数理解析研究所講究録
第 1702 巻 2010 年 88-97

小さな穴をもつ領域上の電磁波の振動

北海道大学・大学院理学研究院・数学部門 神保 秀一 (Shuichi JIMBO)
Department of Mathematics
Hokkaido University

第1節：マックスウェル方程式と固有値問題

本稿では小さな穴をもつ領域におけるマックスウェル方程式の解の振動問題を扱う．まず物理的背景を説明する．電磁波は, 電場 E および磁場 H の状態が時間空間的に変化し, その相が空間を移動していく現象である．電磁波を巧みに制御して, その上に信号やデータを載せて遠くに伝えることに応用され, 科学技術の中でも人類に最も役立っているもののひとつと言われる．電磁波の中でも時間周期的に変動する基本的なものとして固有振動が上げられる．この固有振動数について調べることは研究の自然な方向であると思われる．ただしここで扱う課題は少し特殊である．領域を特異的に変形したときにどうなるか, ということを問題にする．導体で囲まれた閉じた空洞内における電磁波の振動の状態あるいは振動数はその空間の形状に依存する．今空間内に新たな小さな導体が出現したとする．この時に, その振動数がどう変化していくか, という問題意識が本稿の主題である．電磁気学の理論によって, 電荷や外部磁場がない真空中において, ベクトル場 E, H が満たす方程式 (マックスウェル方程式) は 次のように与えられている．

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\, E + \mu \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \mathrm{rot}\, H - \epsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} = 0, \\ \mathrm{div}\, E = 0, \qquad \mathrm{div}\, H = 0. \end{cases}$$

ここで $\mu > 0$ は透磁率 (Magnetic Permeability), $\epsilon > 0$ は誘電率 (Dielectric constant) でそれぞれ正定数であるとする．空間は導体で囲まれているとしているため, 境界上で

$$(1.2) \qquad E \times \nu = 0, \qquad H \cdot \nu = 0$$

を課す．これは境界は導体であるため, その中で電位は一定と仮定し電場 E は接線方向の成分をもたないことを表している．(1.2) の前半はこのように理解する．ここで ν は境界上の外向き単位法線ベクトルである．

この方程式の解のうち時間調和的な解

$$E(t,x) = \exp(i\omega t)\widetilde{E}(x), \quad H(t,x) = \exp(i\omega t)\widetilde{H}(x)$$

は時間周期的で, 波が定在して振動している現象に対応する. これらを方程式に代入して

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\widetilde{E} + \mu i\omega\widetilde{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\widetilde{H} - \epsilon i\omega\widetilde{E} = 0 \\ \operatorname{div}\widetilde{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\widetilde{H} = 0 \end{cases}$$

を得る. 方程式から H を消去して

$$(1.4) \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\widetilde{E} - \mu\epsilon\omega^2\widetilde{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\widetilde{E} = 0$$

を得る. 境界条件は

$$(1.5) \qquad \widetilde{E} \times \nu = 0$$

となる. ω は振動数に対応するが未知定数であり, これが現象の状態を特徴付ける重要は値となる. この値 (たち) は与えられた空間に依存して決まることに注意する. 問題は方程式 (1.4), (1.5) を満たす非自明な $\widetilde{E}$ が存在するような ω に集約され固有値問題として定式化される. Ω に対応して決まる (正の) 固有値を考え Ω を小さい穴をあけるなどの特異的操作を施したときにどのように摂動するかを研究することは重要な課題であると思われる. 本稿ではこの問題を直接には扱わず, ある意味で 2 次元の問題を考える.

本研究は特異的な領域摂動に関するスペクトル解析とも見なせる. このような研究テーマの領域摂動と固有値問題の端緒は古く, ラプラス作用素の固有値の領域依存性に関する摂動問題はクーラン・ヒルベルトの有名な本 [2] やアダマールの研究に見いだすことができる. ラプラシアンの固有値の摂動に関する研究では, 小澤 [10,11,12,13] が画期的なものであった. その後いくつかの一般化や別の境界条件の場合や別のタイプの特異変形の研究もある (Chavel-Feldman [1], Courtois [3], Flucher [5], Jimbo [7, 8], Maz'ya, Nazarov, Plamevskij [9] 等を参照). ただし, 技術的な理由のため未解決のものもまだまだあり, 完成されたとは言えない. ラプラス作用素以外の方程式の場合の研究はまだあまりないようである. 本研究では 3 次元の問題は扱わずに 2 次元版の類似の問題を扱う. これは強いて言えば同軸ケーブルを電磁波が伝わる現象に関係がある. 断面は 2 次元の一様な有界領域となるため, これは 2 次元の関連付けることができるのである.

第 2 節: 柱状の導波管上を伝わる電磁波と固有値問題

前節で得られた方程式 (1.4) を書き直す. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域で境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとする. このとき, あらためて Ω 上のベクトル値関数 E を未知関数とする固有値問題

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\operatorname{rot} E - \lambda E = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ \operatorname{div} E = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ E \times \nu = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

λ が固有値となる. これは固有振動数の 2 乗に比例している. ここで, ベクトル解析の公式

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} E = \operatorname{grad}\operatorname{div} E - \Delta E$$

を用いることで方程式の第一式は

$$\Delta E + \lambda E = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

に交換しても良いことに注意しておく.

さて Ω が x_3 軸方向に一様であり, その方向に横波が進行する解のみを考察する. すなわち

$$\Omega = \widetilde{\Omega} \times \mathbb{R}$$

として $E(x) = (\widetilde{E}(x'), 0)$ の解のみを考える. ここで $x = (x_1, x_2, 0) = (x', 0)$ とした. さて方程式を 2 次元のものに帰着するため以下の式変形を行う.

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} E_1(x') \\ E_2(x') \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1(x') \\ E_2(x') \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial E_2/\partial x_1 - \partial E_1/\partial x_2 \end{pmatrix}$$

従って第 3 成分をとって 2 次元の場合の rot とみなす. すなわち

$$\operatorname{rot}^* \widetilde{E} = \partial E_2/\partial x_1 - \partial E_1/\partial x_2 \tag{2.2}$$

とする.

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \begin{pmatrix} E_1(x') \\ E_2(x') \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial/\partial x_2)\,(\partial E_2/\partial x_1 - \partial E_1/\partial x_2) \\ -(\partial/\partial x_1)\,(\partial E_2/\partial x_1 - \partial E_1/\partial x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

このベクトルの 2 成分が 2 次元の場合の rot rot である.

$$\text{(2.3)} \qquad \mathrm{rot}^* \mathrm{rot}^* \widetilde{E} = \begin{pmatrix} (\partial/\partial x_2)\,(\partial E_2/\partial x_1 - \partial E_1/\partial x_2) \\ -(\partial/\partial x_1)\,(\partial E_2/\partial x_1 - \partial E_1/\partial x_2) \end{pmatrix}$$

とおく．これによって固有方程式 (2.1) を rot^* を用いて書き換えることができる．

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}^* \mathrm{rot}^* \widetilde{E} - \lambda \widetilde{E} = 0 \quad \text{in} \quad \widetilde{\Omega} \\ \mathrm{div}\, \widetilde{E} = 0 \quad \text{in} \quad \widetilde{\Omega} \\ \widetilde{E} \times \nu = 0 \quad \text{on} \quad \partial\widetilde{\Omega} \end{cases}$$

第3節: 2次元の領域上の固有値と変分問題による特徴付け

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界領域で境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする．まず，ゼロ固有値の存在について検討する．この場合ゼロ固有値と対応する固有関数があると仮定する．固有方程式において $\lambda = 0$ として方程式は

$$\text{(3.1)} \qquad \mathrm{rot}^* \mathrm{rot}^* \Phi = 0, \ \mathrm{div}\, \Phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

$$\text{(3.2)} \qquad \Phi \times \nu = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

となる．未知関数 Φ は $\mathbb{R}^2$ 値関数である．方程式と Φ の内積を積分することで

$$\mathrm{rot}\, \Phi = \partial\Phi_2/\partial x_1 - \partial\Phi_1/\partial x_2 = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

これによって Φ は局所的に $\Phi = \nabla\rho$ と表現できる．一方，境界条件 (3.2) によって ρ は境界の各成分で定数関数となり (境界上で $\nabla\rho$ は ν と平行)，ρ は領域上大域的に定めることが可能であり，方程式はラプラス方程式となる ($\Delta\rho = 0$ in Ω)．従ってもし境界が連結ならば ρ は定数関数となりゼロは固有値にならない．一般には次の通りとなる．

命題 3.1. ゼロ固有値に対応する固有空間 X_0 は，次をみたす．

$$\dim X_0 = (\partial\Omega\text{の連結成分の個数}) - 1$$

$$X_0 = \{\nabla\rho \mid \rho : \text{ harmonic in}\, \Omega, \ \rho : \text{constant on each component of}\, \partial\Omega\}$$

を満たす．この結果から，ゼロ固有値に対応する固有空間は位相的な色彩が強く領域に小さな穴を開けることが単なる摂動ではないことがわかる．

[変分法による固有値の特徴付け] まず境界条件を考えて関数空間を設定する.

$$X = \{\Phi \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2) \mid \Phi \times \nu = 0 \ (x \in \partial\Omega)\}$$

ここで X 上の汎関数を定義する.

$$\mathcal{R}(\Psi) = \int_\Omega |\mathrm{rot}\,\Psi|^2 dx \Big/ \int_\Omega |\Psi|^2 dx \qquad (\Psi \in X) \tag{3.3}$$

正の固有値を変分法によって特徴付けるため不等式を準備する.

命題 3.2. (i) 任意の $\epsilon > 0$ にたいして, ある $c(\epsilon) > 0$ が存在して

$$\int_{\partial\Omega} |\psi|^2 dS \leqq \epsilon \int_\Omega |\nabla\psi|^2 dx + c(\epsilon) \int_\Omega |\psi|^2 dx \quad (\psi \in H^1(\Omega)) \tag{3.4}$$

(ii) ある定数 $c > 0$ が存在して

$$\int_\Omega |\nabla\,\Psi|^2 dx \leqq c\left(\int_\Omega |\mathrm{rot}\,\Psi|^2 dx + \int_\Omega |\mathrm{div}\,\Psi|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |\Psi|^2 dx\right) \tag{3.5}$$

$$(\Psi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)\ \langle\Psi, \nu\rangle = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega)$$

が成立する.

最小化問題を通して固有値を特徴付けていく. まず

$$\lambda_1 = \inf\{\mathcal{R}(\Phi) \mid \Phi \in X,\ \Phi \perp X_0,\ \Phi \not\equiv \mathbf{0}\} \tag{3.6}$$

とおく. このとき次が成立する.

補題 3.3. ある $\Phi_1 \in X$ が存在して

$$\mathcal{R}(\Phi_1) = \lambda_1, \qquad \Phi_1 \perp X_0 \tag{3.7}$$

となる.
(証) 最小化列を取る. 関数列 Ψ_m $(m \geqq 1) \subset X$ として

$$\Psi_m \perp X_0, \qquad \lim_{m\to\infty} \mathcal{R}(\Psi_m) = \lambda_1$$

となるものを取る. $\mathcal{R}(t\Psi_m) = \mathcal{R}(\Psi_m)$ $(t \neq 0)$ より

$$\int_\Omega |\Psi_m(x)|^2 dx = 1,$$

を仮定しても一般性を失わない.

$$\lambda_1 \leqq \int_\Omega |\mathrm{rot}\,\Psi_m(x)|^2 dx \leqq \lambda_1 + c \quad (m \geqq 1)$$

c は定数. 命題3.2やヒルベルト空間の有界列の性質等を用いて, 部分列 $\{\Psi_{m(p)}\}_{p=1}^\infty$ および $\Psi \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ で次の条件を満たすものが存在する.

$$\text{(3.8)} \qquad \begin{cases} \Psi_{m(p)} \to \Psi \quad \text{in} \quad L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \quad (\text{ノルム収束}), \\ \Psi_{m(p)} \rightharpoonup \Psi \quad \text{in} \quad H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)\ (\text{弱収束}) \end{cases} (p \to \infty)$$

$$\text{(3.9)} \qquad \liminf_{p\to\infty} \int_\Omega |\nabla \Psi_{m(p)}(x)|^2 dx \geqq \int_\Omega |\nabla \Psi(x)|^2 dx$$

$$\text{(3.10)} \qquad \mathrm{div}\,\Psi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \Psi \times \nu = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

となり. Ψ 自体が X に属し $\mathcal{R}(\Psi) = \lambda_1$ が従う. $\Phi_1 = \Psi$ とおいて結論を得る. □

次に第2固有値を考察する.

$$\lambda_2 = \inf\{\mathcal{R}(\Phi) \mid \Phi \in X,\ \Phi \perp X_0,\ \Phi \perp \Phi_1,\ \Phi \neq \mathbf{0}\}$$

とおく. 第1固有値を扱った議論と同様に最小化列 $\{\Psi_m\}_{m=1}^\infty$ を取る. 部分列 $\{\Psi_{m(p)}\}_{p=1}^\infty$ と $\Psi \in H^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$ があって (3.8),(3.9), (3.10) が成立する. そして $\lambda_2 \geqq \mathcal{R}(\Psi)$ を得る. Ψ が X に属し, また Φ_1 との直交する条件

$$(\Psi_{m(p)}, \Phi_1)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \langle \Psi_{m(p)}, \Phi_1 \rangle dx = 0$$

から $\Psi \perp \Phi_1$ も従う. よって結局 $\mathcal{R}(\Psi) = \lambda_2$ が従う.

このようにして $\Phi_2 = \Psi$ として第2固有関数を得る. このような議論を繰り返して固有値 $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ と関数列 $\{\Phi_m\}_{m=1}^\infty$ の族を得る. これらは

$$\lambda_k = \inf\{\mathcal{R}(\Psi) \mid \Psi \in X,\ \Psi \perp X_0,\ \Psi \perp \Phi_\ell\ (1 \leqq \ell \leqq k-1)\}$$
$$\lambda_k = \mathcal{R}(\Phi_k),\ (\Phi_i, \Phi_j)_{L^2(\Omega)} = \delta(i,j), \quad (1 \leqq i, j).$$

また $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$ や $\{\Phi_k\}_{k=1}^\infty$ が X で完全系をなすこともラプラス作用素における同様の証明法により示される.

第4節: 主結果

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は原点を含むと仮定する. 原点を中心とする半径 $\epsilon > 0$ の円板 $B(\epsilon)$ を除いた領域を考える. すなわち

$$\Omega(\epsilon) = \Omega \setminus \overline{B(\epsilon)} \qquad (\epsilon > 0)$$

を考える. $\Omega(\epsilon)$ 上同じ固有値問題の正の固有値の列 $\{\lambda_k(\epsilon)\}_{k=1}^{\infty}$ を考える. このとき, $\lambda_k(\epsilon)$ と λ_k を比較する. 本稿の主結果として次が成立する.

定理 4.1 第 k 固有値 λ_k が単純固有値であると仮定する.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\lambda_k(\epsilon) - \lambda_k}{\epsilon^2} = -\pi(|\Phi_k(0)|^2 + |(\mathrm{rot}\Phi_k)(0)|^2) \tag{4.1}$$

[証明の概略] 簡単な方針のみを述べる.

証明のために行うことは大きく分けて2つことである. 但し, この2つは分離して行われるわけではなく. 互いに関連している.

(i) $\Phi_{k,\epsilon}$ の $\epsilon \to 0$ のときの評価と漸近挙動の解析.

(ii) $\Phi_{k,\epsilon}$ の近似固有関数 $\widetilde{\Phi}_{k,\epsilon}$ の構成.

手順としては (ii) 最初に行う. この近似固有関数と最大最小原理によって固有値 $\lambda_k(\epsilon)$ の上からの評価を行う. 次にこれで得られたエネルギー評価を用いて (i) の固有関数の漸近挙動を調べる. (ii) の近似固有関数を固有方程式の弱形式に代入して結論の極限等式を得る. (i) の説明: 最初に指摘したように div-free 条件により固有方程式は楕円型方程式となるからシャウダー評価等の議論や比較法によって $\Phi_{k,\epsilon}$ の一様評価を得る.

(ii) の説明: Ω 上の第 k 固有関数 Φ_k を用いて近似固有関数を

$$\widetilde{\Phi}_{k,\epsilon}(x) = \Phi_k(x) - \frac{c}{|x|^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{m=-1}^{-\infty} \nabla \left\{ a_m(x_1 + ix_2)^m + b_m(x_1 - ix_2)^m \right\}$$

これ $\widetilde{\Phi}_{k,\epsilon}$ が $\partial B(\epsilon)$ 境界条件をみたすように係数を決定する.

関連する結果:

特異的領域変形と固有値摂動はラプラス作用素の場合に昔から研究されている. 主結果をこれらの過去の関連する結果と比較する. 同じ領域 $\Omega(\zeta)$ 上でラプラス作用素の固有値の摂動公式を述べる. 2次元の場合に1980年代に得られた小澤真氏の結果を述べる. 穴の開いた領域 $\Omega(\zeta) = \Omega \setminus \overline{B(\zeta)}$ 上のラプラス作用素の固有値 (ディリクレ境界条件 or ノイマン境界条件 or ロバン境界条件) は穴のない領域の場合のそれに収束することが調べられている. これらを精密化した結果について述べる.

まずディリクレ条件の場合を扱う. 次の固有値問題

$$\Delta\Phi + \mu\Phi = 0, \quad x \in \Omega(\zeta), \qquad \Phi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega(\zeta)$$

を考える. この固有値を $\{\mu_k(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$ と書く. 但し重複度に応じて添え字番号を重ねている. 一方 Ω 上のラプラス作用素 (ディリクレ境界条件) の固有値を $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ としておく. このとき $\zeta \to 0$ のとき $\mu_k(\zeta)$ は μ_k に収束するがその摂動公式は次のように与えられる.

定理 (S. Ozawa, Duke J. Math. 1981) μ_k は単純固有値であると仮定する. このとき摂動公式

(4.2) $$\mu_k(\zeta) = \mu_k + \frac{2\pi}{\log(1/\zeta)}\phi_k(\mathbf{0})^2 + o(\frac{2\pi}{\log(1/\zeta)}) \quad (\zeta \to 0)$$

が成立する. 但し ϕ_k は Ω 上の第 k 固有値 μ_k に対応する固有関数である.

次にノイマン問題については以下の結果がある.

$$\Delta\Psi + \rho\Psi = 0, \quad x \in \Omega(\zeta), \quad (\partial\Psi/\partial\nu)(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega(\zeta)$$

定理 (S. Ozawa, J. Fac.Sci. Univ. Tokyo 1983) ρ_k は単純固有値であると仮定する. このとき摂動公式

(4.3) $$\rho_k(\zeta) = \rho_k + \left(-2|(\nabla\psi_k)(\mathbf{0})|^2 + \rho_k\psi_k(\mathbf{0})^2\right)\zeta^2 + o(\zeta^2) \quad (\zeta \to 0)$$

が成立する. 但し ψ_k は Ω 上の第 k 固有値 ρ_k に対応する固有関数である.

小澤氏の結果はそれ以後, 別の状況や境界条件の場合も, 小澤氏自身のものを含めて多くある (文献表に一部を掲載). 特異的な形状, 不純物を含む物質のス

ペクトル特性の問題は物理的には自然に現れる．このため地道に長く続く研究テーマであると思われる．

主結果 (4.1) とラプラス作用素の場合を比較してみる．(4.2) のディリクレ条件の場合は固有値は**上から近づく**．ノイマン条件のときの (4.3) は**穴の位置**に依存する．翻って主結果 (4.1) では固有値は**逆に下から近づく**．これが面白い点であるが物理的な意味は私個人はよくわからない．

参考文献

[1] I. Chavel, D. Feldman, Spectra of Manifolds less a small Domain. Duke Math.J. **56** (1988), 399-414.

[2] クーラン-ヒルベルト, 数理物理学の方法 2, 東京図書.

[3] C. Courtois, Spectrum of Manifolds with holes, J. Funct. Anal. **134** (1995), 194-221.

[4] D.E. Edmunds, W.D.Evans, Spectral theory and differential operators, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Univ. Press, Oxford, 1987.

[5] M. Flucher, Approximation of Dirichlet eigenvalues on domains with small holes, J. Math. Anal. Appl. **193** (1995), 169-199.

[6] 神保秀一, 偏微分方程式入門, 共立出版.

[7] S. Jimbo, Perturbation formula of eigenvalues in a singularly perturbed domain, J. Math. Soc. Japan **42** (1993), 339-356.

[8] S. Jimbo, S. Kosugi, Spectra of domains with partial degeneration, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 16 (2009).

[9] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains, I, II, Operator Theory Advances and Applications **111**, **112**, Birkhäuser 2000.

[10] 小澤真, 領域の摂動と固有値, 数学 **33** (1981), 248-261.

[11] S. Ozawa, Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian, Duke Math. J. **48** (1981), 767-778.

[12] S. Ozawa, Electrostatic capacity and eigenvalues of the Laplacian, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **30** (1983), 53-62.

[12] S. Ozawa, Spectra of domains with small spherical Neumann boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **30** (1983), 259-277.

[13] J. Rauch and M. Taylor, Potential and scattering theory on wildly perturbed domains, J. Funct. Anal. **18** (1975), 27-59.