数理解析研究所講究録
第 1715 巻 2010 年 11-18

Kleinの3次超曲面とそれに付随するエンドスコピックリフトについて

大阪府立大学 山内 卓也 (Takuya Yamauchi)
Osaka Prefecture University

1. Introduction

本稿は岡崎武夫氏との共同研究 [12] の概説である. 先ず問題の動機について述べる. $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ を $(1,11)$ 型の偏極構造とその上の標準レベル構造を備えたアーベル曲面のモジュライ空間とする. $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ は2次のジーゲル上半空間を $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})\subset \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ の離散群

$$K(11)^{\mathrm{lev}}:=\left\{\gamma\in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})\ \middle|\ \gamma-1_4\in\begin{pmatrix}\mathbb{Z}&\mathbb{Z}&\mathbb{Z}&11\mathbb{Z}\\ 11\mathbb{Z}&11\mathbb{Z}&11\mathbb{Z}&11^2\mathbb{Z}\\ \mathbb{Z}&\mathbb{Z}&\mathbb{Z}&11\mathbb{Z}\\ \mathbb{Z}&\mathbb{Z}&\mathbb{Z}&11\mathbb{Z}\end{pmatrix}\right\}$$

で割った商空間として表される. $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ は擬射影的3次元多様体であり, $K(11)^{\mathrm{lev}}$ は捩れ点を持つので $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ は特異点を持つ. $K(11)^{\mathrm{lev}}$ は合同部分群 $\Gamma(11^2)$ を正規部分群として含み, これは捩れ点を持たないのでモジュライ空間 $V:=\Gamma(11^2)\backslash\mathbb{H}$ は滑らかな擬射影的3次元多様体である. ここから全射正則射

$$p:V\longrightarrow \mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$$

があるので $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ は商特異点を持つことがわかる. ここに登場する2つの多様体の標準モデルは $\mathbb{Z}[\frac{1}{11},\zeta_{11^2}]$ 上定義されているが, レベル構造 (または標準レベル構造) の部分を局所エタールに考えることで, $\mathbb{Z}[\frac{1}{11}]$ 上定義されたモデルを取ることもできる.

さて, Gross-Popescu は [4] において, $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ の双有理モデルの一つを求めた. それは次の形の定義方程式をもつ:

$$\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}\longrightarrow X\subset\mathbb{P}^4,$$

$$X: x_0^2x_1+x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_4+x_4^2x_0=0.$$

この双有理射は [4] の構成からわかるが, 全射ではない. X は $\mathbb{Z}[\frac{1}{11}]$ 上の滑らかな3次超曲面[1]で, Klein's cubic threefold という名前が付いている. $X_{\mathbb{C}}$ のホッジ数は

$$h^{0,0}=1,h^{1,0}=h^{0,1}=h^{2,0}=h^{0,2}=h^{3,0}=h^{0,3}=0,h^{1,1}=1,h^{2,1}=h^{1,2}=5$$

となっており, 特に, X の3次のエタールコホモロジーから得られる局所L因子の次数は10である.

X のL関数は次のように楕円保型形式で表すことができる:

THEOREM 1.1. *(Okazaki-Y)* ℓ を素数. *newform* $f\in S_2(\Gamma_0(11^2))$ を $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ を *CM* にもつ楕円保型形式とし, $\chi:(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ を位数 *5*, 導手 *11* の原始指標とする. このとき,

$$L(H^3_{\mathrm{et}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell),s)=\prod_{i=0}^{4}L(f\otimes\chi^i,s-1)$$

2000 Mathematics Subject Classification 11F46 (primary), 11G40 (secondary).

著者は日本学術振興会から援助を受けております (課題番号 No.19740017 および JSPS Core-to-Core Program No.18005).

[1] 3次元代数多様体の分類から, このような多様体はファノ多様体と呼ばれている.

が *11* での局所因子の差を除いたところで成立する.

この定理から, $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ 上に $f\otimes\chi^i, i\in\{0,1,2,3,4\}$ に対応する非正則微分形式 F_i またはそれを (無限成分での) ベクトルに持つような $\mathrm{GSp}(2)(\subset \mathrm{GL}(4))$ の保型表現 Π_i の存在を期待することは自然なことと思われる. 正則微分形式を考えないのはこれが双有理不変量であり, $h^{3,0}(X_{\mathbb{C}})=0$ だからである[2].

研究当初, 我々はこのような Π_i が存在したとするならば, Π_i は CAP 表現であろうと予想していた. というのも, Π_i のスピノール L 関数は $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ の L 関数に寄与するものと思い込み, その双有理モデルである X の L 関数が楕円保型形式の L 関数の積で書けたからである. また, 弱エンドスコピックリフト (weak endoscopic lift) [3]だと仮定すると, (我々は Π_i の L 関数は必ず $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ の L 関数に寄与すると結果としては誤った考えを持っていたので) X の L 関数が 10 次であること (4 の倍数ではないこと) から矛盾すると考えていた (と誤解していた). ただし, CAP でも (弱) エンドスコピックリフトでもない場合というのは考えなかった.

その後暫くして, 既存の理論に当てはめて考えると Π_i は CAP ではなさそうだということに気付き始めた.

まず, Siegel 部分群からの放物誘導表現として得られる CAP 表現, 所謂, 斉藤黒川リフトの場合を考えてみる. この場合, π_f の L 関数の ε 因子と中心値での位数は

$$L(\pi_f,\frac{1}{2})=0,\ \varepsilon(\pi_f,\frac{1}{2})=-1$$

なので, Schmidt の結果より, $(\Pi_i)_\infty$ は正則形式を持つ場合と非正則形式を持つ場合に分けられる. 前者は $h^{3,0}(X_{\mathbb{C}})=0$ から起こらないことがわかる. 後者の場合, $p=11$ での局所表現 $(\Pi_i)_{11}$ を見ると, この表現は f_i から Jacquet-Langlands 対応を経由して $\pi_{f_i,11}$ と自明な表現との組からエンドスコピックリフトで得られるのだが $(\Pi_i)_{11}$ が $K(11)_{\mathbb{Z}_{11}}^{\mathrm{lev}}$ 固定ベクトルを持たないので矛盾. よってこの場合も起こらない. $\mathrm{GO}(2)_{\mathbb{A}}$ の既約尖点表現のテータリフトで書ける Soudry 型の CAP 形式 [17] もあるが, L 関数の形と Hodge 構造から, Soudry 型 CAP は可能性がなさそうだと推測できる. この辺りで CAP の可能性を探るのを止め, 次に弱エンドスコピックリフトによって Π_i を構成することを考えた. 結果として次を得た.

μ を f に付随する Hecke 指標とし, $g\in S_4(\Gamma_0(11^2))$ を μ^3 に対応する重さ 4 の newform とする.

THEOREM 1.2. *(Okazaki-Y)* 次の性質を満たす $\mathrm{GSp}(2,\mathbb{A})$ の既約尖点保型形式 $\Pi_i, 0\leqslant i\leqslant 4$ が存在する:

(i) Π_i は *globally generic* で $(\Pi_i)_\infty$ は $K(11)^{\mathrm{lev}}$ で固定されるベクトル F_i を持ち, その作用の変換則は $(3,-1)$ である. つまり, これらは $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ 上の *(2,1)* 型の非正則微分形式と対応する.

(ii) Π_i のスピノール L 関数は $L(\pi_f\otimes\chi^i,s)L(\pi_g\otimes\chi^i,s)$ で与えられる.

Π_i の構成法は次の通り. (そういう保障は最初からなかったのだが) $\Pi=\Pi_i$ が弱エンドスコピックリフトとして構成されていると仮定する. そうすると, [8] と [14] の結果より, Π は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ の二つの保型表現 π_1,π_2 から適当に Schwartz 関数 Φ を選択することでテータリフトによって構成されることがわかる: $\Pi=\theta_\Phi(\pi_1,\pi_2)$. 我々の目的に沿って, π_1 としては π_f を

---

[2] [11] において似たような状況で正則なものを扱っている.

[3] $\mathrm{GSp}(2,\mathbb{A})$ のユニタリ既約尖点表現 Π が弱エンドスコピックリフトであるとは二つの $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ のユニタリ既約尖点表現 π_1,π_2 であってその中心指標が一致するものが存在し,

$$L_v(\Pi,s)=L_v(\pi_1,s)L_v(\pi_2,s)$$

がほとんどすべての素点 v で一致するときをいう.

選択する. すると, あとは π_2 の候補と Schwartz 関数 Φ をうまく選択し, $\theta_\Phi(\pi_1,\pi_2)$ が所望のものか確認するのである. 明確な根拠はないが, 結論として $\pi_2=\pi_g$ と選択すればよいことがわかる.

ここで注意すべきことは [6] や [14] 等の一般論から $\mathrm{GSp}(2,\mathbb{A})$ の globally generic 尖点保型表現で上記定理の条件 (ii) をみたすものは簡単に構成できる. しかし, これらの一般論は我々が扱うような具体的なレベルに対しては効果がなく, 特に $\theta_\Phi(\pi_1,\pi_2)$ の π_2 や Φ を定理中の条件 (i) を満たすようにどう選択すればよいかという問いには答えてくれない. また, 我々の設定では π_1 が 11 で supercuspidal なので, [15] の結果を用いて固定ベクトルの存在を示すことはできない.

我々はこのような保型表現の存在に早くから気づいていたのであるが, $L(\pi_g,s)$ が $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ の L 関数に寄与しないことが確認できていたので上記表現 Π の存在を信じることができなかったのである. この「寄与しない」ことの主張を述べる前に $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ の L 関数をどう定義するか述べる. 先ず, $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ は滑らかでも固有でもないことに注意する. そこで $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ の L 関数をパラボリックコホモロジー

$$H^3_{\mathrm{et},!}(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{11\,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell):=\mathrm{Im}(H^3_{\mathrm{et},c}(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{11\,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)\longrightarrow H^3_{\mathrm{et}}(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{11\,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell))$$

の L 関数によって定義する. これは純重さ 3 である. これは次のように確認できる. transfer 定理より,

$$H^3_{\mathrm{et},c}(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{11\,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)\xrightarrow{\sim}H^3_{\mathrm{et},c}(V_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)^G\hookrightarrow H^3_{\mathrm{et},c}(V_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$$

を得る. これらの射はパラボリックコホモロジーの定義と可換である. よって,

$$H^3_{et,!}(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{11\,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$$

は $H^3_{et,!}(V_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$ の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 部分加群. V は滑らかなので [2] の Corollaire (3.3.6) から $H^3_{et,!}(V_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$ は純重さ 3 なので $H^3_{et,!}(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{11\,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$ もそうなっている.

THEOREM 1.3. *(Okazaki-Y)* 各 $i\in\{0,1,2,3,4\}$ に対して, 定理 *1.2* で構成した Π_i のスピノール *L* 関数は $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ の *L* 関数を割らない. より詳しく, $L(\Pi_i,s)=L(\pi_f\otimes\chi^i,s)L(\pi_g\otimes\chi^i,s)$ の因子 $L(\pi_g\otimes\chi^i,s)$ は $H^3_{\mathrm{et},!}(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{11\,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$ の *L* 関数を割らない.

REMARK 1.4. *(i)* $\displaystyle\prod_{i=0}^{4}L(\pi_f\otimes\chi^i,s)$ は $H^3_{\mathrm{et},!}(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{11\,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$ の *L* 関数に寄与すると予想されるが, これままだ確認できていない. パラボリックコホモロジーの次元の計算と $\mathbb{Z}$ ホッジ構造 $H^3_!(\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}},\mathbb{Z})$ の決定ができれば示せるがこれは難しい問題と思われる.
(ii) $H^3_{\mathrm{et},!}(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{11\,\overline{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$ には $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ をコンパクト化する際に付けくわえた境界成分と商特異点の寄与によって理解できると思われる. どちらかが, $\displaystyle\prod_{i=0}^{4}L(\pi_f\otimes\chi^i,s)$ に関係すると思われるが確認できてない.

これらの結果を Laumon の結果から眺めてみる. Π を $\mathrm{GSp}(2,\mathbb{A})$ の既約尖点保型形式とする. Laumon は Π が CAP でも弱エンドスコピックでもないのなら, Π の L 関数はジーゲル多様体の中間次数のエタールコホモロジーに寄与することを示した ([9] の定理 7.5). しかし, Laumon の証明は排他的ではなく, 彼の証明からは CAP 表現や弱エンドスコピック表現がどのようにジーゲル多様体の中間次数のエタールコホモロジーへ寄与するかはわからない.

我々の場合は偶然にも $\mathcal{A}_{11}^{\mathrm{lev}}$ が単有理的であったので定理 1.3 を示すことができたが, 一般には難しいことだと思われる.

このような経験をもとに同様の状況下で次の予想が成り立つことを期待する. 設定は次の通り. S を勝手な3次元ジーゲル多様体で $\mathbb{Q}$ 上定義されているとする. $\gamma \subset S \times S$ を代数対応とし, これも $\mathbb{Q}$ 上定義されているものとする. 一般に S は固有でも滑らかでもないので (de Rham, etale...) コホモロジーには混合 Hodge 構造 (または重さフィルトレーション) をいれて次を仮定する:

$$h^{3,0}(\mathrm{Gr}_3^W \gamma^* H^3_{\mathrm{dR}}(S)) = 0,\ h^{2,1}(\mathrm{Gr}_3^W \gamma^* H^3_{\mathrm{dR}}(S)) = 1.$$

Π を $\mathrm{Gr}_3^W \gamma^* H^3_{\mathrm{dR}}(S)$ の Hodge type (2,1) に対応する空間の生成元に対応する既約尖点保型表現とする. さらに, Π は重複度1をもつ表現と弱同値 (weakly equivalent) [4] となっていると仮定. このとき, Weissauer [18] の Theorem III) と Schmidt [16] の結果より, もし Π_∞ が non-generic, なら Π は重さ2の楕円保型形式 h からの Saito-Kurokawa リフトであり, Π_∞ が generic ならば重さ2, 4の楕円保型形式の組 (f, g) からの弱エンドスコピックリフトである. このとき次を期待する.

Conjecture 1.5. 上の設定のもとで

$$L(s, \mathrm{Gr}_3^W \gamma^* H^3_{\mathrm{et}}(S_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)) = \begin{cases} L(h, s-1), & \Pi \text{ は } h \text{ の } \textit{Saito-Kurokawa} \text{ リフト} \\ L(f, s-1), & \Pi \text{ は } (f,g) \text{ の弱エンドスコピックリフト} \end{cases}$$

が成立する.

2. Klein's cubic threefold and its L-function.

この節では Klein の3次超曲面 $X : x_0^2x_1 + x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_4 + x_4^2x_0 = 0$ の L 関数の決定する. 簡単な計算から X は $p = 11$ の外では良い還元をもつことがわかる. $L(H^3_{\mathrm{et}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell), s)$ の計算には

(1) X が Fano 3次超曲面であることと

(2) GL_2 型アーベル多様体の保型性

を用いる.

Proof.(定理1.2の証明の概要). S を X に含まれる line 達の成す Hilbert 概型とし, そのアルバネーゼ多様体を $A = A(S)$ とする. A は5次元アーベル多様体になる. 一般論により, これらはすべて $\mathbb{Q}$ 上定義された多様体で, Chow モチーフとして,

$$h^3(X) \simeq h^1(A)(-1)$$

が成立する. これにより X の L 関数は A のそれで表せる:

$$L(H^3_{\mathrm{et}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell), s) = L(H^1_{\mathrm{et}}(A_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell), s-1)$$

X は座標の置換 $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mapsto [x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_0]$ によって定める位数5の自己同型 α を持つ. この代数的 de Rham コホモロジー (cf. [5]) $H^3_{\mathrm{dR}}(X)$ への作用による ($\mathbb{Q}(\zeta_5)$ 上の) 分解を [3] の結果を用いて明示的に求めることができる. E を1節で登場した重さ2の CM 形式に対応する $\mathbb{Q}$ 上の CM 楕円曲線とする. 上記の代数的 de Rham コホモロジーの計算から $\mathbb{Q}$ 上定義されたアーベル多様体

$$B = A/(1-\alpha^*)A$$

は1次元であることがわかり, さらに, $A \overset{\mathbb{C}}{\sim} E^5$ であることが Adler と Ramanan[1] によって示されているので, 若干の議論の後で $B = E/\mathbb{Q}$ としてよいことがわかる. よって, $\mathbb{Q}$ 上で A の分解 $A \sim B \times B'$ を得る. ここで, B' は4次元アーベル多様体なのだが, X の $p = 3$ での局

[4] 二つの表現が弱同値であるとはほとんどすべての素点でそれぞれの局所表現が同値であるときをいう.

所 L 因子を求めると, それは $(1+3x+27x^2)$ と

$$1-3x-18x^2+135x^3+81x^4+3645x^5-13122x^6-59049x^7+531441x^8$$

の積になることがわかり後者は $\mathbb{Q}$ 上既約多項式なので, B' は $\mathbb{Q}$ 上単純なアーベル多様体であることがわかる.(ここに, $x=3^{-s}$ とおいた)

一方, 埋め込み

$$L=\mathbb{Q}(\zeta_5)\hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(B')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q},\ \zeta_5\mapsto\alpha^*$$

が存在するので, B' は GL_2 型のアーベル多様体であることがわかる (cf. [13]). GL_2 型のアーベル多様体の保型性 (cf. [7]+[13]) からある重さ 2 の elliptic newform$h=\sum_{n\geqslant 1}a_n(h)q^n$ で $\mathbb{Q}(a_n(h)|n\geqslant 1)=L$ となるようなものが存在する. $A\overset{\mathbb{C}}{\sim}E^5$ という事実と, A の導手が 11 の冪であることを用いると, ある (原始的) 有限指標 $\psi:G_{\mathbb{Q}}\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ が存在して,

$$h=f\otimes\psi$$

と書ける. ただし, f は E に対応する CM 形式. よって, $L=\mathbb{Q}(a_n(h)|n\geqslant 1)=\mathbb{Q}(\psi)$ なので結論を得る.

REMARK 2.1. 定理 *1.2* の証明を真似ることで $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ を乗法に持つような $\mathbb{Q}$ 上定義された GL_2 型の *4* 次元アーベル多様体の族が構成できる.

3. construction of generic cuspforms.

この節では定理 1.2 の Π_i を構成する. 以下, Π_i が弱エンドスコピックであると仮定して話を進める. 1 節で登場した CM 形式 $f\in S_2(\Gamma_0(11^2))$ に対応する größencharacter を μ とし, 対応する $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ の保型表現を $\pi_1=\pi(\mu)$ とする. 同様に, $\pi_2=\pi(\mu^3)$ とする. μ^3 は $S_4(\Gamma_0(11^2))$ に属する CM newform g に対応する größencharacter である. これら 2 つの表現はともに $p=11$ で超尖点的であることを注意しておく.

このとき, π_1,π_2 はすべての素点で tempered なので, 組 (π_1,π_2) からの弱エンドスコピックリフトは GO(4) からのテータリフトでかけることがわかっている. ここで, 下部構造である 2 次形式は簡約ノルムを持つ四元数代数 $B_{/\mathbb{Q}}$ である. 我々は $(\Pi_i)_\infty$ が非正則となるものを構成したいので, $B_{/\mathbb{Q}}$ は不定符号でなければならない (定符号だと正則なものしか構成できない). $\Pi_v, v\neq 11$ は不分岐表現なので Hasse の原理より, $B/\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ 上で分裂する. つまり $B=M(2,\mathbb{Q})$. よって, やるべきことは, (π_1,π_2) からのテータリフトが $K(11)^{\mathrm{lev}}$ で固定されるベクトルを持つように $p=11$ での Schwarts 関数をうまく見つけてやればよい. このようにして得られる表現は尖点的であり, 以下のような大域的 (標準)Whittaker 関数を持つ.

$k=\mathbb{Q},\mathbb{Q}_v$ or $\mathbb{A}$ に対して,

$$H(k)=\mathrm{GL}(2,k)^2$$
$$H^1(k)=\{h=(h_1,h_2)\in H(k)\mid \det(h_1)=\det(h_2)\}$$

とし, $H(k)$ の $M(2,k)$ 上の作用を $\rho(h_1,h_2)x=h_1^{-1}xh_2$, で定義する. これは同型 $i_\rho:H^1(k)/k^\times\simeq \mathrm{SO}(M(2,k))$ を与える. ただし, $k^\times$ は $\mathrm{SO}(M(2,k))$ へ対角に埋め込む.

$$e_1=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{11}\\0&0\end{bmatrix},\ \alpha=\begin{bmatrix}\frac{1}{11}&0\\0&-\frac{1}{11}\end{bmatrix}\in M(2,\mathbb{Q}).$$

とし, この 2 元に対する固定化群 $Z_{e_1,\alpha}(\mathbb{A})\subset\mathrm{SO}(M(2,\mathbb{A}))$ は

$$\left\{\left(\begin{bmatrix}1&x\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&-x\\0&1\end{bmatrix}\right)\mid x\in\mathbb{A}\right\}$$

と i_ρ を通して同型となる. $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}$ 上の. 標準的な加法指標 $\psi=\otimes_v\psi_v$ を固定する. f_1, f_2 を π_1,π_2 の保型形式 (非零固定ベクトル) とし, $W_1=\otimes_v W_{1v}, W_2=\otimes_v W_{2v}$ をそれぞれ ψ に関数 f_1, f_2 の大域的 (標準)Whittaker 形式とする. r_v を ψ に関する $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Q}_v)\times \mathrm{O}(4,\mathbb{Q}_v)$ の Weil 表現とする. このとき, (π_1,π_2) からのテータリフトによって得られた $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{A})$ 上の保型形式は

$$\theta(\varphi,f_1,f_2)(g)=\int_{H^1(\mathbb{Q})\backslash H^1(\mathbb{A})}\sum_{x\in M(2,\mathbb{Q})^2} r(g,h)\varphi(x)f_1(h_1)f_2(h_2)dh_1dh_2$$

によって与えられる. ただし, $r=\otimes_v r_v$, $\varphi=\otimes_v\varphi_v$ は $M(2,\mathbb{A})^2$ 上の Schwartz-Bruhat 関数, そして dh_i は Haar 測度である. $\theta(\varphi,f_1,f_2)$ の大域標準 Whittaker 関数 $W(g)$, $g=(g_v)_v\in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{A})$ は $W(g)=\otimes_v W_v(g_v)$ と局所標準 Whittaker 関数 $W_v(g_v)$ を用いて分解され, 今の場合具体的に

$$W_v(g_v)=\int_{Z_{e_1,\alpha}(\mathbb{Q}_v)\backslash H^1(\mathbb{Q}_v)} r_v(g_v,h)\varphi_v(e_1,\alpha)W_{1v}(h_1)W_{2v}(h_2)dh_1dh_2 \tag{3.1}$$

で与えられる. 後で注意するが $W_\infty(1)\neq 0$ は簡単に確認できる (Remark 3.2). $v\neq 11$ のとき φ_v は $M(2,\mathbb{Z}_v)^2$ の特性関数とする. このとき, π_{1v},π_{2v} は不分岐なので $W_v(1)\neq 0$ がわかる. あとは φ_{11} をうまく選択して, $W_{11}(1)\neq 0$ 確認すればよい.

以下, $p=11$ とし.

$$B=W_{1,p}^{\mathrm{new}}=W_{2,p}^{\mathrm{new}}$$

を $\pi_{1,p}=\pi_{2,p}$ の ψ_p に対する $B(1)=1$ を満たす局所 Whittaker 関数とすると, B は

$$B(\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})=\begin{cases}1 & \text{if } a\in\mathbb{Z}_{11}^\times,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.2}$$

を満たす.

$p=11$ での Schwartz 関数を

$$\varphi_p^{\mathrm{lev}}(x_1,x_2)=\mathrm{Ch}\Big(\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_p & p^{-1}\mathbb{Z}_p\\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}p^{-1}\mathbb{Z}_p^\times & p^{-1}\mathbb{Z}_p\\ p\mathbb{Z}_p & p^{-1}\mathbb{Z}_p^\times\end{bmatrix}\Big)$$

の様に定める. ただし, Ch は特性関数である. $k\in K(11)^{\mathrm{lev}}$ および $(h_1,h_2)\in\Gamma_0(p^2)\times\Gamma_0(p^2)$ に対して,

$$r_p(k,i_\rho(h_1,h_2))\varphi_p^{\mathrm{lev}}=\varphi_p^{\mathrm{lev}} \tag{3.3}$$

が成立する. ここで

$$\begin{aligned}\Gamma'&=\begin{bmatrix}p^2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p)\begin{bmatrix}p^{-2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_p & p^{-2}\mathbb{Z}_p\\ p^2\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p\end{bmatrix}\cap\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)\simeq\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p).\end{aligned}$$

とおき, $\Gamma'/\Gamma_0(p^2)$ の完全代表系が具体的に求め, それらを用いて, $W_p(1)\neq 0$ を示すことができる. 指標が付く場合でも, 次の様に Schwartz 関数を選択する. $\chi=\otimes\chi_v:\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ を導手 11, 位数 5 の原始指標とする. このとき, 各 $i\in\{0,1,2,3,4\}$ に対して

$$\varphi_p^{\mathrm{lev},\chi^i}(x_1,x_2)=\chi^{-i}(\det(p^2x_2))\mathrm{Ch}\Big(\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_p & p^{-1}\mathbb{Z}_p\\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}p^{-1}\mathbb{Z}_p^\times & p^{-1}\mathbb{Z}_p\\ \mathbb{Z}_p & p^{-1}\mathbb{Z}_p^\times\end{bmatrix}\Big)$$

とおくと, $h_i\in\Gamma_0(p^2)$ と $k\in K(11)^{\mathrm{lev}}$ に対して,

$$r_p(k,i_\rho(h_1,h_2))\varphi_p^{\mathrm{lev},\chi^i}=\chi_p^n(\det(h_1h_2^{-1}))\varphi_p^{\mathrm{lev},\chi^i}$$

を満たすことが簡単にわかり, $W_p(1) \neq 0$ も同様に確認できる. 以上の計算により次のことを得た.

THEOREM 3.1. (*i*) 各 $i \in \{0,1,2,3,4\}$ に対して, *globally generic Hecke eigen cuspforms* F_{χ^i} が存在して,

(a) F_{χ^i} は $K(11)^{\mathrm{lev}}$ で固定される,

(*b*) F_{χ^i} は *highest weight* $(3,-1)$ をもつベクトル.

(*ii*) $L(\Pi_{\chi^i}, \mathrm{spin}, s) = L(s, \mu \cdot \chi^i \circ N_{K/\mathbb{Q}}) L(s, \mu^3 \cdot \chi^i \circ N_{K/\mathbb{Q}})$ が $(p = 11$ での局所 L 因子も込めて) 一致する.

REMARK 3.2. (π_1, π_2) のテータリフトに対して, 無限素点での *Schwartz* 関数 $\varphi_\infty \in \mathcal{S}(M(2,\mathbb{R})^2)$ は次で与えられる.

$$P_+(x) = \mathrm{Tr}(x \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & -1 \\ -1 & \sqrt{-1} \end{bmatrix}),\ P_-(x) = \mathrm{Tr}(x \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 1 \\ -1 & \sqrt{-1} \end{bmatrix})$$

とおく. ただし. $P_\pm(\rho(u_{t_1}, u_{t_2}x) = e^{-\sqrt{-1}(t_2 \pm t_1)} P_\pm(x)$, $u_{t_i} = \begin{bmatrix} \cos t_i & \sin t_i \\ -\sin t_i & \cos t_i \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$, $i = 1,2$. このとき, $\varphi_{\infty_j} \in \mathcal{S}(M(2,\mathbb{R})^2) \otimes \mathbb{C}[s_1, s_2]$ を:

$$\varphi_\infty(x_1, x_2) = \exp(-\pi(\sum_{i=1}^{2} a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2)) P_+(s_1x_1 + s_2x_2)^3 P_-(s_2x_1 - s_1x_2)$$

と定義. ここに $x_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}$.

4. X と $\mathcal{A}_{1,11}^{\mathrm{lev}}$ のコホモロジーの比較

この節では X と $\mathcal{A}_{1,11}^{\mathrm{lev}}$ 上の微分形式の関係, および, それらの代数多様体の L 関数の関係について若干の考察を述べる.

Let $\Gamma' = \Gamma(11^2) \subset \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ を level 11^2 の合同部分群とする. 1 節でも述べたがこれは $K(11)^{\mathrm{lev}}$ の正規部分群である. $G = K(11)^{\mathrm{lev}}/\Gamma' \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ とおく. G は有限群なので制限射は同型 $H^3(K(11)^{\mathrm{lev}}, \mathbb{C}) \simeq H^3(\Gamma', \mathbb{C})^G$ を導く. $K(11)^{\mathrm{lev}} \backslash \mathbb{H}_2$ (resp. $\Gamma' \backslash \mathbb{H}_2$) は $K(11)^{\mathrm{lev}}$ (resp. Γ') の Eilenberg-Mac Lane 空間なので $H^3(K(11)^{\mathrm{lev}}, \mathbb{C}) = H^3(\mathcal{A}_{1,11}^{\mathrm{lev}}, \mathbb{C})$ (resp. $H^3(\Gamma', \mathbb{C}) = H^3(V, \mathbb{C})$, $V := \Gamma' \backslash \mathbb{H}_2$). $K(11)^{\mathrm{lev}}$ は捻じれ点を持つのだが, 複素係数を考えているので問題はない.

$\widetilde{V}$ を V のトロイダルコンパクト化とし, $j : V \hookrightarrow \widetilde{V}$ を自然な包含射とする. このとき $H_!^3(V, \mathbb{C}) := \mathrm{Im}(H^3(\widetilde{V}, \mathbb{C}) \xrightarrow{j^*} H^3(V, \mathbb{C}))$ とおくと, [10] の 7 節より, $H_{\mathrm{cusp}}^3(V, \mathbb{C}) = H_!^3(V, \mathbb{C})$ を得る. $H^3(V, \mathbb{C})$ の尖点部分 $H_{\mathrm{cusp}}^3(V, \mathbb{C})$ は $(\mathfrak{g}, K)$-コホモロジーの言葉を用いて定義される (cf. Section 2 in [10]). これらを合わせると, $H_{\mathrm{cusp}}^3(\mathcal{A}_{1,11}^{\mathrm{lev}}, \mathbb{C}) = H_!^3(V, \mathbb{C})^G$ が成り立つことが分かる. さらに, 次の自然な同一視 $\mathrm{Gr}_3^W H_c^3(\mathcal{A}_{1,11}^{\mathrm{lev}}, \mathbb{C}) = H_!^3(V, \mathbb{C})^G$ も期待されるが, 成り立つかどうかは確認できていない. .

Proof.(定理 1.3 の証明) 以下 H^* (resp.H_c^*) はエタールコホモロジー (resp. コンパクトサポート付きエタールコホモロジー) を意味することにする. X と $\mathcal{A}_{1,11}^{\mathrm{lev}}$ は $\mathbb{Q}$ 上で双有理同値なので共通の開集合 $U/\mathbb{Q}$ が取れる. 次の完全列

$$\cdots \longrightarrow H_c^3(U_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^3(X_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) = H^3(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^3((X \setminus U)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_c^3(U_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^3(\mathcal{A}_{1,11\overline{\mathbb{Q}}}^{\mathrm{lev}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H_c^3((\mathcal{A}_{1,11}^{\mathrm{lev}} \setminus U)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \cdots .$$

を考えると, $H^3(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ と $H^3_c(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{1,11\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の差は $H^3_c((X \setminus U)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ と $H^3_c((\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{1,11} \setminus U)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ で表せる. $X \setminus U$ および $\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{1,11} \setminus U$ の既約成分 Z であって次元が 1 以下のものに対しては, その H^3, H^3_c はきえるので, 既約成分は曲面としてよい. ポアンカレ双対性から $H^3_c((\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{1,11} \setminus U)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^1((\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{1,11} \setminus U)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)(-1)$ だから, 十分大きな任意の素数 $p \neq \ell$ に対して, Frob_p の $H^3_c((\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{1,11} \setminus U)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の固有値は $p\alpha$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}^\times$ の形をしている. X は滑らかな 3 次超曲面なので Frob_p の $H^3(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の固有値は同じ形をしている (cf. Proposition 2.5). これより, Frob_p の $H^3_!(\mathcal{A}^{\mathrm{lev}}_{1,11\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の固有値は常に p で割れてしまうので, 重さ 3 の楕円保型形式の L 関数が寄与することはないことがわかる.

REFERENCES

1 A. Adler and S. Ramanan, Moduli of abelian varieties. Lecture Notes in Mathematics, 1644. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

2 P. Deligne, La conjecture de Weil. II. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 52 (1980), 137–252

3 P. Griffiths, On the periods of certain rational integrals. I, Ann. of Math. (2) 90 (1969), 460-495.

4 M. Gross and S. Popescu, The moduli space of $(1,11)$-polarized abelian surfaces is unirational. Compositio Math. 126 (2001), no. 1, 1–23.

5 A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 29 1966 95–103.

6 R. Howe and I.I. Piatetski-Shapiro, Some examples of automorphic forms on Sp_4, Duke. math **50** (1983), 55-105.

7 C. Khare and J-P. Wintenberger, Serre's conjecture I, to appear in Invent. Math.

8 S. Kudla, S. Rallis, and D. Soudry, On the degree 5 L-function for Sp(2), Invent. Math. 107 (1992), 483-541.

9 G. Laumon, Sur la cohomologie a supports compacts des varietes de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)\mathbb{Q}$. Compositio Math. 105 (1997), no. 3, 267–359.

10 T. Oda and J. Schwermer, Mixed Hodge structures and automorphic forms for Siegel modular varieties of degree two. Math. Ann. 286 (1990), no. 1-3, 481–509.

11 T. Okazaki and T. Yamauchi, A Siegel modular threefold and Saito-Kurokawa type lift to $S_3(\Gamma_{1,3}(2))$, Math. Ann. 341 (2008), no. 3, 589–601.

12 T. Okazaki and T. Yamauchi, Endoscopic lifts to the Siegel modular threefold related to Klein's cubic threefold, preprint 2010.

13 K. Ribet, Abelian varieties over $\mathbb{Q}$ and modular forms. Modular curves and abelian varieties, 241–261, Progr. Math., 224, Birkhauser, Basel, 2004.

14 B. Roberts, Global L-packets for GSp(2) and theta lifts, Docu. math **6** (2001) 247-314.

15 B. Roberts, R. Schmidt, Local newforms for GSp(4), L.N.M. 1918 (2007), Springer.

16 R. Schmidt, The Saito-Kurokawa lift and functoriarity, Amer. J. math (2005), 209-240.

17 D. Soudry, The CAP representation of $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$, J. reine angrew. Math. **383** (1988), 87-108.

18 R. Weissauer, Four dimensional Galois representations, Astérisque. **302**(2005), 67-150.

yamauchi@las.osakafu-u.ac.jp
Faculty of Liberal Arts and Sciences, Osaka Prefecture University 1-1 Gakuen-cho, Nakaku, Sakai, Osaka 599-8531, Japan.