

## 音響問題における差分法を用いたインパルス応答解析予測手法の検討 Impulse Response Prediction for Acoustic Problem by FDM

鶴秀生 (日東紡音響エンジニアリング), 岩津玲磨 (東京電機大学)  
TSURU, Hideo (Nittobo Acoustic Engineering Co. Ltd.)  
IWATSU, Reima (Tokyo Denki University)

**ABSTRACT:** The impulse response measurement is often carried out to characterize the room acoustics or noise propagation. If the impulse response can be predicted by numerical calculation accurately, that can help us to consider acoustic designs. The finite difference method in time domain is often used in wave acoustic simulations. The accuracy of this method is improved by the a compact finite difference and the symplectic integration technique. The source term in the simulation is carefully investigated also. The frequency spectrum and the directivity is controlled by the pair point sources adjusting their phases and amplitudes.

### 1 はじめに

室内音響特性の把握や騒音伝搬の経路の計測に、インパルス応答の測定結果が利用されるようになってきた。その計測において周波数領域で信号の設計を行い、逆フーリエ変換を用いて時間領域の信号 (TSP) を生成する手法の研究がなされてきた<sup>1,2)</sup>。一方、計算機の能力の向上により、波動音響理論による数値解析が実施されるようになってきた。そこで今回は、時間領域差分法で、TSP 信号を音源として用いたシミュレーション手法の検討を行う。効率的な解析を行うために、差分法の精度を向上する手法の紹介も行う。まず空間差分効率を上げるために、比較的大きな格子間隔でも精度よく微分値を近似できる最適化コンパクト差分を適用した<sup>3-5)</sup>。また時間積分の精度向上のために Symplectic 積分法の適用を試みた。帯域制限された TSP 信号を音源として用い、インパルス応答を予測する計算手法を考慮した。周波数に対する格子サイズと音源指向性の関係を、境界要素法などの結果を用いて議論した。数値分散が音圧分布やインパルス応答の予測結果へ与える影響について調べた。また点音源の対の位相と振幅を調整することで、指向性音源を模擬する手法の検討を行った。

### 2 差分法の基礎方程式と差分法の最適化

音波の伝搬を考える場合、圧力変動  $p$  と速度ベクトル  $\mathbf{v}$  を連立させる方法が差分法では一般的である。空気吸収その他の影響を無視した、音波伝搬の基礎方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho_0 c^2 Q \quad (1)$$

となる<sup>6)</sup>。ここで $Q$ は体積速度、 $\rho_0$ は平均密度、 $c$ は音速である。この微分方程式は単純であるが、そのことは必ずしも数値計算が簡単なことを意味しているわけではない。なぜならわずかな誤差が減衰せずに増大する恐れがあるからである。なお、これらの方程式を差分化する場合、Fig.1のようなスタガード格子上で計算されることが多い。

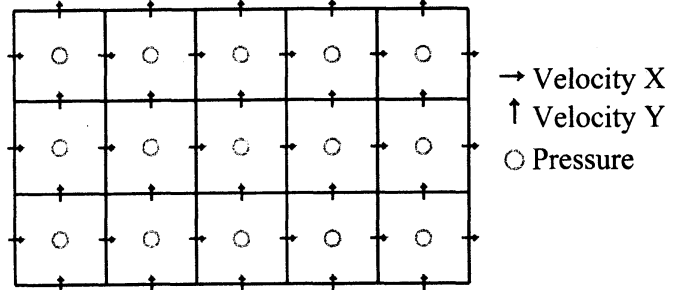


Fig.1 Staggered Grid

等間隔格子上的コンパクト差分についての最適化手法を考えることにする<sup>4,5)</sup>。コンパクト差分は微分値を近接する格子点の値と連立し、差分近似を行う手法である。格子間隔 $h$ のスタガード格子上で連立一次方程式の係数が3重対角行列となる

$$\alpha f'_{i+1} + f'_i + \alpha f'_{i-1} = b \frac{f_{i+3/2} - f_{i-3/2}}{3h} + a \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{h} + e \quad (2)$$

のコンパクト差分式を考える。ここで $\alpha$ はパラメータ、 $e$ は誤差項で、各係数間に

$$a = \frac{3}{8}(3 - 2\alpha), b = \frac{22\alpha - 1}{8}, e = \frac{9 - 62\alpha}{1920} h^4 f^{(5)} \quad (3)$$

の関係がある。 $\alpha = 1/22$ の時は係数 $b$ が0になるため、差分式は最も少ない格子点で表現でき、複雑な形状への適用に有効である。

差分法において波動伝搬を解析するには、空間微分を求めた後に時間積分を行うことによって時間発展を求めていくことになる。したがって時間方向の積分精度を改良することが課題となる。長時間の積分の精度向上に有効な Symplectic 積分法を適用した。微分方程式がハミルトン形式の構造を持っているときは、保存量を保存する積分手法として Symplectic 積分法が有効である<sup>7-9)</sup>。Symplectic 積分はこの数十年の間、粒子系のダイナミクスや天体力学の分野で発展してきた。Symplectic 積分の理論は主に常微分方程式の分野で発展してきたが、最近、偏微分方程式の分野への拡張されるようになった。ここでは最初に Symplectic 積分手法の紹介を行う。次に音波伝搬を記述する偏微分方程式に適用することを試みた。その結果、長時間積分の精度を飛躍的に向上させることができた。

それでは Symplectic 積分法の概要を示す。もし変数 $p$ と $q$ の時間発展を示す常微分方程式が次のような形式で表現されるならば

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= f(q), \\ \frac{dq}{dt} &= g(p) \end{aligned} \quad (4)$$

時間間隔 $\tau$ の時間発展を、 $m$ 個の中間的ステップを用いて実行する。その $i$ 番目の中間ステージにおいて係数 $b_i, \tilde{b}_i$ を用いて

$$\begin{aligned} P_i &= P_{i-1} + \tau b_i f(Q_{i-1}), \\ Q_i &= Q_{i-1} + \tau \tilde{b}_i g(P_i), \end{aligned} \quad (5)$$

の式を用いて補助的な値を計算をする。ここで

$$P_0 = p(t), Q_0 = q(t), P_m = p(t + \tau), Q_m = q(t + \tau) \quad (6)$$

として変数  $p, q$  の値を更新する。音波の伝搬において  $p$  と  $q$  はそれぞれ音圧と速度ベクトル  $\boldsymbol{v}$  とみなすことができる。

なお、 $f(q)$  と  $g(p)$  はそれぞれ、速度ベクトル  $\boldsymbol{v}$  と音圧  $p$  の最適化コンパクト差分等を用いて表現できる。3段階の計算法において、係数  $b_i, \tilde{b}_i$  は Ruth 法<sup>7)</sup> によると有理数の係数となる。最近岩津によって、精度の最適化を行うための有理数でない係数が数値的に求められた<sup>10)</sup>。その値を Table 1. に示す。

Table 1. Coefficients for new formula.

$b_1$	0.260311692419906
$b_2$	1.094142798316745
$b_3$	-0.354454490736651
$\tilde{b}_1$	0.630847692986669
$\tilde{b}_2$	-0.094142798316742
$\tilde{b}_3$	0.463295105330073

これらの手法を適用することで、精度良い数値解析が可能になる。

### 3 差分法での点音源の考察

差分法の計算において体積速度の項  $Q(t)$  を音源として取り扱う場合、音圧の時間積分を2段階にして

$$p'(t) = p(t) - \Delta t \rho_0 c^2 \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad (7)$$

$$p(t + \Delta t) = p'(t) + \Delta t \rho_0 c^2 Q(t). \quad (8)$$

取り扱うことできる。こうすることで音源項での音波の不必要な数値的な反射が起こらない。格子の1セルのみに体積速度を与えて無指向性点音源を模擬すると、セルを囲む面要素に各時刻ごとに一樣な速度ベクトルを与えることになる。波長に比較して格子サイズ大きいと、無指向性音源が実現されない可能性がある。そこで周波数と格子サイズの関係が音源指向性にどのような影響を与えるか境界要素法を用いて調べた。境界要素法においては差分法の格子サイズに対応して、 $0.1 \times 0.1 \times 0.1$  m の立方体を考えて、各面の表面に一定の振動境界条件を与えた。境界要素は2辺の長さが  $1/70$  m の直角2等辺3角形の一定要素を用いて計算を行った。

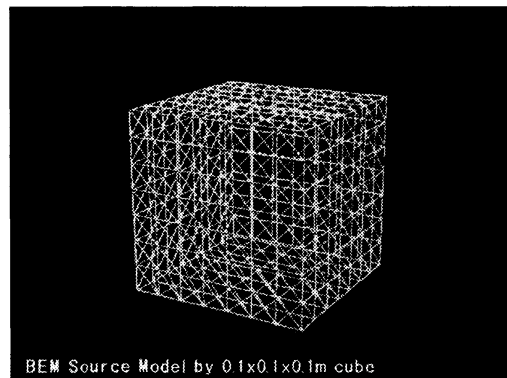


Fig.2 Sound source model in BEM. The vibrating velocity boundary condition is set at each surface of the cube.

様々な周波数における音源周辺の音圧分布のBEMによる計算結果を Fig.3 に示す。

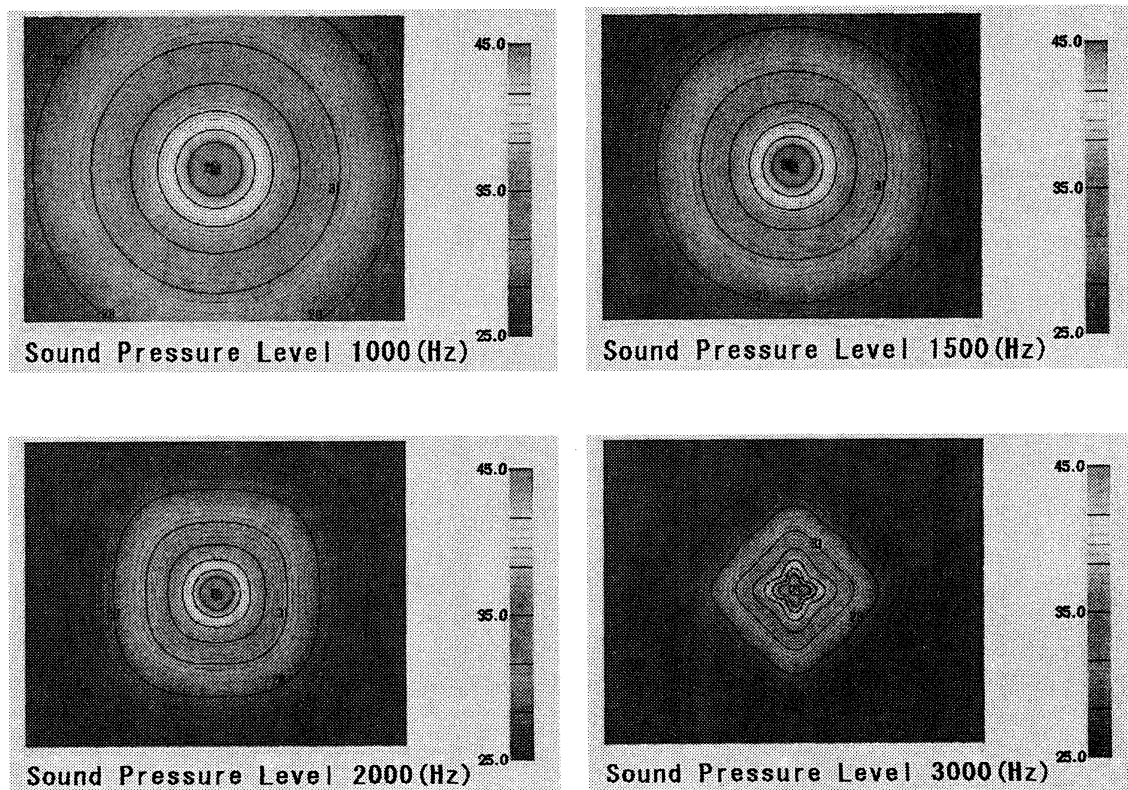


Fig.3 Sound pressure distributions by BEM.

差分法の格子サイズが波長の0.4以上になるころから、無指向性の仮定が満たされなくなる。一般的な差分法解析では波長に対してもう少し小さな格子サイズを用いるので、無指向性点音源は十分模擬できる。

#### 4 TSPパルスの差分法への適用

まず最初に周波数領域での信号  $H(n)$  を考える  $N = 2^l$  ( $l$  は整数) として

$$H(n) = \begin{cases} \exp(i4m\pi n^2/N^2), & 0 \leq n \leq N/2 \\ H(N-n), & N/2 < n \leq N \end{cases} \quad (9)$$

ここで  $m$  は整数である。逆フーリエ変換を行い時間軸で円状シフトを行うことで時間軸上でのスイープ信号を得ることができる。インパルス信号は周波数軸上で以下の形をした信号と

$$H^{-1}(n) = \begin{cases} \exp(-i4m\pi n^2/N^2), & 0 \leq n \leq N/2 \\ H^{-1}(N-k), & N/2 < n \leq N \end{cases} \quad (10)$$

畳み込みを行うことで得られる。現実の測定においてはスピーカなどを保護するために周波数領域でフィルターをかけた信号を用いることが多い。そこで100Hz以下と8000Hz以下の成分が入らないようにカットしたTSP信号とその信号と式(10)で示された信号との

畳み込みを行ったものを Fig.4 に示す。畳み込み後の信号はインパルスの形状から若干広がりを持っている。

3次元空間で無指向性点音源を差分法に適用するために、呼吸球を考えることにする。原点に存在する半径  $a$  の球が法線速度  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$  のように角速度  $\omega$  で振動している状況を考えると動径方向の座標  $r$  における速度ポテンシャル  $\phi(r, t)$  は

$$\phi(r, t) = -\frac{a^2 U_0 \exp(i[\omega t - k(r - a)])}{r(1 + ika)}, \quad (11)$$

となる<sup>11)</sup>。音圧と速度ポテンシャルの関係をを用いると

$$p(r, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -i\rho_0 \omega \phi(r, t). \quad (12)$$

となる。式(11)中の半径  $a$  を等価半径  $a_e$  で置き換える必要がある。音圧の更新はセル中央で実施されるので、セル中央に存在する無限小の呼吸球の作用とみなすことができる。実際、数値計算で得られた周波数特性からもその考えかたは正当化される。よって周波数ごとに式(9)の  $H(n)$  に重み係数  $w(\omega)$

$$w(\omega) = \frac{1}{i\omega} \quad (13)$$

を掛けた後に、帯域制限をしてフーリエ逆変換を行って時間領域の体積速度信号を作成するとよい。得られた信号の時間波形は Fig.5 のようになる。この時間波形を体積速度音源として与えて、差分法による数値計算を行えばフラットな周波数特性を持つ音源に関するの応答音圧が効果的に予測できる。

次に2次元空間での解析手法を考える。最初に角周波数  $\omega$  で半径方向に速度  $u_0$  で振動している半径  $a$  の呼吸円筒を考える<sup>12)</sup>。そのときの半径  $r$  の地点での半径方向の速度  $u_r$  は

$$u_r(r) = -AkH_1^{(2)}(kr)e^{i\omega t} \quad (14)$$

となる。ここで  $A = -u_0/(kH_1^{(2)}(ka))$  である。またそのときの音圧  $p$  は

$$p(r) = \frac{i\rho_0 c u_0 H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)} e^{i\omega t} \quad (15)$$

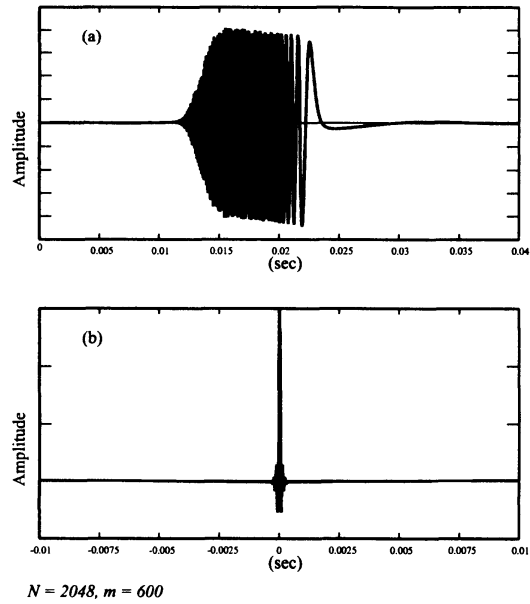


Fig.4 Time representations of (a) band limited input signal and linear convolution with the time reversed signal.

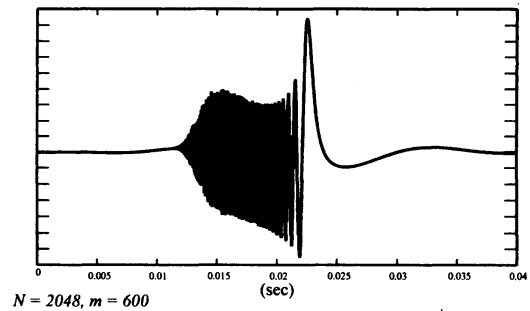


Fig.5 Volume velocity for band limited time stretched signal

となる。音圧でフラットな周波数特性を得るために、2次元体積速度と音源半径の関係  $2\pi a u_r(a) = Q(t)$  と Hankel 関数の原点付近の振る舞い

$$H_1^{(2)}(ka) \approx \frac{2i}{\pi ka} \quad (16)$$

を利用する。係数  $A$  は半径  $0$  の極限で  $Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}$  と  $A = iQ_0/4$  の関係になることがわかる。測定点が十分遠方ならば Hankel 関数の漸近形

$$H_0^{(2)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} \quad (17)$$

を考慮して、重み関数を考える必要がある。よって評価点  $r_0$  で平滑な周波数特性を得るには

$$Q_0 = \frac{4}{\rho_0 c k H_0(kr_0)} \quad (18)$$

の重み関数を与えるとよい。およそ波数  $k$  の平方根に反比例することになる。なお円筒波の性質の影響で厳密には周波数特性が距離に依存することになる。

## 5 TSP パルス利用した指向性音源の考察

最初に、無指向性点音源の差分法での実現を確認するために、2次の陽的中心差分と最適化コンパクト差分と Symplectic 積分法を用いた場合の音圧分布の比較を行う。計算格子は 50mm の間隔で  $81 \times 61 \times 25$  とし、周囲に PML 境界条件<sup>13)</sup> を与え自由空間を模擬した。音源は、50Hz から 2000Hz に帯域制限した TSP 信号を計算空間の中央に設定した。時間ステップは陽的中心差分の場合は 0.04ms とし、Symplectic 積分法の場合は 0.08ms とした。各手法での 1500Hz での音圧分布を Fig.6 に示す。

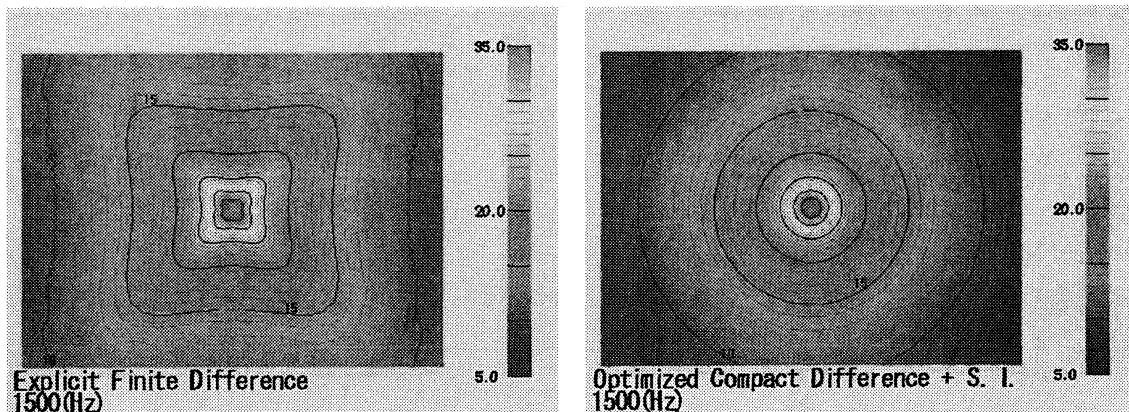
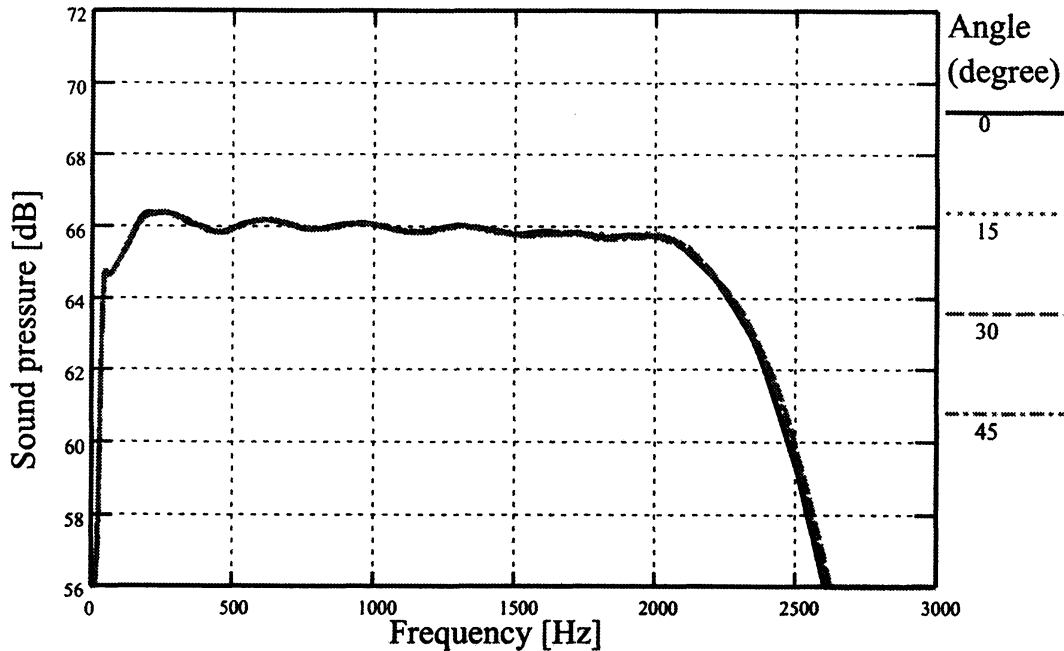


Fig.6 Sound pressure level distribution.

2次の陽的差分では指向性を示すが、最適化コンパクト差分では無指向性の実現されている。音源から 1m の等距離に配置された複数の評価点での最適化手法での周波数特性を Fig.7 に示す。



Optimized Compact Difference + S. I.

Fig.7 Power spectrums at equidistant points.

このように各線が重なり、角度による違いはほとんどわからない。

指向性点音源を実現するために、同様の計算格子上で隣接した二つのセル中央に体積速度を用いて圧力を更新する点音源を与えた。以下、最適化手法を適用してシミュレーションを行って検討したものを示す。最初に音源同士が逆位相で時間遅れが0の場合にシミュレーションで得られた分布を Fig.8 に示す。双指向性音源が実現されていることがわかる。

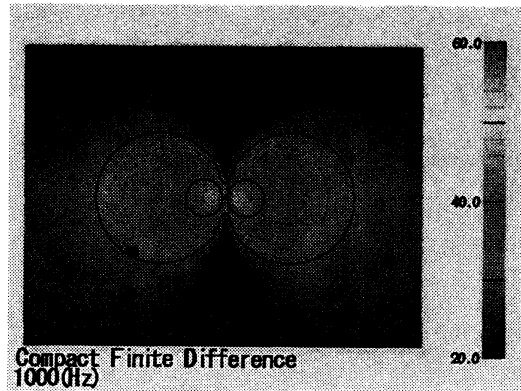


Fig.8 Sound pressure level distribution.

次に音源間の時間遅れを、格子間隔を音速で割った値に設定する。その際、TSP 信号を周波数領域において周波数ごとに、時間遅れに対応した位相をずらして信号を作り、その逆フーリエ変換を実施することで各音源ごとの時間波形を生成する。その音源を用いたシミュレーションによる音圧分布を Fig.9 に示す。

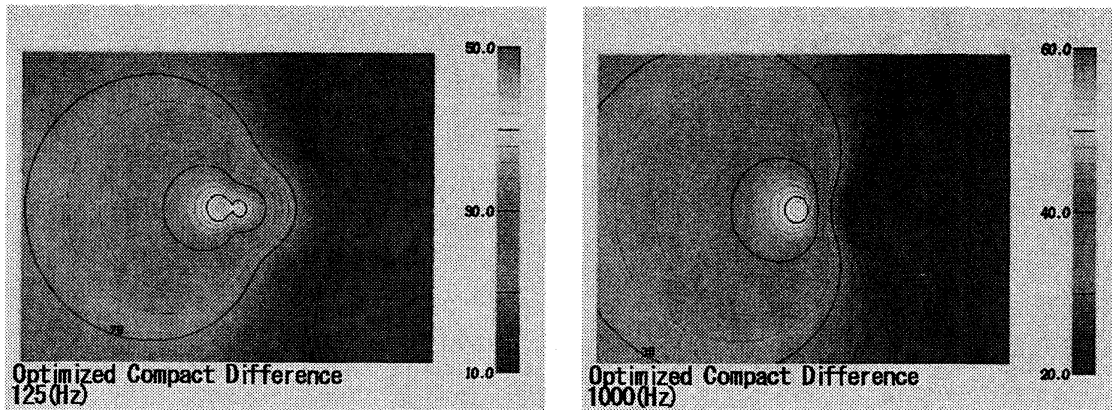


Fig.9 Sound pressure level distribution.

このように各周波数で指向性音源が実現されていることがわかる。このときの周波数ごとの音源ペアの中心から1m点での音圧レベルの角度分布を Fig.10 に示す。

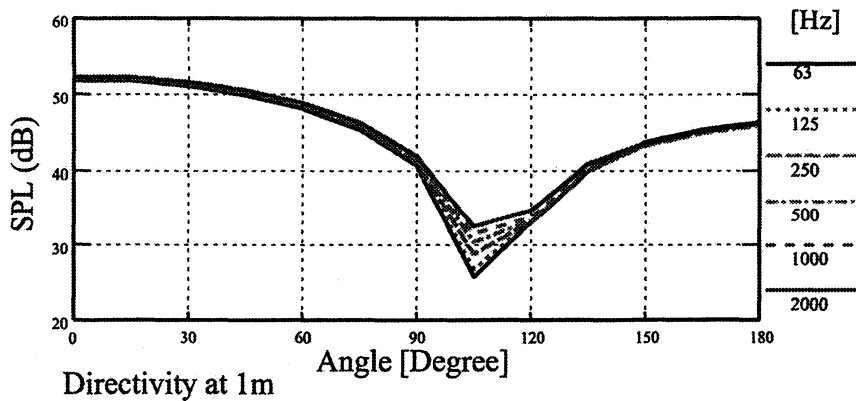


Fig.10 Directivity at 1m.

音源ペアの中心から1m地点では180度がMinimumにならない。このことを改善するために音源間の時間遅れを格子間隔を音速で割った値から得られる周波数ごとの位相遅れをTSP信号に与えさらに、1m地点での指向性を調整するために音源の強度を30と28.5とした。そのときの音圧分布を Fig.11 に示す。

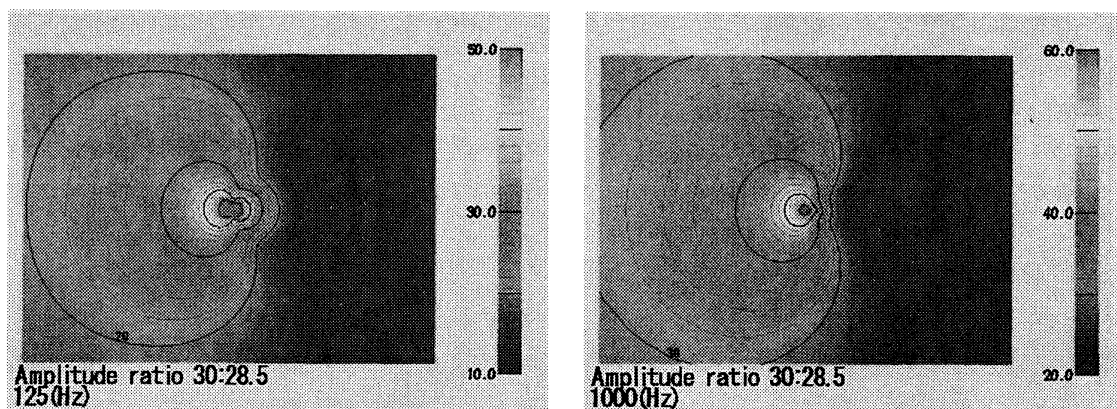


Fig.11 Sound pressure level distribution.

このときの周波数ごとの音源ペアの中心から1m点での音圧レベルの角度分布を Fig.12 に



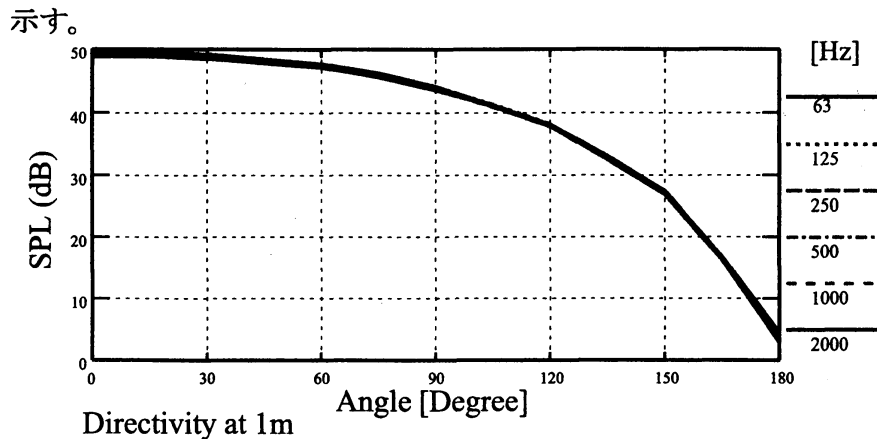


Fig.12 Directivity at 1m

この場合は1m地点で180度がMinimumとなる。このように、位相と強度を調整することで、所望の距離での指向性を実現できることがわかる。

## 6 まとめ

空間差分と時間積分の精度向上手法の紹介を行った。また周波数特性を補正した体積速度を音源として与えることでTSP信号を用いたインパルス応答の測定を差分法で模擬できることを示した。2次元空間でインパルス応答を計算する場合は、周波数の平方根に反比例する重みを音源項に与える必要があることがわかった。また近接したセルに符号の反転した体積速度点音源として与えその音源間の時間遅れと強度比を調整することで、音源の指向性を調整できることが示された。

## 参考文献

- [1] N. Aosima, "Computer-generated pulse signal applied for sound measurement", J. Acoust. Soc. Am. 69 (1981) pp.1484-1488
- [2] Y. Suzuki et al., "An optimum computer-generated pulse signal suitable for the measurement of very long impulse responses", J. Acoust. Soc. Am. 97 (1995) pp.1119-1123
- [3] S. K. Lele, "Compact finite difference scheme with spectral-like resolution", J. of Comp. Phys. 103 (1992) pp.16-42.
- [4] 岩津玲磨、鶴秀生, "時間領域音響計算に用いる compact 差分と多段階積分法の最適化 (複雑流体の数理とシミュレーション)", 数理解析研究所講究録. 1529 (2007) pp. 1-14.
- [5] 岩津玲磨、鶴秀生, "高解像度最適化スキームを用いた時間領域の音響計算", 第21回数値流体力学シンポジウム, 東京 (2007) B2-1.

- [6] L. M. Brekhovskikh and O. A. Godin, *Acoustics of Layered Media II: Point Source and Bounded Beams* (Springer Series on Wave Phenomena), Springer-Verlag, Heidelberg, (1992) pp. 112–116.
- [7] R. D. Ruth, "A canonical integration technique", *IEEE Trans. Nuclear Sci.* NS-30 (1983) pp. 2669–2671.
- [8] H. Yoshida, "Construction of higher order symplectic integrators", *Phys. Lett.* A150, (1990) pp. 262–268.
- [9] I. Saitoh, Y. Suzuki and N. Takahashi, "The symplectic finite difference time domain method", *IEEE Trans. on Mag.* 37 (2001) pp. 3251-3254.
- [10] R. Iwatsu, "Two new solutions to the third-order symplectic integral method", *Phys. Lett.* (2009) to be published.
- [11] S. Temkin, *Elements of Acoustics*, Acoust. Soc. Am., New York, 2001
- [12] D.T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, John Wiley and Sons, New York, 2000
- [13] J. Berenger, "A perfectly matched layer for absorption of electro magnetic waves", *J. Comput. Phys.* 114 (1994) pp. 185–200.