数理解析研究所講究録
第1722巻 2010年 154-166

あるアルファ行列式の正値性

落合 啓之 (HIROYUKI OCHIAI, KYUSHU UNIV.)

1. アルファ行列式

1.1. アルファ行列式の定義. アルファ行列式 $\det_{\alpha}A$ は、
- (可換な成分を持つ) n 次正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ に対して決まる
- 成分の n 次同次多項式であり、n 次対称群 S_n 上をわたる和である
- 1パラメータ α に依存する
- $\alpha=-1, \alpha=1$ のときはそれぞれ行列式、permanent になる：

$$\det_{-1}A=\det A, \quad \det_{1}A=\mathrm{per}A.$$

という性質を満たすような、行列式の1パラメータ変形の一つであり、具体的には次のように定義される。

$$\det_{\alpha}A=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha^{d(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}.$$

ここで、置換 $\sigma\in S_n$ に対して、σ を互換の積で表す個数の最小値を $d(\sigma)$ と表す。σ を素なサイクルの積で表すときのサイクルの個数を $\nu(\sigma)$ とすれば、$d(\sigma)=n-\nu(\sigma)$ の関係にある。いずれにせよ、d は S_n 上の共役類上で一定の値をとる類関数である。行列式の1パラメータ変形として著名なものとして量子行列式

$$q\text{-}\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha^{\iota(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$$

があり、これも冒頭に挙げた4つの性質を満たす。ここで、$\iota(\sigma)$ は σ を隣接互換の積で表す最小個数である。量子行列式の定義は Coxeter 系との相性がよく、量子群と直結する。一方、ι は類関数ではない。たとえば、$\iota((1,3))=3$, $\iota((1,2))=d((1,2))=d((1,3))=1$ である。したがって、量子行列式とアルファ行列式は、行列式の「異なった方向」への1パラメータ変形である。(現在のところ。両者の間に「本当に」直接の関係がないのかどうかは、探るべき問題だと思う。) 今後、この文章では量子行列式は扱わない。

1.2. 先走ってコメントしておくが、この文章の本文の前半では、アルファ行列式を式として扱う。すなわち、A の成分およびパラメータ α は可換な変数であると考え、これらの変数を含む多項式環や、必要に応じてそれを含む商体の中で議論する。係数体の標数に関する制限は特にない。

後半ではアルファ行列式の値の正負を論ずる。このときは、すべてを複素数体の中で考える。α は実数とし、A の成分は複素数とする。

1.3. 正値性の問題. 実正定値行列や正定値エルミート行列の行列式は正であるが、アルファ行列式が同じような性質を持つようなパラメータ α の範囲はどこか？これが、白井朋之・髙橋陽一郎によって提起された問題である。彼らによる予想を述べる。

Conjecture 1. [1, Conjecture 1.3] α を実数とする。

(1) すべてのサイズのすべての非負定値実対称行列 A に対して $\det_\alpha A \geq 0$ となる必要十分条件は、$\alpha \in \{-1/m \mid m \in \mathbf{N}\} \cup [0,2]$ である。

(2) すべてのサイズのすべての非負定値エルミート行列 A に対して $\det_\alpha A \geq 0$ となる必要十分条件は、$\alpha \in \{-1/m \mid m \in \mathbf{N}\} \cup [0,1]$ である。

この予想は、(小) 行列式で定義される確率過程をアルファ行列式方向へ1パラメータ変形する理論を構成する際に現れる。非負性が保証される範囲では、確率測度を定義することができる。そうできる範囲を具体的に決定せよ、という問題・予想である。この予想だけを解決しようと思えば、確率論的な由来を離れて不等式の問題として考えることも可能である。ここでは以下、確率論的な考察は行わない。

以下の場合は予想が解決されている。

- $\alpha < 0$ の範囲では、(1)(2) とも正しいことがわかっている。α が負整数の逆数であればアルファ行列式が非負であることは [1, Proposition 4.3] で示されており、逆は [1, Lemma 2.2] の後で注意されている。
- $\alpha \geq 0$ とする。(1) の場合は、$\alpha \in [0,2]$ が必要条件であることは証明されている [1, Proposition 4.4]. (2) の場合は、$\alpha \in [0,4/3]$ が必要条件であることは証明されている [1, Remark 5].
- $\alpha \geq 0$ の十分性はまだよくわかっておらず、いくつかの離散的な場合に保証されている。

この文章では、$\alpha \geq 0$ で (2) の場合に、$\alpha \in [0,1]$ が必要条件であることを証明する (Corollary 9)。

1.4. 証明の方針. [1] で提唱されている方針を紹介する。対偶を考える。すなわち、$\alpha > 1$ に対して、ある非負定値エルミート行列 A が存在して、そのアルファ行列式が負になることを示すことにする。A として、次のような (2つの整数パラメータに依存する非常に特別な) 行列を考える。N, K を非負整数とし、2つの行ベクトル $u, v \in \mathbf{C}^{K+2N}$ を

$$u = (\underbrace{1,\ldots,1}_{K},\underbrace{1,\ldots,1}_{N},\underbrace{0,\ldots,0}_{N},), \tag{1}$$

$$v = (\underbrace{1,\exp(2\pi\sqrt{-1}/K),\ldots,\exp(2\pi\sqrt{-1}(K-1)/K)}_{K},\underbrace{0,\ldots,0}_{N},\underbrace{1,\ldots,1}_{N}). \tag{2}$$

で定義する。$A = A^{(K,N)} = u^*u + v^*v$ とする。このとき、A は非負定値エルミート行列であり、A の階数は2である。$\det_\alpha A$ は α, N, K に依存する。[1] では $K = 2,3$ の場合にこれらを計算し、それぞれ、与えられた $\alpha > 2$, $\alpha > 4/3$ に対して、N を適当に選べば $\det_\alpha A < 0$ とできることを示している。そして、与えられた $\alpha > 1$ に対しても、K, N を適当に選べば、$\det_\alpha A < 0$ とできるのではないか、と期待している。$K = 2,3$ に対し

て得られているアルファ行列式の表示はさほどこみいってはいないものの、$K=4,5,\dots$ としていくとどうなるかはすぐには読み取りづらい。

ここではこの戦略を次のように具体化する。全体の流れとして、少し一般的な設定から始め、徐々に特殊化していくことにする。最初は A に課せられているエルミート条件を外し、階数が2の複素正方行列に対して、$\det_\alpha A$ を A の成分に依存する部分と α に依存する部分を分離して書く表示を与える。α に依存する部分は、対称群の球関数と類似の手法で計算することができ、content 多項式による積商の表示が与えられる。一方、A の成分に依存する部分は母関数のレベルでconcise な表示を与えることができる。次に、行列 A に上述のような $n=K+2N$ 分解型を仮定し、さらにサイズ N 側を上と同じように特殊化する。この形に限定したときに、アルファ行列式を和の個数が N に依存しないように表示できることを示し、この系として large N 極限を有限和で表す。さらに、サイズ K 側を (1)(2) のように特殊化したときに、A の成分に依存する部分の母関数が代数関数で書けることを示し、有限和の各項がその代数関数をオイラー積分変換した形になっていることを示すことで、アルファ行列式の large N 極限が一般超幾何級数の1での特殊値になっていることを導く。

Theorem 2. u,v を *(1)(2)* のように特殊化し、 $A^{(K,N)}=u^*u+v^*v$ としたとき、

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\det_\alpha A^{(K,N)}}{2c_N(\alpha)c_{N+K}(\alpha)}={}_3F_2\left(-\varepsilon,\frac{1-K}{2},-\frac{K}{2};\frac{1}{2},1-\varepsilon\middle|\,1\right).$$

ここで $c_N(\alpha)=\prod_{j=1}^{N-1}(1+j\alpha)$, $\varepsilon=1-(1/\alpha)$ と定める.

ここで、一般超幾何関数 ${}_3F_2$ は

$${}_3F_2\left(a,b,c;d,e\middle|\,x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(d)_n(e)_n n!}x^n$$

と定義されている。$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$ である。

一般超幾何級数のこの特殊値はガンマ関数の積商では表されないが、定義の級数表示の各項を初等的に不等式で評価することで、負になるための十分条件を導くことができる。これによって、すべての $\alpha>1$ に対して、適当に K,N を大きくすれば、$\det_\alpha A^{(K,N)}<0$ となることが示される。

1.5. 十分性との関係. [1, Proposition 4.3] では、A の階数が p であれば、$\alpha\in[0,1/(p-1)]$ の範囲で $\det_\alpha A\geq 0$ であることが得られている。したがって、ここでの定理と合わせると、「すべてのサイズの階数2の非負エルミート行列 A に対して $\det_\alpha A\geq 0$ となるための必要十分条件は $\alpha\in[0,1]\cup\{-1/m\mid m\in\mathbf{N}\}$」が得られたことになる。これを踏まえると、冒頭に述べた白井・髙橋の予想は「アルファ行列式が非負になるようなパラメータ α の範囲は階数を2に限っても広がらない（＝階数を一般にしても狭くならない）」と言い換えることができる。予想が正しい場合には、この言い換えにも何らかの意味がつくと興味深いと考えられる。

2. 階数２の行列のアルファ行列式

この節では、正方行列 A は階数２であると仮定するが、エルミート性や非負定値性は仮定しない。

2.1. 階数１の行列のアルファ行列. 以下の計算で必要とはならないのだが、参考までに A が階数１の場合のアルファ行列式の表示を与える。階数１の正方行列は、二つの行ベクトル $u, u' \in \mathbf{C}^n$ を用いて、$A = {}^t uu'$ と書ける。すなわち、$u = (u_1, \ldots, u_n), u' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ を用いて、$a_{ij} = u_i u'_j \ (i, j = 1, \ldots, n)$ と表せる。このとき、

$$\det{}_\alpha A = c_n(\alpha) \prod_{j=1}^{n} u_j u'_j \tag{3}$$

となる (c.f. [1, Proposition 4.4])。ここで $c_n(\alpha) = \prod_{j=0}^{n-1}(1 + j\alpha)$ と定義される。$c_n(\alpha)$ は、横一列の n の分割に対応するヤング図形のコンテント多項式である。そして、すべての成分が１であるような n 次正方行列 $\mathbf{1}$ のアルファ行列式は $c_n(\alpha)$ である。一般に、正則な対角行列の左右からのかけ算の作用で、アルファ行列式は１次同次な多項式（指標の指定された相対不変式）である。階数が１の行列全体へ、正則な対角行列全体のなすトーラス群は概均質に作用するので、相対不変式は開軌道の１点での値で決まる。行列 $\mathbf{1}$ は開軌道に属する。これは式 (3) の意味の説明となっている。

なお、この事実 (3) から、α が負の範囲でのアルファ行列式の正定値性のためには、$1/\alpha$ が整数であることが必要条件であることが導かれている [1]。すなわち、$\alpha < 0$ かつ $\alpha \notin \{-1/m \mid m \in \mathbf{N}\}$ の場合には、$n = 1 + \min\{j \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid 1 + j\alpha < 0\}$ と選ぶことで $\det{}_\alpha \mathbf{1} < 0$ となる。

2.2. 階数２の行列. 階数２の行列は階数１の行列の２つの和に書ける。アフィン空間や射影空間では直線の概念がある。それらの中の部分集合 X に対して、X の２点を結ぶ直線の全体の閉包を secant という。X が閉代数多様体であれば X の secant もそうであり、割線多様体と呼ばれる。さらに X が conic, すなわち、ベクトル空間の部分集合でスカラー倍で閉じている場合は、secant は X の２元の和の全体の閉包でもある。後の方では、実の場合の類似を扱う。実ベクトル空間の部分集合 X に対して、X の２点を結ぶ線分の全体の閉包を正の secant と考えても良かろう。X が conic, すなわち、正のスカラー倍で閉じているならば、X の正の secant は X の２元の和の全体の閉包とも一致する。これらの用語を用いれば、階数２以下の行列全体は階数１以下の行列全体の secant であり、階数２以下の非負定値エルミート行列全体は階数１以下の非負定値エルミート行列全体の secant である。

階数１の行列を前の小節のように２つのベクトルで表示すると、階数２の行列は４つのベクトルを用いて表示することができる：A が階数２ならば、４つの行ベクトル $u, u', v, v' \in \mathbf{C}^n$ を用いて、$A = {}^t uu' + {}^t vv'$ と表せる。すなわち、$A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ の各成分は、$u_i, u'_i, v_i, v'_i \in \mathbf{C} \ (i = 1, \ldots, n)$ を用いて

$$a_{ij} = u_i u'_j + v_i v'_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

と書ける。ここで、u'_i や v'_i は u_i や v_i の複素共役であるとは、まだ仮定しない。

2.3. 階数2の行列のアルファ行列式. $\psi(\sigma)=\psi_n(\sigma)=\alpha^{n-\nu(\sigma)}$ と定義する。アルファ行列式の定義に現れる重み関数である。ψ は S_n 上の類関数である。すなわち, $\psi(\tau\sigma\tau^{-1})=\psi(\sigma)$ がすべての $\sigma,\tau\in S_n$ に対して成り立つ.

Theorem 3. A が, 式 *(4)* の形であるとする。このとき u,u',v,v' の多項式 $\varphi_{n,k,l}$ と α の多項式 $\overline{\psi}_{n,k,l}(\alpha)$ が存在して

$$\det{}_\alpha A=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\overline{\psi}_{n,k,l}(\alpha)\varphi_{n,k,l}(A)$$

と書ける。

以下で $\varphi_{n,k,l}$ や $\overline{\psi}_{n,k,l}$ の具体形を与えて行く。まず、

$$\begin{aligned}\det{}_\alpha A &= \sum_{\sigma\in S_n}\psi(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(u_iu'_{\sigma(i)}+v_iv'_{\sigma(i)})\\ &=\sum_{I,J\subset\{1,\dots,n\}}\overline{\psi}(I,J)\left(\prod_{i\in I\cap J}u_iu'_i\right)\left(\prod_{i\in I\cap J^c}u_iv'_i\right)\left(\prod_{i\in I^c\cap J}v_iu'_i\right)\left(\prod_{i\in I^c\cap J^c}v_iv'_i\right)\end{aligned}\tag{5}$$

と展開することができる。ここで

$$\overline{\psi}(I,J):=\sum_{\sigma\in S_n;\sigma(I)=J}\psi(\sigma)\tag{6}$$

と定義する。右辺に出てくるこのような和について一般論を復習する。

2.4. $\mathbf{F}_1$ 上の Grassmann 多様体.

Lemma 4. G を群とし、H を G の部分群とする。H は有限群であると仮定する。ψ を G 上の類関数とする。$G\times G$ 上の関数 $\overline{\psi}$ を

$$\overline{\psi}(g_1,g_2)=\sum_{h\in H}\psi(g_2hg_1^{-1})\tag{7}$$

で定義する。このとき、かってな $g,g_1,g_2\in G$, $h_1,h_2\in H$ に対して $\overline{\psi}(gg_1,gg_2)=\overline{\psi}(g_1,g_2)=\overline{\psi}(g_1h_1,g_2h_2)$ となる。すなわち $\overline{\psi}$ は $G\backslash((G/H)\times(G/H))$ 上の関数である。

$k\le n$ となるような非負整数に対して、

$$\Sigma(k,n):=\{I\subset\{1,\dots,n\}\mid \sharp I=k\}$$

と定義する。これは絶体 (the field of one element) 上のグラスマン多様体と考えると扱いやすい。対称群 S_n は $\{1,\dots,n\}$ の全単射の全体 $\mathrm{Aut}(\{1,\dots,n\})$ と見なすことができ、これにより、$\Sigma(k,n)$ には S_n が作用する。この作用は推移的である。$G=S_n$ とおく。base point $\{1,\dots,k\}\in\Sigma(k,n)$ を選び、その点の固定部分群を H と書くと、G 等質空間として

$$\Sigma(k,n)\cong G/H,\qquad gH\mapsto I=g(\{1,\dots,k\})\tag{8}$$

と同一視できる：$H = S_k \times S_{n-k} \subset G$ である。

Lemma 5. ψ を S_n 上の類関数とする。$\overline{\psi}$ を式 *(6)* で定める。このとき

(1) $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ とする。I と J の元の個数が異なれば、$\overline{\psi}(I, J) = 0$ である.
(2) 式 *(6)* と式 *(7)* は同一視 *(8)* の下で同じである。
(3) $I, J, I', J' \in \Sigma(k, n)$ とする。このとき (I, J) と (I', J') が $\Sigma(k, n) \times \Sigma(k, n)$ 上の同じ $G = S_n$ 軌道に属するための必要十分条件は $\sharp(I \cap J) = \sharp(I' \cap J')$ である。
(4) $I, J, I', J' \in \Sigma(k, n)$ とする。$\sharp(I \cap J) = \sharp(I' \cap J')$ ならば, $\overline{\psi}(I, J) = \overline{\psi}(I', J')$ である。

この補題に基づき、次のように定義する。

Definition 6. $l \leq k \leq n$ を非負整数とする。$l = \sharp(I \cap J)$ となるような $I, J \in \Sigma(k, n)$ が存在するとき、

$$\overline{\psi}_{n,k,l} := \overline{\psi}(I, J)$$

と定める。そういうものが存在しないときは、$\overline{\psi}_{n,k,l} = 0$ としておく。

2.5. $\overline{\psi}$ の明示式.

Lemma 7. $\overline{\psi}_{n,k,k-j}$ の具体的な形が以下の式 *(9)* のようにわかる。

$$\overline{\psi}_{n,0,0}(\alpha) = \overline{\psi}_{n,n,n}(\alpha) = \sum_{\sigma \in S_n} \psi(\sigma) = \prod_{j=0}^{n-1}(1 + j\alpha) =: c_n(\alpha).$$
$$\overline{\psi}_{n,k,k}(\alpha) = \overline{\psi}_{k,k,k}(\alpha)\overline{\psi}_{n-k,0,0}(\alpha) = c_k(\alpha)c_{n-k}(\alpha).$$
$$\overline{\psi}_{2j,j,0}(\alpha) = j!\alpha^j c_j(\alpha).$$
$$\overline{\psi}_{n,k,k-j}(\alpha) = \alpha^{n-2j}\overline{\psi}_{2j,j,0}(\alpha) \times \frac{c_k(\alpha)}{\alpha^{k-j}c_j(\alpha)} \times \frac{c_{n-k}(\alpha)}{\alpha^{n-k-j}c_j(\alpha)}.$$
$$\frac{\overline{\psi}_{n,k,k-j}(\alpha)}{c_k(\alpha)c_{n-k}(\alpha)} = \frac{j!\alpha^j c_j(\alpha)}{c_j(\alpha)^2} = \frac{j!\alpha^j}{c_j(\alpha)};\ n,\ k \text{ によらない.} \tag{9}$$

Proof. 概略：上の式から順番にしていく。球関数の計算技法を応用し、和を積分と見て、ファイバー方向の点の個数をカウントする。 □

2.6. 変数分離：Theorem 3 の証明. 式 (5) の続きを計算すると

$$\det{}_\alpha A \;=\; \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \overline{\psi}_{n,k,l}\varphi_{n,k,l} \tag{10}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\varphi_{n,k,l} &:= \varphi_{n,k,l}\big((u_i)_{i=1}^n, (u'_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n, (v'_i)_{i=1}^n\big)\\ &:= \sum_{I,J \in \Sigma(k,n);\sharp(I\cap J)=l} \left(\prod_{i \in I\cap J} u_i u'_i\right)\left(\prod_{i \in I\cap J^c} u_i v'_i\right)\left(\prod_{i \in I^c\cap J} v_i u'_i\right)\left(\prod_{i \in I^c\cap J^c} v_i v'_i\right).\end{aligned}$$

便利のため、

$$\Sigma(k_1,k_2,k_3,k_4;n) := \{(I_1,I_2,I_3,I_4) \mid I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = \{1,\ldots,n\}, I_i \cap I_j = \emptyset (1 \le i < j \le 4)\}$$

という集合を定義し、その各元に単項式を対応させて足し合わせた多項式を

$$\phi_{k_1,k_2,k_3,k_4} := \sum_{(I_1,I_2,I_3,I_4)\in\Sigma(k_1,k_2,k_3,k_4;k_1+k_2+k_3+k_4)} \left(\prod_{i\in I_1} u_i u'_i\right)\left(\prod_{i\in I_2} u_i v'_i\right)\left(\prod_{i\in I_3} v_i u'_i\right)\left(\prod_{i\in I_4} v_i v'_i\right)$$

と定義すれば、$\varphi_{n,k,l} = \phi_{l,k-l,k-l,n-2k+l}$ となる。母関数は簡単な形をしていて、

$$\begin{aligned}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) &:= \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4\ge 0; k_1+k_2+k_3+k_4=n} \phi_{k_1,k_2,k_3,k_4} t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3} t_4^{k_4} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(u_i u'_i t_1 + u_i v'_i t_2 + v_i u'_i t_3 + v_i v'_i t_4\right).\end{aligned}$$

φ の母関数は Φ のうち t_2 と t_3 に関する次数が同じ項 (対角成分) を取り出したもの

$$\Phi_{diag}(t_1, t_2 t_3, t_4) := \sum_{k,l} \varphi_{n,k,l} t_1^l (t_2 t_3)^{k-l} t_4^{n-2k+l}$$

になっている。

3. 特殊な行列に対するアルファ行列式とその漸近形

ここから、階数2の行列 A の構成要素 u, u', v, v' を特別な形に特殊化して行く。流れを見やすくするため、一気に最終的な特殊化までせず、2段階に分けて特殊化していく。

3.1. ブロック分けによる特殊化. K, N を非負整数とし, $n = K + 2N$ とする。$A = {}^t u u' + {}^t v v'$ を与える列ベクトル $u, u', v, v' \in \mathbf{C}^n$ に

- $u_i = u'_i = 1$ for $i = K+1, \ldots, K+N$,
- $u_i = u'_i = 0$ for $i = K+N+1, \ldots, K+2N$,
- $v_i = v'_i = 0$ for $i = K+1, \ldots, K+N$,
- $v_i = v'_i = 1$ for $i = K+N+1, \ldots, K+2N$

の条件を課す。すなわち、母関数の形で書くと

$$u_i u'_i t_1 + u_i v'_i t_2 + v_i u'_i t_3 + v_i v'_i t_4 = \begin{cases} t_1 & i = K+1, \ldots, K+N \\ t_4 & i = K+N+1, \ldots, K+2N \end{cases}$$

である。これ以降、最初の K-part に対応する部分を表わすときは、上に添字 $^{(N=0)}$ をつけることとする。例えば、

$$\Phi^{(N=0)}(t_1,t_2,t_3,t_4) := \prod_{i=1}^{K} (u_i u'_i t_1 + u_i v'_i t_2 + v_i u'_i t_3 + v_i v'_i t_4).$$

K-part と n 全体の関係は、

$$\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^N t_4^N \Phi^{(N=0)}(t_1, t_2, t_3, t_4)$$

で与えられる。したがって、

$$\phi_{N+k_1,k_2,k_3,N+k_4} = \phi^{(N=0)}_{k_1,k_2,k_3,k_4}, \tag{11}$$

$$\varphi_{2N+K,N+k,N+l} = \varphi^{(N=0)}_{K,k,l} \tag{12}$$

が得られ、他のものは零になる。式 (10) を Lemma 7 と組み合わせて

$$\det{}_\alpha A = \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{K} \varphi^{(N=0)}_{K,k,l}\overline{\psi}_{2N+K,N+k,N+l}(\alpha) \tag{13}$$

$$= \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{K} \varphi^{(N=0)}_{K,k,l}\frac{(k-l)!\alpha^{k-l}}{c_{k-l}}(\alpha) \times c_{N+k}(\alpha)c_{N+K-k}(\alpha) \tag{14}$$

となる。和の個数は N によらない。この時点までは極限の議論は使っていない。

3.2. 極限. 以下、複素数体で考える。α を複素数とする。アルキメデスの公理を用いると、固定した k に対して

$$\lim_{N\to+\infty}(N\alpha)^k c_N(\alpha)/c_{N+k}(\alpha) = 1$$

となる. 式 (14) にこの性質を用いると

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\det{}_\alpha A}{c_N(\alpha)c_{N+K}(\alpha)} = \sum_{k,j}\varphi^{(N=0)}_{K,k,k-j}\frac{j!\alpha^j}{c_j(\alpha)} \tag{15}$$

と書くことができる。これからこの右辺の式を計算して行くのだが、正確な証明は本論文を見てもらうこととして、ここでは heuristic な議論を紹介する。α を実数とし、収束を保証するため $\alpha > 0$ と仮定する。このとき、自然数 j に対して、

$$\frac{j!\alpha^j}{c_j(\alpha)} = \frac{j!}{(1/\alpha)_j} = \frac{j!\Gamma(j+(1/\alpha))}{\Gamma(1/\alpha)} = jB(j, 1/\alpha) = \int_0^1 (1-s)^{(1/\alpha)-1}\frac{d}{ds}s^j ds$$

となる。この積分変換を用いて、式 (15) を書き換える。

$$\Phi_T(t_2) := \Phi^{(N=0)}_{diag}\Big|_{t_1=t_3=t_4=1} = \sum_{k,j}\varphi^{(N=0)}_{K,k,k-j}t_2^j$$

と定義すると、式 (15) の右辺は

$$\sum_{k,j}\varphi^{(N=0)}_{K,k,k-j}\frac{j!\alpha^j}{c_j(\alpha)} = \Phi_T(0) + \int_0^1 (1-t_2)^{(1/\alpha)-1}\frac{d}{dt_2}\Phi_T(t_2)dt_2 \tag{16}$$

となる。この量をさらに特別な場合に次節で計算する。

3.3. 一の冪根への特殊化. K を自然数とする。$\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/K)$ を 1 の原始 K 乗根とする。そして、Section 3.1 の設定に加えて

- $u_i = u'_i = 1$ for $i = 1, 2, \ldots, K$.
- $v_i = \omega^i$, $v'_i = \omega^{-i}$ for $i = 1, 2, \ldots, K$

とおく。u' は u の複素共役であり、v' は v の複素共役である。したがって、$A = A^{(K,N)} := {}^t uu' + {}^t vv'$ は非負定値エルミート行列である。これは [1, Remark 5] の設定である。ただし、文字 n, k は N, K と変更している。母関数 Φ を計算する。まず、

$$\Phi^{(N=0)}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \prod_{i=0}^{K-1} (t_0 + \omega^{-i} t_2 + \omega^i t_3)$$

である。ここで $t_0 = t_1 + t_4$ と置いた。これは代数関数を用いて次のように書ける。

Lemma 8.

$$\prod_{i=0}^{K-1} (t_0 + \omega^{-i} t_2 + \omega^i t_3) + (-t_2)^K + (-t_3)^K$$
$$= \left(\frac{t_0}{2} + \sqrt{(\frac{t_0}{2})^2 - t_2 t_3}\right)^K + \left(\frac{t_0}{2} - \sqrt{(\frac{t_0}{2})^2 - t_2 t_3}\right)^K.$$

Proof. ρ_1, ρ_2 という新しい変数を用意し、$t_0 = -(\rho_1 + \rho_2)t_3$, $t_2 = \rho_1 \rho_2 t_3$ と変数変換して証明する。積の各因子は

$$t_0 + \omega^{-i} t_2 + \omega^i t_3 = t_3 \omega^{-i} (\rho_1 - \omega^i)(\rho_2 - \omega^i)$$

と書けるので Lemma の左辺は

$$t_3^K (-1)^{K-1} (\rho_1^K - 1)(\rho_2^K - 1) + (-t_2)^K + (-t_3)^K = (-\rho_1 t_3)^K + (-\rho_2 t_3)^K$$

と変形できる。 □

Lemma 8 の右辺を 2 項定理で展開すれば、t_0, t_2, t_3 の多項式として

$$2 \sum_{i=0}^{[K/2]} \binom{K}{2i} (\frac{t_0}{2})^{K-2i} \left((\frac{t_0}{2})^2 - t_2 t_3\right)^i \tag{17}$$

となる。この式には t_2 と t_3 が同じ次数で現れるので、この式が $\Phi_{diag}^{(N=0)}(t_1, t_2 t_3, t_4)$ であることがわかる。heuristic でない証明の道筋ではそれを直接証明する。

この表示を利用して式 (16) を計算する。$\varepsilon = 1 - (1/\alpha)$ とおく。式 (17) より

$$\Phi_T(1-s) = 2 \sum_{i=0}^{[K/2]} \binom{K}{2i} s^i$$

である。従って、式 (16) は、項別積分することによって

$$\begin{aligned}\sum_{k,j}\varphi^{(N=0)}_{K,k,k-j}\frac{j!\alpha^j}{c_j(\alpha)} &= \Phi_T(0)-\int_0^1 s^{(1/\alpha)-1}\frac{d}{ds}\Phi_T(1-s)ds\\ &= 2^K-2\sum_{i=1}^{[K/2]}\binom{K}{2i}\frac{i}{i+(1/\alpha)-1}\\ &= 2+2\sum_{i=1}^{[K/2]}\binom{K}{2i}\frac{(1/\alpha)-1}{i+(1/\alpha)-1}\\ &= 2{}_3F_2\left(-\varepsilon,(1-K)/2,-K/2;1/2,1-\varepsilon;1\right)\end{aligned}$$

と表せる。途中の計算では $\alpha>0$ であることが必要であるが、最左辺と最右辺は ε の有理式であり、つまり α の有理式でもあり、有理式として等しい。この式と式 (15) を合わせることで Theorem 2 が得られる。

Corollary 9. $\alpha>0$ とする。すべてのサイズのすべての非負定値エルミート行列 A に対して $\det_\alpha A\geq 0$ となるならば、$\alpha\leq 1$ である。

Proof. $\alpha>1$ のときに, ある K, N が存在して、$\det_\alpha A^{(K,N)}<0$ であることを言えばよい。$\alpha>0$ のとき、コンテント多項式 $c_n(\alpha)>0$ なので、符号を考えるときの障害にならないことに留意すると、Theorem 2 の右辺が負になることを示せば良い。$\alpha>1$ の範囲では、$0<\varepsilon<1$ となることを用いると、自然数 i に対して $-1/(i-\varepsilon)<-1/i$ なので、Theorem 2 の右辺は

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left(-\varepsilon,\frac{1-K}{2},-\frac{K}{2};\frac{1}{2},1-\varepsilon\,\middle|\,1\right) &= 1+\sum_{i=1}^{[K/2]}\binom{K}{2i}\frac{-\varepsilon}{i-\varepsilon}\\ &< 1+\sum_{i=1}^{[K/2]}\binom{K}{2i}\frac{-\varepsilon}{i}=1-\beta_K\varepsilon \qquad (18)\end{aligned}$$

と評価できる。ただしここで

$$\beta_K:=\sum_{i=1}^{[K/2]}\binom{K}{2i}\frac{1}{i}$$

とおいた。β_K の和の各項は正であるので、$i=1$ の項と比較することで、$K\geq 3$ の範囲で $\beta_K\geq K(K-1)/2>1$ という評価を得る。ゆえに、

$$\lim_{K\to+\infty}\beta_K=+\infty \qquad (19)$$

である。したがって、与えられた $0<\varepsilon<1$ に対して、K を $1/\beta_K<\varepsilon$ となるように選ぶことができる。このとき、評価 (18) より、評価

$${}_3F_2(-\varepsilon,(1-K)/2,-K/2;1/2,1-\varepsilon;1)<0$$

が得られ、Corollary の証明が完了した。 □

4. 例

4.1. $K = 2$. この場合、原始 K 乗根 $\omega_K = -1$ が実数なので、対応する $A = A^{(2,N)}$ は、実対称行列となる。

行ベクトルの指定：$u, v \in \mathbf{R}^{2+2N}$:

- $u_i = u'_i = 1$ for $i = 1, 2, 3, \ldots, 2+N$.
- $u_i = u'_i = 0$ for $i = 3+N, \ldots, 2+2N$,
- $v_1 = v'_1 = 1$, $v_2 = v'_2 = -1$,
- $v_i = v'_i = 0$ for $i = 3, \ldots, 2+N$,
- $v_i = v'_i = 1$ for $i = 3+N, \ldots, 2+2N$.

$i = 1, \ldots, 2+2N$ に対する母関数の係数：

$\backslash i$	1	2	$3, \ldots, 2+N$	$3+N, \ldots, 2+2N$
$u_i u'_i$	1	1	1	0
$u_i v'_i$	1	-1	0	0
$v_i u'_i$	1	-1	0	0
$v_i v'_i$	1	1	0	1

母関数

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4) &= t_1^N t_4^N (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)(t_1 - t_2 - t_3 + t_4) \\
&= ((t_1 + t_4)^2 - (t_2 + t_3)^2)(t_1 t_4)^N \\
&= t_1^{N+2} t_4^N + 2(t_1 t_4)^{N+1} + t_1^N t_4^{N+2} - 2(t_1 t_4)^N t_2 t_3 - (t_1 t_4)^N t_2^2 - (t_1 t_4)^N t_3^2.
\end{aligned}$$

係数の決定：

$$\phi_{N+2,0,0,N} = \phi_{N,0,0,N+2} = 1, \phi_{N+1,0,0,N+1} = 2, \phi_{N,1,1,N} = -2, \phi_{N,2,0,N} = \phi_{N,0,2,N} = -1$$

他の ϕ_{k_1,k_2,k_3,k_4} は零。

$$\varphi_{n,N+2,N+2} = \varphi_{n,N,N} = 1, \varphi_{n,N+1,N+1} = 2, \varphi_{n,N+1,N} = -2,$$

他の $\varphi_{n,k,l}$ は零。Theorem 3 より

$$\begin{aligned}
\det{}_\alpha A^{(2,N)} &= \overline{\psi}_{2N+2,N+2,N+2} + \overline{\psi}_{2N+2,N,N} + 2\overline{\psi}_{2N+2,N+1,N+1} - 2\overline{\psi}_{2N+2,N+1,N} \\
&= c_{N+2}(\alpha)c_N(\alpha) + c_N(\alpha)c_{N+2}(\alpha) + 2c_{N+1}(\alpha)^2 - 2\alpha c_{N+1}(\alpha)^2 \\
&= 2c_{N+1}(\alpha)c_N(\alpha)\left(2 + 2N\alpha - N\alpha^2\right).
\end{aligned}$$

これは [1, Proposition 4.4] に与えられている結果と一致する。Theorem 2 の左辺にあたる極限は、

$$\frac{\det{}_\alpha^{(2,N)}}{2c_N(\alpha)c_{N+2}(\alpha)} = \frac{2 + 2N\alpha - N\alpha^2}{1 + (N+1)\alpha} \to 2 - \alpha \quad (N \to +\infty).$$

4.2. $K=3$. $\omega=\exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ とする。この場合、

$\backslash i$	1	2	3	$4,\dots,3+N$	$4+N,\dots,3+2N$
u_iu_i'	1	1	1	1	0
u_iv_i'	1	$\overline{\omega}$	ω	0	0
v_iu_i'	1	ω	$\overline{\omega}$	0	0
v_iv_i'	1	1	1	0	1

母関数

$$\begin{aligned}\Phi &= t_1^N t_4^N(t_1+t_2+t_3+t_4)(t_1+\overline{\omega}t_2+\omega t_3+t_4)(t_1+\omega t_2+\overline{\omega}t_3+t_4)\\ &= \left((t_1+t_4)^3+t_2^3+t_3^3-3(t_1+t_4)t_2t_3\right)t_1^N t_4^N.\end{aligned}$$

係数

$$\begin{aligned}&\varphi_{2N+3,N+3,N+3}=\varphi_{2N+3,N,N}=1,\\ &\varphi_{2N+3,N+2,N+2}=\varphi_{2N+3,N+1,N+1}=3,\\ &\varphi_{2N+3,N+2,N+1}=\varphi_{2N+3,N+1,N}=-3.\end{aligned}$$

他の係数は零。

$$\begin{aligned}\det{}_\alpha A^{(3,N)} &= \overline{\psi}_{n,N+3,N+3}+\overline{\psi}_{n,N,N}+3\overline{\psi}_{n,N+2,N+2}+3\overline{\psi}_{n,N+1,N+1}-3\overline{\psi}_{n,N+2,N+1}-3\overline{\psi}_{n,N+1,N}\\ &= 2c_{N+3}(\alpha)c_N(\alpha)+6c_{N+2}(\alpha)c_{N+1}(\alpha)-6\alpha c_{N+2}(\alpha)c_{N+1}(\alpha)\\ &= 2c_{N+2}(\alpha)c_N(\alpha)\left\{(1+(N+2)\alpha)+3(1-\alpha)(1+N\alpha)\right\}\\ &= 2c_{N+2}(\alpha)c_N(\alpha)\left\{4+(4N-1)\alpha-3N\alpha^2\right\}.\end{aligned}$$

この結果は [1, Remark 5] と一致する。Theorem 2 の左辺にあたる極限は、

$$\frac{\det{}_\alpha^{(3,N)}}{2c_N(\alpha)c_{N+3}(\alpha)}=\frac{4+(4N-1)\alpha-3N\alpha^2}{1+(N+2)\alpha}\to 4-3\alpha\quad (N\to+\infty).$$

4.3. $K=4$. $\omega_K=\sqrt{-1}$ とする。母関数は、

$$\begin{aligned}\Phi(t_1,t_2,t_3,t_4) &= \left((t_1+t_4)^4-4(t_1+t_4)^2t_2t_3+2t_2^2t_3^2-t_2^4-t_3^4\right)t_1^N t_4^N,\\ \Phi_{diag}(t_1,t_2t_3,t_4) &= \left((t_1+t_4)^4-4(t_1+t_4)^2t_2t_3+2t_2^2t_3^2\right)t_1^N t_4^N.\end{aligned}$$

したがって、係数は、

$$\begin{aligned}&\varphi_{n,N+4,N+4}=\varphi_{n,N,N}=1,\varphi_{n,N+3,N+3}=\varphi_{n,N+1,N+1}=4,\varphi_{n,N+2,N+2}=6,\\ &\varphi_{n,N+3,N+2}=\varphi_{n,N+1,N}=-4,\varphi_{n,N+2,N+1}=-8,\varphi_{n,N+2,N}=2.\end{aligned}$$

ここで $n=2N+4$ と略記。したがって、アルファ行列式は

$$\begin{aligned}
\det{}_\alpha A &= \overline{\psi}_{n,N+4,N+4}+\overline{\psi}_{n,N,N}+4\overline{\psi}_{n,N+3,N+3}+4\overline{\psi}_{n,N+1,N+1}+6\overline{\psi}_{n,N+2,N+2}\\
&\quad -4\overline{\psi}_{n,N+3,N+2}-4\overline{\psi}_{n,N+1,N}-8\overline{\psi}_{n,N+2,N+1}+2\overline{\psi}_{n,N+2,N}\\
&= 2c_{N+4}c_N+8c_{N+3}c_{N+1}+6c_{N+2}^2-8\alpha c_{N+3}c_{N+1}-8\alpha c_{N+2}^2+2\times\frac{2\alpha^2c_{N+2}^2}{c_2}\\
&= 2c_{N+2}c_N\times\Big\{(1+(N+2)\alpha)(1+(N+3)\alpha)+4(1-\alpha)(1+N\alpha)(1+(N+2)\alpha)\\
&\quad +(3-4\alpha+\frac{2\alpha^2}{1+\alpha})(1+N\alpha)(1+(N+1)\alpha)\Big\}\\
&= 2c_{N+3}c_{N+1}\times\left\{\frac{1+(N+3)\alpha}{1+N\alpha}+4(1-\alpha)+\frac{(1-\alpha)(3+2\alpha)(1+(N+1)\alpha)}{(1+\alpha)(1+(N+2)\alpha)}\right\}
\end{aligned}$$

と書ける。記述の短縮のため $c_N(\alpha)$ を c_N と略記している。従って、Theorem 2 の左辺にあたる極限は、

$$\frac{\det{}_\alpha^{(3,N)}}{2c_N(\alpha)c_{N+4}(\alpha)}\to\frac{8-6\alpha^2}{1+\alpha}\quad(N\to+\infty).$$

4.4. 参考までに Theorem 2 の右辺 ${}_3F_2\left(-\varepsilon,\frac{1-K}{2},-\frac{K}{2};\frac{1}{2},1-\varepsilon\middle|1\right)$ を $K=2,\ldots,6$ の場合に書くと、

$$\begin{aligned}
K=2;&\quad 1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}=2-\alpha,\\
K=3;&\quad 1-\frac{3\varepsilon}{1-\varepsilon}=4-3\alpha,\\
K=4;&\quad 1-\frac{6\varepsilon}{1-\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}=\frac{8-6\alpha^2}{1+\alpha},\\
K=5;&\quad 1-\frac{10\varepsilon}{1-\varepsilon}-\frac{5\varepsilon}{2-\varepsilon}=\frac{16-4\alpha-10\alpha^2}{1+\alpha},\\
K=6;&\quad 1-\frac{15\varepsilon}{1-\varepsilon}-\frac{15\varepsilon}{2-\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}=\frac{32+48\alpha-44\alpha^2-30\alpha^3}{(1+\alpha)(1+2\alpha)}.
\end{aligned}$$

α 変数で与えられた最右辺の式たちだけから直接、分子の規則性や根の存在範囲を読み取るのは難しいように思う。

References

[1] T. Shirai, Remarks on the positivity of α-determinant, Kyushu Journal of Mathematics, **61** 2007, 169–189.

[2] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants (I): fermion, Poisson and boson point processes, J. Funct. Anal. **205** (2003), 414–463.

[3] D. Vere-Jones, Alpha-permanents and their applications to multivariate Gamma, negative binomial and ordinary binomial distributions, New Zealand J. Math. **26** (1997), 125–149.