数理解析研究所講究録
第 1715 巻 2010 年 121-126

UNIQUENESS OF GENERALIZED WHITTAKER MODELS FOR GSp(2, R) AND THE OUTER AUTOMORPHISM GROUP OF $Sp(2,\mathbf{R})$

成蹊大学理工学部　石井卓 (Taku Ishii)
Faculty of Science and Technology, Seikei University
大阪大学理学研究科数学専攻　森山知則 (Tomonori Moriyama)
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Osaka University

ABSTRACT. We study the generalized Whittaker models for $G = GSp(2,\mathbf{R})$ associated with indefinite binary quadratic forms when they arise from the principal series representation induced from the minimal parabolic subgroup of G. We prove the uniqueness of such models with moderate growth property. Moreover we express the values of the corresponding generalized Whittaker functions on a one-parameter subgroup of G in terms of Meijer's G-functions.

§1. はじめに. $GSp(2,\mathbf{R})$ の [極小放物型部分群から誘導された] 主系列表現に対する一般化 Whittaker 模型 (しばしば, Bessel 模型とも呼ばれる) のうち, 不定符号２次形式に付随するものの一意性と, 主系列表現の適当なベクトルに対する一般化 Whittaker 関数の１次元部分群上の扱いやすい公式を得たので報告する。大きな離散系列表現や Jacobi 型 (=Klingen 型) 放物型部分群から誘導した一般主系列表現について同様の結果は, 以前の数理解析研究所の研究集会でも述べた ([Mo-1] など。詳細は [Mo-2] を参照)。今回の証明は, 先行研究 [Mi-1],[Mi-2], [Is] や [Mo-2] と同様に, 一般化 Whittaker 関数の満たす微分方程式系を構成し, その解空間を調べることによってなされる。今回の研究における新しい兆候は, 連結半単純 Lie 群 $Sp(2,\mathbf{R})$ では, 一般化 Whittaker 模型の重複度自由定理は期待できないが, $GSp(2,\mathbf{R})$ に対しては重複度自由性を回復することができる, という点にある。もう少し詳しく述べると, $Sp(2,\mathbf{R})$ の普遍展開環の作用をみてやると一般化 Whittaker 汎関数の空間は２次元以下であることがわかるが, $\tilde{\gamma}_0 = \mathrm{diag}(-1,1,1,-1) \in GSp(2,\mathbf{R})$ のよって引き起こされる $Sp(2,\mathbf{R})$ の外部自己同型の存在により, そのうち１次元分のみが $GSp(2,\mathbf{R})$ の一般化 Whittaker 汎関数に延長されうるということである。

この研究の動機である $GSp(2,\mathbf{R})$ 上の保型形式のフーリエ展開についての一般的なことは, [Mo-2] (および [Mo-1]) で詳しく述べて置いたので, そちらを参照して頂くことにしたいが, 今回の結果の意義を一応簡単に述べておく。F を $GSp(2,\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})$ 上の Hecke eigen form とするとき, F から定義される大域的な一般化 Whittaker 関数は, 重複度自由定理によって, 本稿の考察対象である $GSp(2,\mathbf{R})$ と $GSp(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}})$ からの寄与の積に分解することができる。これにより, たとえば一般化 Whittaker 関数を含むような L 関数の積分表示理論 (e.g. [An], [PS],[An-Ka], [PS-R], [F]) において, 実素点における考察を切り離して行うことができる [さらに, F がすべての有限素点で不分岐ならば, 有限素点における不分岐一般化 Whittaker 模型の一意性と明示公式が, [B-F-F-1997] に

よって得られているので, 上記の $GSp(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}})$ からの寄与は, $GSp(2,\mathbf{Q}_p)$ 上の不分岐一般化 Whittaker 関数の積として書くことができる]。なお, はじめに述べた「扱いやすい公式」というのは, たとえば, spinor L 関数の積分表示理論 ([An],[PS]) から生じる実素点における局所ゼータ積分が計算しやすいという意味で言っており, この話題についてはまた別の機会に論じることにしたい。また, 保型的 L 関数を離れても, 今回の結果は極小放物型部分群から誘導された Eisenstein 級数の値をその絶対収束域の外で制御する目的にも利用できそうであり, そのような応用が広がることを期待している。

§2. 結果. G を次数 2 の similitude 付の実斜交群, G_0 を次数 2 の実斜交群とする:

$$G = GSp(2,\mathbf{R}) := \{g \in GL(4,\mathbf{R}) \mid {}^tgJg = \nu(g)J \quad \exists\nu(g) \in \mathbf{R}^\times\}$$
$$G_0 = Sp(2,\mathbf{R}) := \{g \in G \mid \nu(g) = 1\}$$

ここで, $J = \left(\begin{array}{c|c} 0_2 & I_2 \\ \hline -I_2 & 0_2 \end{array}\right)$ である。G および G_0 の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ で表す。G(resp. G_0) の極大コンパクト部分群 K として, $K = G \cap O(4)$ $(K_0 = G_0 \cap O(4))$ と固定する。K_0 はユニタリー群 $U(2)$ と同型なる:

$$U(2) \ni A + \sqrt{-1}B \mapsto k_{A,B} := \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in K_0, \quad (A, B \in M(2,\mathbf{R})).$$

また, $K = K_0 \cup K_0\mathrm{diag}(-1,-1,1,1)$ が成立する。G の Siegel 型放物部分群とその Levi 分解を

$$P = MN, \quad M = \{m(h,\lambda) := \left(\begin{array}{c|c} h & 0_2 \\ \hline 0_2 & \lambda\,{}^th^{-1} \end{array}\right) \mid h \in GL(2,\mathbf{R}), \lambda \in \mathbf{R}^\times\},$$
$$N = \{\left(\begin{array}{c|c} I_2 & x \\ \hline 0_2 & I_2 \end{array}\right) \mid {}^tx = x\}$$

で定める。$\beta = {}^t\beta \in M_2(\mathbf{R})$ を非退化実 2 次対称行列とするとき, character $\psi_\beta : N \to \mathbf{C}^{(1)}$ を

$$\psi_\beta(\left(\begin{array}{c|c} I_2 & x \\ \hline 0_2 & I_2 \end{array}\right)) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(\beta x))$$

で定める。$M_\beta := \{m(h,\det(h)) \in M \mid {}^th\beta h = \det(h)\beta\}$ とおくと, これは ψ_β の M における固定化部分群 $\{m \in M \mid \psi_\beta(mnm^{-1}) = \psi_\beta(n),\ \forall n \in N\}$ の指数 2 の部分群である。$\det(\beta) > 0$ または $\det(\beta) < 0$ に応じて, $M_\beta \cong \mathbf{C}^\times$ または $M_\beta \cong \mathbf{R}^\times \times \mathbf{R}^\times$ となることは容易に確かめられる。M_β の quasi-character $\chi : M_\beta \to \mathbf{C}^\times$ を固定するごとに, 半直積群 $R_\beta := M_\beta \ltimes N$ の quasi-character $\chi\cdot\psi_\beta : R_\beta \to \mathbf{C}^\times$ を $(\chi\cdot\psi_\beta)(mn) = \chi(m)\psi_\beta(n)$ が定義される。このとき, $\chi\cdot\psi_\beta$ からの誘導表現の空間を

$$C^\infty(R_\beta\backslash G;\chi\cdot\psi_\beta) := \quad \{W : G \overset{C^\infty}{\to} \mathbf{C} \mid W(rg) = (\chi\cdot\psi_\beta)(r)W(g) \quad \forall(r,g) \in R_\beta \times G\}$$

で定義する。この空間には, G が右移動で作用する。$C^\infty(R_\beta\backslash G;\chi\cdot\psi_\beta)$ に属す関数 $W(g)$ のうち, 緩増大なものすなわち

$$\exists C > 0, \exists N > 0 \text{s.t. } |W(g)| < C||g||^N \quad \forall g \in G$$
$$||g|| := \max\{g_{i,j}, (g^{-1})_{i,j} \mid 1 \le i,j \le 4\}$$

を満たすものの全体を $C^{\infty}_{mg}(R_{\beta}\backslash G;\chi\cdot\psi_{\beta})$ で表す。$(\pi,\mathcal{H}_{\pi})$ を既約 $(\mathfrak{g},K)$ 加群とするとき, 緩増大な 一般化 Whittaker 汎関数の空間を

$$\mathsf{GW}^{mg}_{G}(\mathcal{H}_{\pi},\chi\cdot\psi_{\beta}) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\pi, C^{\infty}_{mg}(R_{\beta}\backslash G;\chi\cdot\psi_{\beta})).$$

で定義する。G 上の保型形式のフーリエ展開の記述や, その直接の保型的 L 関数への応用において, 次の 2 つが重要な問題である：

問題（A）：$\dim_{\mathbf{C}}\mathsf{GW}^{mg}_{G}(\mathcal{H}_{\pi},\chi\cdot\psi_{\beta})\leq 1$ が成立するか決定すること。

問題（B）：$\Phi\in\mathsf{GW}^{mg}_{G}(\mathcal{H}_{\pi},\chi\cdot\psi_{\beta})$ および適当な $v\in\mathcal{H}_{\pi}$ に対して, $\Phi(v)$ の扱いやすい公式を見出すこと。

さて, 本稿では先に述べたように, π が極小放物部分群 $P_{\min}$ から誘導された主系列表現で, $\det(\beta)<0$ の場合をを扱う。まず, 主系列表現の定義を与えよう。$P_{\min}=M_0A_0N_0$ を G の極小放物部分群の Langlands 分解とする。ここで

$$M_0=\langle\gamma_0:=\mathrm{diag}(-1,-1,1,1),\ \gamma_1:=\mathrm{diag}(-1,1,-1,1),\ \gamma_2:=\mathrm{diag}(1,-1,1,-1)\rangle,$$

$$A_0=\{\mathrm{diag}(a_0a_1,a_0a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})\mid a_i>0\ (i=0,1,2)\},$$

$$N_0=\left\{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ \hline & & 1 & \\ & & * & 1 \end{array}\right)\in G\right\}.$$

σ を M_0 の character とし, $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\in\mathbf{C}^3$ に対して $\exp(\nu)$ という A の quasi-character を

$$\exp(\nu)(a):=\prod_{i=0}^{2}a_i^{\nu_i},\ \text{for } a=\mathrm{diag}(a_0a_1,a_0a_2,a_1^{-1},a_2^{-1})$$

によって定義する。このとき, 誘導表現

$$I(P_{\min};\sigma,\nu):=C^{\infty}\text{-}\mathrm{Ind}^{G}_{P_{\min}}(\sigma\otimes\exp(\nu+\rho)\otimes 1_N)$$

を G の主系列表現という。ここで, $\rho=(3/2,2,1)\in\mathbf{C}^3$ である。このとき主結果は次のように述べられる。

定理. $\pi=I(P_{\min};\sigma,\nu)$ を G の主系列表現で既約なものとする。また $\det(\beta)<0$ とし, $\chi:M_{\beta}\to\mathbf{C}^{\times}$ を M_{β} の任意の quasi-character とする。
(i) $\dim_{\mathbf{C}}\mathsf{GW}^{mg}_{G}(\pi,\chi\cdot\psi_{\beta})\leq 1.$
(ii) $\Phi\in\mathsf{GW}^{mg}_{G}(\pi,\chi\cdot\psi_{\beta})$ および $v\in\mathcal{H}_{\pi}$ とし, $v\in\mathcal{H}_{\pi}$ を π の極小 K_0-type に属するベクトルとする。このとき, $\Phi(v)(g)$ のある 1 次元部分群 (次節参照) 上の値は Meijer G-関数 $G^{4,0}_{2,4}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} a_1, & a_2 & & \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4\end{matrix}\right)$ を用いて表示される。

注意. β が定符号 $(\det(\beta)>0)$ のときの同様の結果は, [Ni], [Is] で得られている。Is] では急減少解が問題にされているが本稿の定式化のもとで $\dim_{\mathbf{C}}\mathsf{GW}^{mg}_{G}(\pi,\chi\cdot\psi_{\beta})\leq 1$ を示すことができる。

§3. 証明の概略と明示公式の例. $\Phi \in \mathrm{GW}_G^{mg}(\pi, \chi \cdot \psi_\beta)$ に対して, $W_v(g) := \Phi(v)(g) \in C_{mg}^\infty(R_\beta \backslash G; \chi \cdot \psi_\beta)$ を対応する一般化 Whittaker 関数とする。まず, [Mo-2] で説明してあるように, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & c/2 \\ c/2 & 0 \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$ としてよい。すると

$$M_\beta = \{z\mathrm{diag}(y_1, 1, 1, y_1) \mid z \in \mathbf{R}^\times, y_1 \in \mathbf{R}^\times\}$$

となる。

$$S = \{a(t, y) := \exp(tH_0 + \frac{\log(y)}{2} \cdot \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)) \mid t \in \mathbf{R}, y > 0\}$$

$$H_0 := \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & -1 & \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_0.$$

と置けば, $G = R_\beta S K_0$ が成立する。以下, 簡単のため, π は K_0-fixed vector $v_0 \in \mathcal{H}_\pi$ を持つ場合, すなわち $\sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) = 1$ の場合を考える。

$\Phi \in \mathrm{GW}_G^{mg}(\pi, \chi \cdot \psi_\beta)$ に対して, $W_{v_0}(g) := \Phi(v_0)(g) \in C_{mg}^\infty(R_\beta \backslash G; \chi \cdot \psi_\beta)$ を対応する一般化 Whittaker 関数とする。この関数 $W_{v_0}(g)$ は右 K_0-不変なので, 先の分解 $G = R_\beta S K_0$ より S 上の値によって完全にその値が決まることに注意する。G_0 の普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_0)$ の作用を書き下すことで, $W_{v_0}(a(t, y))$ の満たす偏微分方程式系を得る。次に

$$W_{v_0}(a(t, y)) = \sum_{j \geq 0} \phi^{<j>}(y) t^j, \quad t \in \mathbf{R}, \quad y > 0$$

と展開すると, 上述の偏微分方程式系から次のことがわかる。

(i) $\phi^{<j>}(y)$ が $\phi^{<j-2>}(y)$ から逐次決まる $(j \geq 2)$。

(ii) $z = (\pi c y)^2$ とおくと, $\phi(z) = \phi^{<k>}(z)$ $(k = 0, 1)$ は

$$(\natural) \quad \left\{z \prod_{i=1}^{2} (z\frac{d}{dz} - a_i + 1) - \prod_{j=1}^{4} (z\frac{d}{dz} - b_j)\right\} \phi(z) = 0$$

なる4階の一般化超幾何方程式をみたす。ただし a_i および b_j はそれぞれ χ および π の定義パラメータから定まる複素数である。

ところで, $W_{v_0}(g)$ が緩増大で, $Z(\mathfrak{g})$-有限, 右 K-有限であることから, $W_{v_0}(g)$ は一様に緩増大であることが Harish-Chandra の結果 ([HC, Theorem 1]) によってわかり, そこから $\phi^{<k>}(z)$ が $z \to +\infty$ で急減少であることが示せる (cf. [Mo-2, §3])。したがって, $(\natural)$ の急減少解を探せば良いが, それは $G_{2,4}^{4,0}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, & a_2 & & \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \end{matrix}\right)$ の定数倍に限ることが証明できる。これは, $a_i - b_j \notin \mathbf{Z}_{>0}$ $(\forall i, j)$ の場合にはよく知られているが ([Er]), 一般には面倒な考察を要する ([Mo-2, §9])。ともかくこの時点で, $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{GW}_G^{mg}(\pi, \chi \cdot \psi_\beta) \leq 2$ であることがわかる。最後に, $\widetilde{\gamma}_0 = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, -1) \in G$ とすると

$$\begin{aligned} W_v(a(t, y)) &= \sigma(\widetilde{\gamma}_0) W_v(a(t, y)\widetilde{\gamma}_0) = \sigma(\widetilde{\gamma}_0) W_v(\widetilde{\gamma}_0 a(-t, y)) \\ &= \sigma(\widetilde{\gamma}_0) \chi(\widetilde{\gamma}_0) W_v(a(-t, y)) \end{aligned}$$

なることに着目すれば, $\sigma(\tilde{\gamma_0})\chi(\tilde{\gamma_0})$ が 1 または −1 であるのに応じて, $\phi^{<0>}(y)\equiv 0$ または $\phi^{<1>}(y)\equiv 0$ であることが判明する。こうして $\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{GW}_G^{mg}(\pi_\infty,\chi\cdot\psi_\beta)\leq 1$ であることが示された。なお, $\sigma(\tilde{\gamma_0})\chi(\tilde{\gamma_0})=1$ のときに, $W_{v_0}(a(0,y))$ の公式を書きとめておこう:

$$W_{v_0}(a(0,y))=C\times\int_{-\sqrt{-1}\infty}^{+\sqrt{-1}\infty}\frac{\prod_{j=1,2}\Gamma(b_j-s)}{\prod_{1\leq i\leq 4}\Gamma(a_i-s)}(\pi cy)^{2s}ds$$

with

$$a_1=\tfrac{\mu+2}{2},\quad a_2=\tfrac{-\mu+2}{2},$$

$$b_1=\tfrac{\nu_1+\nu_2+3}{4},\quad b_2=\tfrac{\nu_1-\nu_2+3}{4},\quad b_3=\tfrac{-\nu_1+\nu_2+3}{4},\quad b_4=\tfrac{-\nu_1-\nu_2+3}{4}.$$

但し, ここで $\pi(z)=\mathrm{id}_\pi$, $\chi(z\mathrm{diag}(\sqrt{y_1},1/\sqrt{y_1},1/\sqrt{y_1},\sqrt{y_1},)=y^\mu$ $(z>0,y_1>0)$ であるとした。他のケースもおおよそこのような関数の線形結合で表すことができるが, 詳しくは準備中の論文の中で述べたい。

§4. 注意. 2つ注意を述べて本稿を終える。

(1) 上記の証明のように, G の連結成分から生じる G_0 の外部自己同型群の作用を考えに入れて初めて重複度自由定理が示される。実際, [Mo-2, §10] や [Is-Mo, p.5706] で述べたのと同じやり方で, Novodvorsky のゼータ積分を用いて, 2つの線形独立な $(\mathfrak{g},K_0)$-intertwiner $\mathcal{H}_\pi\to C^\infty_{mg}(R_\beta\backslash G;\chi\cdot\psi_\beta)$ が構成できるように思われる (やや面倒な解析的な議論を要するので詳細は詰めていないが, 非常に確からしく思える)。
(2) 山下博氏の論文 [Y] では, Hermite 型の連結半単純 Lie 群の場合に, 一般化 Whittaker 汎関数の重複度自由定理が論じられている。その論文の結果 [Y, Theorem 6.9 (3)] は, 我々の状況に当てはめると, $\det(\beta)>0$ の場合には, $(\mathfrak{g},K_0)$-intertwiner $\mathcal{H}_\pi\to C^\infty_{mg}(R_\beta\backslash G;\chi\cdot\psi_\beta)$ の次元は 1 次元以下であることを示唆しているが ([Y] の定式化は我々とは少し異なる), これは [Is],[Mi-1] の結果と整合的である。一方, [Y] では, $\det(\beta)<0$ のケースは適用範囲外としていて, §3 の考察と符合する。

REFERENCES

[An] ANDRIANOV, A. N., Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of genus two, Trudy Mat. Inst. Steklov. **112** (1971), 73-94.

[An-Ka] ANDRIANOV, A. N. AND KALININ. V, Analytic properties of standard zeta-functions of Siegel modular forms, Mat. Sb. (N.S.) **106** (1978) 323-339.

[Bu-Fr-Fu] BUMP, D. FRIEDBERG, S. AND FURUSAWA, M., Explicit formulas for the Waldspurger and Bessel models, Israel J. Math. **102** (1997), 125–177.

[Er] ERDELYI, A. ET AL, *Higher transcendental functions, vol I.*, (1953), McGrawHill.

[F] FURUSAWA, M., On L-functions for GSp(4) × GL(2) and their special values., J. Reine Angew. Math. **438** (1993), 187–218.

[HC] HARISH-CHANDRA., Discrete series for semisimple Lie groups, II. Acta Math **166** (1966), 1–111.

[Is] ISHII, T., Siegel-Whittaker functions on Sp(2, $\mathbf{R}$) for principal series representations., J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), 303–346.

[Is-Mo] ISHII, T. AND MORIYAMA, T., Spinor L-functions for generic cusp forms on $GSp(2)$ belonging to principal series representations., Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 5683–5709.

[Mi-1] MIYAZAKI, T., The generalized Whittaker functions for $Sp(2,\mathbf{R})$ and the gamma factor of the Andrianov L-functions, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **7** (2000), 241–295.

[Mi-2] MIYAZAKI, T., Nilpotent orbits and Whittaker functions for derived functor modules of $Sp(2, \mathbf{R})$, Canad. J. Math. **54** (2002), 769–794.

[Mo-1] MORIYAMA, T., 次数２の Siegel 保型形式の Fourier 展開と $GSp(2, \mathbf{R})$ 上の局所 Bessel 関数, 数理解析研究所講究録 **1421** (2005) 44-54.

[Mo-2] MORIYAMA, T., Generalized Whittaker functions on $GSp(2, \mathbf{R})$ associated with indefinite quadratic forms, preprint (2009).

[Ni] NIWA, S., On generalized Whittaker functions on Siegel's upper half space of degree 2. Nagoya Math. J. **121** (1991), 171-184.

[PS] PIATETSKI-SHAPIRO, I. I., L-functions for GSp_4, Olga Taussky-Todd: in memoriam. Pacific J. Math. (1997), Special Issue, 259-275.

[PS-Ra] PIATETSKI-SHAPIRO, I. I. AND RALLIS, S., A new way to get an Euler product, J. Reine Angew. Math. **392** (1988), 110-124.

[Y] YAMASHITA, H., Multiplicity one theorems for generalized Gel'fand-Graev representations of semisimple Lie groups and Whittaker models for the discrete series, In: Representations of Lie groups, Kyoto, Hiroshima, 1986, 31–121, Adv. Stud. Pure Math., 14, Academic Press, Boston, MA, (1988).

FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, SEIKEI UNIVERSITY, 3-3-1 KICHIJOJI-KITAMACHI, MUSASHINO, TOKYO, 180-8633, JAPAN

E-mail address: `ishii[at]st.seikei.ac.jp`

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY,, MACHIKANEYAMA-CHO 1-1, TOYONAKA, OSAKA, 560-0043, JAPAN

E-mail address: `moriyama[at]math.sci.osaka-u.ac.jp`