

Title	実閉体の順序極小拡張におけるデファイナブルファイバー束について (モデル理論とその代数への応用)
Author(s)	川上, 智博
Citation	数理解析研究所講究録 (2010), 1708: 21-25
Issue Date	2010-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/170168
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

実閉体の順序極小拡張におけるデファイナブルファイバー束について

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, >, \dots)$ において、デファイナブルファイバー束のホモトピー性質について考察する。順序極小構造は、実数体の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \dots)$ に限っても、[10] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] などに性質がまとめられている。また、[11] では、少し一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきとし、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N} = (R, +, \cdot, >, \dots)$ で考えるものとする。

2. ファイバー束とデファイナブルファイバー束

Hausdorff 空間 G が位相群とは、 G が群であって、その群演算 $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$ が連続となることである。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 14P20, 03C64.

Keywords and Phrases. 順序極小構造, デファイナブルファイバー束, デファイナブルベクトル束, 実閉体, ホモトピー性質.

G を位相群、 F を位相空間とする。 F が G 空間とは、 F が G の連続群作用 $\phi : G \times F \rightarrow F$ をもつことである。ここでは、 $\phi(g, x)$ を gx と書く。 G の F への作用が効果的とは、任意に $g, g' \in G$ をとるとき、任意の $f \in F$ に対して、 $gf = g'f$ ならば、 $g = g'$ となることである。

定義 2.1. 位相空間 E, X , 位相群 K , K の効果的作用をもった位相空間 F と全射連続写像 $p : E \rightarrow X$ の五つの組 $\eta = (E, p, X, F, K)$ がファイバー束とは、次の二つの条件を満たすことである。

(1) X の開被覆 $\{U_i\}$ と同相写像 $\phi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ が存在して、 $p = p_{U_i} \circ \phi_i$ となる。ただし、 $p_{U_i} : U_i \times F \rightarrow U_i$ を射影とする。

(2) $p_i : U_i \times F \rightarrow F$ を射影とし、 $x \in U_i$ に対して、 $\phi_{i,x} : p^{-1}(x) \rightarrow F$ を $\phi_{i,x}(z) = p_i \circ \phi_i(z)$ と定義する。 $x \in U_i \cap U_j$ に対して、 $\theta_{ji} := \phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}$ とするとき、 $\theta_{ji} \in K$ かつ $\theta_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow K$ が連続である。

このとき、 E を全空間、 X を底空間、 p を射影、 F をファイバー、 K を構造群といい、 $\{\phi_i, U_i\}$ を局所自明化という。

定義 2.2. $\eta = (E, p, X, F, K), \eta' = (E', p', X', F, K)$ をファイバー束とする。

(1) 連続写像 $\bar{f} : E \rightarrow E'$ がファイバー束写像とは、以下の二つの条件を満たすことである。

(a) 連続写像 $f : X \rightarrow X'$ が存在して、 $f \circ p = p' \circ \bar{f}$ となる。

(b) $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}, \{V'_\mu, \phi'_\mu\}$ をそれぞれ η, η' の局所自明化とする。 $U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \neq \emptyset$ となる任意の α, μ に対して、 $f_{\mu\alpha}(x) = \phi'_{\mu, f(x)} \circ \bar{f} \circ \phi_{\alpha, x}^{-1}$ とするとき、 $f_{\mu\alpha} \in K$ かつ $f_{\mu\alpha} : U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \rightarrow K$ が連続である。

(2) ファイバー束写像 $\bar{f} : E \rightarrow E'$ がファイバー束同値写像とは、 \bar{f} と f が同相写像であって、 $(\bar{f})^{-1}$ もファイバー束写像であることである。

(3) ファイバー束同値写像 $\bar{f} : E \rightarrow E'$ がファイバー束同型写像とは、 $X = X', f = id_X$ であることである。

連続写像 $f, h : X \rightarrow Y$ がホモトピックとは、連続写像 $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、 $H(x, 0) = f(x)$ かつ $H(x, 1) = h(x)$ となることである。

定理 2.3 ([9]). $\eta = (E, p, X, F, K)$ をパラコンパクト空間上のファイバー束とし、 $f, h : Y \rightarrow X$ をパラコンパクト空間の間のホモトピックな連続写像とする。このとき、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はファイバー束同型である。

定義 2.4. (1) デファイナブル集合 G がデファイナブル群とは、 G が群であって、その演算 $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$ がデファイナブル写像となることである。

(2) Y をデファイナブル集合とする。 Y がデファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合とは、連続群作用 $G \times Y \rightarrow Y$ が存在して、それがデファイナブル写像となることである。

セミアルジェブリック空間 ([1]) の拡張として、デファイナブル空間 ([2]) を考えることができる。

定義 2.5. (1) デファイナブルファイバー束 ([7], [8]) は、 E をデファイナブル空間、 X をデファイナブル集合、開被覆を有限デファイナブル開被覆、局所自明化写像の個数を有限個、同相写像をデファイナブル同相写像と置き換えて定義する。

(2) デファイナブル束写像、デファイナブル束同値写像、デファイナブル束同型写像、引き戻し束を同様に定義できる。

$\mathcal{N} = \mathcal{M}$ で、底空間がコンパクトの場合は、以下のホモトピー性質が知られていた。

定理 2.6 ([8]). $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ 、 $\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブルファイバー束、 $f, h: Y \rightarrow X$ をホモトピックなデファイナブル写像とする。 Y がコンパクトならば、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル束同型である。

また、[6] より、 $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ のとき、デファイナブル集合間の写像 $f, h: X \rightarrow Y$ に対して、 f と h がホモトピックならば、 f と h はデファイナブリーホモトピックとなる。つまり、デファイナブル写像 $H: Y \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在して、任意の $x \in Y$ に対して、 $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = h(x)$ となる。

ここでは、定理 2.6 の拡張として、以下を得た。

定理 2.7 ([5]). $\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブルファイバー束とし、 $f, h: Y \rightarrow X$ をデファイナブル写像とする。 f と h がデファイナブリーホモトピックならば、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル束同型である。

定理 2.7 により、定理 2.6 の Y がコンパクトの条件は、除けることがわかる。

定理 2.7 の証明の鍵となる命題が以下である。

命題 2.8 (3.2 [4]). デファイナブル集合 $X \times [0, 1]$ のデファイナブル開集合 $\{V_j\}_{j=1}^p$ による任意の有限開被覆に対して、 X の有限デファイナブル開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^q$ が存在して、各 i に

対して、デファイナブル関数 $0 = \phi_{i,0} < \cdots < \phi_{i,k_i} = 1 : U_i \rightarrow R$ が存在して、 $1 \leq i \leq q$ かつ $0 \leq l < k_i$ を満たす各 (i, l) に対して、ある j があって、 $\{(x, y) | x \in U_i, \phi_{i,l}(x) \leq y \leq \phi_{i,l+1}(x)\} \subset V_j$ となる。

3. デファイナブル G ファイバー束とデファイナブル G ベクトル束

定義 3.1. G をデファイナブル群とする。

(1) デファイナブルファイバー束 (E, p, X, F, K) がデファイナブル G ファイバー束とは、 E がデファイナブル G 空間であり、その G 作用がデファイナブル G 束同値写像であって、 X がデファイナブル G 集合で、 p がデファイナブル G 写像となることである。

(2) デファイナブル G ファイバー束がデファイナブル G ベクトル束とは、 $F = R^n, K = GL_n(R)$ となることである。

定義 3.2. G をデファイナブル群とする。 Ω を n 次元 G 表現空間、 $B : G \rightarrow O_n(R)$ をその表現写像とする。 $M(\Omega)$ を R 係数の n 次正方行列全体のベクトル空間で、 G 作用が $(g, A) \in G \times M(\Omega) \mapsto B(g)AB(g)^{-1} \in M(\Omega)$ とする。任意の自然数 k に対して、 $\gamma(\Omega, k) = (E(\Omega, k), u, G(\Omega, k)), G(\Omega, k) = \{A \in M(\Omega) | A^2 = A, A' = A, \text{Tr}A = k\}, E(\Omega, k) = \{(A, v) \in G(\Omega, k) \times \Omega | Av = v\}, u : E(\Omega, k) \rightarrow G(\Omega, k), u((A, v)) = A$ と定義し、 $\gamma(\Omega, k)$ を Ω と k に付随した普遍 G ベクトル束という。ただし、 A' は A の転置行列を表すとする。

定義 3.3. G をデファイナブル群とする。デファイナブル G ベクトル束 $\eta = (E, p, X)$ が強デファイナブルとは、デファイナブル G 写像 $f : X \rightarrow G(\Omega, k)$ が存在して、 η と $f^*(\gamma(\Omega, k))$ がデファイナブル G ベクトル束同型となることである。ただし、 k は η の階数を表すものとする。

定理 3.4 ([5]). G を有限群とするととき、任意のデファイナブル G ベクトル束は強デファイナブルである。

REFERENCES

- [1] H. Delfs and M. Knebusch, *Semialgebraic topology over a real closed field II: Basic theory of semi-algebraic spaces*, Math. Z. 178 (1981), 175–213.
- [2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

- [3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.
- [4] M.J. Edmundo *O-minimal Čech cohomology*, Quart. J. Math. **59** (2008), 213-220.
- [5] T. Kawakami, *Definable fiber bundles in an o-minimal expansion of a real closed field*, preprint.
- [6] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **55**, (2004), 1-15.
- [7] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.
- [8] T. Kawakami, *Homotopy property for definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53** (2003), 1-6.
- [9] R. K. Lashof, *Equivariant Bundles*, Illinois J. Math. **26(2)** (1982), 257-271.
- [10] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.
- [11] M. Shiota, *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.