数理解析研究所講究録
第 1715 巻 2010 年 116-120

GSp(4) のスピノル L 函数の中心での特殊値に関係する新しい相対跡公式について

古澤 昌秋

ABSTRACT. 古澤-Shalika [4] は，Böcherer の予想 [1] の一般化を証明するべき二つの相対跡公式を提唱し，それらについての基本補題を証明した．最近，古澤-Martin [2] は同じ問題にアプローチする新しい相対跡公式を提唱し，その基本補題を証明した．さらに古澤-Martin-Shalika [3] は，この基本補題をヘッケ環全体に拡張した．

1. INTRODUCTION

いま F を代数体とし，F 上の代数群 $G = \mathrm{GSp}(4)$ を

$$G = \left\{ g \in \mathrm{GL}(4) \mid {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} g = \lambda(g) \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}, \lambda(g) \in \mathrm{GL}(1) \right\}$$

によって定める．さらに，$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ $(i = 1, 2)$ に対して，

$$\iota\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

とし，

$$H = \{\iota(h_1, h_2) \mid h_1, h_2 \in \mathrm{GL}(2), \det h_1 = \det h_2\}$$

とすると，H は G の部分群である．N を G の標準的 Borel 部分群の unipotent radical とする．

F の二次拡大体 E を一つとり固定する．このとき，E を含む F 上の quaternion algebra の同型類全体は，ϵ が $F^\times / \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ を動くとき，

$$D_\epsilon = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\epsilon \\ b^\sigma & a^\sigma \end{pmatrix} \mid a, b \in E \right\}$$

によって与えられる．ここで σ は $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元を表す．$D_\epsilon \ni x \mapsto \bar{x} \in D_\epsilon$ を D_ϵ の involution とする．このとき，

$$G_\epsilon = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(D_\epsilon) \mid g^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g = \mu(g) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mu(g) \in \mathrm{GL}(1) \right\}$$

によって定まる G の inner form G_ϵ を考える．ただし，ここで $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ とするとき，$g^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$ である．

Date: 2010 年 1 月 20 日 RIMS 研究集会「保型形式・保型表現およびそれに伴う L 函数と周期の研究」．講演の機会を与えてくださった研究代表者の都築正男さんに感謝します．
この研究は科学研究費補助金基盤研究 (C)22540029 によって援助されています．

G_ϵ の upper Bessel 部分群 R_ϵ を，

$$R_\epsilon = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in E^\times, \, \mathrm{tr}\,(x) = 0 \right\}$$

によって定め，lower Bessel 部分群 $\bar{R}_\epsilon$ を R_ϵ の転置とする．

Ω を $\mathbb{A}_E^\times / E^\times$ の character とし，$\omega = \Omega\,|_{\mathbb{A}_F^\times}$ とする．$\mathbb{A}/F$ の非自明な character ψ を

$$\psi \left[\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y & z \\ 0 & 1 & z & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \psi\,(x + w)$$

によって $N\,(\mathbb{A}_F)$ の character に拡張する．

$E = F\,(\eta)$ かつ $\eta^\sigma = -\eta$ となる η をとり，$R_\epsilon\,(\mathbb{A}_F)$ と $\bar{R}_\epsilon\,(\mathbb{A}_F)$ の character τ, ξ をそれぞれ，

$$\tau \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \Omega\,(a)\; \psi\,(\mathrm{tr}\,(-\eta x)),$$

$$\xi \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \right] = \Omega\,(a^\sigma)\; \psi\left(\mathrm{tr}\left(-\eta^{-1} y\right)\right),$$

によって定める．

$\Phi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{A}_F^2\right)$ に対して，section

$$f_\Phi\,(g, s) = |\det g|^{s+\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{A}_F^\times} \Phi\,[(0,t)g]\; \kappa^{-1}\,(t)\; |t|^{2s+1}\, d^\times t$$

から定まる GL (2) の Eisenstein 級数

$$E_\Phi\,(g, s) = \sum_{\gamma \in B_2(F) \backslash \mathrm{GL}_2(F)} f_\Phi\,(\gamma g, s)$$

をとる．ただし，ここで κ は，E/F に対応する二次指標を表す．函数等式

$$E_\Phi\,(g, s) = E_{\hat{\Phi}}\left({}^t g^{-1}, -s\right) \quad (\hat{\Phi} \text{ は } \Phi \text{ の Fourier 変換})$$

に注意しておく．$\Theta\left(\Omega^{-1}\right)$ で Ω^{-1} に対応する $\mathrm{GL}_2\,(\mathbb{A}_F)$ の theta series representation を表し，$\theta \in \Theta\left(\Omega^{-1}\right)$ とする．このとき，$H\,(\mathbb{A}_F)$ 上の函数 E を

$$E\,[\iota\,(h_1, h_2)] = E_\Phi\,(h_1, 0)\; \theta\,(h_2)$$

によって定める．

$f \in C_c^\infty\,(G\,(\mathbb{A}_F))$ とすると，

$$K_f\,(x, y) = \int_{Z(F) \backslash Z(\mathbb{A}_F)} \sum_{\gamma \in G(F)} f\left(x^{-1} \gamma y z\right)\, \omega\,(z)\, dz \quad (Z \text{ は } G \text{ の center})$$

によって，kernel function $K_f\,(x, y)$ が定まる．ここで，global distribution

$$I\,(f) = \int_{Z(\mathbb{A}_F)\, H(F) \backslash H(\mathbb{A}_F)} \int_{N(F) \backslash N(\mathbb{A}_F)} K_f\,(h, n)\; E\,(h)\; \psi\,(n)\; dh\, dn \tag{1.1}$$

を考える．

同様に，$f_\epsilon \in C_c^\infty\,(G_\epsilon\,(\mathbb{A}_F))$ とすると，

$$K_{f_\epsilon}\,(x, y) = \int_{Z_\epsilon(F) \backslash Z_\epsilon(\mathbb{A}_F)} \sum_{\gamma \in G_\epsilon(F)} f_\epsilon\left(x^{-1} \gamma y z\right)\, \omega\,(z)\, dz \quad (Z_\epsilon \text{ は } G_\epsilon \text{ の center})$$

によって，kernel function $K_{f_\epsilon}(x,y)$ が定まる．こちらについては，global distribution (1.2)

$$J_\epsilon(f_\epsilon) = \int_{Z_\epsilon(\mathbb{A}_F)\,\tilde{R}_\epsilon(F)\backslash\tilde{R}_\epsilon(\mathbb{A}_F)} \int_{Z_\epsilon(\mathbb{A}_F)\,R_\epsilon(F)\backslash R_\epsilon(\mathbb{A}_F)} K_{f_\epsilon}(\bar{r},r)\,\xi(\bar{r})^{-1}\,\tau(r)\,d\bar{r}\,dr$$

を考える．

このとき，古澤-Martin [2] において提唱した相対跡公式は，f と $\{f_\epsilon\}$ が "match" するとき，

$$I(f) = \sum_{\epsilon\in F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)} J_\epsilon(f_\epsilon) \tag{1.3}$$

となる，というものであった．(ここで，ほとんどすべての ϵ について，$f_\epsilon=0$ であることに注意しておく．) おおまかに言うと，この相対跡公式から

$$C\left(\pi,\Omega^{-1},\phi_\epsilon\right)\cdot L\left(\frac{1}{2},\pi\otimes\Theta\left(\Omega^{-1}\right)\right) = \left|P_\epsilon(\phi_\epsilon)\right|^2 \tag{1.4}$$

という形の等式がその帰結として期待される．ここで，π は $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_F)$ の globally generic cuspidal representation を表し，π_ϵ は π の $G_\epsilon(\mathbb{A}_F)$ への Jacquet-Langalnds transfer を表し，$\phi_\epsilon\in\pi_\epsilon$ であり，$P_\epsilon(\phi_\epsilon)$ はその Bessel period

$$P_\epsilon(\phi_\epsilon) = \int_{Z(\mathbb{A}_F)\,R_\epsilon(F)\backslash R_\epsilon(\mathbb{A}_F)} \phi_\epsilon(r)\,\tau^{-1}(r)\,dr$$

を表し，$C\left(\pi,\Omega^{-1},\phi_\epsilon\right)$ は π によって定まる explicit な 定数を表す．

目標とされる等式 (1.4) は，スピノル L 函数の特殊値に関する Böcherer の予想 [1] の明示的な一般化と解釈される．また (1.4) は，Gross-Prasad 予想 [5, 6] の市野-池田 [7] による精密化の $\mathrm{SO}(2)\subset\mathrm{SO}(5)$ の場合と深く関係している．(これについては，Prasad & Takloo-Bighash [13] も参照されたい．)

上記の相対跡公式 (1.3) を確立するには，まず両辺の global distribution を幾何学的に展開し (geometric expansion)，軌道積分 (orbital integral) の和に表し，(1) ヘッケ環の単位元についての基本補題 (fundamental lemma) を証明し，次に (2) 基本補題をヘッケ環全体に拡張することが必要である．GL(2) の場合の (1.4) に相当する L 函数の特殊値に関する等式は，Waldspurger [14] の Theta 対応によるアプローチに始まるが，相対跡公式によるアプローチは，Jacquet の二つの論文 [8], [9] によって始められた．(その後の展開については，[10], [12] を参照されたい．) 古澤-Shalika [4] は，(1.4) にアプローチする二つの相対跡公式を提唱し，それらについての単位元に関する基本補題を証明した．これら二つの相対跡公式はそれぞれ [8], [9] の相対跡公式の GSp(4) の場合への自然な拡張であると考えられる．一方，古澤-Martin [2] は，Erez Lapid の助言 [11] に啓発されて，(1.4) にアプローチする新しい相対跡公式を提唱し，単位元に関する基本補題を証明した．この新しい相対跡公式が [4] にある二つの相対跡公式に対して持つと思われる利便性については，[2, Introduction] を参照されたい．

2. Fundamental Lemma for the Hecke Algebra

最後に主結果について述べたい．局所的な状況を考える．いま，F は標数 0 の archimedean local field で，剰余標数は 2 でないとする．E は F の不分岐な二次拡大であるか $E=F\oplus F$ とし，κ を E/F に局所類体論の意味で対応する指標とする．このとき W を $\mathrm{GL}_2(F)$ の主系列表現 $\pi(1,\kappa)$ に対応する normalized Whittaker 函数とする．このとき $\mathcal{O}_F$ を F の整数環として，$\mathcal{H}$ を G のヘッケ環，すなわち，$G(F)$

上の bi-$G(\mathcal{O}_F)$-invariant で compact support を持つ $\mathbb{C}$-valued 函数全体のなす空間とする．δ を $F^\times$ の不分岐な指標とし，$\Omega = \delta \circ \mathrm{N}_{E/F}$ とする．

$s \in F^\times$, $a \in F \backslash \{0,1\}$ と $f \in \mathcal{H}$ に対して，Rankin-Selberg type 軌道積分 $I(s,a;f)$ を

$$I(s,a;f) = \int_{H_0 \backslash H} \int_N \int_Z f\left(h^{-1}\bar{n}^{(s)} zn\right) W_{s,a}(h)\, \omega(z)\, \psi(n)\, dz\, dn\, dh \tag{2.1}$$

によって定める．ただしここで，

$$H_0 = \left\{ z \cdot \iota\left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \right) \mid z \in Z, y \in F \right\}, \quad \bar{n}^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & s^{-1} \end{pmatrix},$$

$$W_{s,a}(\iota(h_1,h_2)) = \delta^{-1}(s(1-a)\det h_2)\, W\left(\begin{pmatrix} sa & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_1 \right) W\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s(1-a) & 0 \end{pmatrix} h_2 \right)$$

である．

次に Bessel 軌道積分を考える．$\epsilon = 1$ のとき $G_\epsilon \simeq G$ であり，同型は $\mathrm{GL}_4(E)$ 内の共役によって与えられる．よって，この同型によって，$G = G_1$ とし，$R = R_1$, $\bar{R} = \bar{R}_1$ は G の部分群となる．

E/F を不分岐二次拡大とする．このとき，$x \in F \setminus \{0,1\}$ かつ $\mathrm{ord}(x)$ は偶数，$\mu \in F^\times$, $f \in \mathcal{H}$ に対して，anisotropic Bessel 軌道積分 $\mathcal{B}(x,\mu;f)$ を

$$\mathcal{B}(x,\mu;f) = \int_{Z\backslash \bar{R}} \int_R f\left(\bar{r}\, A^{(a)}(u,\mu)\, r\right) \xi(\bar{r})\, \tau(r)\, dr\, d\bar{r}$$

によって定める．ここで，u は，$\mathrm{N}_{E/F}(u) = x$ を満たす $E^\times$ の元であり，$u = a + b\eta$, $a, b \in F$ としたとき，

$$A^{(a)}(u,\mu) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & -b \\ b\eta^2 & 1-a \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mu\, {}^t\begin{pmatrix} 1+a & -b \\ b\eta^2 & 1-a \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

である．$\mathcal{B}(x,\mu;f)$ は，$u \in E^\times$ の取り方によらずに定まる．

$E = F \oplus F$ とする．このとき，$x \in F \setminus \{0,1\}$，$\mu \in F^\times$, $f \in \mathcal{H}$ に対して，split Bessel 軌道積分 $\mathcal{B}(x,\mu;f)$ を

$$\mathcal{B}(x,\mu;f) = \int_{Z\backslash \bar{R}} \int_R f\left(\bar{r}\, A^{(s)}(x,\mu)\, r\right) \xi(\bar{r})\, \tau(r)\, dr\, d\bar{r}$$

によって定める．ただし，

$$A^{(s)}(x,\mu) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mu\, {}^t\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

である．

そして，$x \in F \setminus \{0,1\}$，$\mu \in F^\times$, $f \in \mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{I}(x,\mu;f)$ を

$$\mathcal{I}(x,\mu;f) = I(s,a;f) \quad \text{ただし} \quad s = -\frac{1-x}{4\mu},\ a = \frac{1}{1-x}$$

によって定める．

定理 [3] いま，$x \in F \setminus \{0,1\}$，$\mu \in F^\times$，$f \in \mathcal{H}$ とする．このとき Rankin-Selberg type 軌道積分 $\mathcal{I}(x,\mu;f)$ は，E/F が不分岐二次拡大かつ $\mathrm{ord}(x)$ が奇数のとき，0 で

あり，そうでないときには，

$$\mathcal{I}(x,\mu;f) = \delta^{-1}\left(\frac{x}{\mu^2}\right)\left|\frac{x}{\mu^2}\right|^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}(x,\mu;f) \tag{2.2}$$

が成り立つ.

これはまさしく，相対跡公式 (1.3) の regular terms に関する基本補題がヘッケ環のすべての元に対して成り立つことを示している.

References

[1] S. Böcherer, *Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maaß*, Math. Gottingensis Schrift. SFB. Geom. Anal. Heft 68, 1986.

[2] M. Furusawa and K. Martin, *On central critical values of the degree four L-functions for* GSp(4)*: the fundamental lemma II*, Amer. J. of Math., to appear.

[3] M. Furusawa, K. Martin and J. A. Shalika, *On central critical values of the degree four L-functions for* GSp(4)*: the fundamental lemma III*, preprint.

[4] M. Furusawa and J. A. Shalika, *On central critical values of the degree four L-functions for* GSp(4)*: the fundamental lemma*, Mem. Amer. Math. Soc. **164** (2003), no. 782, x+139 pp.

[5] B. H. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of* SO_n *when restricted to* SO_{n-1}, Canad. J. Math. **44** (1992), 974–1002.

[6] B. H. Gross and D. Prasad, *On irreducible representations of* $\mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{SO}_{2m}$, Canad. J. Math. **46** (1994), 930–950.

[7] A. Ichino and T. Ikeda, *On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture*, Geom. Funct. Anal. **19** (2010), 1378–1425.

[8] H. Jacquet, *Sur un résultat de Waldspurger*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **19** (1986), 185–229.

[9] H. Jacquet, *Sur un résultat de Waldspurger. II*, Compositio Math. **63** (1987), 315–389.

[10] H. Jacquet and N. Chen, *Positivity of quadratic base change L-functions*, Bull. Soc. Math. France **129** (2001), 33–90.

[11] E. Lapid, *Untitled preprint.*

[12] K. Martin and D. Whitehouse, *Central L-values and toric periods for* GL(2), Int. Math. Res. Not. IMRN **2009**, no. 1, 141–191.

[13] D. Prasad and R. Takloo-Bighash, *Bessel models for* GSp (4), J. Reine Angew. Math., to appear.

[14] J.-L. Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie*, Compositio Math. **54** (1985), 173–242.

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3–3–138 大阪市立大学大学院理学研究科数学教室

E-mail address: `furusawa@sci.osaka-cu.ac.jp`