事実を踏まえて、ここでは、法双曲不変多様体に埋め込まれている不安定周期軌道およびそれらを繋ぐホモクリニック/ヘテロクリニック軌道に着目して法双曲不変多様体の崩壊メカニズムを概説する [6] [12]。

3.1 法双曲不変多様体の崩壊メカニズム (不安定周期軌道の周辺)

本節の設定の下で、$\mathbf{p}_0$ を法双曲不変多様体 M 上の周期 T の不安定周期軌道上の点であるとする。つまり、すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して、$\phi^t(\mathbf{p}_0) \in M$ であり、$\phi^T(\mathbf{p}_0) = \mathbf{p}_0$ であるとする。この写像 ϕ^T の $\mathbf{p}_0$ における微分は $T_{\mathbf{p}_0}\mathcal{M}$ から $T_{\phi^T(\mathbf{p}_0)=\mathbf{p}_0}\mathcal{M}$ への線形写像となる。これを、$D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ と書くことにする。特に、M が可微分不変多様体なので $D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ は、$T_{\mathbf{p}_0}M$ を不変に保つ。

不変多様体 M が法双曲不変多様体であれば、微分 $D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ は以下の二つの条件を満たす。

1. $D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ は、分解 $T_{\mathbf{p}_0}\mathcal{M} = T_{\mathbf{p}_0}M \oplus NE^u_{\mathbf{p}_0} \oplus NE^s_{\mathbf{p}_0}$ を不変に保つ。

2. $D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ を $T_{\mathbf{p}_0}M$ に制限した固有値の最大の絶対値を持つものの絶対値を μ_+、最小の絶対値を持つものの絶対値を μ_- とする。このとき、$D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ を $NE^u_{\mathbf{p}_0}$ に制限したもののすべての固有値の絶対値が μ_+ よりも大きい。また、同様にして、$D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ を $NE^s_{\mathbf{p}_0}$ に制限したもののすべての固有値の絶対値が μ_- よりも小さいこと。

不変多様体 M が法双曲的であれば、条件 1 および 2 を満たす。この主張の対偶をとると、微分 $D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ が上の条件 1 または 2 を満たしていないとすると、点 $\mathbf{p}_0$ の周りには法双曲的である不変多様体 M が存在しないことになる。この事実を使うと、法双曲不変多様体自体を continuation し

[12] 法双曲不変多様体自身を continuation できれば理想的なのだが、いくつかの問題点がある。例えば、Broer らは、法双曲不変多様体を数値的に構成および continuation する方法論を、もともとの Fenichel の法双曲不変多様体のアイデアに沿って、提案している [15, 16]。Fenichel の法双曲不変多様体構成の基本的アイデアは、法双曲不変多様体が存在すれば、それを固定点に持つような写像を考え、その写像の固定点として法双曲不変多様体を構成するというものだが、その写像が縮小写像になる条件が、不変多様体の法双曲性である。写像が縮小写像であれば、その写像は固定点を一つしか持たず、アルゴリズムの収束性も保証されている。よって、不変多様体が法双曲的である限りこの構成のアイデアは有効であるが、法双曲性が破れる領域ではどうなるのか不明である。実際に、Broer らは、そのような領域では数値的にはアルゴリズムが不安定となることを報告している。

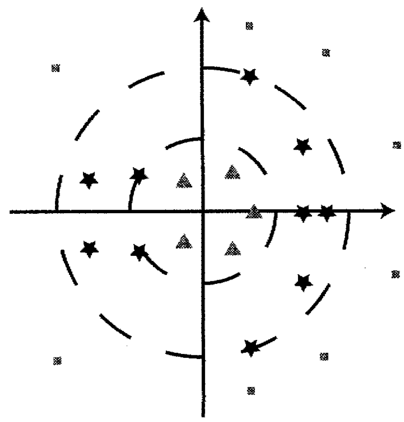

Figure 3: M が法双曲的である場合での複素平面上における微分 $D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ の固有値の分布の概念図。星で示すのが $T_{\mathbf{p}_0}M$ に属する固有ベクトルの固有値、四角で示すのが、$NE^u_{\mathbf{p}_0}$ に属する固有ベクトルの固有値、三角で示すのが $NE^s_{\mathbf{p}_0}$ の固有値。二つの点線で示す円は、それぞれ、半径 μ_-（内側）および μ_+（外側）の円を示す。

なくとも、あるパラメータのもと、その法双曲不変多様体にのっている不安定周期軌道を捕まえてきて、その不安定周期軌道を continuation して、条件 1、2 が成り立っているかどうかをチェックすることで、その不安定周期軌道周りで法双曲不変多様体の局所的な構造をモニターすることができる。特に、あるパラメータ以上で、条件 1 または 2 のいずれかが破れている場合には、そのパラメータ以上では法双曲不変多様体は存在しないことが結論できる。

条件 1 および 2 が成り立っているときには、微分 $D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ の固有ベクトルは、$T_{\mathbf{p}_0}M$、$NE^u_{\mathbf{p}_0}$ ないしは $NE^s_{\mathbf{p}_0}$ のいずれかに入っており、その固有値は Fig. 3 のようになっている。

条件 1 および 2 の破れ方は、一般の場合には、Fig. 4 の 6 パターンに分類できる。破れ方のパターンとしては、パラメータ空間の中で、余次元 1 でおこるものだけを分類している。系が特殊な対称性を持たない限り、余次元 1 でおこるものがもっとも普遍的に起こると期待されるからである。複素平面上で固有値は必ず実軸に対して重複度も込みで対称に分布する。なぜなら微分 $D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ を実数の基底で表現したときの表現行列は実数値行列となるからである。まず、Fig. 4 (1) は、$NE^u_{\mathbf{p}_0}$ に属する複素固有値ペアの絶対値が、$T_{\mathbf{p}_0}M$ に属する別の複素固有値ペアの絶対値よりも小さくなる場合である。この場合には、条件 2 が破れており、この周期軌道においては法双曲性は破れている。同様にして、Fig. 4 (2) は、$NE^s_{\mathbf{p}_0}$ に属する複素固有値ペアの絶対値が、$T_{\mathbf{p}_0}M$ に属する別の複素固有値ペアの絶対値よりも大きくなる場合である。この場合にも、同様にして、条件 2 が破れている。Fig. 4 (3-6) は、実軸上で、$T_{\mathbf{p}_0}M$ に対応する固有値のひとつが $NE^u_{\mathbf{p}_0}$ あるいは $NE^s_{\mathbf{p}_0}$ の固有値に衝突する場合である。Fig. 4 (3) と (5) の違いは、$NE^u_{\mathbf{p}_0}$ と $T_{\mathbf{p}_0}M$ に属する固有値のひとつが衝突した後、新たな複素ペアになる (3) 場合と、実固有値に分裂 (5) する場合である。(4) と (6) は、$T_{\mathbf{p}_0}M$ の固有値と衝突する固有値が、$NE^u_{\mathbf{p}_0}$ ではなくて、$NE^s_{\mathbf{p}_0}$ に属する固有値の場合である。Fig. 4 (1) と (2) は、固有値の衝突を伴わないので、破れた後も、$D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ 不変な固有空間の分解は残っている。つまり、$\tilde{E}_{\mathbf{p}_0}$ を $T_{\mathbf{p}_0}M$ の不変空間の条件 2 が破れる領域まで continuation したものであるとしたとき、$\tilde{E}_{\mathbf{p}_0} \oplus NE^u_{\mathbf{p}_0} \oplus NE^s_{\mathbf{p}_0}$ が、$D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ 不変な $T_{\mathbf{p}_0}\mathcal{M}$ の分解

となっている。ただ、この場合には、元の不変多様体 M はこの不安定周期軌道上において一般的には微分不可能点ができてしまい、滑らかさが失われてしまう [1]。他の Fig. 4 (3)-(6) では、固有値の衝突を伴うので、$D\phi^T_{\mathbf{p}_0}$ 不変な $T_{\mathbf{p}_0}\mathcal{M}$ の分解自体も失われてしまう。よって、Fig. 4 (3)-(6) の場合には、条件 1 と 2 が同時に破れる。

3.2 Hamilton 系の場合との比較

Hamilton 系の場合には、Symplectic 性より固有値の動き方に制限がつく [14] ために、上の一般力学系のときと比べて、余次元 1 で起こる破れ方のパターンが異なる。例えば、Hamilton 系においては、Symplectic 性により Fig. 4 (1) と (2)、(3) と (4)、(5) と (6) は常に同時に起こり、個別に起こることはありえない。また、Hamilton 系の場合には、複素平面上で単位円周上にある複素固有値のペアは、実軸上でペアが衝突するか、あるいは、他の単位円周上の複素固有値のペアと衝突しない限りは、単位円周上を抜け出すことができない。一方で、一般の力学系は Symplecitc 性を持たないので、そのような制限は無い。それらのことから、一般力学系の場合と Hamilton 系では分類がかなり違ったものになる。3 自由度 Hamilton 系の場合の分類に関しては、[6] を参照されたい。

4 展望と課題

より大域的な法双曲不変多様体の崩壊をとらえるためには、不安定周期軌道だけではなく、その不安定周期軌道間を繋ぐホモクリニック/ヘテロクリニック軌道まわりの法双曲不変多様体の崩壊の様子を理解する必要がある。我々は、不安定周期軌道に対しておこなった同様な考察をホモクリニック/ヘテロクリニック軌道に対しても行うことによって、「ホモクリニック/ヘテロクリニック軌道周りで、法双曲不変多様体が崩壊している」ということの十分条件を提案した [6]。この十分条件は、ホモクリニック/ヘテロクリニック軌道の continuation さえできれば、簡単にチェックできる。この十分条件を、あるパラメータにおいて法双曲不変多様体にのっているホモクリニック/ヘテロクリニック軌道に沿って確認することで、あるパラメータにおいてその条件が成り立たない場合に、そのパラメータ以上ではそのホモクリニック/ヘテロクリニック軌道周りでは法双曲不変多様体が存在しないことを結論することができる。この具体的な応用例に関しては、[6] を参照されたい。文献 [6] で、あるひとつの法双曲不変多様体上の 6 つのホモクリニック軌道上でこの条件の破れを確認したところ、その 6 つのホモクリニック軌道はそれぞれ法双曲不変多様体上の異なる領域を通っているのにかかわらず、その条件が破れるパラメータは 6 つのホモクリニック軌道上でほとんど一致していた。一方で、短い不安定周期軌道上では、先の条件 1 あるいは 2 が破れるパラメータの値あるいはどのように破れるかは、着目する不安定周期軌道に依存してまちまちであった。ホモクリニック軌道の近くには、いくらでもそれをよく近似するような周期の長い不安定周期軌道が存在することが知られているので、以上のことは

1. 法双曲不変多様体は、短い不安定周期軌道上では、系の局所的な相空間の構造を反映して、個別的に崩壊する。

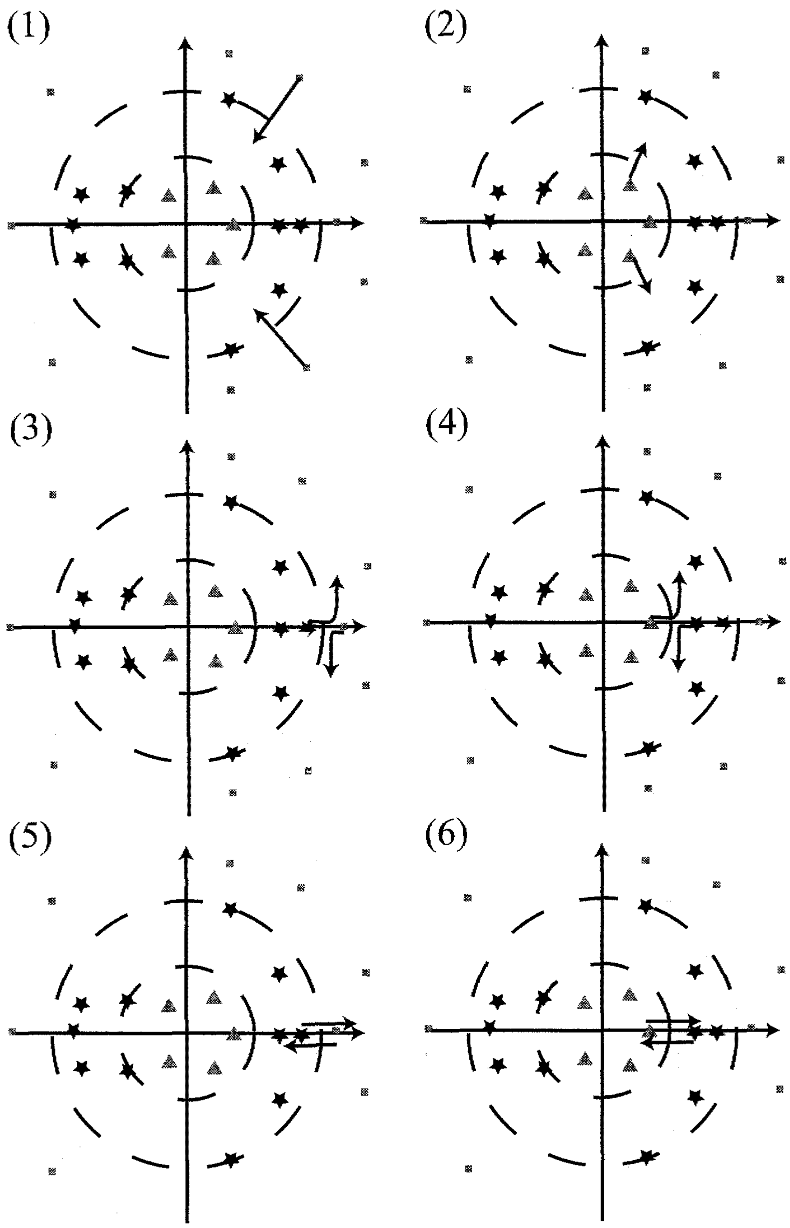

Figure 4: 条件 1 および 2 が破れる際の破れ方の分類。特に、破れ方のうちで、パラメータ空間で余次元 1 で起こる破れ方に限定している。(1) $T_{\mathbf{p}_0}M$ に属する複素固有値のペアの絶対値の最大値が $NE^u_{\mathbf{p}_0}$ に属する別の複素固有値のペアのひとつの絶対値よりも大きくなる。(2) $T_{\mathbf{p}_0}M$ に属する複素固有値のペアの絶対値の最小値が $NE^s_{\mathbf{p}_0}$ に属する別の複素固有値のペアのひとつの絶対値よりも小さくなる。(3) $T_{\mathbf{p}_0}M$ の実固有値が $NE^u_{\mathbf{p}_0}$ の実固有値と衝突して、複素固有値のペアになる。(4) $T_{\mathbf{p}_0}M$ の実固有値が $NE^u_{\mathbf{p}_0}$ の実固有値と衝突して、実固有値のペアになる。(5) $T_{\mathbf{p}_0}M$ の実固有値が $NE^s_{\mathbf{p}_0}$ の実固有値と衝突して、複素固有値のペアになる。(6) $T_{\mathbf{p}_0}M$ の実固有値が $NE^s_{\mathbf{p}_0}$ の実固有値と衝突して、実固有値のペアになる。

2. 長い不安定周期軌道上における法双曲不変多様体崩壊メカニズムは、ある種の共通した性質（ユニバーサリティ）を持っている。

ということを示唆している。

また、法双曲不変多様体には、不安定周期軌道やそれらを繋ぐホモクリニック/ヘテロクリニック軌道だけではなく、それ以外の準周期的な軌道等も含まれていると考えられる。これらの軌道に対しては、単純な分岐解析をすることが難しく、これらの軌道の周辺でどのように崩壊するかは、単純な双曲的トーラスの場合でも理解されつくされているとはいいがたい。しかし、この理解なくしては法双曲不変多様体の崩壊の全貌を解明し尽くすのは難しいと考えられる。また、軌道レベルではなく、より大域的なトポロジーがどう変化するのかということも重要であると考えられる [17]。近年盛んに用いられている set-oriented とよばれるトポロジーの手法 [18] を用いると、法双曲不変多様体が崩壊する近傍のパラメータにおいて、法双曲不変多様体の大域的なトポロジーがどのように変化するのかを解明できるかもしれないと考えられるが、今後の課題としたい。

法双曲不変多様体の大域的な崩壊のシナリオとしては、

1. 法双曲不変多様体の法線方向の双曲性が弱くなり、他の安定トーラスの族と crisis を経由して崩壊、または、消失する。

2. 法双曲不変多様体の法線方向の双曲性は保たれているが、接線方向の双曲性が法線方向の双曲性を上回ることで、微分不可能点を生じ、崩壊する。

という 2 パターンがあると考えている。しかし、これらは二者択一というわけではなく、この二つがひとつの法双曲不変多様体の異なる場所で同時進行的に起こることも考えられる。

さらに、法双曲不変多様体の崩壊が、その周辺のベクトル場の流れにどのように影響するのか、ということも重要な問題であると考えられるが、まだよくわかっていない。特に、法双曲不変多様体から伸びている安定/不安定多様体は、法双曲不変多様体近傍における流れの構造の骨格をなしているものと考えれるので、法双曲不変多様体の崩壊がその近傍のベクトル場の流れにどのような影響をもたらすのかを考えるためには、法双曲不変多様体の崩壊に伴い、そこから出ている安定/不安定多様体の構造がどのように変化するのかを問うことが鍵になると考えられる。その構造がどうなるかは、上のシナリオの 1 または 2 のいずれのシナリオを経由するかによって変わりうる。シナリオ 1 の場合には、崩壊後は不変多様体自体も消失してしまうと考えられるが、それが消失してしまうパラメータ近傍では、不変ではないがいくらでもその近傍でゆっくり滞留する領域が存在しうる。そのような現象は、西浦ら [19] によって概念化され「余韻」と呼ばれている。一方で、シナリオ 2 の場合には、法双曲不変多様体は滑らかさが失われていき、残骸として残る hyperbolic set からなるフラクタル集合になるのではないかと考えられる。著者の一人、戸田は、このような構造を法双曲不変多様体と対比して、法双曲不変集合 (Normally Hyperbolic Invariant Set, NHIS) と名づけている。このようなフラクタル集合から伸びる安定/不安定多様体の余次元は、1 よりも小さくなると考えられ、もはや、相空間全体を二つに区切ることができなくなると考

えられる[13]。そのことは、近傍のベクトル場の流れに何らかの影響をもたらすと期待されているが、より詳細な研究に関しては、今後の課題としたい。

法双曲不変多様体の崩壊プロセスが、次元とともにどう変化していくのかも、高次元力学系を理解するうえで重要であると考えられる。例えば、法双曲不変多様体の次元が 3 以上になると、法双曲不変多様体内部の動力学もカオスになりうる。法双曲不変多様体内部でのカオスの存在によって、法双曲不変多様体内部の動力学の不安定性がもたらされ、その不安定性が法双曲不変多様体の法線方向の不安定性を越えることで、法双曲性が破れ、不変多様体が崩壊するというシナリオが可能となる。このシナリオは李ら [22] によってはじめに提案された。特に、Hamilton 系の場合には、法双曲不変多様体の次元が 5、自由度に換算すると 3 自由度以上になると、法双曲不変多様体内部でアーノルド拡散が可能となる [23, 24]。法双曲不変多様体の内部自由度が 2 以下の場合には、KAM トーラスが存在する場合には、KAM トーラスは余次元 1 の障壁となるために、法双曲不変多様体の崩壊のメカニズムはその障壁に区切られた領域ごとに個別の崩壊をするのではないかと期待されるが、内部自由度が 3 以上の場合には、KAM トーラスは余次元 2 以上になるために、法双曲不変多様体内部でも大域的なアーノルド拡散が可能となる。この結果、高次元では、法双曲不変多様体の崩壊はより大域的なものになるのではないかと期待される。

5 Acknowledgement

この一連の研究は日本学術振興会基盤研究 (B)、文部科学省「物質・デバイス領域共同研究拠点」、岡崎国立共同研究機構計算科学センター、特定領域「実在系の分子理論」、日本学術振興会若手研究 (B)（寺本）、北海道大学総長室事業推進経費（寺本）、奈良女子大学学長特別経費（戸田）などの援助を受けています。この場を借りて感謝いたします。

[13]近年、3 次元写像において、hetero-dimensional cycle と呼ばれる異なるランクをもつ二つの不安定固定点が互いの安定/不安定多様体の交差でつながっている場合に、Smale horseshoe とは質的に異なる Blender と呼ばれる構造を持つことが発見された [20]。この hetero-dimensional cycle を構成する一方の安定/不安定多様体は次元が 1 で、3 次元空間中横断的交差はできない (1 安定多様体の次元 + 1 不安定多様体の次元 < 3 力学系が定義されている空間の次元であるから。)。よって、交差があったとしても、微小な摂動に対して、その交差はとれてしまう。しかしながら、それらの安定/不安定多様体は、複雑に絡み合っており、摂動によってひとつの交差がとれてしまっても別の交差が新たにでき、摂動を加えても少なくとも一箇所では交差しているということが最近証明された [21]。つまり、摂動に対して、以上のような hetero-dimensional cycle はロバストに存在する。そのロバストさを支えているのが、Blender という構造である。このように、次元が低い (余次元が大きい) 安定/不安定多様体も複雑に絡み合うことにより、その実効的な次元を稼ぐことができるのかも知れない。

References

[1] N. Fenichel. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indi. Univ. Math. J.*, 21:193, 1971.

[2] R. Mañé. Persistent manifolds are normally hyperbolic. *Trans Amer Math Soc*, 246:261, 1978.

[3] T. Konishi. Relaxation and diffusion in hamiltonian systems with many degrees of freedom. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 98:19, 1989.

[4] H. Teramoto, M. Toda, and T. Komatsuzaki. A dynamical switching of a reaction coordinate to carry the system through to a different product state at high energies. *Phys. Rev. Lett.*, 106:054101, 2011.

[5] T. Uzer, C. Jaffe, J. Palacián, P. Yanguas, and S. Wiggins. The geometry of reaction dynamics. *Nonlinearity*, 15:957, 2002.

[6] H. Teramoto, M. Toda, and T. Komatsuzaki. Breakdown mechanism of normally hyperbolic invariant manifolds in terms of unstable periodic orbits and homoclinic/heteroclinic orbits in hamiltonian systems. in preparation.

[7] D. G. Yang. Breakdown of normal hyperbolicity for a family of invariant manifolds with generalized lyapunov-type numbers uniformly bounded below their critical values. *arXiv0912.5419v1*, 2009.

[8] K. Kaneko. Fractalization of torus. *Prog. Theor. Phys.*, 71:1112, 1984.

[9] K. Kaneko. *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems*. World Scientific, 1986.

[10] G. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, and J. A. Yorke. Strange attractors that are not chaotic. *Physica D*, 13:261, 1984.

[11] T. Nishikawa and K. Kaneko. Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor. *Phys. Rev. E*, 54:6114, 1996.

[12] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, 20:167, 1971.

[13] S. Newhouse, D. Ruelle, and F. Takens. Occurrence of strange axiom a attractors near quasiperiodic flows on $t^m, m \geq 3$. *Commun. Math. Phys.*, 64:35, 1978.

[14] K. R. Meyer, G. R. Hall, and D. Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem.* Springer, New York, second edition edition, 2009.

[15] H. W. Broer, H. M. Osinga, and G. Begter. Algorithms for computing normally hyperbolic invariant manifolds. *Z. Angew. Math. Phys.*, 48:480, 1997.

[16] H. W. Broer, A. Hagen, and G. Begter. Numerical continuation of normally hyperbolic invariant manifolds. *Nonlinearity*, 20:1499, 2007.

[17] A. Floar. A topological persistence theorem for normally hyperbolic manifolds via the conley index. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 321:647, 1990.

[18] Z. Arai, H. Kokubu, and P. Pilarczyk. Recent development in rigorous computational methods in dynamical systems. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, 26:393, 2009.

[19] Y. Nishiura. *Far-from-equilibrium dynamics.* Translations of Mathematical Monograph. Springer, American Mathematical Society, 2002.

[20] L.J. Diaz C. Bonatti and M. Viana. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*, volume 102 of *Mathematical Physics.* Springer, New York, 2005.

[21] C. Bonatti, L. J. Diaz, and S. Kiriki. Stabilization of heterodimensional cycles. *arXiv:1104.0980v1*, 2011.

[22] C. B. Li, A. Shojiguchi, M. Toda, and T. Komatsuzaki. Definability of no-return transition states in high energy regime above threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 97:028302, 2006.

[23] V. Arnold. Instabilities in dynamical systems with several degrees of freedom. *Sov. Math. Dokl.*, 5:581, 1964.

[24] B. V. Chilikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, 52:263, 1979.