

Zeros of Weng's zeta functions for (G, P)

東京大学大学院 数理科学研究科 鈴木正俊 (Suzuki Masatosi)
 Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1. 導入

表題にある (G, P) のゼータ関数とは, [10] において Lin Weng により導入された新種のゼータ関数である (最初に定義されたのは 2007 年末). この小論は, このゼータ関数の零点に関する筆者と小森靖, Haseo Ki との共同研究についての解説である. 講究録 [11] も同様の内容を扱ったものだが, 今回とは異なる方面からの解説となっている. 興味のある方には併せて御覧頂きたい.

最初の [10] でも解説されているように, (G, P) のゼータ関数は Weng により [7] で導入された高階ゼータ関数 (high rank zeta functions) と呼ばれるゼータ関数の研究から派生した対象である. ただし [10] で高階ゼータ関数と呼ばれているものは, [7] では非可換ゼータ関数 (non-abelian zeta functions) の名で導入されている. いきなり (G, P) のゼータ関数の定義から始める事もできるが, 今回はその背景にある高階ゼータ関数の解説から始めたい.

2. 高階ゼータ関数

岩澤-Tate の理論による Dedekind ゼータ関数の研究は, 代数群上のゼータ積分の理論へと発展した. 高階ゼータ関数はこれとは異なる方向へ岩澤-Tate の理論を一般化したものである. C を有限体 \mathbb{F}_q 上の非特異完備代数曲線とする. 代数曲線 C に付随するゼータ関数 $\zeta_C(s)$ が次の幾何学的な表示を持つことはよく知られている:

$$\zeta_C(s) = \sum_{[L] \in \text{Pic}(C)} \frac{q^{h^0([L])} - 1}{q - 1} q^{-s \deg([L])}. \quad (2.1)$$

ここで $\text{Pic}(C)$ は C 上の直線束の同型類全体, $[L]$ は直線束 L の同型類,

$$h^0([L]) := h^0(L) = \dim_{\mathbb{F}_q} H^0(C, L), \quad (2.2)$$

$\deg([L]) = \deg(L) = L$ の次数, となっている. 代数体と代数函数体の類似は数論の指導原理の一つであるが, これは Arakelov 幾何の立場からより明確に得られる. 特に Dedekind ゼータ関数に対して (2.1) と同様の幾何的表示を得る事ができる. 例えば van der Geer-Schoof [6] によれば, Riemann ゼータ関数について次の積分表示が得られる:

$$\hat{\zeta}(s) = \int_{\text{Pic}(\mathbb{Q})} (e^{h^0([\hat{L}])} - 1) e^{-s \deg([\hat{L}])} d\mu([\hat{L}]), \quad (2.3)$$

ここで $\text{Pic}(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{R}_{>0}$ は \mathbb{Q} 上の Arakelov 直線束の同型類全体である. 一般に階数 r の自由 \mathbb{Z} 加群 L と $L \otimes \mathbb{R}$ 上の Hermite 距離 $\|\cdot\|$ の組 $\hat{L} = (L, \|\cdot\|)$ を \mathbb{Q} 上の階数 r の

Arakelov ベクトル束と呼び, 特に階数 1 のとき Arakelov 直線束と呼ぶ. 積分表示 (2.3) において, Arakelov 直線束 $\hat{L} = (L, \|\cdot\|)$ に対する “層のコホモロジーの次元” $h^0(\hat{L})$ は

$$h^0(\hat{L}) := \log \left(\sum_{x \in L} \exp(-\pi \|x\|^2) \right) \quad (2.4)$$

で定義される量で, 実際に何らかのベクトル空間の次元という訳ではない. しかしこの定義の妥当性についてはここでは立ち入らない. ともあれ $h^0(\hat{L})$ は \hat{L} の同型類のみに依存して決まるので, 同型類 $[\hat{L}]$ について $h^0([\hat{L}]) = h^0(\hat{L})$ が矛盾なく定義される.

ここで (2.1) の表示に戻る. 代数曲線 C のゼータ関数は C 上の直線束の同型類全体を渡る和で表示される. 高階ゼータ関数に至る [7] での最初のアイディアは, この直線束の部分をベクトル束に置きかえることである. しかしながら, 固定された $r \geq 2$ に対して, 階数 r のベクトル束の同型類すべてを考えると, 任意の $s \in \mathbb{C}$ で対応する和が発散してしまう. そこで代数幾何のモジュライ理論に倣って, 和を半安定なベクトル束の同型類に制限すると, そのような和は $\mathfrak{N}(s)$ が十分大きいところで絶対収束することが分かる. これが [7] の 2 つ目のアイディアである. 更に Riemann-Roch の定理を用いる事により解析接続や関数等式が得られる. このような $\zeta_C(s)$ の一般化の手法は, Arakelov 幾何の見方を経由すれば Dedekind ゼータ関数に対しても適用される. すなわち (2.3) における Arakelov 直線束の部分を (半安定な) Arakelov ベクトル束に置き換えるのである. これが [10] において高階ゼータ関数と呼ばれているものになる. \mathbb{Q} 上の場合, 階数 r の高階ゼータ関数は

$$\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}(s) := \int_{M_{\mathbb{Q},r}} (e^{h^0([\hat{E}])} - 1) e^{-s \cdot \text{deg}([\hat{E}])} d\mu([\hat{E}]) \quad (2.5)$$

で定義される. ここで $M_{\mathbb{Q},r}$ は階数 r の半安定な Arakelov ベクトル束の同型類全体で, $h^0(\hat{E})$ は (2.4) において直線束 L をベクトル束 E で置き換えたもので定義される. 以上では簡単のため \mathbb{Q} 上で述べているが, 一般の代数体 F に対しても $\hat{\zeta}_{F,r}(s)$ が同様に定義される. このように定義されたゼータ関数に対して, Weng は次のことを示した ([8]):

- (W0) $\hat{\zeta}_{F,1}(s) = \hat{\zeta}_F(s)$ (Dedekind ゼータ関数),
- (W1) $\hat{\zeta}_{F,r}(s)$ を定義する積分 (2.5) は $\Re(s) > 1$ で絶対収束する,
- (W2) $\hat{\zeta}_{F,r}(s)$ は一位の極 $s = 0, 1$ を除いて \mathbb{C} へ正則に解析接続される,
- (W3) $\hat{\zeta}_{F,r}(s)$ は関数等式 $\hat{\zeta}_{F,r}(s) = \hat{\zeta}_{F,r}(1-s)$ を満たす.

このように, 高階ゼータ関数 $\hat{\zeta}_{F,r}(s)$ は Dedekind ゼータ関数の形式的な一般化ではなく, Dedekind ゼータ関数を持つ良い解析的性質の幾つかを受け継いでいる.

さて (W0) にあるように, Dedekind ゼータ階数は階数 1 の高階ゼータ関数であるから, 一般の高階ゼータ関数の研究を通して Dedekind ゼータ関数の理解を深めようというのは一つの自然な方針だろう. しかしながら, 高階ゼータ関数の解析接続や関数等式は 1 階の場合の幾何的解釈 (Poincaré duality, Riemann-Roch など) を高階の場合に拡張することで得られるので, この方針からすれば逆であるが, 留数, 零点, 特殊値などについては新たな発見の可能性があるのである.

ここで高階ゼータ関数の零点について考える. 高階ゼータ関数は (W3) のような関数等式を持つから, Riemann 予想の自然な類似が考えられる. 定義 (2.5) からすれば, 高階ゼータ関数の零点が Dedekind ゼータ関数 (1 階のゼータ関数) のそれより分かりやすいという事はないように思われる. しかしこの予想に反して, 2 階のゼータ関数の零点については Riemann 予想が証明できる ([4, 9]).

2 階のゼータ関数について Riemann 予想が証明できるのは, これが Eisenstein 級数による第 2 の積分表示を持つことによる. 以下, 簡単のため $F = \mathbb{Q}$ とする. \mathbb{Q} 上の 2 階のゼータ関数 $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},2}(s)$ は Eisenstein 級数

$$\hat{E}(s, z) = \hat{\zeta}(2s)E(s, z) = \hat{\zeta}(2s) \left(\frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \right)$$

により,

$$\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},2}(s) = \int_{D_0} \hat{E}(s, z) \frac{dx dy}{y^2} \quad (2.6)$$

と表示される. ここで $D_0 = \{z = x + iy \mid -1/2 \leq x \leq 1/2, 0 < y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$. この表示と Eisenstein 級数の Fourier 展開から

$$\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},2}(s) = \frac{\hat{\zeta}(2s)}{s-1} - \frac{\hat{\zeta}(2s-1)}{s} \quad (2.7)$$

が得られる. $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},2}(s)$ の Riemann 予想はこの表示と Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の既知の性質 (特に Hadamard 積表示) から証明される ([4]). これは一般の代数体の場合についても同様である ([9]).

3. 高階ゼータ関数から (G, P) のゼータ関数へ

この節では [10] に従い, 高階ゼータ関数から (G, P) のゼータ関数の導入までの道筋を解説する. ただし簡単のため $F = \mathbb{Q}$ とする.

階数 2 のゼータ関数が Eisenstein 級数による第 2 の積分表示を持っていたのと同様に, 一般の高階ゼータ関数は次の表示を持つことが分かる:

$$\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}(s) = \frac{r}{2} \int_{M_{\mathbb{Q},r}[1]} \hat{E}\left(\Lambda, \frac{r}{2}s\right) d\mu(\Lambda). \quad (3.1)$$

ここで $M_{\mathbb{Q},r}[1]$ は階数 r , 体積 1 の半安定な \mathbb{Z} 格子の成すモジュライ空間で, $E(\Lambda, s)$ は格子 Λ に関する Epstein ゼータ関数である:

$$\hat{E}(\Lambda, s) = \pi^{-s} \Gamma(s) \sum_{x \in \Lambda \setminus \{0\}} \|x\|^{-2s}.$$

この表示により $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}(s)$ の解析接続と関数等式が Epstein ゼータ関数のそれからも得られる. ところが Epstein ゼータ関数の Fourier 展開から $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}(s)$ の具体的表示を得ることは階数 3 以上では難しい. これはモジュライ空間 $M_{\mathbb{Q},r}[1]$ は常にコンパクトであるものの, 階数 2 の場合のような Fourier 展開とマッチした簡明な表示を得るのが高階数では困難になるからである.

モジュライ空間 $M_{0,r}[1]$ の形が複雑になるのは、格子を半安定なものに制限したためであって、階数 r の格子全体を考えればその限りではない。ここで階数 2 の場合を思い出そう。フルモジュラー群の標準的な基本領域 $\{z = x + iy \mid -1/2 \leq x \leq 1/2, x^2 + y^2 \geq 1\}$ を D_∞ で表すものとすれば、(2.6) の右辺は

$$\int_{D_0} \hat{E}(s, z) \frac{dx dy}{y^2} = \int_{D_\infty} \Lambda^0 \hat{E}(s, z) \frac{dx dy}{y^2} \quad (3.2)$$

と書き換えられる。ここで

$$\Lambda^T \hat{E}(s, z) = \begin{cases} \hat{E}(s, z), & y \leq e^T, z \in D_\infty, \\ \hat{E}(s, z) - (\hat{\zeta}(2s) y^s + \hat{\zeta}(2s-1) y^{1-s}), & y > e^T, z \in D_\infty. \end{cases}$$

等式 (3.2) により D_0 を考えるという幾何的問題は $\Lambda^T \hat{E}(s, z)|_{T=0}$ の解析的性質に置き換えられている。これを高階の場合に拡張できればモジュライ空間の問題は一旦回避される。とはいえ $\Lambda^T \hat{E}(z, s)$ のようなものを考えるには Epstein ゼータ関数ではあまり具合がよろしくないのので、こちらは代数群上の Eisenstein 級数で置き換えることを考える。暫くの間 $G = SL(r)$, $K = SO(r)$, $B = TU$ を上三角行列より成る G の Borel 部分群とする。また $X^*(T)$ を極大トーラス T 上の指標群, $\mathfrak{a}_0^* = X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{r-1}$, $\mathfrak{a}_0 = \text{Hom}(X^*(T), \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{r-1}$ とする。このとき $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$, $g \in G(\mathbb{R})$ に対し, Eisenstein 級数 $E(\lambda, g)$ を

$$E(\lambda, g) = \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{Z})} \exp(\langle \lambda + \rho, H_0(\gamma g) \rangle)$$

で定義されるものとする。ここで 2ρ は (G, T) の正ルート全体の和, $H_0 : G(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{a}_0$ は岩澤分解と $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{a}_0$ ($\alpha \in \Delta$: 単純ルートの集合) から定まるマップ。このとき階数 r の高階ゼータ関数は

$$\hat{\zeta}_{0,r}(s) = \frac{r}{2} \hat{\zeta}(rs) \left[\int_{G(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{R})} \Lambda^T \text{Res}_\lambda E(\lambda, g) dg \right]_{T=0} \quad (3.3)$$

と表示される。ここで $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$ の座標 (s_1, \dots, s_{r-1}) は単純ルート $\alpha_i \in \Delta$ に対応する基本ウェイト λ_i たちに対して

$$\lambda = \rho + (rs_1 - r)\lambda_1 + \sum_{i=2}^{r-1} s_i \lambda_i \quad (s = s_1)$$

と選ばれているものとする。 Λ^T ($T \in \mathfrak{a}_0$) は Authur の載頭作用素で, Res_λ は $(r-2)$ 個の超平面 $\langle \lambda - \rho, \alpha_i^\vee \rangle = s_i = 0$ ($2 \leq i \leq r-1$) にそって留数をとることを意味する。

Epstein ゼータ関数による表示 (3.1) に比べ, (3.3) の表示は保型形式の標準的な手法が使えるという点で扱い易いものになっている。しかしながら問題は幾つかある。まず作用素 Λ^T は一般には T が十分正なところでしか定義されないのので, 単純に $T=0$ としてよいのかという問題がある。 $T=0$ は先の D_0 では $y=1$ の部分にあたる。また $T=0$ が許されたとしても, (3.3) の積分がきれいに計算できなければ, 状況は (3.1) からあまり進展していないことになる。

ここで一つ楽観的になって、(3.3)において積分と留数をとる操作が交換できると仮定してみよう。すなわち

$$\int_{G(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{R})} \Lambda^T \operatorname{Res}_\lambda E(\lambda, g) dg = \operatorname{Res}_\lambda \int_{G(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{R})} \Lambda^T E(\lambda, g) dg$$

を仮定する。このとき右辺の積分は

$$\begin{aligned} & \int_{G(\mathbb{Z}) \backslash G(\mathbb{R})} \Lambda^T E(\lambda, g) dg \\ &= v \sum_{w \in W} e^{\langle w\lambda - \rho, T \rangle} \prod_{\alpha \in \Delta} \frac{1}{\langle w\lambda - \rho, \alpha^\vee \rangle} \prod_{\alpha \in \Phi_w} \frac{\hat{\zeta}(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle)}{\hat{\zeta}(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 1)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

というように G の Weyl 群 W を用いてきれいに計算できる。ここで $\Phi_w = \Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-$, $v = \operatorname{vol}(\{\sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \alpha^\vee \mid 0 \leq a_\alpha \leq 1\})$. 階数 2 ($r = 2$) のときは留数をとる必要がなく、右辺の表示から先の (2.7) と同じ表示が得られる。また (3.4) の右辺は有限和だから、ここでは $T = 0$ としても問題ないことに注意しよう。

しかしながら $r \geq 3$ の場合に上記のような交換が許されるかと言えば、それは自明ではない上、このように計算して $T = 0$ としたものが元の $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q}, r}(s)$ に一致しているという保証もない。そこで、そのような問題は一旦保留にしておいて、(3.4) の右辺自体を研究対象としようという提案が [10] においてなされた。

一旦そのような方針にしてしまえば、代数群 G は $SL(r)$ である必要性は全くない。実際 (3.4) の右辺は一般の簡約代数群へ容易に拡張される。ここで一つ問題になるのは、(3.4) が一般には多変数の関数だということである。勿論、多変数関数としての (3.4) の右辺の性質を考察する事に問題は無いのだが、もともとの動機であった一変数関数 $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q}, r}(s)$ から離れ過ぎている気がしなくもない。そこで留数をとる操作 $\operatorname{Res}_\lambda$ についてもう少し考察してみる事にする。

高階ゼータ関数の場合では、我々は留数を $\langle \lambda - \rho, \alpha_i^\vee \rangle = s_i = 0$ ($2 \leq i \leq r-1$) という超平面たちに対してとった。($\lambda = \rho$ は $E(\lambda, g)$ の極因子たちの交点である。) この超平面たちは Eisenstein 級数を Epstein ゼータ関数に帰着するため、ひいては高階ゼータ関数へ帰着するために選ばれているのだが、それに拘らないのであれば、留数はある程度自由にとってよいであろう。とはいえ留数をとる超平面たちを勝手に選んだのでは、出てくる関数に対して良い性質が期待できない。(3.4) の右辺には Weyl 群による対称性が自然に備わっているので、これを壊さないような留数のとり方が望ましい。ここで単純ルートの集合と G の標準的な極大放物部分群 (の共役類) の集合は 1 対 1 に対応していたことを思い出そう。これによれば、先のような留数のとり方が良い結果をもたらしたのは、それが極大放物部分群に対して決まっていた為ではないかと予想される。

このような経緯で導入されたのが、与えられた簡約代数群 G とその極大放物部分群 P の組 (G, P) に対して定義されるゼータ関数、表題の (G, P) のゼータ関数、である。非常に長い前置きとなってしまったが、次の節で (G, P) のゼータ関数の定義を与え、結果について述べる。

4. (G, P) のゼータ関数の定義と今回の結果

G を \mathbb{Q} 上定義された連結な半単純代数群, $T \simeq GL(1)^\ell$ を G の極大トーラス, $B = TU$ を \mathbb{Q} 上定義された G の Borel 部分群とする. また Φ で (G, T) に関するルート系, W でその Weyl 群, $\Delta \subset \Phi$ で B に対応する単純ルートの集合を表す. これに対し $\omega_{\mathbb{Q}}^G : \mathfrak{a}_{0, \mathbb{C}}^* = X^*(T) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^\ell \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\omega_{\mathbb{Q}}^G(\lambda) := \sum_{w \in W} \prod_{\alpha \in \Delta} \frac{1}{\langle w\lambda - \rho, \alpha^\vee \rangle} \prod_{\alpha \in \Phi_w} \frac{\hat{\zeta}(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle)}{\hat{\zeta}(\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 1)}$$

により定義する. ここで $\Phi_w = \Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-$, $2\rho = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$, $\alpha^\vee = 2\alpha / \langle \alpha, \alpha \rangle$. 勿論, これは (3.4) の右辺で $v = 1$, $T = 0$ としたものである. もともと (3.4) における Riemann ゼータ関数の部分は, Eisenstein 級数の定数項の計算に現れる intertwining operator $M(w, \lambda)$ から来ているので, Langlands [5] などによれば, Riemann ゼータ関数の部分を適当な保型 L 関数で置き換えたものを一緒に考えるのが適当に思われるが, まだそこらには手が付けられていない.

ここで B を含む G の極大放物部分群 P に対し, 対応する単純ルートを α_P で表す. このとき $\omega_{\mathbb{Q}}^{G/P} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\omega_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s) := \operatorname{Res}_{\lambda} \omega_{\mathbb{Q}}^G(\lambda) \quad (s = \langle \lambda - \rho, \alpha_P^\vee \rangle)$$

により定義する. ここで $\operatorname{Res}_{\lambda}$ は $(\ell - 1)$ 個の超平面

$$\langle \lambda - \rho, \beta^\vee \rangle = 0, \quad \beta \in \Delta \setminus \{\alpha_P\}$$

たちに沿って $\omega_{\mathbb{Q}}^G(\lambda)$ の留数をとることを意味する. この定義は留数をとる順序によらないことが示される. 関数 $\omega_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)$ に (3.3) の $\hat{\zeta}(rs)$ のような修正項をかけたものが (G, P) のゼータ関数である:

Definition 1 ((G, P) のゼータ関数 / \mathbb{Q} , Weng, 2007).

$$\hat{\zeta}_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s) := \prod_{k, h} \hat{\zeta}(ks + h) \cdot \omega_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s).$$

ここで $\prod_{k, h} \hat{\zeta}(ks + h)$ は, $\hat{\zeta}(as + b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$) を一つの文字とみなしたとき, $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)$ の各項の分母に $\hat{\zeta}(as + b)$ や $\hat{\zeta}(c)$ が現れないような, 最小の $\hat{\zeta}(ks + h)$ たちの積とする.

この定義は naive で, [10] の定義もこれと大差ないが, 具体例について実例を計算してみるにはこれで十分である. 実階数の低い古典群に対する $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)$ の具体形やその計算例が [10, Appendix] にある ([11] にも少しある). 一般の場合を理論的に扱うにはこの定義では不便なので, もう少し厳密な定義をする必要があるが, 今回は省略する.

Weng は幾つかの具体的な (G, P) について $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)$ を計算し, これが標準的な関数等式を満たすことを確認した. そして [10] で次の予想を述べた:

Conjecture 1 (関数等式) ある有理数 $c_P \in \mathbb{Q}$ が存在して, 次が成り立つ:

$$\hat{\zeta}_Q^{G/P}(-c-s) = \hat{\zeta}_Q^{G/P}(s).$$

Conjecture 2 (Riemann 予想) ゼータ関数 $\hat{\zeta}_Q^{G/P}(s)$ の零点はすべて関数等式の中心線 $\Re(s) = -\frac{c_P}{2}$ 上にある.

これらの予想に対して, 次の結果が得られている.

Theorem 1 (Weng, H. Kim-Weng, Komori). Conjecture 1 は正しい. そして関数等式に現れる定数 c_P は次で与えられる:

$$c_P = 2\langle \lambda_P - \rho_P, \alpha_P^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

ここで λ_P は α_P に対応する基本ウェイト, $2\rho_P$ は Φ_P の正ルート全体の和.

この結果は, まず $SL(n)$ ($n = 2, 3, 4, 5$), $Sp(4)$, $SO(8)$, G_2 に対して, Weng により確認された. 続いて, H. Kim-Weng は, 無限系列 $(SL(n), P_{n-1,1})$ ($n \geq 2$) に対して, これを証明した. そして, 小森靖 [3] により, 上記のような一般的な場合に対する証明が与えられ, 定数 c_P も具体的に決定された.

Theorem 2 (Lagarias-S., S., Ki). G を $SL(n)$ ($n = 2, 3, 4, 5$), $Sp(4)$, G_2 の一つとし, P を G の極大放物部分群の一つとする. (本質的に 10 個の異なる組 (G, P) がある.) このとき $\hat{\zeta}_Q^{G/P}(s)$ の零点はすべて関数等式の中心線上にあり, しかも単純である.

Conjecture 2 は当初 100% の零点 (全てではない), あるいは有限個の例外的零点を除いて成り立つものと予想されていた. これは $\hat{\zeta}_Q^{G/P}(s)$ が Riemann ゼータ関数の積の有理式を係数とする線形結合として表されるという事実と, Bombieri や Hejhal の Euler 積をもつ L 関数の (定数係数) 線形結合として表される関数の零点に関する結果を比較してみれば妥当なものであったと言える. しかしながら, Theorem 2 にあるような群に対して数値実験を重ねる中で, 実は全ての零点が関数等式の中心線上にあるという結果が正しいものだという確信が強まっていき, それは実際に証明され定理となった. この結果は驚くべきことであった. 未だにこの真の理由はよく分からない.

Theorem 2 の最初の証明は, Weng により書き下された $\hat{\zeta}_Q^{G/P}(s)$ の具体的表示を出発点とするものであり, 証明の細部は個別に扱う必要があった. その後, H. Ki により既存の証明が改良され, それ以前の証明の議論の一部が劇的に簡易化されたことで, それまで扱えなかった具体例 (e.g. $SL(4)$, $SL(5)$) についても証明ができるようになった.

このような進展を背景に, これまでの Theorem 2 の証明を [1], [3] に基づいて更に改良する事によって, 一般の半単純群に対して次の結果が得られる.

Main Theorem (weak Riemann Hypothesis [2]). G を \mathbb{Q} 上で定義された連結な半単純代数群, P を G の標準的極大放物部分群とする. 実軸上で次が成り立つと仮定する:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma \cdot \omega_Q^{G/P}(\sigma) = 0.$$

このとき $\hat{\zeta}_Q^{G/P}(s)$ の零点は, 高々有限個の例外を除いて, 全て関数等式の中心線上にある. しかも, 高々有限個の例外を除いて, 零点は全て単純である.

Remark. (確たる根拠は無いが) 一般の (G, P) に対しても Theorem 2 のように, その Riemann 予想に反するような例外的な零点は存在しないことが予想される. しかしながら, 現在の証明法では例外的な零点の存在を除く術はない. また $\omega_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)$ の実軸上の挙動に関する仮定は, 技術的なものだが, 現時点では外せない. これは Theorem 2 の場合では直接証明できる.

5. 主定理の証明について

主定理の証明の概略については [11] の最後で少し述べたので, ここでは証明のより突っ込んだ内容について触れる.

以下, 極大放物部分群 P に対し $\Delta_P = \Delta \setminus \{\alpha_P\}$ とおく. ゼータ関数 $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)$ の扱いにおいて, 次の Weyl 群の部分集合が非常に重要な役割を果たす:

$$\mathfrak{W}_P := \{w \in W \mid \Delta_P \subset w^{-1}(\Delta \cup \Phi^-)\}. \quad (5.1)$$

ここで Φ^- は負ルート全体の集合である. (集合 \mathfrak{W}_P は何か既知の由緒ある対象ではないかと思ひ, 多少調べてみたが結局何だか分からなかった. もし御存知の方がおられたら是非御教示頂きたい.) まず $\omega_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)$ は \mathfrak{W}_P を用いて

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s) &= \sum_{w \in \mathfrak{W}_P} \prod_{\alpha \in (w^{-1}\Delta \setminus \Delta_P)} \frac{1}{\langle \lambda_P, \alpha^\vee \rangle s + \text{ht } \alpha^\vee - 1} \\ &\times \prod_{\alpha \in \Phi_w \setminus \Delta_P} \hat{\zeta}(\langle \lambda_P, \alpha^\vee \rangle s + \text{ht } \alpha^\vee) \prod_{\alpha \in (-\Phi_w)} \hat{\zeta}(\langle \lambda_P, \alpha^\vee \rangle s + \text{ht } \alpha^\vee)^{-1}. \end{aligned}$$

と表示される ([3, (2.7)]). ここで $\text{ht } \alpha^\vee = \langle \rho, \alpha^\vee \rangle$. $(-\Phi_w) \subset \Phi^-$ だから,

$$Z_P(s) := \omega_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s) \prod_{\alpha \in \Phi^-} \hat{\zeta}(\langle \lambda_P, \alpha^\vee \rangle s + \text{ht } \alpha^\vee)$$

とすれば $Z_P(s)$ は分母に $\hat{\zeta}(as+b)$ や $\hat{\zeta}(c)$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) をもたない. 定義から $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)$ は $Z_P(s)$ を適当な $\hat{\zeta}(as+b)$ の積で割ったものになる. $Z_P(s)$ に適当な多項式 $Q_P(s)$ をかけて整関数にしたものを $X_P(s)$ とする. $\omega_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)$ は \mathfrak{W}_P を渡る和で書けたから, $X_P(s)$ もそうである. 実際, $\xi(s) = s(s-1)\hat{\zeta}(s)$ として, 多項式 $Q_{P,w}(s)$ と, $\xi(as+b)$ ($a \neq 0$) たちの積 $X_{P,w}(s)$ によって

$$X_P(s) = \sum_{w \in \mathfrak{W}_P} Q_{P,w}(s) X_{P,w}(s)$$

という形に書ける. 証明の第一段階は \mathfrak{W}_P をうまく分割して, $X_P(s)$ を

$$X_P(s) = E_P(s) \pm E_P(-c_P - s) \quad (5.2)$$

という形に分解し, $X_P(s)$ の零点の問題を $E_P(s)$ の性質に帰着することである. まず [3] の Lemma 5.3 から, W の最長元を w_0 , W_P の最長元を w_P とすると,

$$\begin{aligned} X_{P,w}(-c_P - s) &= X_{P,w_0 w w_P}(s), \\ Q_{P,w}(-c_P - s) &= \pm Q_{P,w_0 w w_P}(s), \quad Q_P(-c_P - s) = \pm Q_P(s), \end{aligned}$$

が成り立つ (各符号は多項式 $Q_P(s)$ のものに従う). したがって \mathfrak{W}_P を $w \mapsto w_0 w w_P$ で分類すれば (5.2) を満たす $E_P(s)$ は簡単に作れるが, その中から主定理の証明に都合のよいものを選びたい. そこで $w \in \mathfrak{W}_P$ に対し,

$$l_P(w) := |(\Phi^+ \setminus \Phi_P^+) \cap w^{-1}\Phi^-|$$

と定義する (長さ $l(w) = |\Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-|$ の類似). このとき

$$l_P(w) + l_P(w_0 w w_P) = |\Phi^+ \setminus \Phi_P^+|, \quad l_P(w_0) = |\Phi^+ \setminus \Phi_P^+|$$

が成り立つ. これに従って

$$E_P(s) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{W}_P \\ 2l_P(w) < l_P(w_0)}} Q_{P,w}(s) X_{P,w}(s) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{W}_P \\ 2l_P(w) = l_P(w_0)}} Q_{P,w}(s) X_{P,w}(s)$$

と定義すると, これは (5.2) を満たす上, 後の証明にも都合がよいものになる.

証明の第二段階は $\hat{\zeta}_0^{G/P}(s) E_P(s) / X_P(s)$ が右半平面 $\Re(s) \geq -c_P/2$ に高々有限個の零点しか持たないことを証明することである. 次の最終段階における議論は純粋に関数論的なものなので, この第二段階が主定理の証明における代数的な面で最も本質的な部分である. 単位元 $e \in W$ について $l_P(e) = 0$ なので, $Q_{P,e}(s) X_{P,e}(s)$ という項が $E_P(s)$ にある. 大雑把には次を示すことで証明の第二段階が完結する:

- (1) $Q_{P,e}(s) X_{P,e}(s)$ が $E_P(s)$ の右半平面 $\Re(s) \geq -c_P/2$ における主要項であり,
- (2) $\hat{\zeta}_0^{G/P}(s) X_{P,e}(s) / X_P(s)$ が右半平面 $\Re(s) > -c_P/2$ に零点を持たない.

このどちらを示すのにもルート系に関する幾つかの補題を必要とするが, その中でも特に重要なものが二つある. 一つ目が次の補題である.

補題 1. $w \in \mathfrak{W}_P$ に対し, $\alpha \in (\Phi^+ \setminus \Phi_P^+) \cap w^{-1}\Phi^-$ であり, しかも, ある $\alpha_j \in \Delta_P$ について $\alpha + \alpha_j \in \Phi^+ \setminus \Phi_P^+$ であると仮定する. このとき $\alpha + \alpha_j \in (\Phi^+ \setminus \Phi_P^+) \cap w^{-1}\Phi^-$.

この補題において $w \in \mathfrak{W}_P$, すなわち $\Delta_P \subset w^{-1}(\Delta \cup \Phi^-)$, という仮定は本質的である. 証明も難しくない単純な補題だが, 第二段階の証明の要所で効いてくる. 例えば, 各 $w \in \mathfrak{W}_P$ について,

$$\frac{X_{P,w}(s)}{X_{P,e}(s)} = \prod_{\alpha \in (\Phi^+ \setminus \Phi_P^+) \cap w^{-1}\Phi^-} \frac{\xi(\langle \lambda_P, \alpha^\vee \rangle s + \text{ht } \alpha^\vee)}{\xi(\langle \lambda_P, \alpha^\vee \rangle s + \text{ht } \alpha^\vee + 1)} \quad (5.3)$$

という表示が得られるので, (1) の証明には $(\Phi^+ \setminus \Phi_P^+) \cap w^{-1}\Phi^-$ の構造に関する詳しい情報が必要となるのである. 補題 1 は (2) の証明にも用いられる. 補題 1 と並んで重要なものが次の補題である.

補題 2. 自然数 k, h について

$$\Sigma_P(k, h) = \{\alpha \in \Phi \mid \langle \lambda_P, \alpha^\vee \rangle = k, \text{ht } \alpha^\vee = h\} \quad (5.4)$$

とおく. これが空でないとき

$$\Sigma_P(k, h) = \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$$

と書くことにする. もし $k \geq 1, 2h + 1 \leq k c_P$ かつ $\Sigma_P(k, h) \neq \emptyset$ ならば, 次の三つの性質を満たす単純ルート $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_N}$ (相異なる必要はない) が存在する:

- (i) $\alpha_{j_n} \in \Delta_P$ ($1 \leq n \leq N$),
- (ii) $\beta_n^\vee + \alpha_{j_n}^\vee \in (\Phi^+ \setminus \Phi_P^+)^\vee$ ($1 \leq n \leq N$),
- (iii) $\beta_m^\vee + \alpha_{j_m}^\vee \neq \beta_n^\vee + \alpha_{j_n}^\vee$ ($m \neq n$).

先に挙げた (5.3) と (5.4) 見比べてもらえば分かるように, (1) と (2) を示すには

$$\Sigma_P(k) = \bigcup_{h=1}^{\infty} \Sigma_P(k, h) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

と $w^{-1}\Phi^-$ の共通部分について詳しい情報を得る必要がある. 第二段階の証明は補題 1 と補題 2 の二つの補題を基礎として, $(\Phi^+ \setminus \Phi_P^+) \cap w^{-1}\Phi^-$ の様子を詳しく調べ, それに Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ が $\Re(s) \geq 1$ に零点を持たないというよく知られた性質を組み合わせる事により成される.

主定理の証明の最終段階は, 既に第二段階で判明した右半平面での零点分布の様子に加え, $\zeta_{\mathbb{Q}}^{G/P}(s)E_P(s)/X_P(s)$ の左半平面における零点分布をおおまかに調べて, これの零点分布をある程度決定した後, ある関数論的な命題を適用して主定理を導くことである. この命題は [1] において従来の Theorem 2 の証明を簡略化するために導入されたもので, 今回の証明の最終段階もこれに負うところが大きい.

主定理の証明に関して述べるべき事はまだまだあるが, 本稿はこれで終える. 主定理の証明の詳細については [2] を見て頂きたい.

REFERENCES

1. Haseo Ki, *On the zeros of Weng's zeta functions*, IMRN (2009), International Mathematics Research Notices, doi:10.1093/imrn/rnp220.
2. Haseo Ki, Yasushi Komori, and Masatoshi Suzuki, *On the zeros of Weng zeta functions for Chevalley groups*, (2010), preprint.
3. Yasushi Komori, *Functional equations for Weng's zeta functions*, (2009), preprint.
4. Jeffrey C. Lagarias and Masatoshi Suzuki, *The Riemann hypothesis for certain integrals of Eisenstein series*, J. Number Theory 118 (2006), no. 1, 98–122. MR MR2220265 (2007c:11099)
5. Robert P. Langlands, *Euler products*, Yale University Press, New Haven, Conn., 1971, A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1967, Yale Mathematical Monographs, 1. MR MR0419366 (54 #7387)
6. Gerard van der Geer and René Schoof, *Effectivity of Arakelov divisors and the theta divisor of a number field*, Selecta Math. (N.S.) 6 (2000), no. 4, 377–398. MR MR1847381 (2002e:11157)
7. Lin Weng, *Refined Brill-Noether locus non-abelian zeta functions for elliptic curves*, Algebraic geometry in East Asia (Kyoto, 2001), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, pp. 245–262. MR MR2030458 (2005e:14036)
8. ———, *Geometric arithmetic: a program*, Arithmetic geometry and number theory, Ser. Number Theory Appl., vol. 1, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, pp. 211–400. MR MR2258077 (2007j:14026)
9. ———, *A rank two zeta and its zeros*, J. Ramanujan Math. Soc. 21 (2006), no. 3, 205–266. MR MR2265997 (2008k:11094)
10. ———, *Symmetries and the Riemann hypothesis*, Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces, Adv. Stud. Pure Math., vol. 58, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, to appear.
11. 鈴木 正俊, *Eisenstein series and zeros of zeta functions*, (2010), 数理研講録「解析数論およびその周辺の諸問題」掲載予定.