

## 固体接触界面および損傷固体の非線形超音波伝搬特性 Nonlinear Ultrasonic Properties of Contacting Interfaces and Damaged Solids

京都大学 大学院工学研究科 琵琶 志朗 (Shiro BIWA)  
Graduate School of Engineering, Kyoto University

### 1. はじめに

各種の機械システムでは固体部材同士の接触状態がその機能・信頼性に大きな影響を及ぼすため、接触状態をモニタできる方法として超音波計測に関心が集まっている<sup>(1)</sup>。一方、超音波は材料・構造中の欠陥評価にも用いられるが、き裂状欠陥の超音波評価では、負荷や残留応力によってき裂面が閉口（部分接触）している場合に明瞭なエコーが得られないことが問題となっている<sup>(2)</sup>。また、複合材料やコーティング等の異種材料界面に生じるはく離損傷の非破壊評価でも同様の問題が指摘されている。

このような界面はすべて、部分接触による開閉口挙動に起因して巨視的に非線形な力学特性を示す。これらの界面に比較的大振幅の超音波を入射した場合、非線形性により、完全接合状態では見られない特徴的な波形スペクトル（例えば高調波の発生）が計測信号に観察される<sup>(3,4)</sup>。これに着目することによって、従来の線形超音波計測手法を高度化もしくは補完する新しい非破壊評価の可能性が拓かれることが期待されている。しかしながら、非線形超音波効果の原因となる微視的レベルでの接触挙動と、巨視的レベルでの弾性波動論の特徴との関係は十分に解明されているとは言い難く、これを理論的、実験的に明らかにすることが望まれている。

筆者らは、接触・弱結合界面に起因する非線形超音波効果を定量的に明らかにするため、接触界面に対する非線形界面モデルの構築と、それに基づく非線形超音波特性の理論的、実験的研究を行っている。以下では、接触界面に有限振幅弾性波を入射した際の高調波発生の理論解析と実験的検討、固体接触条件下にある板を伝搬する曲げ波の Mindlin 理論によるモデル化と計算結果、損傷を有する材料の応力-ひずみ非線形性による非線形超音波特性の理論的考察について紹介する。

### 2. 接触界面への超音波垂直入射による高調波発生の解析

#### 2.1 定式化

接触界面や弱結合界面に 10nm 程度のオーダーの振幅を持つバースト波超音波を入射すると、入射波周波数の整数倍の周波数を有する高調波（特に二次高調波）が発生することが多くの研究で報告されているが、その発生メカニズムは必ずしも十分に明らかにされていない。そこで、以下では、接触をモデル化した非線形界面における垂直入射調和波の一次元透過解析を行い、二次高調波の振幅を摂動解析により導出する<sup>(5)</sup>。

図 1 に模式的に示すように、固体表面同士の接触では、微視的な突起の分布が接触負荷を支えている。ここで両表面の基準高さの間の距離を、接触界面の空隙幅  $h$  とする。表面上の突起は弾性的あるいは非弾性的に変形するので、見かけの接触圧力  $p$  が増加すると、個々の

突起は押し込まれて真実接触面積が増すとともに、より低い突起が接触し始める。接触圧力が高くなるにしたがい、空隙幅の変化に対する抵抗は大きくなるので、接触圧力-空隙幅の関係は図 1 に示すような非線形な関係となる。また、この曲線の傾きが、その接触圧力（空隙幅）における接触界面の剛性を与える。これまでの研究により、接触面剛性が接触圧力とともに顕著に増加すること、垂直方向と接線方向の剛性の比が Hertz 接触理論に基づく簡単なモデル予測とよく対応することが明らかとなっている<sup>(6-9)</sup>。

ここでは、接触閉閉口による界面の非線形性を表すモデルとして、静的接触圧力  $p_0$  を受けた空隙幅  $h_0$  の平衡状態に超音波が入射した際の接触圧力  $p$  と空隙幅  $h$  の関係を、動的ヒステリシスの効果を見捨てて次式のような Taylor 展開で与える。

$$p - p_0 = -K_1 \{1 - \beta Y + \delta Y^2 + \dots\}, \quad Y = h - h_0. \quad (1)$$

ここで、 $Y$  は空隙幅変化、 $K_1$  は平衡状態での接触面剛性（線形剛性）、 $\beta$  と  $\delta$  はそれぞれ二次および三次の非線形性を表すパラメータである。

接触界面は  $x=0$  に位置するとし、縦波が垂直に入射した場合の応答を一次元問題として解析する（図 2）。接触界面の両側固体が同じ材質の線形弾性体（弾性定数： $E$ 、密度： $\rho$ 、縦波音速： $c$ ）とすると、一次元弾性波伝搬の支配方程式は、以下の応力( $\sigma$ )—変位( $u$ )こう配関係式および運動方程式である。

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (2)$$

入射波  $u^{\text{inc}}$  に対して、反射波  $u^{\text{ref}}$ 、透過波  $u^{\text{tra}}$  を含む変位  $u(x, t)$  は次式で表すことができる。

$$u(x, t) = \begin{cases} u^{\text{inc}}(x-ct) + u^{\text{ref}}(x+ct), & x < 0, \\ u^{\text{tra}}(x-ct), & x > 0. \end{cases} \quad (3)$$

接触界面で成り立つ境界条件は、式(1)より

$$\sigma(0+) = \sigma(0-) = K_1(1 - \beta Y + \delta Y^2 + \dots)Y \quad (4)$$

である。ここで、空隙幅変化  $Y$  は波の変位により次式で与えられる。

$$Y(t) = u(0+, t) - u(0-, t) = u^{\text{tra}}(-ct) - \{u^{\text{inc}}(-ct) + u^{\text{ref}}(ct)\}. \quad (5)$$

以上の式を変形し、入射波は角周波数  $\omega$ 、波数  $k = \omega/c$ 、振幅  $u_0$  の調和波

$$u^{\text{inc}}(x-ct) = u_0 \cos(kx - \omega t) \quad (6)$$

で与えられるとすると、空隙幅変化  $Y$  に対する以下の 1 階非線形常微分方程式が導かれる。

$$\frac{dY}{dt} = 2u_0 \omega \sin \omega t - \frac{2K_1}{\rho c} (1 - \beta Y + \delta Y^2 + \dots)Y. \quad (7)$$

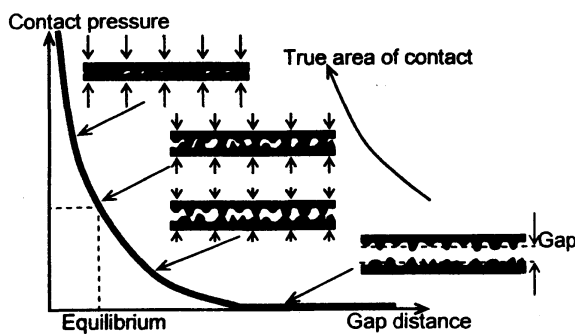


図 1 接触界面における接触圧力—空隙幅関係

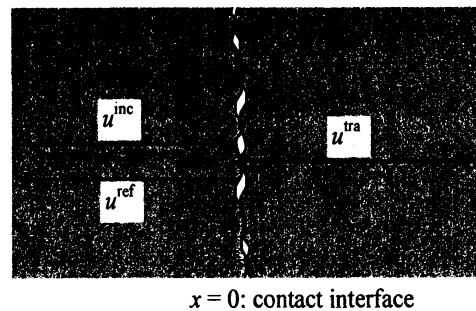


図 2 一次元透過解析

空隙幅の時間変化  $Y(t)$  が求めれば、透過波、反射波は次式で与えられる。

$$u^{\text{tra}}(x-ct) = u^{\text{inc}}(x-ct) + \frac{1}{2}Y(t-x/c), \quad u^{\text{ref}}(x+ct) = -\frac{1}{2}Y(t+x/c). \quad (8)$$

## 2.2 摂動解析

まず、以下の無次元化変数を導入する。

$$\text{無次元化空隙幅変化} \quad \tilde{Y} = Y/u_0, \quad (9)$$

$$\text{無次元化時間} \quad \tilde{t} = \omega t, \quad (10)$$

$$\text{無次元化線形剛性} \quad \tilde{K} = \frac{K_1}{\rho c \omega}, \quad (11)$$

$$\text{無次元化二次剛性パラメータ} \quad \varepsilon = u_0 \beta, \quad (12)$$

$$\text{無次元化三次剛性パラメータ} \quad \tilde{\delta} = \delta / \beta^2. \quad (13)$$

ここで、パラメータ  $\varepsilon = u_0 \beta$  は 1 よりも十分小さい微小量と仮定する。さらに、 $\tilde{\delta} = \delta / \beta^2$  は 1 と同程度のオーダーと仮定する。この無次元化により、式(7)は次式に帰着する。

$$\frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{t}} = 2\sin\tilde{t} - 2\tilde{K}(1 - \varepsilon\tilde{Y} + \tilde{\delta}\varepsilon^2\tilde{Y}^2 + \dots)\tilde{Y}. \quad (14)$$

ここで、 $\tilde{Y}(\tilde{t})$  を次の形に展開する。

$$\tilde{Y}(\tilde{t}) = \tilde{Y}_0(\tilde{t}) + \varepsilon\tilde{Y}_1(\tilde{t}) + \varepsilon^2\tilde{Y}_2(\tilde{t}) + \dots \quad (15)$$

式(15)を式(14)に代入し、 $\varepsilon$  の等しいべきの項に整理すると、以下の式が各べきのオーダーに対して順次得られる。

$$\varepsilon^0; \quad \frac{d\tilde{Y}_0}{d\tilde{t}} + 2\tilde{K}\tilde{Y}_0 = 2\sin\tilde{t}, \quad (16)$$

$$\varepsilon^1; \quad \frac{d\tilde{Y}_1}{d\tilde{t}} + 2\tilde{K}\tilde{Y}_1 = -2\tilde{K}\tilde{Y}_0^2, \quad (17)$$

$$\varepsilon^2; \quad \frac{d\tilde{Y}_2}{d\tilde{t}} + 2\tilde{K}\tilde{Y}_2 = -2\tilde{K}(2\tilde{Y}_0\tilde{Y}_1 + \tilde{\delta}\tilde{Y}_0^2), \quad (18)$$

.....

すなわち、 $\varepsilon$  の低いべきの方程式から順次解を求めてゆくことができる。式(15)を実次元の変数に戻すと、

$$Y = u_0\tilde{Y}_0 + u_0^2\beta\tilde{Y}_1 + u_0^3\beta^2\tilde{Y}_2 + \dots \quad (19)$$

となるから、式(16)の解  $\tilde{Y}_0(\tilde{t})$  は入射波振幅に比例する応答を、式(17)の解  $\tilde{Y}_1(\tilde{t})$  は入射波振幅の 2 乗に比例する応答を表す。式(17)以降の方程式は接触非線形性による応答を含んでいる。

式(16)は接触非線形性に無関係な基本波応答に関係し、その解は次式で与えられる。

$$\tilde{Y}_0 = \frac{2}{\sqrt{1+4\tilde{K}^2}} \sin(\tilde{t} - \phi_1), \quad \phi_1 = \arctan\left(\frac{1}{2\tilde{K}}\right). \quad (20)$$

このとき、式(17)は

$$\frac{d\tilde{Y}_1}{d\tilde{t}} + 2\tilde{K}\tilde{Y}_1 = -\frac{8\tilde{K}}{1+4\tilde{K}^2} \sin^2(\tilde{t} - \phi_1) \quad (21)$$

となり、その解は次式で与えられる。

$$\tilde{Y}_1 = \frac{2}{1+4\tilde{K}^2} - \frac{2\tilde{K}}{(1+4\tilde{K}^2)\sqrt{1+\tilde{K}^2}} \sin(2\tilde{t} - 2\phi_1 + \phi_2), \quad \phi_2 = \arctan(\tilde{K}). \quad (22)$$

上式の結果によると、入射波振幅の二乗に比例する非線形応答には、右辺第1項の整流成分（静的変位）、第2項の二次高調波成分が含まれることがわかる。

この結果を式(19)、さらに式(8)に代入すると、透過波に対する摂動解を得る。その結果、透過波に含まれる基本波成分、二次高調波成分の変位振幅比  $A_2/A_1$  は、次式で与えられる。

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\beta u_0}{2\sqrt{1+4\tilde{K}^2}\sqrt{1+\tilde{K}^2}}, \quad \tilde{K} = \frac{K_1}{\rho c \omega}. \quad (23)$$

あるいは、入射波振幅に依存しない形で表すと

$$\frac{A_2}{A_1^2} = \frac{\beta}{4\tilde{K}\sqrt{1+\tilde{K}^2}} \quad (24)$$

となる。次節では、この結果を実験的に検証した内容について述べる。

### 3. 接触界面における高調波発生特性の実験的評価

#### 3.1 実験方法と実験結果

ここでは、固体同士の接触界面に比較的大振幅の超音波（バースト波）を入射した場合の透過波に含まれる高調波成分を定量的に評価した結果について述べる。通常、超音波計測には圧電探触子が使われるが<sup>(10)</sup>、この場合超音波の変位（または速度）の定量的計測は行えず、得られる波形も探触子受信感度の周波数依存性を含んだものとなる。そこで、本測定では、レーザドップラー振動計を用いた表面振動速度計測との比較から、圧電探触子の出力電圧振幅を変位振幅に換算し、あわせて周波数による測定感度の違いを補正することにより、大振幅バースト波を入射した際の接触面における高調波発生特性を定量的に評価した<sup>(11)</sup>。また、あわせてパルス波反射率測定を行い、接触面剛性とその接触圧力依存性を同定することにより、理論解析結果から予測される二次高調波／基本波振幅比と実験データを比較し、考察を加えた。

図3に示すように、2個のアルミニウムブロック（一辺30mmの立方体）を対向接触させ、圧縮荷重を加えながら、縦波バースト波（周波数1MHz、10サイクル）の透過波計測を行った。接触する表面の粗さは  $R_z = 0.55 \mu\text{m}$ 、 $R_a = 0.069 \mu\text{m}$  であった。バースト波送信は、信号

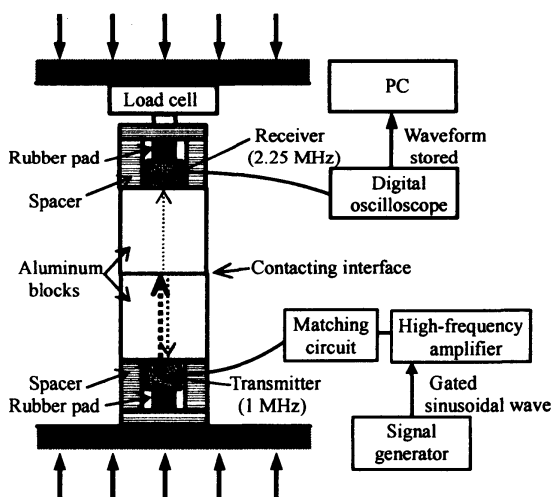


図3 バースト波透過測定

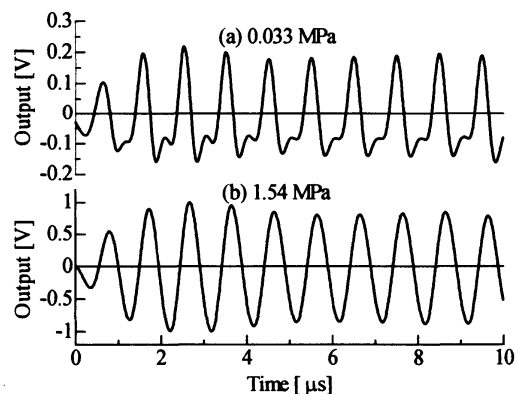


図4 透過波形

発生器で生成したバースト波信号を高周波増幅器（サムウェイ製 T145-5716B）で増幅して圧電探触子（公称中心周波数 1MHz）を駆動することにより行った。透過波は、圧電探触子（公称中心周波数 2.25MHz）で受信し、デジタルオシロスコープで同期加算したのちパーソナルコンピュータに収録した。なお、この受信側圧電探触子について、上に述べたようにレーザドップラー振動計による速度計測結果との比較から、周波数ごとに補正係数を実験的に求めておき、圧電探触子の出力電圧から計測した超音波の変位振幅を計算できるようにした。なお、接触面に入射するバースト波の振幅は、レーザドップラー振動計により測定したところ 8.44nm であった（レーザドップラー振動計では自由振動表面を計測するので、受信信号から直接求められる振幅を 1/2 倍して、表面に到達直前の進行波の振幅を求めている）。

また、バースト波透過測定を行うのと同じ接触状態で、送信側探触子をスパイク波パルサー・レシーバー（Panametrics 製 PR-5072）に接続して広帯域パルスの反射測定を行い、反射波形を同様にパーソナルコンピュータに収録した。これにより周波数 1MHz における縦波反射率、ならびに接触面の垂直剛性を評価し<sup>(7,8)</sup>、のちに非線形界面モデルに基づく理論解析によって二次高調波振幅を計算するための基礎データとした。

図 4 に、異なる接触圧力（0.033MPa および 1.54MPa）のもとで得られた透過波形を示す。低い接触圧力のもとでは、正弦波状のバースト波がかなりひずんでいることが確認できる。一方、高い圧力のもとではほぼ正弦波状となっており、波形ひずみは小さくなっている。

透過波の受信信号は、バースト波中の周期部分を離散フーリエ変換し、スペクトルにおいてそれぞれ基本波周波数（1MHz）および二次高調波（2MHz）の成分のみを残して逆フーリエ変換し、得られた電圧値（それぞれ  $A_{1V}$ 、 $A_{2V}$  とする）を上述の補正係数を用いて変位振幅に換算した。これを基本波、二次高調波の変位振幅として、 $A_1$ 、 $A_2$  とする。

図 5 に、二次高調波／基本波の出力電圧振幅比（ $A_{2V}/A_{1V}$ ）（補正前の振幅比）および変位振幅比（ $A_2/A_1$ ）（補正後の振幅比）を接触圧力（圧縮荷重を見かけの接触面積で除した値）に対してプロットした。この図からわかるように、圧電探触子の出力補正を行うことによ

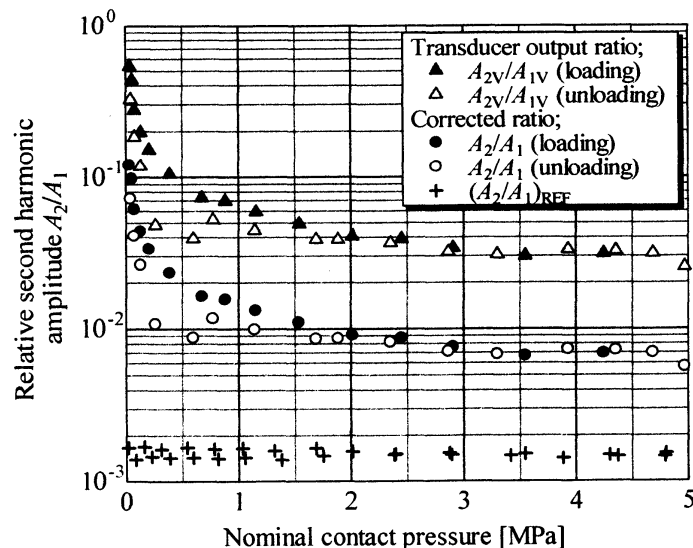


図 5 二次高調波／基本波振幅比の接触圧力依存性

て、補正後の振幅比は補正前よりも小さい値となっている。すなわち、受信に用いた探触子は 2.25MHz 付近に感度のピークを有しているため、基本波成分に比べて二次高調波成分をより高い感度で受信していたことになる。上述の方法で補正を行うことによって、より正確な振幅比を評価することができていると考えられる。

高調波発生特性を評価する際、接触界面の非線形効果で生じた高調波以外に、計測機器内部（増幅器や探触子など）や、接触界面以外の伝搬経路（探触子とブロックの界面など）で生じた高調波の大きさを見積もっておくことは重要である。そこで、高さ 60mm、底面積 30mm×30mm のアルミニウムブロックを用いて、図 3 とまったく同じ測定を行い、透過波に含まれる二次高調波振幅（上記の方法で変位振幅に換算）を求めた結果を  $(A_2/A_1)_{\text{REF}}$  として図 5 に合わせて示す。これを接触界面に対する結果と比較することにより、同一測定条件、同一材料で接触界面の有無による影響を調べることができる。この結果によれば、接触界面以外に起因する高調波は接触非線形効果によるものに比べて十分に小さいことが確認できる。

### 3.2 理論解析との比較

本測定では、バースト波透過測定と合わせて実施したパルス波反射率測定から剛性パラメータを同定することにより、前節の理論解析結果を用いて二次高調波振幅を計算して実験データと比較を行った。パルス波反射率から求めた負荷過程および除荷過程における接触面の垂直剛性  $K_1$  と見かけの接触圧力の関係を図 6 に示す。これより、剛性  $K_1$  は静的負荷圧力  $p_0$  とともに単調に増加、減少することがわかる。この関係を  $K_1 = K_1(p_0)$  とすると、二次の剛性パラメータ  $K_2$  は

$$K_2(p_0) = \frac{1}{2} K_1(p_0) \frac{dK_1}{dp_0} \quad (25)$$

と求められる。これより  $\beta = K_2/K_1$  が求められる。そこで、図 6 に示すように、実験データを以下の簡単な対数関係でフィッティングした。

$$K_1 = a \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p_a}\right) = a \cdot \ln p_0 + b \Rightarrow \beta = \frac{K_2}{K_1} = \frac{a}{2p_0} \quad (26)$$

ここに上式中のパラメータは負荷・除荷過程それぞれにおいて以下のように定めた。

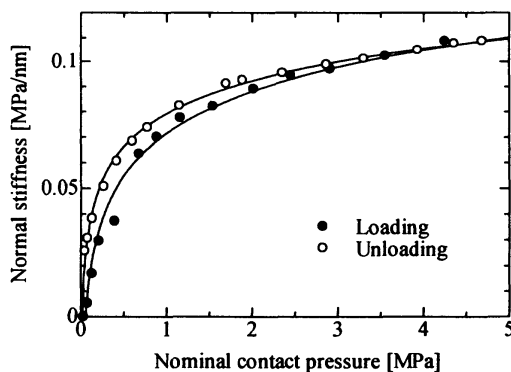


図 6 接触面の垂直剛性と接触圧力の関係

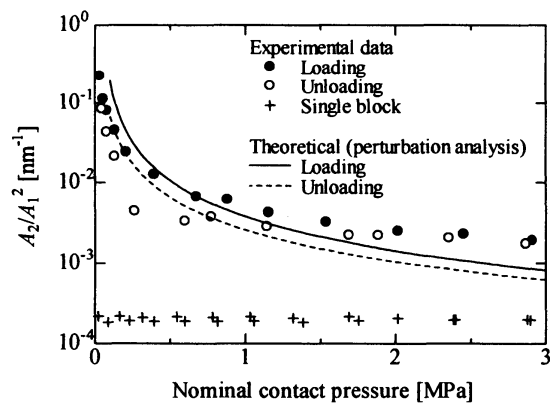


図 7  $A_2/A_1^2$  の接触圧力依存性

負荷過程 :  $a = 2.399 \times 10^{-2}$  [MPa/nm],  $b = -a \ln p_a = 7.155 \times 10^{-2}$  [MPa/nm]

除荷過程 :  $a = 1.879 \times 10^{-2}$  [MPa/nm],  $b = -a \ln p_a = 7.938 \times 10^{-2}$  [MPa/nm]

アルミニウムに対して  $\rho = 2700$  [kg/m<sup>3</sup>],  $c = 6400$  [m/s], および  $\omega = 2\pi$  [MHz] を代入し, 上の同定結果を用いて式(24)から求めた  $A_2/A_1^2$  の理論値と,  $A_1, A_2$  に関する測定結果 (出力補正の結果換算した変位振幅) から求めた  $A_2/A_1^2$  との比較を図7に示す. なお, 式(24)の結果は, 非線形性の効果が十分小さいと仮定して導いた近似解 (摂動解) であることに注意する必要がある. 本測定においては, レーザドップラー振動計を用いたことにより, はじめて実験結果と理論解析の定量的な比較検討が可能となった. 図7によると, 理論モデルによる計算値は, 少なくとも値のオーダーに関する限り実験データと近い結果を与えている.

#### 4. 接触界面に沿った超音波伝搬挙動の非線形特性の解析

前節では, 接触界面と垂直入射波との非線形相互作用による高調波発生特性に関して理論解析と実験的検討の結果を示した. 固体接触状態の評価においては, 超音波の反射・透過特性と並んで, 接触界面に沿って伝搬する導波 (ガイド波) モードも用いることができる. 特に, 板状弾性体を伝わるラム波は, 各種薄肉構造物や表面コーティング等の非破壊評価に有効であり, その非線形性に着目した新しい評価原理の確立は興味深い課題である. 筆者らは, 板状部材が上下面で固体と接触条件下にある場合のラム波伝搬特性について予備的な実験的

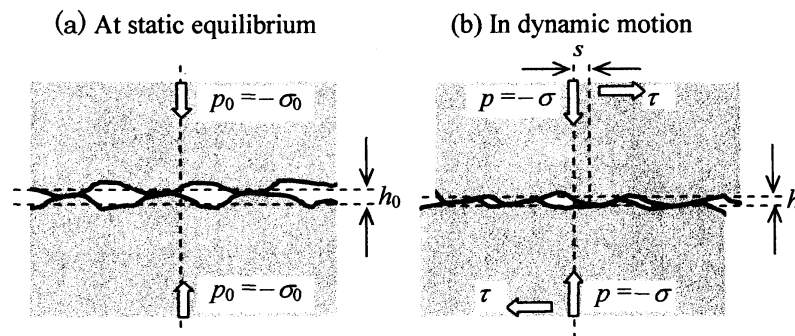


図8 垂直, 接線方向運動に対する非線形界面モデル

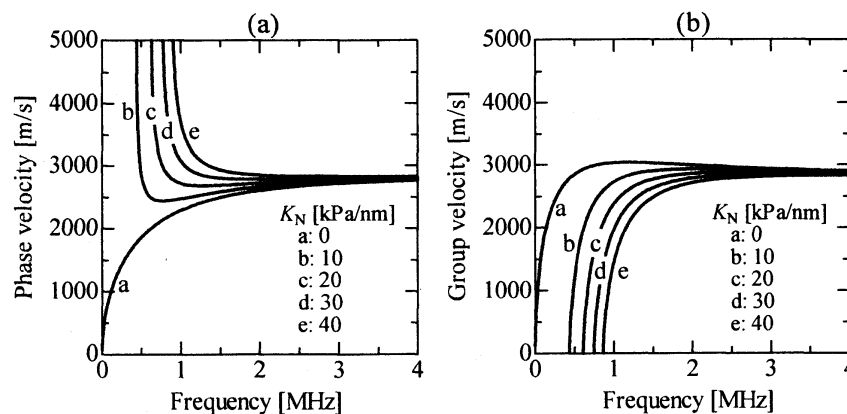


図9 界面剛性による曲げ波位相速度と群速度の変化

検討を行っているが<sup>(12)</sup>、ここでは、板の動的弾性変形に関する Mindlin の理論<sup>(13)</sup>と、前節で用いたのと同様の非線形界面モデルを組み合わせる理論モデルを定式化した例<sup>(14)</sup>を紹介する。

まず、前節で用いた非線形界面モデルを、接触面の垂直、接線方向の振動に対して三次の非線形性まで含めて拡張し、垂直応力 $\sigma$ とせん断応力 $\tau$ を接触面空隙幅 $h$ および接線方向相対変位 $s$ の関数として次式のように与える (図 8)。

$$\sigma(h,s) = \sigma_0 + K_N(h-h_0) + K_{NN}(h-h_0)^2 + K_{TT}s^2 + K_{NNN}(h-h_0)^3 + K_{NTT}(h-h_0)s^2, \quad (27)$$

$$\tau(h,s) = K_Ts + K_{NT}(h-h_0)s + K_{NNT}(h-h_0)^2s + K_{TTT}s^3. \quad (28)$$

ここで、板の動的変形の支配方程式として、最低次数・反対称モード ( $A_0$ モード) のラム波の分散特性を忠実に再現できる Mindlin 理論<sup>(13)</sup>を採用し、板の上下面に働く外力の項を、式(27)、(28)で与えると、変位に関して二次の非線形項は上下面からの寄与が相殺する結果として、三次の非線形性を有する以下の連立偏微分方程式を得る。

$$\rho H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \kappa GH \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - 2K_N \left\{ 1 + \alpha w^2 + \beta (H\varphi)^2 \right\} w, \quad (29)$$

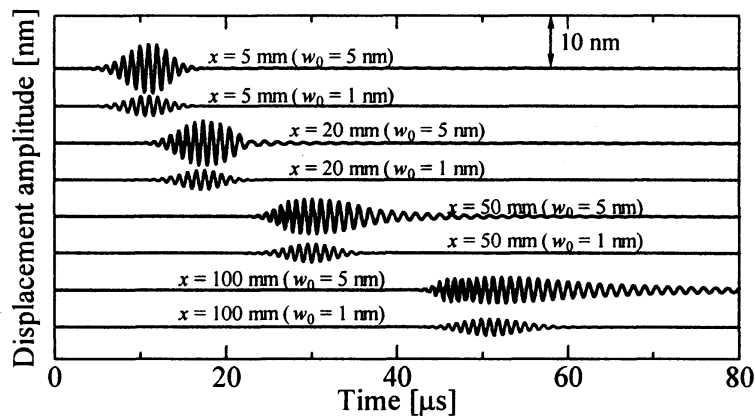


図 10 曲げ波の伝搬波形の計算例

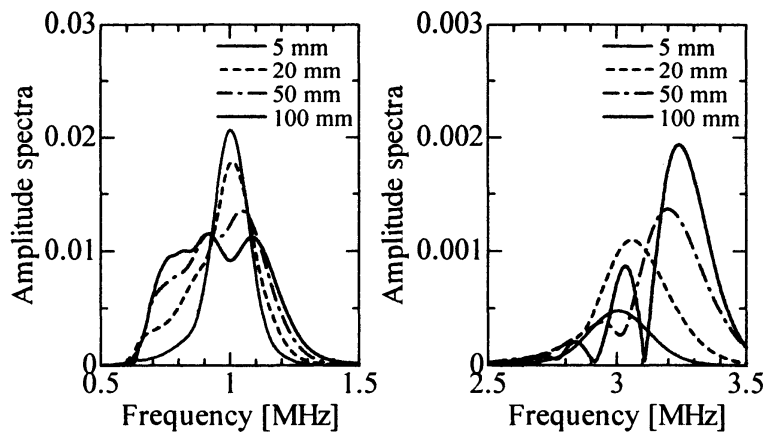


図 11 曲げ波の振幅スペクトル変化



$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \kappa GH \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{H}{2} K_T \left\{ 1 + \gamma w^2 + \delta (H\varphi)^2 \right\} H\varphi. \quad (30)$$

ここで、 $w$  は中立面のたわみ、 $\varphi$  は回転角であり、 $G$  は横弾性係数、 $\rho$  は密度、 $H$  は板厚、 $I$  は断面二次モーメント、 $D$  は曲げ剛性、 $\kappa$  はせん断係数 ( $=5/6$ )、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$  は非線形性を表わすパラメータである。

式(29)、(30)で表わされる波は微小振幅に対しては以下の分散関係を有することが示せる。

$$\left( \kappa GHk^2 + 2K_N - \rho H\omega^2 \right) \left( Dk^2 + \kappa GH + \frac{1}{2} H^2 K_T - \rho I\omega^2 \right) - (\kappa GHk)^2 = 0. \quad (31)$$

図9には、アルミニウム板 (厚さ 1mm) を想定した材料定数を与え、接線剛性、垂直剛性の比を  $K_T/K_N = 0.29$  <sup>(8)</sup> とした場合に、曲げ波の位相速度および群速度の周波数依存性が界面剛性  $K_N$  により変化する様子を示した。

一方、有限振幅の場合の波の伝搬挙動についてはまだ十分な理論的検討を行っていないが、超音波計測の状況を念頭に置いて、板の端部で、ガウス関数で振幅変調された正弦波 (搬送波周波数 1MHz) で変位入力を与えたときの曲げ波の伝搬挙動を、式(29)、(30)を差分法で数値解析することにより求めた結果を図10、図11に示す ( $K_N = 20$  [kPa/nm] とおき、4種類の非線形性パラメータのうち最も支配的と思われる  $\alpha$  のみ非零の値を与えて  $\alpha = K_{NNN}/K_N = 0.01$  [nm<sup>2</sup>] とした)。図10は、2種類の入力変位振幅  $w_0$  (1nm, 5nm) の場合に、伝搬距離  $x$  とともに波形が変化する様子を示す。また、図11には、入力変位振幅が 5nm の場合に、異なる伝搬距離における変位波形の振幅スペクトル (周波数 1MHz 付近および 3MHz 付近を異なるスケールで示した結果) を示している。図11に示されているような三次高調波成分の発生は、予備的測定<sup>(12)</sup>でも観察しているが、非線形特性解明のためにはより詳細な検討が必要である。

##### 5. 損傷固体の非線形応力-ひずみ関係による非線形超音波特性

以上の議論では、接触界面に非線形性が存在する場合の超音波特性を考察した。このような界面由来の非線形性は、アルミニウム等通常の金属材料の非調和性による非線形音響効果と比べてオーダー的に大きいため、3節、4節では伝搬媒質は線形弾性体として扱い、境界条件中で与えられる非線形性を扱っている。ところが、最近では岩石や粒状媒質等、内部に微視的空隙や弱結合部を持つ材料が示す顕著な応力-ひずみ非線形性による興味深い音響効果が注目され、主に低周波音響特性に関して現在活発な研究が行われている<sup>(15)</sup>。筆者らは、類似の効果が超音波周波数領域でも生じると考え、これまでに岩石や複合材料に対して、振幅変調した超音波パルス波が透過した際に低周波数域で現れる非線形成分に着目して研究を進めている<sup>(16)</sup>。以下では、古典的ではあるが、非線形弾性体の一次元弾性波伝搬解析によりこの効果を考察する。

二次非線形性を含む応力-変位こう配関係を

$$\sigma = \rho c^2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (32)$$

と与える。ここに、 $\beta_s$  は非線形性を表す材料定数である。これを一次元運動方程式(2)<sub>2</sub>に代入すると、次の支配偏微分方程式を得る。

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} u = c^2 \beta_s \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (33)$$

振幅  $u_0$ 、角周波数  $\omega$  を有する基本波が伝搬する場合の非線形挙動を考察するに際して、微小パラメータ  $\varepsilon = u_0 \beta_s \omega / c$  を定義し、

$$u = u_0 \tilde{u}, \quad t = \tilde{t} / \omega, \quad x = (c / \omega) \tilde{x} \quad (34)$$

として式(33)を無次元化すると、次式を得る。

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \tilde{u} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^2. \quad (35)$$

ここで、

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{u}_0(\tilde{x}, \tilde{t}) + \varepsilon \tilde{u}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) + \dots \quad (36)$$

と展開して式(35)に代入すると、 $\varepsilon$ の0次、1次のべきの項として次式が得られる。

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \tilde{u}_0 = 0, \quad (37)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \tilde{u}_1 = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}} \right)^2. \quad (38)$$

式(37)の解として、振幅変調した調和波

$$\tilde{u}_0(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{E}(\tilde{\tau}) \sin \tilde{\tau} \quad (\tilde{\tau} = \tilde{t} - \tilde{x} \text{ は無次元化遅延時間}) \quad (39)$$

を仮定する。これを式(38)に代入すると

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \tilde{u}_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} \left\{ \tilde{E}^2 + \tilde{E}'^2 + (\tilde{E}^2 - \tilde{E}'^2) \cos 2\tilde{\tau} + 2\tilde{E}\tilde{E}' \sin 2\tilde{\tau} \right\} \quad (40)$$

となる (ただし  $\tilde{E}' = d\tilde{E}/d\tilde{\tau}$ )。

式(40)右辺括弧内で、 $\cos$  および  $\sin$  を含む項は非線形性による二次高調波発生を与えるが、ここでは括弧内の  $\tilde{E}^2 + \tilde{E}'^2$  の寄与のみを考察するため、 $\cos$ ,  $\sin$  の項を無視し、式(40)のかわりに

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \tilde{u}_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} (\tilde{E}^2 + \tilde{E}'^2) \quad (41)$$

を考えると、 $\tilde{x} = 0$  で0となる特解として次式を得る。

$$\tilde{u}_1(\tilde{x}, \tilde{t}) = -\frac{1}{4} \left[ \{\tilde{E}(\tilde{\tau})\}^2 + \{\tilde{E}'(\tilde{\tau})\}^2 \right] \tilde{x}. \quad (42)$$

こうして得た摂動解を実次元変数に戻すと、伝搬波による変位および速度は

$$u(x, t) \cong u_0 E(\tau) \sin(\omega \tau) - \frac{\beta_s u_0^2 \omega^2}{4c^2} \left[ \{E(\tau)\}^2 + \frac{\{E'(\tau)\}^2}{\omega^2} \right] x, \quad (43)$$

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} \cong u_0 \omega E(\tau) \cos(\omega \tau) - \frac{\beta_s u_0^2 \omega^2}{4c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \{E(\tau)\}^2 + \frac{\{E'(\tau)\}^2}{\omega^2} \right] x \quad (44)$$

となる。ただし  $\tau = t - x/c$ ,  $\tilde{E}(\tilde{\tau}) = \tilde{E}(\omega \tau) \equiv E(\tau)$ ,  $E' = dE/d\tau$  とおいた。ここで、もしも  $E$  が  $\tau$  について十分緩やかに変化する関数の場合、上式右辺括弧内の最初の項が第二項に比べて支配的となる。

以上の結果によると、非線形弾性体に振幅変調した弾性波を入射すると、透過波の速度波形には振幅の包絡線を表す関数の導関数に相当する信号が発生することがわかる。この包絡線が搬送波周波数に比べて時間的に緩やかな変化を示す場合、この発生信号は低周波数領域にスペクトルを有すると予想される。さらに、媒質が高減衰性質を有する場合には、基本波および高調波成分は伝搬とともに減衰する結果、この低周波数成分のみが支配的に観測されることが考えられる。なお、式(43), (44)の摂動解は、右辺第2項が第1項に比較して十分小さい

範囲でのみ有効であるが、低周波成分の発生を考察するのがここでの目的であるから、これ以上の解析には立ち入らない。

上記の効果は、非線形音響学分野で古くから流体や粒状物質等で生じる自己復調効果<sup>(17,18)</sup> (self-demodulation) 等として知られているが、筆者らはこの効果が花崗岩や複合材料など、剛性の高い固体材料でも MHz オーダーの超音波周波数領域で観察されることを見出している。

図 12 は、異なる温度で加熱・冷却した花崗岩サンプルに周波数 1MHz の矩形縦波バースト波を送信し、伝搬距離 40mm の対面側で受信した波形を示している。高い温度に加熱したサンプルほど、搬送周波数の 1MHz 成分が減衰し、振幅包絡線の導関数に関係した信号波形が到達する傾向にあるが、これは加熱・冷却負荷によりサンプル内部に多数の微視的空隙損傷が発達した結果、特に高周波数領域で減衰が増し、非線形性も顕著となったと考えられる。また、到達波形に見られるこの低周波数成分は入射波強度に比例しておらず、入射波強度に対して非線形に増加することも確認している。このように、低周波成分の発生挙動は固体の損傷度によって異なるレベルで発現するので、これを材料の損傷評価のパラメータとして使えろと考え、現在基礎的検討を進めている。

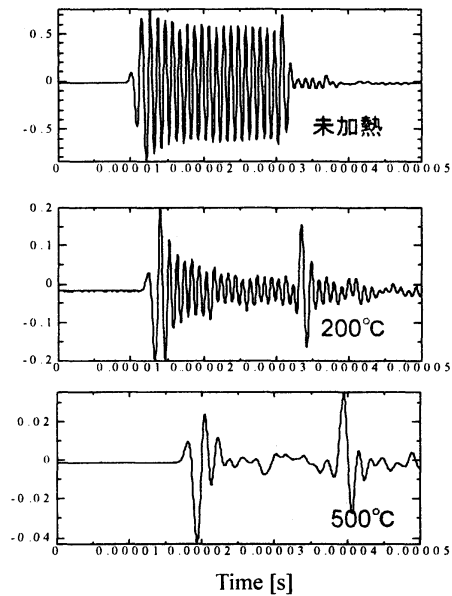


図 12 異なる温度で熱損傷を加えた花崗岩の縦波バースト波受信波形

## 6. おわりに

本稿では、接触界面や損傷固体が呈する非線形超音波効果について、筆者らの最近の検討内容を紹介した。同様の効果は、閉口した疲労き裂や各種の接着・接合界面においても観察されており、このような不完全界面の非破壊評価の一手法として非線形超音波計測が定着することが期待されている。そのためには、接触・弱結合界面や損傷固体が有する非線形特性と超音波伝搬特性の関係を理論的に正しく理解し、基本的実験データを定量的に解釈することが必須と考えており、実験的研究のみでなく、本稿で紹介したような理論的解析が必要かつ極めて有効であると考えている。

本研究を進めるにあたり、科学研究費補助金基盤研究(C) (課題番号 18560079, 平成 18～19 年度) および基盤研究(B) (課題番号 20360053, 平成 20～22 年度) の支援を受けており、ここに謝意を表す。

## 参考文献

- (1) R. S. Dwyer-Joyce, "The application of ultrasonic NDT techniques in tribology," Proc. I Mech E Part J: Eng. Trib., 219 (2005), 347-366.
- (2) 「非線形超音波法による非破壊検査・評価」特集, 非破壊検査, 第 56 巻 6 号 (2007), 273-302.

- (3) A. M. Sutin and V. E. Nazarov, "Nonlinear acoustic methods of crack diagnostics," *Radiophys. Quantum Elec.*, 38 (1995), 109-120.
- (4) Y. Zheng, R. G. Maev and I. Y. Solodov, "Nonlinear acoustic applications for material characterization: a review," *Can. J. Phys.*, 77 (1999), 927-967.
- (5) S. Biwa, S. Nakajima and N. Ohno, "On the acoustic nonlinearity of solid-solid contact with pressure-dependent interface stiffness," *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 71 (2004), 508-515.
- (6) B. W. Drinkwater, R. S. Dwyer-Joyce and P. Cawley, "A study of the interaction between ultrasound and a partially contacting solid-solid interface," *Proc. R. Soc. Lond.*, A452 (1996), 2613-2628.
- (7) S. Biwa, A. Suzuki and N. Ohno, "Evaluation of interface wave velocity, reflection coefficients and interfacial stiffnesses of contacting surfaces," *Ultrasonics*, 43 (2005), 495-502.
- (8) S. Biwa, S. Hiraiwa and E. Matsumoto, "Stiffness evaluation of contacting surfaces by bulk and interface waves," *Ultrasonics*, 47 (2007), 123-129.
- (9) S. Biwa, S. Hiraiwa and E. Matsumoto, "Pressure-dependent stiffnesses and nonlinear ultrasonic response of contacting surfaces," *J. Solid Mech. Mater. Eng.*, 3 (2009), 10-21.
- (10) S. Biwa, S. Hiraiwa and E. Matsumoto, "Experimental and theoretical study of harmonic generation at contacting interface," *Ultrasonics*, 44 (2006), e1319-e1322.
- (11) S. Biwa, S. Yamaji and E. Matsumoto, "Quantitative evaluation of harmonic generation at contacting interface," in *Nonlinear Acoustics – Fundamentals and Applications* (Proc. 18th ISNA), AIP Conf. Proc. 1022 (2008), 505-508.
- (12) S. Kishiwada, S. Biwa, C. Inserra and E. Matsumoto, "Nonlinear ultrasonic characterization of Lamb wave in a plate with contacting interfaces," *Proc. ICCAS-SICE 2009* (2009), 2368-2372.
- (13) M. D. Mindlin, "Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates," *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 18 (1951), 31-38.
- (14) S. Biwa, S. Kishiwada, C. Inserra and E. Matsumoto, "Modeling of flexural wave propagation in a plate with contacting interfaces," *Proc. Asian Pacific Conf. Materials and Mechanics 2009* (2009), a117.pdf.
- (15) R. A. Guyer and P. A. Johnson, "Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence for a new class of materials," *Physics Today*, April (1999), 30-36.
- (16) C. Inserra, S. Biwa and Y. Chen, "Nonlinear ultrasonic characterization of thermally damaged Westerly granite," *Jpn. J. Appl. Phys.*, 48 (2009), 07GD03.
- (17) B. K. Novikov and O. V. Rudenko, "Generation of low-frequency harmonics in the field of a high-power amplitude-modulated wave," *Sov. Phys. Acoust.*, 23 (1977), 455-459.
- (18) V. Y. Zaitsev, A. B. Kolpakov and V. E. Nazarov, "Detection of acoustic pulses in river sand. Theory," *Acoust. Phys.* 45 (1999), 305-310.