数理解析研究所講究録
第 1707 巻 2010 年 94-110

Slant Geometry on psude spheres in Lorents-Minkowski space

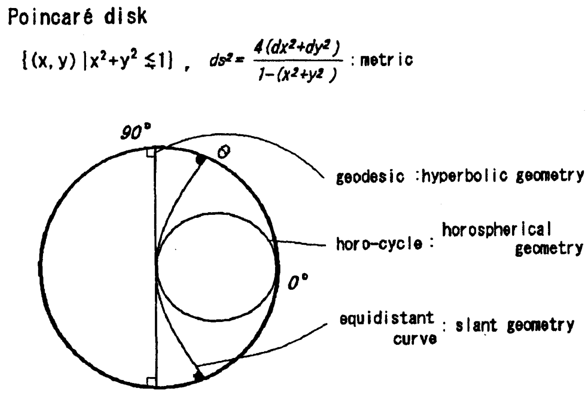
北海道大学大学院理学院数学専攻　修士２年
淺山　未来理 (Mikuri Asayama)
玉沖　愛子 (Aiko Tamaoki)
Department of Mathmatics,
Hokkaido University

1 Introduction

[2] では Hyperbolic 空間における幾何学として、**hyperbolic geometry** と **horospherical geometry** が考えられていた。ここではそれぞれ **vertical geometry**, **horizontal geometry** と呼ぶ。また [5] では de Sitter 空間内において平坦な空間的超曲面として flat elliptic hyperquadric を持つ幾何学、de Sitter hyperhorosphere を持つ幾何学、が存在することが知られている。それぞれの幾何学をここでは vertical geometry と horizontal geometry と呼ぶ。ここでは、それぞれの空間内において vertical geometry と horizontal geometry をつなげる幾何学を考える。それは 1 径数 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ に依存する幾何で、**slant geometry** と呼ぶ。

第３章では Hyperbolic 空間内における slant geometry を考える。この考えを 2 次元 hyperbolic 空間のモデルである Poincaré disk を用いて簡単に説明する。下図のように、Poincaré disk の理想境界である単位円との角度が 90° である円（測地線）を"直線"とみなすような幾何学が hyperbolic geometry であり、角度が 0° である単位円に接する円（ホロ円）を"直線"とみなすような幾何学が horospherical geometry である。第３章では単位円との角度がその間の θ である円（等距離曲線）を"直線"とみなすような幾何学を考える。

第４章では de Sitter 空間内における slant geometry を考える。$\theta = 0$ の時が horizontal geometry、$\theta = \frac{\pi}{2}$ の時が vertical geometry に対応している。



2 Minkowski space

ここではまず Minkowski 空間および hyperbolic 空間における用語の定義を行い、基本的な性質について述べる。

いま、$\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, \ldots, n)\}$ を $(n+1)$ 次元ベクトル空間とする。任意のベクトル $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)\ \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し、擬内積 $\langle , \rangle$ を

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

と定める。$(\mathbb{R}^{n+1}, \langle , \rangle)$ を $(n+1)$ 次元 **Minkowski** 空間といい、$\mathbb{R}^{n+1}_1$ と表す。また、Minkowski 空間内のベクトル $\mathbf{x}$ の擬ノルムを $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$ と定める。ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \backslash \{\mathbf{0}\}$ が **spacelike, timelike, lightlike** であるとはそれぞれ、$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ であるときをいう。また、ベクトルの第 0 成分が正値 (負値) であるときにそれぞれ未来 (過去) 方向であるという。Minkowski 空間内の **hyperplane** を、ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \backslash \{\mathbf{0}\}$ と実数 c を使って、

$$HP(\mathbf{v}, c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 | \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = c\}$$

と定める。Hyperplane $HP(\mathbf{v}, c)$ が **spacelike, timelike, lightlike** であるとは、対応する $\mathbf{v}$ が timelike, spacelike, lightlike であるときをいう。未来方向 (過去方向) の n 次元 **hyperbolic** 空間を

$$H^n_{+(-)}(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 | \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\ , x_0 > 0\ (x_0 < 0)\}$$

と定め、$H^n(-1)=H^n_+(-1)\cup H^n_-(-1)$ とする。また、n 次元 **de Sitter** 空間を

$$S^n_1=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_1|\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=1\}$$

と定める。さらに未来方向 (過去方向) の n 次元 **lightcone** もそれぞれ、

$$LC^*_{+(-)}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_1|\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=0\ ,x_0>0\ (x_0<0)\}$$

と定め、$LC^*=LC^*_+\cup LC^*_-$ とする。

Minkowski 空間内の hyperplane と未来方向の n 次元 hyperbolic 空間の共通部分

$$HP(\mathbf{v},c)\cap H^n_+(-1)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_1|\langle\mathbf{x},\mathbf{v}\rangle=c,\ \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=-1\}\quad(\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+1}_1\backslash\{\mathbf{0}\},c\in\mathbb{R})$$

を $HQ_h(\mathbf{v},c)$ と表し、**hyperquadric** という。さらに $\mathbf{v}$ が timelike, spacelike, lightlike のときをそれぞれ、**elliptic hyperquadric (hypersphere), hyperbolic hyperquadric (equidistant hypersurface), parabolic hyperquadric (hyperhorosphere)** といい、$HE_h(\mathbf{v},c)$, $HH_h(\mathbf{v},c)$, $HS_h(\mathbf{v},c)$ と表す。特に $c=0$ なる hyperbolic hyperquadric を、**flat hyperbolic hyperquadric (hyperplane)** という。

また Minkowski 空間内の hyperplane と n 次元 de Sitter 空間の共通部分

$$HP(\mathbf{v},c)\cap S^n_1=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_1|\langle\mathbf{x},\mathbf{v}\rangle=c,\ \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=1\}\ (\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+1}_1\backslash\{\mathbf{0}\},c\in\mathbb{R})$$

を $HQ_d(\mathbf{v},c)$ と表し、**hyperquadric** という。さらに $\mathbf{v}$ が timelike, spacelike, lightlike のときをそれぞれ、**elliptic hyperquadric, hyperbolic hyperquadric, parabolic hyperquadric** (**de Sitter hyperhorosphere**) といい、$HE_d(\mathbf{v},c)$, $HH_d(\mathbf{v},c)$, $HS_d(\mathbf{v},c)$ と表す。特に $c=0$ なる elliptic hyperquadric を、**flat (small) elliptic hyperquadric** という。つぎに $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ なる θ について、同様に集合を定義する。n 次元 **θ-hyperbolic** 空間を

$$H^n(-\sin^2\theta)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_1|\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=-\sin^2\theta\}$$

と定め、n 次元 **θ-de Sitter** 空間を

$$S^n_1(\sin^2\theta)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_1|\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=\sin^2\theta\}$$

と定める。すると、$\theta=0$ のとき $H^n(-\sin^2\theta)=\ S^n_1(\sin^2\theta)=LC^*\cup\{\mathbf{0}\}$ であり、$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき $H^n(-\sin^2\theta)=H^n(-1)$, $S^n_1(\sin^2\theta)=S^n_1$ となる。

3 Slant geometry on Hyperbolic space

ここでは、hyperbolic 空間における slant geometry を考える。

3.1 Differential geometry of hypersurfaces in hyperbolic space

$H^n_+(-1)$ 内の hypersurface を考える。$U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ を開集合とし、その座標を $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})$ と表す。写像 $\mathbf{x}^h : U \to H^n_+(-1)$ を embedding とし、その像 $\mathbf{x}^h(U)$ を M_h と書く。その単位法ベクトルを $\mathbf{x}^d$ とすると、常に $\mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \in S^n_1$ を満たしている。このことから、$\cos\theta\mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \in S^n_1(\sin^2\theta)$ がわかるので、

$$\mathbb{N}^{d\pm}_\theta : U \longrightarrow S^n_1(\sin^2\theta)$$
$$\mathbf{u} \mapsto \cos\theta\mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^d(\mathbf{u})$$

なる写像を定義し、$\mathbf{x}^h$ の **θ-de Sitter Gauss indicatrix** という。すると、$\theta = 0$ のとき、$\mathbb{N}^{d\pm}_\theta = \mathbf{x}^h \pm \mathbf{x}^d$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、$\mathbb{N}^{d\pm}_\theta = \pm\mathbf{x}^d$ となり、それぞれ [2] で導入されていた horizontal geometry の hyperbolic Gauss indicatrix, vertical geometry の de Sitter Gauss indicatrix になっている。

ここで、$\mathbf{v} \in S^n_1(\sin^2\theta)$ について、

$$HP(\mathbf{v}, -\cos\theta) \cap H^n_+(-1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 | \langle\mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle = -\cos\theta,\ \langle\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = -1\}$$

を $HQ_h(\mathbf{v}, -\cos\theta)$ と表し、**θ-flat hyperbolic hyperquadric** という。すると θ-flat hyperbolic hyperquadric は、$\theta = 0$ のとき parabolic hyperquadric (hyperhorosphere) $HS_h(\mathbf{v}, -1)$ であり、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき flat hyperbolic hyperquadric (hyperplane) $HH_h(\mathbf{v}, 0)$ となる。θ-flat hyperbolic hyperquadric について次が成り立つ。

Proposition 3.1. $\mathbb{N}^{d\pm}_\theta$ が定値写像のとき、*hypersurface* M_h は *θ-flat hyperbolic hyperquadric* に含まれる。

Euclidian differential geometry で、曲面の Gauss 写像が定値写像ならばその曲面は hyperplane の一部になっていた。したがってこの命題から、θ-flat hyperbolic hyperquadric は slant geometry において Euclidian differential geometry の hyperplane にあたる重要な集合であることがわかる。

さて、微分写像 $d\mathbf{x}^d(\mathbf{u}), d\mathbb{N}^{d\pm}_\theta(\mathbf{u})$ は $T_\mathbf{u}U$ から T_pM_h への線型写像であるが、U と M_h は embedding $\mathbf{x}^h$ によって同一視できるので、線型変換 $d\mathbf{x}^d(\mathbf{u}), d\mathbb{N}^{d\pm}_\theta(\mathbf{u}) : T_pM_h \to T_pM_h$ とみなされる。このとき、$d\mathbb{N}^{d\pm}_\theta(\mathbf{u}) = \cos\theta id_{T_pM_h} \pm d\mathbf{x}^d(\mathbf{u})$ となっている。

線型変換 $S^{d\pm}_\theta(p) := -d\mathbb{N}^{d\pm}_\theta(\mathbf{u})$ を M_h の p における **θ-de Sitter shape operator** といい、線型変換 $A_p := -d\mathbf{x}^d(\mathbf{u})$ を M_h の p における **de Sitter shape operator** という。それぞれの固有値を $\bar{\kappa}^{d\pm}_\theta(p), \kappa_p$ とおく。すると、$S^{d\pm}_\theta(p) = -\cos\theta id_{T_pM_h} \pm A_p$ であること

から、ベクトル $\mathbf{v}$ が $S_\theta^{d\pm}(p)$ の固有ベクトルであることと A_p の固有ベクトルであることは同値になり、$\bar{\kappa}_\theta^{d\pm}(p) = -\cos\theta \pm \kappa_p$ が成り立つ。また、関数 $K_\theta^{d\pm}(\mathbf{u}) := \det S_\theta^{d\pm}(p)$ を M_h の p における **θ-de Sitter Gauss-Kronecker curvature** といい、関数 $K_d(\mathbf{u}) := \det A_p$ を M_h の p における **de Sitter Gauss-Kronecker curvature** という。

U の点 $\mathbf{u}$ (または $p = \mathbf{x}^h(\mathbf{u})$) が M_h の **θ-umbilic point** であるとは、$S_\theta^{d\pm}(p) = \bar{\kappa}_\theta^{d\pm}(p) id_{T_pM_h}$ となるときをいう。すると、この定義は $A_p = \kappa_p id_{T_pM_h}$ が成り立つことと同値になり、θ によらないことがわかる。したがって単に **umbilic point** と呼ぶ。また、hypersurface M_h が **totally umbilic** であるとは、M_h 上のすべての点が umbilic point となるときをいう。

Totally umbilic な曲面の分類として、以下の命題が成り立つ。

Proposition 3.2. *Hypersurface M_h が totally umbilic* であるとき、$\bar{\kappa}_\theta^{d\pm}(p), \kappa_p$ の値は一定となる。これを $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm}, \kappa$ と表すと、以下の分類を得る。

(1) $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} \neq 0$ の場合

(a) $0 < |\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} + \cos\theta| < 1$ ならば、M_h は *hyperbolic hyperquadric* に含まれる。

(b) $1 < |\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} + \cos\theta|$ ならば、M_h は *elliptic hyperquadric* に含まれる。

(c) $|\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} + \cos\theta| = 1$ ならば、M_h は *parabolic hyperquadric* に含まれる。

(d) $\kappa = \bar{\kappa}_\theta^{d\pm} + \cos\theta = 0$ ならば、M_h は *flat hyperbolic hyperquadric* に含まれる。

(2) $\bar{\kappa}_\theta^{d\pm} = 0$ の場合、M_h は *θ-flat hyperbolic hyperquadric* に含まれる。

Umbilic point p について、$\bar{\kappa}_\theta^{d\pm}(p) = 0$ となるものを **$\theta^\pm$-flat point** と定義する。

任意の i について、$\mathbf{x}_{u_i}^h$ は spacelike であるので、$g_{ij}(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{x}_{u_i}^h(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^h(\mathbf{u}) \rangle$ は正定値かつ対称になる。このことから M_h 上の Riemann 計量 ($\mathbf{x}^h$ の **hyperbolic 第一基本形式**) は、

$$g_{ij}(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{x}_{u_i}^h(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^h(\mathbf{u}) \rangle, \ ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} du_i du_j$$

で与えられる。さらに、$\mathbf{x}^h$ の θ-第二基本形式を

$$\bar{h}_{ij}^{\theta\pm}(\mathbf{u}) := \langle -\mathbb{N}_{\theta u_i}^{d\pm}(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^h(\mathbf{u}) \rangle$$

と定義し、$\mathbf{x}^h$ の **de Sitter 第二基本形式**を

$$h_{ij}(\mathbf{u}) := \langle -\mathbf{x}_{u_i}^d(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^h(\mathbf{u}) \rangle$$

と定義する。すると、$\bar{h}_{ij}^{\theta\pm}(\mathbf{u}) = -\cos\theta g_{ij}(\mathbf{u}) \pm h_{ij}(\mathbf{u})$ が成り立っている。

Proposition 3.3 (θ-Weingarten 公式). $(g^{kj}) = (g_{kj})^{-1}, ((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j) = (\bar{h}^{\theta\pm}_{ik})(g^{kj})$ とおくとき、次の公式が成り立つ。

$$\mathbb{N}^{d\pm}_{\theta u_i} = -\sum_{j=1}^{n-1} (\bar{h}^{\theta\pm})^i_j \mathbf{x}^h_{u_j}$$

このとき、θ-第二基本形式の定義から $((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j(\mathbf{u})) = -\cos\theta I \pm (h_{ik}(\mathbf{u}))(g^{kj}(\mathbf{u}))$ となっている。また、θ-Weingarten 公式より θ-de Sitter shape operator $S^{d\pm}_\theta(p)$ の表現行列は、$((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j(\mathbf{u}))$ である。このことから、以下の公式を得る。

Corollary 3.4.

$$K^{d\pm}_\theta = \frac{\det(\bar{h}^{\theta\pm}_{ij})}{\det(g_{kl})}$$

M_h の点 $p = \mathbf{x}^h(\mathbf{u})$ について、$K^{d\pm}_\theta(\mathbf{u}) = 0$ となるものを $\theta^\pm$-**parabolic point** という。

3.2 θ-height function

Hypersurface $\mathbf{x}^h : U \to H^n_+(-1)$ と $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ なる θ について、$\mathbf{x}^h$ の θ-**height function** を次のように定義する。

$$H^d_\theta : U \times S^n_1(\sin^2\theta) \to \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto \langle \mathbf{x}^h(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle + \cos\theta$$

すると、$\theta = 0$ のとき horizontal geometry における lightcone height function であり、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のときは vertical geometry の de Sitter height function になっている [2]。θ-height function について次の命題が成り立つ。

Proposition 3.5. (1) $H^d_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ となる必要十分条件は、ある $\mu, \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$ があって、

$$\mathbf{v} = \cos\theta \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) + \mu \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \mathbf{x}^h_{u_i}(\mathbf{u})$$

が成り立つことである。
(2) $H^d_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\partial H^d_\theta}{\partial u_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cdots = \frac{\partial H^d_\theta}{\partial u_{n-1}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ となる必要十分条件は、

$$\mathbf{v} = \cos\theta \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) = \mathbb{N}^{d\pm}_\theta(\mathbf{u})$$

が成り立つことである。

$\mathbf{v}_0 \in S_1^n(\sin^2\theta)$ を固定した θ-height function $h^d_{\theta\mathbf{v}_0}$ を、

$$h^d_{\theta\mathbf{v}_0} : U \to \mathbb{R}, \quad h^d_{\theta\mathbf{v}_0}(\mathbf{u}) := H^d_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$$

と定める。また、$h^d_{\theta\mathbf{v}_0}$ の $\mathbf{u}$ におけるヘッセ行列を Hess $(h^d_{\theta\mathbf{v}_0})(\mathbf{u})$ と表す。すると、次の命題が成り立つ。

Proposition 3.6. $\mathbf{v}_0^{\theta\pm} = \mathbb{N}_\theta^{d\pm}(\mathbf{u}_0)$, $p = \mathbf{x}^h(\mathbf{u}_0)$ をとるとき、次が成り立つ。
(1) p が $\theta^\pm$*-parabolic point* となる必要十分条件は、$\det \mathrm{Hess}\,(h^d_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}})(\mathbf{u}_0) = 0$ が成り立つことである。
(2) p が $\theta^\pm$*-flat point* となる必要十分条件は、$\mathrm{rank\ Hess}\,(h^d_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}})(\mathbf{u}_0) = 0$ が成り立つことである。

3.3 θ-de Sitter Gauss indicatrix as wave front

関数芽 $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) \to (\mathbb{R}, 0)$ が **Morse** 超曲面族であるとは、$\Delta^* F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) \to (\mathbb{R}^{k+1}, 0)$ を $\Delta^* F := (F, \frac{\partial F}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u_k})$ とおいたとき、$\Delta^* F$ が非特異であるときをいう。このとき $n-1$ 次元部分多様体芽

$$\Sigma_*(F) := \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) |\ F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial u_k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$$

を得る。また、写像芽 $\mathcal{L}_F : (\Sigma_*(F), (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) \to PT^*\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}_F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mathbf{v}, [\frac{\partial F}{\partial v_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \cdots : \frac{\partial F}{\partial v_n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})])$$

は Legendrian immersion germ である。θ-height function H^d_θ について、次が成り立つ。

Proposition 3.7. *θ-height function* H^d_θ は $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \Sigma_*(H^d_\theta)$ のまわりで *Morse* 超曲面族である。

θ-height function H^d_θ の特異点集合は

$$\Sigma_*(H^d_\theta) = (\Delta^* H^d_\theta)^{-1}(0) = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U \times S_1^n(\sin^2\theta) \mid H^d_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H^d_{\theta u_i}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$$

と表されるが、Proposition 3.5 より $\Sigma_*(H^d_\theta) = \{(\mathbf{u}, \mathbb{N}_\theta^{d\pm}(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in U\}$ である。以上からルジャンドル特異点論により Legendrian immersion germ $\mathcal{L}_\theta^{d\pm}$ を得る。ここで $\mathbf{v}^{\theta\pm} = \mathbb{N}_\theta^{d\pm}(\mathbf{u})$ であることから、$\mathcal{L}_\theta^{d\pm}$ の wave front は θ-de Sitter Gauss indicatrix の像となる。

3.4 Contact with θ-flat hyperbolic hyperquadric

この節では hypersurface M_h と θ-flat hyperbolic hyperquadric の間の接触について研究する。そのために部分多様体の間の接触に関する Montaldi の理論 [6] を復習する。まず以下の定義を行う。

$X_i, Y_i \subset (\mathbb{R}^n, y_i)$ を $\dim X_1 = \dim X_2, \dim Y_1 = \dim Y_2$ を満たす部分多様体とする。このとき、X_1, Y_1 の y_1 における接触型と X_2, Y_2 の y_2 における接触型が同じであるとは、微分同相写像芽 $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \to (\mathbb{R}^n, y_2)$ があって、集合芽として $\Phi(X_1) = X_2$, $\Phi(Y_1) = Y_2$ が成り立つことである。この関係を $K(X_1, Y_1 : y_1) = K(X_2, Y_2 : y_2)$ と表す。

Montaldi は多様体の間の接触型についての関係を写像の間の $\mathcal{K}$-同値関係を用いて次のように表した。

Theorem 3.8 (Montaldi). $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$ を部分多様体、$\dim Y_i = n - 1$ とし、$f_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \to (\mathbb{R}, 0)$ を $f_i^{-1}(0) = Y_i$ を満たす *submersion*、$g_i : (U_i, x_i) \to (\mathbb{R}^n, y_i)$ を $g_i(U_i) = X_i$ なる *immersion* とおく。このとき $K(X_1, Y_1 : y_1) = K(X_2, Y_2 : y_2)$ であるための必要十分条件は $f_1 \circ g_1$ と $f_2 \circ g_2$ が $\mathcal{K}$-同値となることである。

Montaldi[6] は、Y_i の余次元が一般の場合にも同様の定理を示した。

$\mathbf{x}^h : U \to H^n_+(-1)$ を hypersurface とし、$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ とする。$S^n_1(\sin^2\theta) \ni \mathbf{v}_0$ について、関数 $\mathfrak{h}^d_{\theta \mathbf{v}_0} : H^n_+(-1) \to \mathbb{R}$ を $\mathfrak{h}^d_{\theta \mathbf{v}_0}(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle + \cos\theta$ と定義する。すると

$$\mathfrak{h}^d_{\theta \mathbf{v}_0}{}^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in H^n_+(-1) | \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle = -\cos\theta\} = HQ_h(\mathbf{v}_0, -\cos\theta)$$

より、$\mathfrak{h}^d_{\theta \mathbf{v}_0}{}^{-1}(0)$ は θ-flat hyperbolic hyperquadric となる。さらに、$\mathbb{N}^{d\pm}_\theta(\mathbf{u}_0) = \mathbf{v}^{\theta\pm}_0 \in S^n_1(\sin^2\theta)$ のとき、$\mathfrak{h}^d_{\theta \mathbf{v}^{\theta\pm}_0}{}^{-1}(0)$ は hypersurface $M_h = \mathbf{x}^h(U)$ に $p = \mathbf{x}^h(\mathbf{u}_0)$ で接している。このような $\mathfrak{h}^d_{\theta \mathbf{v}^{\theta\pm}_0}{}^{-1}(0)$ を $THQ^\pm_h(\mathbf{x}^h, \mathbf{u}_0; \theta)$ と表して **tangent θ-flat hyperbolic hyperquadric** という。

$i = 1, 2$ について $\mathbf{x}^h_i : (U, \mathbf{u}_i) \to (H^n_+(-1), \mathbf{x}^h_i(\mathbf{u}_i))$ を hypersurface とし、$\mathbf{x}^h_i$ の θ-de Sitter Gauss indicatrix germ を $\mathbb{N}^{d\pm}_{\theta\, i}$, θ-height function を $H^d_{\theta i}$ とし、各 $\mathbf{u}_i$ について、$\mathbf{v}^{\theta\pm}_i = \mathbb{N}^{d\pm}_{\theta\, i}(\mathbf{u}_i)$ を固定した θ-height function を $h^\theta_{i, \mathbf{v}^{\theta\pm}_i}$ とする。また、Legendrian immersion germ を $\mathcal{L}^{d\pm}_{\theta\, i}$ とおく。このとき、ルジャンドル特異点論の応用として以下が成立する。

Theorem 3.9. 2 つの *hypersurface* $\mathbf{x}^h_i$ に対応する *Legendrian immersion germ* $\mathcal{L}^{d\pm}_{\theta\, i}$ が *Legendrian* 安定ならば、次の条件は同値である。

1. $\mathbb{N}^{d\pm}_{\theta\ 1}$ と $\mathbb{N}^{d\pm}_{\theta\ 2}$ は $\mathcal{A}$-同値
2. $\mathcal{L}^{d\pm}_{\theta\ 1}$ と $\mathcal{L}^{d\pm}_{\theta\ 2}$ は *Legendrian* 同値
3. $H^d_{\theta 1}$ と $H^d_{\theta 2}$ は $\mathcal{P}$-$\mathcal{K}$-同値
4. $h^{\theta}_{1,\mathbf{v}_1^{\theta\pm}}$ と $h^{\theta}_{2,\mathbf{v}_2^{\theta\pm}}$ は $\mathcal{K}$-同値
5. $K(\mathbf{x}^h_1(U), THQ^{\pm}_h(\mathbf{x}^h_1,\mathbf{u}_1;\theta):\mathbf{x}^h_1(\mathbf{u}_1)) = K(\mathbf{x}^h_2(U), THQ^{\pm}_h(\mathbf{x}^h_2,\mathbf{u}_2;\theta):\mathbf{x}^h_2(\mathbf{u}_2))$

Hypersurface $\mathbf{x}^h$ と $\mathbf{u}_0 \in U$ について、$(\mathbf{x}^{h^{-1}}(THQ^{\pm}_h(\mathbf{x}^h,\mathbf{u}_0;\theta)),\mathbf{u}_0)$ を $\mathbf{x}^h$ の **positive(negative) tangent θ-flat hyperbolic hyperquadrical indicatrix germ** という。この集合芽は $\mathbb{N}^{d\pm}_{\theta}$ についての $\mathcal{A}$-不変量になることがわかる。

3.5 Hyperbolic Monge forms

[2] では、$H^n_+(-1)$ 内の hypersurface の局所表示として hyperbolic Monge form (H-Monge form) が導入された。ここでは $n=3$ ときを考える。

U を $\mathbb{R}^2$ における $\mathbf{0}$ の開近傍とし、$f:U\to\mathbb{R}$ を $f(0)=0$, $f_{u_i}(0)=0$ $(i=1,2)$ を満たす関数とする。ここで H-Monge form $\mathbf{x}^h_f : U \to H^3_+(-1)$ を

$$\mathbf{x}^h_f(\mathbf{u}) := (\sqrt{f^2(\mathbf{u})+u_1^2+u_2^2+1}, f(\mathbf{u}), u_1, u_2)$$

と定める。ここで、$H^3_+(-1)$ 内のどんな surface も、局所的には H-Monge form によって与えられることが知られている [2]。計算により $\mathbf{x}^h_f(\mathbf{0})=(1,0,0,0)$, $\mathbf{x}^d_f(\mathbf{0})=(0,-1,0,0)$ となり、$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ なる θ について、$\mathbb{N}^{d\pm}_\theta(\mathbf{0})=(\cos\theta,\mp1,0,0)$ である。$\mathbf{x}^h_f(\mathbf{0})=p$, $\mathbb{N}^{d\pm}_\theta(\mathbf{0})=\mathbf{v}^{\theta\pm}_0$ とおく。$\mathbf{v}^{\theta\pm}_0$ における θ-flat hyperbolic quadric $HQ_h(\mathbf{v}^{\theta\pm}_0,-\cos\theta)$ の H-Monge form $\mathbf{x}^\theta_{HQ^{\pm}_h}: U\to H^3_+(-1)$ は、$0<\theta\le\frac{\pi}{2}$ なる θ について、

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\theta_{HQ^\pm_h}(\mathbf{u}) = (1 - &\frac{1}{\sin^2\theta}(1-\sqrt{1+\sin^2\theta(u_1^2+u_2^2)}),\\ &\pm\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(1-\sqrt{1+\sin^2\theta(u_1^2+u_2^2)}), u_1, u_2)\end{aligned}$$

となる。このとき、$\theta=\frac{\pi}{2}$ ならば flat hyperbolic quadric (plane) の H-Monge form に一致し、θ を 0 に近づけると parabolic quadric (horosphere) の H-Monge form に収束する。さらに $\mathbf{x}^\theta_{HQ^\pm_h}(U)$ は p で $\mathbf{x}^h_f(U)$ に接していることがわかるので、$\mathbf{x}^\theta_{HQ^\pm_h}(U)$ は $\mathbf{x}^h_f$ の $p=\mathbf{x}^h_f(\mathbf{0})$ における tangent θ-flat hyperbolic quadric $THQ^\pm_h(\mathbf{x}^h_f,\mathbf{0};\theta)$ である。$\mathbf{x}^h_f$ の tangent θ-flat hyperbolic quadrical indicatrix は、

$$\mathbf{x}^{h^{-1}}_f(THQ^\pm_h(\mathbf{x}^h_f,\mathbf{0};\theta)) = \{\mathbf{u}\in U \mid \pm f(\mathbf{u}) = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(1-\sqrt{1+\sin^2\theta(u_1^2+u_2^2)})\}$$

と表される。

4 slant geometry on de Sitter space

ここでは、de Sitter 空間における slant geometry を考える。

4.1 Differential geometry of spacelike hypersurface in de Sitter space

S_1^n 内の spacelike hypersurface を考える。$U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ を開集合とし、その座標を $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ と表す。写像 $\mathbf{x}^d : U \to S_1^n$ を embedding とし、その像 $\mathbf{x}^d(U)$ を M_d と書く。いま $\mathbf{x}^d$ が **spacelike hypersurface** であるとは、$\mathbf{x}^d_{u_i}$ によって張られる空間が spacelike であるときをいう。その単位法ベクトルを $\mathbf{x}^h$ とすると、常に $\mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \in H^n(-1)$ を満たしている。このことから、$\cos\theta \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) \in H^n(-\sin^2\theta)$ がわかるので、

$$\mathbb{N}_\theta^{h\pm} : U \to H^n(-\sin^2\theta)$$
$$\mathbf{u} \mapsto \cos\theta \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^h(\mathbf{u})$$

なる写像を定義し、**θ-hyperbolic Gauss image** of $\mathbf{x}^d$ という。すると、$\theta = 0$ のとき、$\mathbb{N}_\theta^{h\pm} = \mathbf{x}^d \pm \mathbf{x}^h$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、$\mathbb{N}_\theta^{h\pm} = \pm\mathbf{x}^h$ となり、これらは [5] で定義された、lightcone Gauss image (θ=0), hyperbolic Gauss image (θ=$\frac{\pi}{2}$) に一致する。

ここで spacelike hyperplane と n 次元 de Sitter 空間の共通部分

$$HP(\mathbf{v}, \cos\theta) \cap S_1^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \cos\theta,\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}\ (\mathbf{v} \in H^n(-\sin^2\theta))$$

を $HQ_d(\mathbf{v}, \cos\theta)$ と表し、**θ-flat elliptic hyperquadric** という。すると、$\theta = 0$ のとき、parabolic hyperquadric $HQ_d(\mathbf{v}, \cos\theta) = HS_d(\mathbf{v}, 1)$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、flat elliptic hyperquadric $HQ_d(\mathbf{v}, \cos\theta) = HE_d(\mathbf{v}, 0)$ となる。 θ-flat elliptic hyperquadric について次が成り立つ。

Proposition 4.1. $\mathbb{N}_\theta^{h\pm}$ が定値写像のとき、*spacelike hypersurface* M_d は *θ-flat elliptic hyperquadric* に含まれる。

U と M_d は embedding $\mathbf{x}^d$ によって同一視できるので、$d\mathbf{x}^h(\mathbf{u})$, $d\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{u})$ を線型変換 $d\mathbf{x}^h(\mathbf{u})$, $d\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{u}) : T_pM_d \to T_pM_d$ とみなせる。このとき、$d\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{u}) = \cos\theta id_{T_pM_d} \pm d\mathbf{x}^h(\mathbf{u})$ となっている。

線型変換 $S_\theta^{h\pm}(p) := -d\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{u})$ を M_d の p における **θ-hyperbolic shape operator** といい、線型変換 $A_p := -d\mathbf{x}^h(\mathbf{u})$ を M_d の p における **hyperbolic shape operator** という。それぞれの固有値を $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm}(p)$, κ_p とおく。すると、$S_\theta^{h\pm}(p) = -\cos\theta id_{T_pM_d} \pm A_p$ であること

から、ベクトル $\mathbf{v}$ が $S_\theta^{h\pm}(p)$ の固有ベクトルであることと A_p の固有ベクトルであることは同値になり、$\bar{\kappa}_\theta^{h\pm}(p) = -\cos\theta \pm \kappa_p$ が成り立つ。また、関数 $K_\theta^{h\pm}(\mathbf{u}) := \det S_\theta^{h\pm}(p)$ を M_d の p における **θ-hyperbolic Gauss Kronecker curvature** といい、関数 $K(\mathbf{u}) := \det A_p$ を M_d の p における **hyperbolic Gauss Kronecker curvature** という。

U の点 $\mathbf{u}$ (または $p = \mathbf{x}^d(\mathbf{u})$) が M_d の **θ-umbilic point** であるとは、$S_\theta^{h\pm}(p) = \bar{\kappa}_\theta^{h\pm}(p) id_{T_pM_d}$ が成り立つときをいう。すると、この定義は $A_p = \kappa_p id_{T_pM_d}$ が成立することと同値になり、θ に依らないことがわかる。したがって単に **umbilic point** と呼ぶ。また、spacelike hypersurface M_d が **totally umbilic** であるとは、M_d 上のすべての点 p が umbilic point であることをいう。

Proposition 4.2. *Spacelike hypersurface M_d が totally umbilic* であるとき、$\bar{\kappa}_\theta^{h\pm}(p), \kappa_p$ の値は p に依存せずに一定となる。これを $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm}$, κ と表すと、以下の分類を得る。

(1) $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} \neq 0$ の場合

(a) $0 < |\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} + \cos\theta| < 1$ ならば、M_d は *elliptic hyperquadric* に含まれる。

(b) $1 < |\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} + \cos\theta|$ ならば、M_d は *hyperbolic hyperquadric* に含まれる。

(c) $|\kappa| = |\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} + \cos\theta| = 1$ ならば、M_d は *parabolic hyperquadric* に含まれる。

(d) $\kappa = \bar{\kappa}_\theta^{h\pm} + \cos\theta = 0$ ならば、M_d は *flat elliptic hyperquadric* に含まれる。

(2) $\bar{\kappa}_\theta^{h\pm} = 0$ の場合、M_d は *θ-flat elliptic hyperquadric* に含まれる。

このとき、umbilic point p について、$\bar{\kappa}_\theta^{h\pm}(p) = 0$ となるものを **$\theta^\pm$-flat point** と定義する。Proposition 4.2. から θ-flat elliptic hyperquadric は totally umbilic で θ-flat な曲面であることがわかる。

任意の $i = 1, \dots, n-1$ について、$\mathbf{x}_{u_i}^d$ は spacelike であるので、$g_{ij}(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{x}_{u_i}^d(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^d(\mathbf{u})\rangle$ は正定値な対称行列になる。このことから M_d 上の Riemann 計量 ($\mathbf{x}^d$ の **de Sitter** 第一基本形式) が、

$$g_{ij}(\mathbf{u}) := \langle \mathbf{x}_{u_i}^d(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^d(\mathbf{u})\rangle,\ ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} du_i du_j$$

で与えられる。さらに、$\mathbf{x}^d$ の θ-第二基本形式を

$$\bar{h}_{ij}^{\theta\pm}(\mathbf{u}) = \langle -\mathbb{N}_{\theta u_i}^{h\pm}(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^d(\mathbf{u})\rangle$$

と定義し、$\mathbf{x}^d$ の **hyperbolic** 第二基本形式を

$$h_{ij}(\mathbf{u}) = \langle -\mathbf{x}_{u_i}^h(\mathbf{u}), \mathbf{x}_{u_j}^d(\mathbf{u})\rangle$$

と定義する。すると、$\bar{h}_{ij}^{\theta\pm}(\mathbf{u}) = -\cos\theta g_{ij}(\mathbf{u}) \pm h_{ij}(\mathbf{u})$ が成り立つ。

Proposition 4.3 (θ-Weingarten 公式). $(g^{kj}) = (g_{kj})^{-1}, ((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j) = (\bar{h}^{\theta\pm}_{ik})(g^{kj})$ とおくとき、次の公式が成り立つ。

$$\mathbb{N}^{h\pm}_{\theta u_i} = -\sum_{j=1}^{n-1} (\bar{h}^{\theta\pm})^i_j \mathbf{x}^d_{u_j}$$

このとき、θ-第二基本形式の定義から $((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j(\mathbf{u})) = -\cos\theta \mathbf{I}_{n-1} \pm (h_{ik}(\mathbf{u}))(g^{kj}(\mathbf{u}))$ となる。また、θ-Weingarten 公式より θ-hyperbolic shape operator $S^{h\pm}_\theta(p)$ の表現行列は、$((\bar{h}^{\theta\pm})^i_j(\mathbf{u}))$ である。このことから、θ-hyperbolic Gauss Kronecker curvature $K^{h\pm}_\theta$ について以下の公式を得る。

Corollary 4.4.

$$K^{h\pm}_\theta = \frac{\det(\bar{h}^{\theta\pm}_{ij})}{\det(g_{kl})}$$

M_d の点 $p = \mathbf{x}^d(\mathbf{u})$ について、$K^{h\pm}_\theta(\mathbf{u}) = 0$ となるものを $\theta^\pm$**-parabolic point** という。また θ-hyperbolic Gauss image $\mathbb{N}^{h\pm}_\theta$ の特異点は、$\theta^\pm$-parabolic point となる。

4.2 θ-height function

Spacelike hypersurface $\mathbf{x}^d : U \to S^n_1$ と $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ なる θ について、$\mathbf{x}^d$ の θ**-height function** を関数族として次のように定義する。

$$H^h_\theta : U \times H^n(-\sin^2\theta) \to \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto \langle \mathbf{x}^d(\mathbf{u}),\ \mathbf{v} \rangle - \cos\theta$$

すると $\theta = 0$ のとき、$H^h_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}^d(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle - 1$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $H^h_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle \mathbf{x}^d(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle$ となり、[5] で定義された lightcone height function($\theta = 0$), hyperbolic height function($\theta = \frac{\pi}{2}$) に一致する。

Proposition 4.5. θ-height function H^h_θ について次が成り立つ。

1. $H^h_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ となる必要十分条件は、ある $\mu, \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$ があって、

$$\mathbf{v} = \cos\theta \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) + \mu \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \mathbf{x}^d_{u_i}(\mathbf{u})$$

が成り立つことである。

2. $H^h_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\partial H^h_\theta}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \cdots = \frac{\partial H^h_\theta}{\partial \mathbf{u}_{n-1}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ となる必要十分条件は、

$$\mathbf{v} = \cos\theta \mathbf{x}^d(\mathbf{u}) \pm \mathbf{x}^h(\mathbf{u}) = \mathbb{N}^{h\pm}_\theta(\mathbf{u})$$

が成り立つことである。

$\mathbf{v}_0 \in H^n(-\sin^2\theta)$ を固定した θ-height function $h^h_{\theta\mathbf{v}_0}$ を、

$$h^h_{\theta\mathbf{v}_0} : U \to \mathbb{R}, \quad h^h_{\theta\mathbf{v}_0}(\mathbf{u}) = H^h_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$$

と定める。また、$h^h_{\theta\mathbf{v}_0}(\mathbf{u})$ の Hesse 行列を Hess $(h^h_{\theta\mathbf{v}_0})(\mathbf{u})$ と表す。

Proposition 4.6. $\mathbf{v}_0^{\theta\pm} = \mathbb{N}^{h\pm}_\theta(\mathbf{u}_0)$, $p = \mathbf{x}^d(\mathbf{u}_0)$ とするとき、以下が成り立つ。

1. *p が $\theta^\pm$-parabolic point となる必要十分条件は、*$\det \mathrm{Hess}\,(h^h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}})(\mathbf{u}_0) = 0$ が成り立つことである。
2. *p が $\theta^\pm$-flat point となる必要十分条件は、*$\mathrm{rank}\ \mathrm{Hess}\,(h^h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}})(\mathbf{u}_0) = 0$ が成り立つことである。

4.3 θ-hyperbolic Gauss image as wave front

Spacelike hypersurface$\mathbf{x}^d$ の θ-height function H^θ に対し、H^h_θ の特異点集合を $\sum_*(H^h_\theta)$ とおくと、特異点集合は $\sum_*(H^h_\theta) = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) | H^h_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\partial H^h_\theta}{\partial u_i}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0\}$ と表される。Proposition4.5. より $\sum_*(H^h_\theta) = \{(\mathbf{u}, \mathbb{N}^{h\pm}_\theta(\mathbf{u})) | \mathbf{u} \in U\}$ となる。θ-height function H^h_θ について次が成り立つ。

Proposition 4.7. *H^θ は $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \sum_*(H^\theta)$ のまわりで Morse 超曲面族である。*

Legendrian 特異点論から、$\sum_*(H^h_\theta)$ は部分多様体となり、Legendrian immersion germ $\mathcal{L}^{h\pm}_\theta$ が構成される。また $\mathcal{L}^{h\pm}_\theta$ の wave front は θ-hyperbolic Gauss image の像と一致する。

4.4 contact with θ-flat elliptic hyperquadric

この節では spacelike hypersurface M_d と θ-flat elliptic hyperquadric の間の接触に関して見ていく。$\mathbf{x}^d : U \to S^n_1$ を spacelike hypersurface とし、$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ とする。$H^n(-\sin^2\theta) \ni \mathbf{v}_0$ について、関数 $\mathfrak{h}^h_{\theta\mathbf{v}_0} : S^n_1 \to \mathbb{R}$ を $\mathfrak{h}^h_{\theta\mathbf{v}_0}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle - \cos\theta$ と定義する。すると、

$$\mathfrak{h}^h_{\theta\mathbf{v}_0}{}^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in S^n_1 | \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_0 \rangle = \cos\theta\} = S^n_1(-1) \cap HP(\mathbf{v}_0, \cos\theta) = HQ_d(\mathbf{v}_0, \cos\theta)$$

は θ-frat elliptic hyperquadric となる。さらに、$\mathbf{v}_0 = \mathbb{N}^{h\pm}_\theta(u_0) =: \mathbf{v}_0^{\theta\pm} \in H^n(-\sin^2\theta)$ の時 $\mathfrak{h}^h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}{}^{-1}(0)$ は spacelike hypersurface $M_d = \mathbf{x}^d(U)$ に $p = \mathbf{x}^d(\mathbf{u}_0)$ で接している。ここで、Theorem 3.8. における f_i と g_i は $\mathfrak{h}^\theta_{\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}$ と $\mathbf{x}^d$ に対応する。$\mathfrak{h}^h_{\theta\mathbf{v}_0^{\theta\pm}}{}^{-1}(0) = HQ_d(v_0^{\theta\pm}, \cos\theta)$

を M_d の p における **tangent θ-flat elliptic hyperquadric** といい、$THQ_d^{\pm}(\mathbf{x}^d, u_0; \theta)$ と表す。$i = 1, 2$ について $\mathbf{x}_i^d : (U, u_i) \to (S_1^n, \mathbf{x}_i^d(u_i))$ を spacelike hypersurface とし、対応する θ-hyperbolic Gauss image を $\mathbb{N}_{\theta i}^{h\pm}$, Legendrian immersion を $\mathcal{L}_{\pm\theta\ i}^{h}$, θ-height function を $H_{\theta i}^h$, 各 $\mathbf{u}_i$ について、$\mathbf{v}_i^{\theta\pm} = \mathbb{N}_{\theta i}^{h\pm}(\mathbf{u}_i)$ を固定した θ-height function を $h_{\theta i, \mathbf{v}_i^{\theta\pm}}^h(u)$ とする。このとき Legendrian 特異点論の応用として以下が成立する。

Theorem 4.8. 2つの *spacelike hypersurface* $\mathbf{x}_i^d$ に対応する *Legendrian immersion germ* $\mathcal{L}_{\theta i}^{\pm}$ が *Legendrian* 安定ならば、次の命題は同値である。

1. $\mathbb{N}_{\theta 1}^{h\pm}$ と $\mathbb{N}_{\theta 2}^{h\pm}$ は $\mathcal{A}$-同値
2. $\mathcal{L}_{\theta 1}^{h\pm}$ と $\mathcal{L}_{\theta 2}^{h\pm}$ は *Legendrian* 同値
3. $H_{\theta 1}^h$ と $H_{\theta 2}^h$ は $\mathcal{P}$-$\mathcal{K}$ 同値
4. $h_{\theta 1, \mathbf{v}_1^{\theta\pm}}^h$ と $h_{\theta 2, \mathbf{v}_2^{\theta\pm}}^h$ は $\mathcal{K}$-同値
5. $K(\mathbf{x}_1^d(U), THQ_d^{\pm}(\mathbf{x}_1^d, u_1; \theta) : \mathbf{x}_1^d(u_1)) = K(\mathbf{x}_2^d(U), THQ_d^{\pm}(\mathbf{x}_2^d, u_2; \theta) : \mathbf{x}_2^d(u_2))$

Spacelike hypersurface $\mathbf{x}^d$ と $\mathbf{u}_0 \in U$ について、$(\mathbf{x}^{d-1}(THQ_d^{\pm}(\mathbf{x}^d, \mathbf{u}_0; \theta)), \mathbf{u}_0)$ を $\mathbf{x}^h$ の **positive(negative) tangent θ-flat elliptic hyperquadrical indicatrix germ** という。この集合芽は $\mathbb{N}_\theta^{h\pm}$ についての $\mathcal{A}$-不変量になることがわかる。

4.5 Spacelike de Sitter Monge forms

[5] では、S_1^n 内の spacelike hypersurface の局所表示として spacelike de Sitter Monge form を導入した。ここでは、$n = 3$ のときを考える。U を $\mathbb{R}^2$ における $\mathbf{0}$ の開近傍とし、$\mathbf{C}^\infty$ 関数 $f : U \to \mathbb{R}$ を $f(\mathbf{0}) = 0,\ f_{u_i}(\mathbf{0}) = 0\ (i = 1, 2)$ を満たす関数とする。ここで、spacelike de Sitter Monge form$\mathbf{x}_f^d : U \to S_1^3$ を

$$\mathbf{x}_f^d(\mathbf{u}) := (-f(u), -\sqrt{1 + f^2(U) - u_1^2 - u_2^2}, u_1, u_2)$$

と定める。ここで S_1^n 内のどんな spacelike surface も、局所的には spacelike de Sitter Monge form によって与えられることが知られている [5]。計算により $x_f^d(\mathbf{0}) = (0, -1, 0, 0), x_f^h(\mathbf{0}) = (1, 0, 0, 0)$ より、$\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{0}) = (\pm 1, -\cos\theta, 0, 0)$ である。 $\mathbf{x}_f^d(\mathbf{0}) = p$, $\mathbb{N}_\theta^{h\pm}(\mathbf{0}) = \mathbf{v}_0^{\theta\pm}$ とおく。$\mathbf{v}_0^{\theta\pm}$ における θ-flat elliptic quadric $HQ_d(\mathbf{v}_0^{\theta\pm}, \cos\theta)$ の spacelike de Sitter Monge form $\mathbf{x}_{HQ_d^{\pm}}^{\theta} : U \to S_1^3$ は、$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ なる θ について

$$\mathbf{x}_{HQ_d^{\pm}}^{\theta}(\mathbf{u}) = (\mp\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(1 - \sqrt{1 - \sin^2\theta(u_1^2 + u_2^2)}), -1 + \frac{1}{\sin^2\theta}(1 - \sqrt{1 - \sin^2\theta(u_1^2 + u_2^2)}), u_1, u_2))$$

となる。このとき、もし $\theta = \frac{\pi}{2}$ ならば flat elliptic quadric の spacelike de Sitter Monge form に一致し、θ を 0 に近づけると parabolic quadric の spacelike de Sitter Monge form に収束する。$\mathbf{x}^{\theta}_{HQ^{\pm}_{d}}(U)$ は $\mathbf{x}^{d}_{f}(\mathbf{0}) = p$ において $\mathbf{x}^{d}_{f}(U)$ に接している。したがって、$\mathbf{x}^{\theta}_{HQ^{\pm}_{d}}(U)$ は $\mathbf{x}^{d}_{f}(U)$ の $p = \mathbf{x}^{d}_{f}(\mathbf{0})$ における tangent θ-flat elliptic quadric $THQ^{\pm}_{d}(\mathbf{x}^{d}_{f}, \mathbf{0}; \theta)$ である。さらに $\mathbf{x}^{d}_{f}$ の tangent θ-flat elliptic quadrical indicatrix は、

$$\mathbf{x}^{d^{-1}}_{f}(THQ^{\pm}_{d}(\mathbf{x}^{h}_{d}, \mathbf{0}; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U | \pm f(\mathbf{u}) = \frac{cos\theta}{sin^2\theta}(1 - \sqrt{1 - sin^2\theta(u_1^2 + u_2^2)})\}$$

と表される。

5 Examples

最後に、hyperbolic 空間について、$n = 3$ の場合のいくつかの例とその図を紹介する。図を描くために Poincaré ball model を考える。$D = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ を hyperbolic 空間の Poincaré ball model とする。hyperbolic metric は

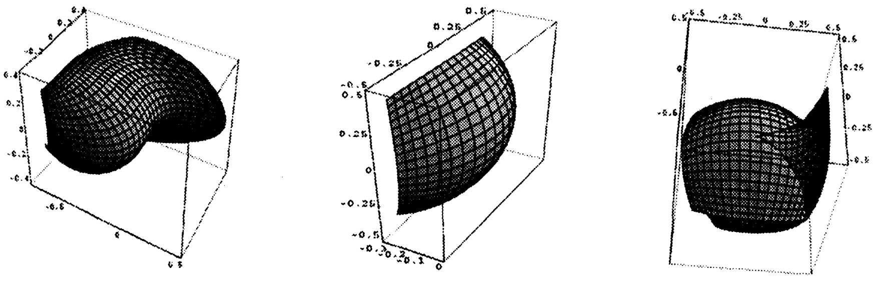
$$ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

である。ここで、canonical isometric diffeomorphism $\Phi : H^3_+(-1) \to D$ の存在が知られており、

$$\Phi(x_0, x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{x_0 + 1}, \frac{x_2}{x_0 + 1}, \frac{x_3}{x_0 + 1})$$

で与えられる。したがって、$f(\mathbf{0}) = f_{u_i}(\mathbf{0}) = 0$ なる任意の関数 $f(u_1, u_2)$ について、D 内にその H-Monge form によって与えられる曲面の絵を描くことができる。

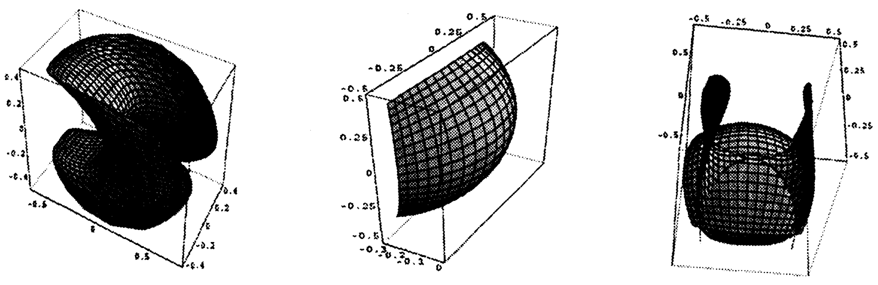
Example 5.1. $f(u_1, u_2) = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(1 - \sqrt{1 + \sin^2\theta(u_1^2 + u_2^2)}) + \frac{2}{3}u_1^3 - u_2^2$ とすると、$\kappa_1 = -\cos\theta$, $\kappa_2 = -\cos\theta - 2$ より正負の *θ-de Sitter Gauss-Kronecker curvature* はそれぞれ $K^{d+}_{\theta}(\mathbf{0}) = 0$, $K^{d-}_{\theta}(\mathbf{0}) = 4\cos\theta(\cos\theta + 1)$ となる。したがって $\mathbf{0}$ は *θ^+-parabolic point* であり、$\mathbf{x}^{h}_{f}$ の正の *tangent θ-flat hyperbolic quadrical indicatrix* は $\mathbf{x}^{h^{-1}}_{f}(THQ^{+}_{h}(\mathbf{x}^{h}_{f}, \mathbf{0}; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U | \frac{2}{3}u_1^3 - u_2^2 = 0\}$ となり *ordinary cusp* である。下図は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときの曲面 $\Phi \circ \mathbf{x}^{h}_{f}(U)$ と正の *θ-flat hyperbolic quadric* $\Phi \circ \mathbf{x}^{\theta}_{HQ^{+}_{h}}(U)$ と、それらを合わせたものである。二つの曲面の接点に *cusp* が現れる。



surface *flat* *cusp*

また負については、$\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき $\mathbf{0}$ は θ^--*parabolic point* でないが、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $\mathbf{0}$ は θ^--*parabolic point* である。$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、$\mathbf{x}_f^h$ の負の *tangent* θ-*flat hyperbolic quadrical indicatrix* は $\mathbf{x}_f^{h-1}(THQ_h^-(\mathbf{x}_f^h, \mathbf{0}; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U \mid \frac{2}{3}u_1^3 - u_2^2 = 0\}$ となり *ordinary cusp* になっている。

Example 5.2. $f(u_1, u_2) = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(1 - \sqrt{1 + \sin^2\theta(u_1^2 + u_2^2)}) + u_1^4 - u_2^2$ とすると、$\kappa_1 = -\cos\theta$, $\kappa_2 = -\cos\theta - 2$ より正負の θ-*de Sitter Gauss-Kronecker curvature* はそれぞれ $K_\theta^{d+}(\mathbf{0}) = 0$, $K_\theta^{d-}(\mathbf{0}) = 4\cos\theta(\cos\theta + 1)$ となる。したがって $\mathbf{0}$ は θ^+-*parabolic point* であり、$\mathbf{x}_f^h$ の正の *tangent* θ-*flat hyperbolic quadrical indicatrix* は $\mathbf{x}_f^{h-1}(THQ_h^+(\mathbf{x}_f^h, \mathbf{0}; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U \mid u_1^4 - u_2^2 = 0\}$ となり *tachnodal* である。下図は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときの曲面 $\Phi \circ \mathbf{x}_f^h(U)$ と正の θ-*flat hyperbolic quadric* $\Phi \circ \mathbf{x}_{HQ_h^+}^\theta(U)$ と、それらを合わせたものである。二つの曲面の接点に *tachnodal* が現れる。



surface *flat* *tachnodal*

また負については、$\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき $\mathbf{0}$ は θ^--*parabolic point* でないが、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $\mathbf{0}$ は θ^--*parabolic point* である。$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、$\mathbf{x}_f^h$ の負の *tangent* θ-*flat hyperbolic quadrical indicatrix* は $\mathbf{x}_f^{h-1}(THQ_h^-(\mathbf{x}_f^h, \mathbf{0}; \theta)) = \{\mathbf{u} \in U \mid u_1^4 - u_2^2 = 0\}$ となり *tachnodal* になっている。

参考文献

[1] V.I.Arnol'd, S.M.Gusein-Zade and A.N.Varchenko, *Singularities of Differentiable maps, Volume I.* (Birkhäuser, Basel, 1986).

[2] S.Izumiya, D.Pei, T.Sano, *Singularities of Hyperbolic Gauss Maps.* Proc. London Math. Soc. (3) **86** (2003), 485–512.

[3] 泉屋周一, 石川剛郎 著, 応用特異点論. (共立出版, 1998).

[4] J.Martinet, *Singularities of Smooth Functions and Maps.* London Math Soc. Lecture Note Series **58** (Cambridge University Press, 1982).

[5] M.Kasedou, *Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space.* J.Geom. 94 (2009), 107-121

[6] J.A.Montaldi, *On contact between submanifolds.* Michigan Math. J. **33** (1986), 195–199.

[7] V.M.Zakaryukin, *Lagrangian and Legendrian singularities.* Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 23–31.