数理解析研究所講究録
第 1723 巻 2011 年 150-178

無限階擬微分作用素の表象理論

山崎 晋 (Susumu YAMAZAKI)*

序.

本稿では，解析的範疇に於ける**無限階擬微分作用素** (*holomorphic microlocal operator*, 又は *pseudodifferential operator of infinite order*) 及びその**表象理論** (*symbol theory*) について解説する．ここに言う無限階擬微分作用素とは，複素多様体 X の余接線型繊維束 (cotangent bundle) 上の層 $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ の (局所) 切断の事であり，柏原・河合 [4] に於いて最初に導入された．その構成方法は整型函数 (holomorphic function) の層の超局所化に依るものであったが，その後，片岡，青木等に依って表象理論が確立された ([1] 参照)．本稿ではその表象理論の紹介を行い，併せて我々の著書 [2] の補いをする．

本書を通じて用いる記号を纏めておく:

位相空間 X に対して X の開集合の全体を $\mathfrak{O}(X)$, 閉集合の全体を $\mathfrak{A}(X)$ と書く．$S \subset X$ に対して内点集合を $\operatorname{Int} S$, 閉包を $\operatorname{Cl} S$ と書く．$K \Subset X$ は K が X 内で相対コンパクトを表す．又，連結開集合を**領域** (domain) と呼ぶ．

通常の通り整数，実数及び複素数の集合を各々 $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ 及び $\mathbb{C}$ で表し

$$\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z};\, n \geqslant 1\} \subset \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R};\, r > 0\} \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0} := \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\} = \{r \in \mathbb{R};\, r \geqslant 0\},$$

$\dot{\mathbb{R}}^n := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^\times := \{c \in \mathbb{C}; c \neq 0\}$ と置く．$V \subset \mathbb{R}^n$ について $\dot{V} := V \cap \dot{\mathbb{R}}^n$ と置く．又，$a,\, b \in \mathbb{R}$ が $a < b$ ならば $]a,b[:= \{r \in \mathbb{R}; a < r < b\}$, $[a,b] := \{r \in \mathbb{R}; a \leqslant r \leqslant b\}$ 及び $[a,b[:= \{r \in \mathbb{R}; a \leqslant r < b\}$ 等と置く．$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して (ユークリッド) ノルムを $|x| := \bigl(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\bigr)^{1/2}$ とする．又，$\mathbb{B}(x;r) := \{y \in \mathbb{R}^n; |x - y| < r\}$ 及び $\mathbb{B}(r) := \mathbb{B}(0;r)$ とする．

$K, L \subset \mathbb{R}^n$ に対して，$K \pm L := \{x \pm y; x \in K, y \in L\}$ とし，集合論的差集合は $K \setminus L$ とする．K の**境界集合**を ∂K と置く．K と L との**距離** (distance) を次で定める:

$$\operatorname{dis}(K,L) := \inf\{|x - y|;\, x \in K,\, y \in L\}.$$

2000 Mathematics Subject Classification(s): 35A27, 32W25
This research was partially supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 20540191, Japan Society for the Promotion of Science.
*日本大学理工学部一般教育数学系列.

特に $x\in\mathbb{R}^n$ に対して $\mathrm{dis}(x,L):=\mathrm{dis}(\{x\},L)$ と置く．

$\mathbb{C}^n$ の点を $z=(z_1,\dots,z_n)$ と書く．各変数を $z_j=x_j+\sqrt{-1}\,y_j$ と分けて書き，$\mathrm{Re}\,z:=x=(x_1,\dots,x_n)$ 及び $\mathrm{Im}\,z:=y=(y_1,\dots,y_n)$ と置く (即ち $z=\mathrm{Re}\,z+\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,z=x+\sqrt{-1}\,y$). $\mathbb{C}^n\ni z\leftrightarrow(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$ の対応で $\mathbb{C}^n$ を位相空間として $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視する (例えば $U\subset\mathbb{C}^n$ が開集合とは，$U\subset\mathbb{R}^{2n}$ と考えて開集合を意味する). z の**複素共軛** (complex conjugate) を $\bar{z}:=x-\sqrt{-1}\,y$ で定める．$z,w\in\mathbb{C}^n$ に対して $\langle z,w\rangle:=\sum_{j=1}^{n}z_jw_j$ と置く．特に $\mathbb{C}^n$ 上のユークリッドノルムは $|z|=\sqrt{\langle z,\bar{z}\rangle}$．又 $\|z\|:=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|z_j|\}$ と置けば，これも $\mathbb{C}^n$ 上のノルムである．偏微分記号は $\partial_{x_j}=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ 及び $\partial_{y_j}=\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ を用い，1 変数の場合と同様

$$\partial_{z_j}=\frac{\partial}{\partial z_j}:=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}-\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y_j}\Big),\ \partial_{\bar{z}_j}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}:=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}+\sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y_j}\Big),$$
$$dz_j:=dx_j+\sqrt{-1}\,dy_j,\qquad d\bar{z}_j:=dx_j-\sqrt{-1}\,dy_j,$$

と置く．次に多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$ に対し

$$z^\alpha:=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n},\qquad \partial_z^\alpha:=\partial_{z_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{z_n}^{\alpha_n}=\Big(\frac{\partial}{\partial z_1}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\partial}{\partial z_n}\Big)^{\alpha_n},$$
$$\alpha!:=\alpha_1!\cdots\alpha_n!,\qquad |\alpha|:=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j,$$

と定める．

$$\sharp\{\alpha\in\mathbb{N}_0^n;|\alpha|=m\}=\binom{m+n-1}{m}\leqslant 2^{m+n-1}$$

が後に用いられる．但し $\sharp$ は集合の元の数を表す．$\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ に対して $\beta\leqslant\alpha$ とは各 j について $\beta_j\leqslant\alpha_j$ を表す．$\beta<\alpha$ は $\beta\leqslant\alpha$ 且つ $\beta\neq\alpha$ を意味する．更に

$$\binom{\alpha}{\beta}:=\prod_{j=1}^{n}\binom{\alpha_j}{\beta_j}$$

と置く．又，$\mathbf{1}_n:=(1,\dots,1)\in\mathbb{N}^n$ と置く (例えば $z^{\mathbf{1}_n}=\prod_{j=1}^{n}z_j$)．$p\in\mathbb{C}$ 及び $r>0$ に対し $\mathsf{D}(p;r):=\{\zeta\in\mathbb{C};|\zeta-p|<r\}$ と置き，$z_0=(z_{01},\dots,z_{0n})\in\mathbb{C}^n$ 及び $(\rho_1,\dots,\rho_n)\in\mathbb{R}_{>0}^n$ に対し $\mathsf{D}_n(z_0;\rho_1,\dots,\rho_n):=\prod_{j=1}^{n}\mathsf{D}(z_{0j};\rho_j)$ と定める．特に $\rho>0$ に対して $\mathsf{D}_n(z_0;\rho):=\mathsf{D}_n(z_0;\rho,\dots,\rho)$ と置く．

次に，幾何学的設定について述べる．以下，多様体は全てパラコンパクト且つ C^∞ 級とする．M を多様体とする．M の**接繊維束** (tangent bundle) 及び**余接繊維束** (cotangent bundle) を各々 $\tau_M\colon TM\to M$ 及び $\pi_M\colon T^*M\to M$ と書く (混乱の恐れがなければ射影を単に τ,π とも書く). 座標変換を考慮して $(x;v)\in TM$ を $x+\langle v,\partial_x\rangle$ とも書く．同様に $(x;\xi)\in T^*M$ を $(x;\langle\xi,dx\rangle)$ と

も書く．多様体の間の C^∞ 級写像 $F\colon N\to M$ に対し，その微分を dF と書く．F は自然写像

$$F'\colon TN\ni y+\langle v,\partial_y\rangle\mapsto (y,F(y)+\langle dF(y)v,\partial_x\rangle)\in N\underset{M}{\times}TM,$$

$$F_d\colon N\underset{M}{\times}T^*M\ni (y,F(y);\langle\xi,dx\rangle)\mapsto (y;\langle {}^{\mathrm{t}}dF(y)\xi,dy\rangle)\in T^*N,$$

を誘導する．但し $N\underset{M}{\times}TM$ 及び $N\underset{M}{\times}T^*M$ は**繊維積** (fiber product)，即ち

$$N\underset{M}{\times}TM:=\{(y,x+\langle v,\partial_x\rangle)\in N\times TM;F(y)=x\},$$

$$N\underset{M}{\times}T^*M:=\{(y,x;\langle\xi,dx\rangle)\in N\times T^*M;F(y)=x\}.$$

又，${}^{\mathrm{t}}$ は行列の転置を表す．

$$T_NM:=\mathrm{Cok}(TN\xrightarrow{F'}N\underset{M}{\times}TM),$$

$$T_N^*M:=\mathrm{Ker}(N\underset{M}{\times}T^*M\xrightarrow{F_d}T^*N),$$

と定義し，各々 N の M での**法繊維束** (normal bundle) 及び**余法繊維束** (conormal bundle) と呼ぶ．T_NM と T_N^*M とは互いに双対繊維束となる．又，$T_MM\simeq M\simeq T_M^*M$ の同一視がある．τ_M 及び π_M の $\dot{T}M:=TM\setminus M$ 及び $\dot{T}^*M:=T^*M\setminus M$ への制限を各々 $\dot{\tau}_M$ 及び $\dot{\pi}_M$ と書く．$N\subset\mathbb{R}^n$, $M\subset\mathbb{R}^m$ ならば**ヤコビ行列**を

$$\frac{\partial F}{\partial x}=dF(x):=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

で表し，更に $n=m$ ならば**ヤコビ行列式**を $\det\left[\dfrac{\partial F}{\partial x}\right]$ と書く．

$A\subset\mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathbb{R}_{>0}A:=\{cx\in\mathbb{R}^n;x\in A,c>0\}\subset A$$

と置く．A が**錐** (cone) とは $\mathbb{R}_{>0}A\subset A$ となる事を謂う．錐 $A\subset B\subset\mathbb{R}^n$ に対して $A\underset{\text{conic}}{\Subset}B$ とは，$K\Subset B$ が存在して $A=\mathbb{R}_{>0}K$ となる事と定める．錐 A に対して

$$A^\circ:=\bigcap_{v\in A}\{\xi\in\mathbb{R}^n;\langle v,\xi\rangle\geqslant 0\}$$

と置く．$A,B\subset\mathbb{R}^n$ が共に凸錐ならば $A^\circ\cap B^\circ=\gamma(A\cup B)^\circ$ となる．但し $\gamma(\cdot)$ は**凸包**を表す．又，**双極定理**から $A^{\circ\circ}=\mathrm{Cl}\,\gamma(A)$ が知られている．任意の直線を含まない凸集合を**固有的凸**という．以上を拡張して:

(1) $A\subset TM$ に対して

$$\mathbb{R}_{>0}A:=\{(x;cv)\in TM;(x;v)\in A,c>0\}$$

と置く．A が**錐状** (conic) とは $\mathbb{R}_{>0}A\subset A$ となる事を謂う．錐状集合 $A\subset B\subset TM$ に対して $A\underset{\text{conic}}{\Subset}B$ とは，$K\Subset B$ が存在して $A=\mathbb{R}_{>0}K$ となる事と定める．

(2) $A \subset TM$ が錐状集合ならば $\tau(A) \subset M$ を A の**基底** (basis) と呼ぶ．更に A が凸，固有的凸とは任意の $x \in \tau(A)$ に対して $A_x := A \cap \tau^{-1}(x)$ が各々対応する性質を持つ事を謂う．又，$A^a := \{(x; -v) \in TM; (x; v) \in A\}$ 及び $\gamma(A) := \bigcup_{x \in \tau(A)} \gamma(A)_x \subset TM$ と置く．

(3) 錐状集合 $A \subset TM$ 対し，**双対錐** (dual cone) を $A^\circ := \bigcup_{x \in \tau(A)} A_x^\circ \subset T^*M$ で定める．

以上の記号は T^*M の部分集合についても同様の意味で用いる．

TM 上の層 $\mathscr{G}$ に対し，$\dot{\tau}_*(\mathscr{G}|_{\dot{T}M})$ を単に $\dot{\tau}_*\mathscr{G}$ と書く．同様に T^*M 上の層 $\mathscr{F}$ に対しても，$\dot{\pi}_*(\mathscr{F}|_{\dot{T}^*M})$ を単に $\dot{\pi}_*\mathscr{F}$ と書く．

T^*M 上の層 $\mathscr{F}$ は，任意の $(x; \langle \xi, dx \rangle) \in T^*M$ 及び $c > 0$ に対して

$$\mathscr{F}_{(x;\langle c\xi, dx\rangle)} = \mathscr{F}_{(x;\langle \xi, dx\rangle)}$$

ならば**錐状** (conic) と呼ばれる．このとき $\gamma\colon \dot{T}^*M \to S^*M := \dot{T}^*M/\mathbb{R}_{>0}$ と定義すれば，$\mathscr{F}|_{\dot{T}^*M}$ と $\gamma_*(\mathscr{F}|_{\dot{T}^*M})$ とは同一視できる．TM 上の層に対しても同様に定める．

§1. 無限階擬微分作用素とその表象

本節では [1], [2] で述べた無限階擬微分作用素の表象について復習し，併せて幾つかの注意を述べる．

複素多様体 X に対し，X 上の**整型函数** (holomorphic function) の層を $\mathscr{O}_X$ と書く．Ω_X^1 を **1次整型微分形式**の層とし，更に $\Omega_X^{(p)} := \bigwedge^p \Omega_X^1$ と定める．特に $\Omega_X := \Omega_X^{(\dim X)}$ と置く．

以下，複素多様体 X を座標を固定して $X = \mathbb{C}^n$ と看做し，$T^*X \simeq X \times \mathbb{C}^n = \{(z; \zeta)\}$ と同一視する．$\pi_X\colon T^*X \to X$ を射影とする．錐状集合 $V \subset T^*X$ と定数 $d > 0$ とに対し，

$$V[d] := \{(z, \zeta) \in V; \|\zeta\| \geqslant d\}$$

と置く．又，錐状開集合 $\Omega \subset T^*X$ と $\varepsilon \geqslant 0$ とに対して

$$\Omega_\varepsilon := \mathrm{Cl}\Big[\bigcup_{(z,\zeta)\in\Omega} \{(z'; \zeta') \in \mathbb{C}^{2n}; \|z' - z\| \leqslant \varepsilon, \|\zeta' - \zeta\| \leqslant \varepsilon\|\zeta\|\}\Big]$$

と置く．特に $\Omega_0 = \mathrm{Cl}\,\Omega$ である．簡単の為 $\varepsilon \in [0, 1[$ 及び $d > 0$ に対して次の通りに置く．

$$d_\varepsilon := d(1 - \varepsilon).$$

最初に，無限階擬微分作用素の (古典的形式) 表象の定義を思い出そう:

1.1. 定義. $\Omega \underset{\text{conic}}{\Subset} \dot{T}^*\mathbb{C}^n$ を錐状開集合とする．

(1) 以下の条件を満たす函数 $P(z, \zeta)$ を Ω 上の**表象** (symbol) と呼ぶ:

(*S*) $r \in]0, 1[$ 及び $d > 0$ が存在して $P(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega_r[d_r]; \mathscr{O}_{T^*\mathbb{C}^n})$, 且つ任意の $h > 0$ に対して $C > 0$ が存在して

$$|P(z, \zeta)| \leqslant C e^{h\|\zeta\|}, \quad \big((z; \zeta) \in \Omega_r[d_r]\big).$$

Ω 上の表象の全体を $\mathscr{S}(\Omega)$ で表す．

(2) 以下の条件を満たす $P(z, \zeta) \in \mathscr{S}(\Omega)$ を Ω 上の**零表象** (null symbol) と呼ぶ:

(N) $P(z,\zeta) \in \Gamma(\Omega_r[d_r];\mathscr{O}_{T^*\mathbb{C}^n})$ とする時，$C, h > 0$ が存在して

$$|P(z,\zeta)| \leqslant Ce^{-h\|\zeta\|}, \quad \bigl((z;\zeta) \in \Omega_r[d_r]\bigr).$$

Ω 上の零表象の全体を $\mathscr{N}(\Omega)$ で表す．

(3) $z^* \in T^*X$ に対し

$$\mathscr{S}_{z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \mathscr{S}(\Omega) \supset \mathscr{N}_{z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \mathscr{N}(\Omega)$$

と定める．但し帰納極限は z^* の錐状近傍 $\Omega \underset{\text{conic}}{\Subset} \dot{T}^*X$ 全体について取る．

1.2. 定義. $\Omega \underset{\text{conic}}{\Subset} T^*X$ を錐状開集合とする．

(1) t を不定元とする形式冪級数

$$P(t;z,\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(z,\zeta)$$

は次の条件を満たせば，Ω 上の**古典的形式表象** (classical formal symbol) と呼ばれる:

$(\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{cl})$ $r \in]0,1[$ 及び $d > 0$ が存在して $P_j(z,\zeta) \in \Gamma(\Omega_r[d_r];\mathscr{O}_{T^*X})$, 且つ $B > 0$ が存在して次が成り立つ: 任意の $h > 0$ に対して $C > 0$ が存在して

$$|P_j(z,\zeta)| \leqslant \frac{CB^j j!\, e^{h\|\zeta\|}}{\|\zeta\|^j}, \quad \bigl((z;\zeta) \in \Omega_r[d_r], j \in \mathbb{N}_0\bigr).$$

Ω 上の古典的形式表象の全体を $\widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}(\Omega)$ で表す．

(2) $P(t;z,\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(z,\zeta) \in \widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}(\Omega)$ は次の条件を満たせば，Ω 上の**古典的形式零表象**と呼ばれる:

$(\widehat{\mathbf{N}}\mathbf{cl})$ $P_j(z,\zeta) \in \Gamma(\Omega_r[d_r];\mathscr{O}_{T^*\mathbb{C}^n})$ とするとき，定数 $B > 0$ が存在して次が成り立つ: 任意の $h > 0$ に対して $C > 0$ が存在して

$$\left|\sum_{j=0}^{m-1} P_j(z,\zeta)\right| \leqslant \frac{CB^m m!\, e^{h\|\zeta\|}}{\|\zeta\|^m}, \quad \bigl((z;\zeta) \in \Omega_r[d_r], m \in \mathbb{N}\bigr).$$

Ω 上の古典的形式零表象の全体を $\widehat{\mathscr{N}_{\mathrm{cl}}}(\Omega)$ で表す．

(3) $z^* \in T^*\mathbb{C}^n$ に対して

$$\widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}_{,z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}(\Omega) \supset \widehat{\mathscr{N}_{\mathrm{cl}}}_{,z^*} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \widehat{\mathscr{N}_{\mathrm{cl}}}(\Omega)$$

と定める．但し帰納極限は z^* の錐状近傍 $\Omega \underset{\text{conic}}{\Subset} T^*X$ 全体について取る．

次の定理が成立つ:

1.3. 定理. $z^* = (z_0;\zeta_0) \in \dot{T}^*X$ の錐状近傍 $\Omega_0 \underset{\text{conic}}{\Subset} T^*X$ が存在して，任意の錐状近傍 $\Omega \subset \Omega_0$ に対して

$$\mathscr{S}(\Omega)\big/\mathscr{N}(\Omega) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}(\Omega)\big/\widehat{\mathscr{N}_{\mathrm{cl}}}(\Omega).$$

証明は [2, 定理 4.1.7] を参照．

次に複素座標変換を以下で定義する．$z = (z_1,\dots,z_n)$ と $w = (w_1,\dots,w_n)$ とを $\mathrm{Cl}\,\pi_X(\Omega) \subset X$ の近傍の二つの複素座標系，対応する $\mathrm{Cl}\,\Omega$ の近傍の座標系を各々 $(z;\zeta), (w;\eta)$ と置く．この

時，複素座標変換 $z=\Phi(w)$ に対して $\Phi^{-1}(z')-\Phi^{-1}(z)=J_w(z',z)(z'-z)$ で $J_w(z',z)$ を定める．${}^{\mathrm{t}}J_w(z,z)\eta={}^{\mathrm{t}}d\Phi^{-1}(z)\eta=\zeta$ に注意する．$P(t;z,\zeta)$ が座標 (z,ζ) に関する古典的形式表象の時 $\Phi^\star P(t;w,\eta)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}t^j\Phi^\star P_j(w,\eta)$ を

$$\Phi^\star P(t;w,\eta):=e^{t\langle\partial_{\zeta'},\partial_{z'}\rangle}P(t;z,\zeta'+{}^{\mathrm{t}}J_w(z',z)\eta)\Big|_{\substack{z=z'=\Phi(w)\\ \zeta'=0}}.$$

と定める．此処で $e^{t\langle\partial_{\zeta'},\partial_{z'}\rangle}:=\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\dfrac{t^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_{\zeta'}^{\alpha}\partial_{z'}^{\alpha}$ は形式的微分作用素である (以下，この種の作用素が幾度か現れる)．

1.4. 定理. (1) $\Phi^\star P(t;w,\eta)$ は $(w;\eta)$ に関する古典的形式表象，且つ $P(t;z,\zeta)$ が古典的形式零表象ならば，$\Phi^\star P(t;w,\eta)$ も古典的形式零表象となる．

(2) $1^\star$ は恒等写像，且つ二つの複素座標変換を $z=\Phi(w)$ 及び $w=\Psi(v)$ に対して $\Psi^\star\Phi^\star=(\Phi\Psi)^\star$ となる．

詳細は [2, 定理 4.2.1] を参照．

1.5. 定義. T^*X 上の**無限階擬微分作用素** (pseudodifferential operator of infinite order, 又は holomorphic microlocal operator) の層 $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ を次で定義する: 最初に $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}|_X:=\mathscr{D}_X^\infty$ (**無限階微分作用素**の層) とする．$\dot{T}^*X$ 上では前層

$$\mathfrak{O}(\dot{T}^*X)\ni V\mapsto\mathscr{S}(\mathbb{R}_{>0}V)/\mathscr{N}(\mathbb{R}_{>0}V)$$

に附随する錐状層で定める．これは前層

$$\mathfrak{O}(\dot{T}^*X)\ni V\mapsto\widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}(\mathbb{R}_{>0}V)/\widehat{\mathscr{N}_{\mathrm{cl}}}(\mathbb{R}_{>0}V)$$

に附随する層といっても同じである．更に座標変換則を定理 1.4 で与える．$\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ の切断を**無限階擬微分作用素**と呼び $P(z,\partial_z)$ 等で表す．表象 $P(z,\zeta)$, 又は古典的形式表象 $P(t;z,\zeta)$ が定める無限階擬微分作用素を $:P(z,\zeta):$ 又は $:P(t;z,\zeta):$ 等で表す．特に $\partial_z^\alpha:=\,:\zeta^\alpha:$ とも書く．一般の複素多様体 X に対しても，上の座標変換則で T^*X 上の層 $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ が定義出来る事に注意しておく．

次に，積を定める:

1.6. 定理. 形式表象 $P(t;z,\zeta)$, $Q(t;z,\zeta)$ に対して

$$Q\circ P(t;z,\zeta):=e^{t\langle\partial_\zeta,\partial_w\rangle}Q(t;z,\zeta)P(t;w,\eta)\Big|_{\substack{w=z\\ \eta=\zeta}}$$

と定めれば，これにより $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ 上の結合的 (非可換) 積を

$$:Q(t;z,\zeta)::P(t;z,\zeta):\,:=\,:Q\circ P(t;z,\zeta):$$

で定義する事が出来る．

詳細は [2, 定理 4.2.4] を参照．

1.7. 定理. $P(t;z,\zeta)\in\widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}(\Omega)$ に対して

$$P^*(t;z,-\zeta):=e^{-t\langle\partial_\zeta,\partial_z\rangle}P(t;z,\zeta)$$

と置くと $P^*(t;z,-\zeta)\in\widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}^*}(\Omega^a)$ となる．これにより $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ 上の形式随伴を

$$(:P(t;z,\zeta):)^* := :P^*(t;z,-\zeta):$$

で定義する事が出来る．

詳細は [2, 定理 4.2.7] を参照．

実は之より，座標変換及び形式随伴が両立する，環の層の単型射

$$\pi_X^{-1}\mathscr{D}_X^{\infty}\rightarrowtail\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$$

が得られる事が判る ([2, 定義 6.1.9] の後の可換図式を参照).

次の命題により，座標変換と積とは両立する事が判る:

1.8. 命題. (1) $\widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}(\Omega)$ に於いて

$$\Phi^\star(Q\circ P)(t;w,\eta)=\Phi^\star Q(t;w,\eta)\circ\Phi^\star P(t;w,\eta).$$

証明. 各点で成り立つ事を示せば良いから，定義域内の点 $(z_0;\zeta_0)$ を任意に固定して，その近傍で形式冪級数として等号が成立する事を示せば充分．$e^{F(z,\eta)}:=e^{\langle\Phi^{-1}(z),\eta/t\rangle}e^{-\langle z,\zeta_0/t\rangle}$ と置けば，[2, 定理 4.2.1] の証明から

$$\begin{aligned}\Phi^\star(t;w,\eta)&=e^{\langle\partial_{\zeta'},\partial_{z'}\rangle}P(t;z,\zeta')\,e^{\langle J_w(z+tz',z)z',\eta\rangle}e^{-\langle z',\zeta_0\rangle}\Big|_{\substack{z'=0\\ \zeta'=\zeta_0}}\\&=e^{t\langle\partial_{\zeta'},\partial_{z'}\rangle}P(t;z,\zeta')\,e^{\langle\Phi^{-1}(z+z')-\Phi^{-1}(z),\eta/t\rangle}e^{-\langle z'+z,\zeta_0/t\rangle}e^{\langle z,\zeta_0/t\rangle}\Big|_{\substack{z'=0\\ \zeta'=\zeta_0}}\\&=e^{t\langle\partial_{\zeta'},\partial_{z'}\rangle}P(t;z,\zeta')\,e^{F(z+z',\eta)-F(z,\eta)}\Big|_{\substack{z'=0\\ \zeta'=\zeta_0}}.\end{aligned}$$

ここで $t^{|\alpha|}\partial_{\eta_1}^{\alpha}e^{F(z_2,\eta_1)-F(z,\eta_1)}=e^{F(z_2,\eta)-F(z,\eta)}(\Phi^{-1}(z_2)-\Phi^{-1}(z))^{\alpha}$ だから，$z_j:=\Phi(w_j)$ 等と置けば

$$\begin{aligned}&\Phi^\star Q(t;w,\eta)\circ\Phi^\star P(t;w,\eta)\\&=e^{t\langle\partial_{\eta_1},\partial_{w_3}\rangle}e^{t\langle\partial_{\zeta_1},\partial_{z_2}\rangle}Q(t;z,\zeta_1)\,e^{F(z_2,\eta_1)-F(z,\eta_1)}e^{t\langle\partial_{\zeta},\partial_{z_1}\rangle}P(t;z_3,\zeta)\,e^{F(z_3+z_1,\eta)-F(z_3,\eta)}\Big|_{\substack{z_1=0,z_2=z_3=z\\ \zeta=\zeta_1=\zeta_0,\eta_1=\eta}}\\&=\sum_{\alpha}e^{t\langle\partial_{\zeta_1},\partial_{z_2}\rangle}Q(t;z,\zeta_2)\,e^{F(z_2,\eta)-F(z,\eta)}\frac{(w_2-w)^{\alpha}}{\alpha!}\\&\quad\cdot\partial_w^{\alpha}(e^{t\langle\partial_{\zeta},\partial_{z_1}\rangle}P(t;\Phi(w),\zeta)\,e^{F(\Phi(w)+z_1,\eta)-F(\Phi(z),\eta)}\Big|_{\substack{z_1=0,z_2=z\\ \zeta=\zeta_1=\zeta_0}}\\&=e^{t\langle\partial_{\zeta},\partial_{z_1}\rangle}e^{t\langle\partial_{\zeta_1},\partial_{z_2}\rangle}Q(t;z,\zeta_1)\,P(t;z_2,\zeta)\,e^{F(z_1+z_2,\eta)-F(z,\eta)}\Big|_{\substack{z_1=0,z_2=z\\ \zeta=\zeta_1=\zeta_0}}\\&=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{t^{|\alpha+\beta+\gamma|}}{\alpha!\beta!\gamma!}\partial_{\zeta}^{\alpha+\beta}Q(t;z,\zeta)\,\partial_z^{\alpha}\partial_{\zeta}^{\gamma}P(t;z,\zeta)\,\partial_{z_1}^{\gamma}\partial_{z_2}^{\beta}e^{F(z_1+z_2),\eta)-F(w,\eta)}\Big|_{\substack{z_1=0,z_2=z\\ \zeta=\zeta_0}}\\&=\sum_{\beta,\gamma}\frac{t^{|\beta+\gamma|}}{(\beta+\gamma)!}\partial_{\zeta}^{\beta+\gamma}(Q\circ P)(t;z,\zeta)\,\partial_{z_1}^{\beta+\gamma}e^{F(z+z_1,\eta)-F(z,\eta)}\Big|_{\substack{z_1=0\\ \zeta=\zeta_0}}\\&=e^{t\langle\partial_{\zeta},\partial_{z_1}\rangle}(Q\circ P)(t;z,\zeta)\,e^{F(z+z_1,\eta)-F(z,\eta)}\Big|_{\substack{z_1=0\\ \zeta=\zeta_0}}=\Phi^\star(Q\circ P)(t;w,\eta).\end{aligned}$$

以上で示された. □

次の命題により，形式随伴は環の反同型を与える事が判る:

1.9. 命題. $\widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}$ に於いて

$$(Q\circ P)^*(t;z,\zeta)=P^*(t;z,\zeta)\circ Q^*(t;z,\zeta).$$

証明. 形式冪級数として，等号が成り立つ事を示せば良い．定義域内の点 $(z_0;\zeta_0)$ を任意に取り，その近傍で考える．$a(z)\in\mathscr{O}_X$ に対して $a(z)^*=a(z)$ 且つ $((\zeta-\zeta_0)^\alpha)^*=(-\zeta-\zeta_0)^\alpha$ は定義から直ちに判る.

(1) $Q=a(z)\in\mathscr{O}_X$ の時,

$$(aP)^*(t;z,\zeta)=\sum_{\gamma,j}\frac{t^{|\gamma|+j}}{\gamma!}\partial_z^\gamma\partial_\zeta^\gamma(a(z)P_j(z,-\zeta))=\sum_{\mu,\nu,j}\frac{t^{|\mu|+|\nu|+j}}{\mu!\nu!}\partial_z^\mu a(z)\cdot\partial_z^\nu\partial_\zeta^{\mu+\nu}P_j(z,-\zeta).$$

一方

$$P^*(t;z,\zeta)\circ a(z)^*=\sum_{\nu,j}\frac{t^{|\nu|+j}}{\nu!}\partial_z^\nu\partial_\zeta^\nu P_j(z,-\zeta)\circ a(z)=\sum_{\mu,\nu,j}\frac{t^{|\mu|+|\nu|+j}}{\mu!\nu!}\partial_z^\mu a(z)\cdot\partial_z^\nu\partial_\zeta^{\mu+\nu}P_j(z,-\zeta)$$

だから

$$(aP)^*(t;z,\zeta)=P^*(t;z,\zeta)\circ a(z)^*.$$

(2) $Q=(\zeta-\zeta_0)^\alpha$ の時，$Q^*(t;z,-\zeta)=(\zeta-\zeta_0)^\alpha$ に注意する．この時

$$\begin{aligned}(QP)^*(t;z,-\zeta)&=e^{-t\langle\partial_\zeta,\partial_z\rangle}\sum_{\gamma,j}\frac{t^{|\gamma|+j}}{\gamma!}\partial_\zeta^\gamma(\zeta-\zeta_0)^\alpha\partial_z^\gamma P_j(z,\zeta)\\&=\sum_{\mu,\nu,\gamma,j}\frac{(-1)^{|\mu|+|\nu|}t^{|\gamma|+|\mu|+|\nu|+j}}{\mu!\nu!\gamma!}\partial_\zeta^\nu\partial_z^{\mu+\nu+\gamma}P_j(z,\zeta)\partial_\zeta^{\mu+\gamma}(\zeta-\zeta_0)^\alpha\\&=\sum_{\gamma\leqslant\beta}\frac{(-1)^{|\beta|-|\gamma|}t^{|\beta|}}{\beta!}\binom{\beta}{\gamma}\partial_z^\beta P^*(t;z,-\zeta)\partial_\zeta^\beta(\zeta-\zeta_0)^\alpha\\&=\sum_\beta\frac{t^{|\beta|}}{\beta!}\partial_z^\beta P^*(t;z,-\zeta)\partial_\zeta^\beta(\zeta-\zeta_0)^\alpha\sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}(-1)^{|\beta|-|\gamma|}\\&=P^*(t;z,-\zeta)(\zeta-\zeta_0)^\alpha+\sum_{|\beta|>0}\frac{t^{|\beta|}}{\beta!}\partial_z^\beta P^*(t;z,-\zeta)\partial_\zeta^\beta(\zeta-\zeta_0)^\alpha(1-1)^{|\beta|}\\&=P^*(t;z,-\zeta)(\zeta-\zeta_0)^\alpha=P^*(t;z,-\zeta)\circ Q^*(t;z,-\zeta).\end{aligned}$$

(3) 一般の場合,

$$Q(t;z,\zeta)=\sum t^jQ_j^{(\alpha)}(z,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)^\alpha,$$

と展開すると，(1), (2) に依って

$$\begin{aligned}(Q(t;z,\zeta)\circ P(t;z,\zeta))^*&=\sum_{\alpha,j}(t^jQ_j^{(\alpha)}(z,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)^\alpha\circ P(t;z,\zeta))^*\\&=\sum_{\alpha,j}(t^jQ_j^{(\alpha)}(z,\zeta_0)\circ(\zeta-\zeta_0)^\alpha\circ P(t;z,\zeta))^*=\sum_{\alpha,j}((\zeta-\zeta_0)^\alpha\circ P(t;z,\zeta))^*\circ(t^jQ_j^{(\alpha)}(z,\zeta_0))^*\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha,j} P^*(t;z,-\zeta)\circ((\zeta-\zeta_0)^\alpha)^*\circ(t^jQ_j^{(\alpha)}(z,\zeta_0))^* \\
&= \sum_{\alpha,j} P^*(t;z,-\zeta)\circ(t^jQ_j^{(\alpha)}(z,\zeta_0)\circ(\zeta-\zeta_0)^\alpha)^* \\
&= \sum_{\alpha,j} P^*(t;z,-\zeta)\circ(t^jQ_j^{(\alpha)}(z,\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)^\alpha)^* = P^*(t;z,-\zeta)\circ Q^*(t;z,-\zeta).
\end{aligned}
$$

□

以下，慣例通り $\underset{\pi_X^{-1}\mathscr{O}_X}{\otimes}\pi_X^{-1}\Omega_X$ を単に $\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X$ と書く．次の意味で $P^*(t;z,\partial_z)dz = P^*(t;z,\partial_z)\otimes dz \in \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X$ は座標不変である:

1.10. 命題. 座標変換 $\Phi(w)=z$ に対し $\widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl}}}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X$ に於いて

$$\Phi^\star(P^*(t;z,\zeta)\otimes dz) = (\Phi^\star(P(t;z,\zeta)\otimes dz))^*.$$

此処で，微分形式の引き戻しも $\Phi^\star$ と書いている．即ち

$$\Phi^\star(P^*(t;z,\zeta)\otimes dz) = \Phi^\star P^*\otimes\Phi^\star dz = \Phi^\star P^*\otimes\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]dw = \det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\Phi^\star P^*\otimes dw$$

証明. $\Phi^\star(P^*(t;z,\zeta)\otimes dz) = (\Phi^\star(P(t;z,\zeta)\otimes dz))^*$ とは，

$$\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\Phi^\star(P^*) = (\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\Phi^\star P)^* = (\Phi^\star P)^*\circ\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]$$

に他ならない (以下の計算を参照). Q も条件を満たすとすると

$$
\begin{aligned}
\Phi^\star((QP)^*\otimes dz) &= \Phi^\star(P^*Q^*\otimes dz) = \Phi^\star(P^*)\,\Phi^\star(Q^*)\otimes\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]dw \\
&= \det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\Phi^\star(P^*)\,\Phi^\star(Q^*)\otimes dw = (\Phi^\star P)^*\circ\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\Phi^\star(Q^*)\otimes dw \\
&= (\Phi^\star P)^*\circ(\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\Phi^\star Q)^*\otimes dw = (\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\Phi^\star Q\circ\Phi^\star P)^*\otimes dw \\
&= (\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\Phi^\star(QP))^*\otimes dw = (\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\Phi^\star(QP)\otimes dw)^* = (\Phi^\star(QP\otimes dz))^*
\end{aligned}
$$

だから QP も同じ条件を満たす．従って $P=a(z)$ 又は ζ_j について示せば良い．

(1) $P=a(z)$ の時

$$
\begin{array}{ccc}
a(z)\,dz & \xmapsto{\ \Phi^\star\ } & a(\Phi(w))\otimes\det\left[\dfrac{\partial z}{\partial w}\right]dw \\
\downarrow * & & \updownarrow * \\
a(z)\,dz & \xmapsto{\ \Phi^\star\ } & a(\Phi(w))\det\left[\dfrac{\partial z}{\partial w}\right]\otimes dw
\end{array}
$$

なる可換図式を得るから良い．

(2) $P=\zeta_j$ の時，$\Phi^\star\zeta_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial z_j}\eta_i$ となる．よって $A=(A_{ij}) := \frac{\partial z}{\partial w}$ 及び $A^{-1}\frac{\partial w}{\partial z} := (B_{ij})$ と置けば，

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial z_j}\eta_i\otimes\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]dw = \det A\sum_{i=1}^n B_{ij}\eta_i\otimes dw = \det{}^{t}\!A\sum_{i=1}^n B_{ij}\eta_i\otimes dw.$$

従って，この形式随伴を取れば，

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big((\det{}^{t}A)B_{ij}\eta_i+\frac{\partial\det{}^{t}A}{\partial w_i}B_{ij}+(\det{}^{t}A)\frac{\partial B_{ij}}{\partial w_i}\Big)\otimes dw.$$

此処で $\det{}^{t}A=\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]$ に注意する．次の補題を用意する:

1.11. 補題. $A(z)\in GL_n(\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})$ に対して

$$\frac{\partial\det A}{\partial z_j}=(\det A)\operatorname{Tr}\Big(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial z_j}\Big).$$

証明. $(\det A)A^{-1}$ は A の余因子行列だから，$(\det A)A^{-1}$ の (μ,ν) 成分を $\widetilde{A}_{\mu,\nu}$ と置いた時，余因子行列の定義から

$$(\det A)\operatorname{Tr}\Big(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial z_j}\Big)=\operatorname{Tr}\Big((\det A)A^{-1}\frac{\partial A}{\partial z_j}\Big)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\widetilde{A}_{\mu,\nu}\frac{\partial A_{\nu,\mu}}{\partial z_j}$$

$$=\sum_{\mu=1}^{n}\det\begin{bmatrix}a_{1,1}\cdots A_{1,\mu-1} & \dfrac{\partial A_{1,\mu}}{\partial z_j} & A_{1,\mu+1}\cdots A_{1,n}\\ \vdots\qquad\vdots & \vdots & \vdots\qquad\vdots\\ A_{n,1}\cdots A_{n,\mu-1} & \dfrac{\partial A_{n,\mu}}{\partial z_j} & A_{n,\mu+1}\cdots A_{n,n}\end{bmatrix}=\frac{\partial\det A}{\partial z_j}.$$

□

$AA^{-1}=\mathbb{1}_n$ を微分すれば $\frac{\partial A}{\partial w_i}A^{-1}+A\frac{\partial A^{-1}}{\partial w_i}=0$ だから

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial w_i}=-A^{-1}\frac{\partial A}{\partial w_i}A^{-1}.$$

ここで，補題 1.11 から

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial\det{}^{t}A}{\partial w_i}B_{ij}+(\det{}^{t}A)\frac{\partial B_{ij}}{\partial w_i}\Big)=\det{}^{t}A\sum_{i=1}^{n}\Big(\operatorname{Tr}\Big({}^{t}A^{-1}\frac{\partial{}^{t}A}{\partial w_i}\Big)B_{ij}+\frac{\partial B_{ij}}{\partial w_i}\Big)$$

$$=\det{}^{t}A\sum_{i,\mu,\nu=1}^{n}\Big(B_{\nu\mu}\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial w_i}B_{ij}-B_{i\mu}\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial w_i}B_{\nu j}\Big)$$

$$=\det{}^{t}A\Big(\sum_{i,\mu,\nu=1}^{n}B_{\nu\mu}\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial w_\nu\partial w_i}B_{ij}-\sum_{i,\mu,\nu=1}^{n}B_{i\mu}\frac{\partial^2 z_\mu}{\partial w_i\partial w_\nu}B_{\nu j}\Big)=0.$$

従って

$$\begin{array}{ccc}\zeta_j\otimes dz & \xmapsto{\ \Phi^*\ } & \det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_i}{\partial z_j}\eta_i\otimes dw\\ \Big\downarrow{*} & & \Big\downarrow{*}\\ -\zeta_j\otimes dz & \xmapsto{\ \Phi^*\ } & -\det\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w_i}{\partial z_j}\eta_i\otimes dw\end{array}$$

なる可換図式を得るから良い． □

次に，標準的な $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ の芽の表示を紹介する．最初に記号を準備する:

1.12. 定義. $\varepsilon > 0$ に対して

$$W_\varepsilon := \{p \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} p < \varepsilon |\operatorname{Im} p|\},$$

と置く．更に $z^* \in \dot{T}^*\mathbb{C}^n$ に対して

$$\mathcal{T}_{z^*} := \varinjlim_{\Omega,\varepsilon} \{f(z,\zeta,p) \in \Gamma(\Omega \times W_\varepsilon; \mathscr{O}_{T^*X\times\mathbb{C}});\ (\zeta,p) \text{ につき } -n \text{ 次斉次}\}$$

と定める．但し $\Omega \in \mathfrak{O}(T^*\mathbb{C}^n)$ は z^* の錐状近傍全体を取る．更に $\mathcal{A}_{z^*} \subset \mathcal{T}_{z^*}$ を $p=0$ まで整型なものの成す部分集合とする．

1.13. 定理. 任意の $z^* = (z_0;\zeta_0) \in \dot{T}^*\mathbb{C}^n$ に対して次の同型が存在する:

$$\mathscr{S}_{z^*}/\mathscr{N}_{z^*} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{z^*}/\mathcal{A}_{z^*}.$$

$P(z,\zeta) \in \mathscr{S}_{z^*}$ に対して，適当な複素 1 次斉次な整型函数 $s(\zeta)$ を取って

$$\mathcal{R}P(z,\zeta,p) := \int_{1/s(\zeta)}^{\infty} P(z,\tau\zeta)e^{\tau p}\tau^{n-1}d\tau$$

と定義する．逆に $f(z,\zeta,p) \in \mathcal{T}_{z^*}$ に対しては複素 1 次斉次整型函数 $s_0(\zeta)$ 及び $s_1(\zeta)$ を，充分小さい $\varepsilon > 0$ に対して

$$0 < \operatorname{Re} s_0(\zeta) < -\varepsilon|\operatorname{Im} s_0(\zeta)|, \quad 0 < \operatorname{Re} s_1(\zeta) < \varepsilon|\operatorname{Im} s_1(\zeta)|,$$

を満たすように選び，$\gamma(\zeta)$ を $s_0(\zeta)$ から $s_1(\zeta)$ 迄原点を反時計回りに回る積分路として次の通りに置く:

$$\mathcal{L}f(z,\zeta) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\gamma(\zeta)} f(z,\zeta,p)e^{-p}\,dp.$$

此れ等 $\mathcal{R}, \mathcal{L}$ が同型を与える．応用上は，次の形式表象が有用である:

1.14. 定義. $\Omega \underset{\text{conic}}{\Subset} T^*X$ とする．

(1) t を不定元とする形式冪級数

$$P(t;z,\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(z,\zeta)$$

は次の条件を満たす時，Ω 上の**形式表象** (formal symbol) と呼ばれる:

$(\widehat{S})$ 定数 $r \in]0,r[$ 及び $d > 0$ が存在して

$$P_j(z,\zeta) \in \Gamma(\Omega_r[(j+1)d_r]; \mathscr{O}_{T^*X}),$$

且つ $A \in]0,1[$ が存在して次が成り立つ: 任意の $h > 0$ に対し定数 $C_h > 0$ が存在して

$$|P_j(z,\zeta)| \leqslant C_h A^j e^{h\|\zeta\|}, \quad \big((z;\zeta) \in \Omega_r[(j+1)d_r]; j \in \mathbb{N}_0\big).$$

Ω 上の形式表象の全体を $\widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$ と書く．

(2) $P(t;z,\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(z,\zeta) \in \widehat{\mathscr{S}}(\Omega)$ は次の条件を満たす時，Ω 上の**形式零表象** (null-formal symbol) と呼ばれる:

$(\widehat{N})$ 各 j について $P_j(z,\zeta) \in \Gamma(\Omega_r[(j+1)d_r]; \mathscr{O}_{T^*X})$ の時，定数 $A \in]0,1[$ が存在して次が成り立つ: 任意の $h > 0$ に対し定数 $C_h > 0$ が存在して

$$\Big|\sum_{j=0}^{m-1} P_j(z,\zeta)\Big| \leqslant C_h A^m e^{h\|\zeta\|}, \quad \big((z;\zeta) \in \Omega_r[md_r]; m \in \mathbb{N}\big).$$

Ω 上の零形式表象の全体を $\widehat{\mathscr{N}}(\Omega)$ と書く.

(3) $z^* \in T^*X$ に対して

$$\widehat{\mathscr{S}_{z^*}} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \widehat{\mathscr{S}}(\Omega) \supset \widehat{\mathscr{N}_{z^*}} := \varinjlim_{\Omega \ni z^*} \widehat{\mathscr{N}}(\Omega)$$

と置く. 但し帰納極限は z^* の錐状近傍 $\Omega \underset{\text{conic}}{\Subset} T^*X$ 全体について取る.

この時,

1.15. 定理. 任意に $z^* \in \dot{T}^*X$ を取ると $\mathscr{S}_{z^*} \subset \widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl},z^*}} \subset \widehat{\mathscr{S}_{z^*}}$, $\mathscr{N}_{z^*} \subset \widehat{\mathscr{N}_{\mathrm{cl},z^*}} \subset \widehat{\mathscr{N}_{z^*}}$, 且つ座標変換, 積, 形式随伴を込めて

$$\mathscr{S}_{z^*}/\mathscr{N}_{z^*} \simeq \widehat{\mathscr{S}_{\mathrm{cl},z^*}}/\widehat{\mathscr{N}_{\mathrm{cl},z^*}} \simeq \widehat{\mathscr{S}_{z^*}}/\widehat{\mathscr{N}_{\mathrm{cl},z^*}}.$$

$M = \mathbb{R}^n$ (又は実解析的多様体), X を M の複素化とし, $T^*_M X = \sqrt{-1}\,T^*M$ 上の佐藤の**超局所函数** (microfunction) の層を, 通常通り $\mathscr{C}_M$ とする.

1.16. 注意. 任意の $x^* = (x_0; \sqrt{-1}\xi) \in \dot{T}^*_M X$ を取る. この時 $P(z,\zeta) \in \mathscr{S}_{x^*}$ に対して $\mathscr{C}_{M\times M}$

$$K_P(x,y) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{sp}\Big[\mathcal{R}P(x, \sqrt{-1}\,\eta, \sqrt{-1}\,(\langle x-y, \eta\rangle + \sqrt{-1}\,0))\Big]\,\omega(\eta) \in \mathscr{C}_{M\times M}$$

が定義出来て

$$\operatorname{supp} K_P \subset \{(x,x;\sqrt{-1}(\xi,-\xi))\}.$$

従って $K_P(x,y)\,dy$ は**超局所作用素** (microlocal operator) を定め, $\mathscr{C}_M$ に作用する. 実は之に依って $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}|_{T^*_M X} \rightarrowtail \mathscr{L}_M$ (環単型射) となる事が知られている.

§2. 核函数と超局所作用

先に述べた通り, $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ は整型函数の超局所化として定義される. 以下ではその関係を述べる. 以下, $z^* = (z_0, \zeta_0) = (0; \lambda, 0, \ldots, 0) \in T^*X$ ($\lambda \in \mathbb{C}^\times$) で考える. $r, \varepsilon > 0$ に対して

$$W_{\lambda,\varepsilon} := \{c \in \mathbb{C};\, -\mathrm{Re}(\lambda c) < \varepsilon|\mathrm{Im}(\lambda c)|\},$$
$$U_r := \{(z,\widetilde{z}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n;\, \|z\|, \|z-\widetilde{z}\| < r\},$$
$$V_{r,\varepsilon}^{(1)} := \{(z,\widetilde{z}) \in U_r;\, \widetilde{z}_1 - z_1 \in W_{\lambda,\varepsilon}\},$$
$$V_{r,\varepsilon}^{(j)} := \{(z,\widetilde{z}) \in U_r;\, |\widetilde{z}_1 - z_1| < \varepsilon|\widetilde{z}_j - z_j|\} \quad (2 \leqslant j \leqslant n),$$
$$V_{r,\varepsilon} := \bigcap_{j=1}^{n} V_{r,\varepsilon}^{(j)}, \qquad \widehat{V}_{r,\varepsilon}^{(j)} := \bigcap_{k\neq j} V_{r,\varepsilon}^{(k)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

と定める. この時,

$$\mathcal{K}_{z^*} := \varinjlim_{r,\varepsilon} \Gamma(V_{r,\varepsilon}; \mathscr{O}_{X\times X}^{(0,n)}) \supset \mathcal{N}_{z^*} := \varinjlim_{r,\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \Gamma(\widehat{V}_{r,\varepsilon}^{(j)}; \mathscr{O}_{X\times X}^{(0,n)})$$

と定め,

$$\mathfrak{E}_{z^*} := \mathcal{K}_{z^*}/\mathcal{N}_{z^*}$$

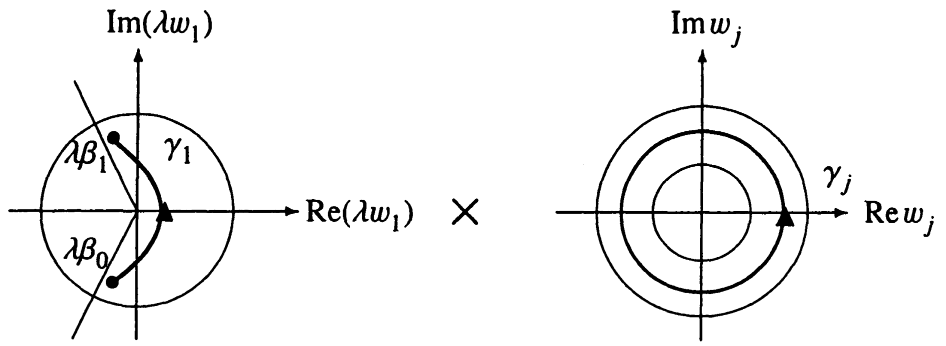

図 1. 積分路

を考える．但し $\mathcal{O}_{X\times X}^{(0,n)}$ は $\psi(z,w)\,dw = \psi(z,\tilde{z})\,d\tilde{z}$ という形の整型函数係数の微分形式の成す層である．$\psi(z,\tilde{z})\,d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{z^*}$ の $\mathfrak{E}_{z^*}$ での同値類を

$$P = K(z,\tilde{z})\,d\tilde{z} = [\psi(z,\tilde{z})\,d\tilde{z}]$$

等と書く．周知の通り，$H^n\mu\mathcal{hom}(\mathbb{C}_\Delta, \mathcal{O}_{X\times X}^{(0,n)})_{z^*} = \mathfrak{E}_{z^*}$，即ち，これが本来の定義に依る $\mathscr{E}_{X,z^*}^{\mathbb{R}}$ の表示である ([6], [7] を参照).

次に $\psi(z,\tilde{z})\,d\tilde{z} \in \Gamma(V_{r,\varepsilon}; \mathcal{O}_{X\times X}^{(0,n)})$ に対して

$$\widehat{\psi}_{\beta_0}^{\beta_1}(z,\zeta) := \int \psi(z,\tilde{z})\,e^{\langle \tilde{z}-z,\zeta\rangle}\,d\tilde{z} = \int_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\cdots\oint_{\gamma_n} \psi(z,z+w)\,e^{\langle w,\zeta\rangle}\,dw$$

と置く．但し β_0,β_1 及び $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ は以下の通りに選ぶ: β_0,β_1 を $|\beta_0|, |\beta_1| < r$ 且つ

$$0 > \mathrm{Re}(\lambda\beta_0) > \varepsilon\mathrm{Im}(\lambda\beta_0), \quad 0 > \mathrm{Re}(\lambda\beta_1) > -\varepsilon\mathrm{Im}(\lambda\beta_1),$$

と取る．γ_1 を，β_0 を始点とし，原点を反時計回りに回って β_1 を終点とする路とする．次に $2 \leqslant j \leqslant n$ を任意に固定する．$w_1 \in \gamma_1$ ならば $|w_1| < \varepsilon r$ となるように $|\beta_0|, |\beta_1|$ を充分小さく取り，$\delta > 0$ を

$$\gamma_j := \left\{ w_j \in \mathbb{C}; |w_j| = \frac{|w_1|}{\varepsilon} + \delta \right\} \subset \{ w_j \in \mathbb{C}; |w_1| < \varepsilon|w_j| \}$$

となる様に充分小さく取っておく (図 1 を参照). これで $\psi(z,z+w)$ の整型域 $\{(z,w) \in \mathbb{C}^{2n}; (z,w) \in V_{r,\varepsilon}\}$ 内の路が定まる．この時:

2.1. 命題. (1) $\widehat{\psi}_{\beta_0}^{\beta_1}(z,\zeta) \in \mathscr{S}_{z^*}$.

(2) $[\psi(z,\tilde{z})\,d\tilde{z}] = 0 \in \mathfrak{E}_{z^*}$ ならば $\widehat{\psi}_{\beta_0}^{\beta_1}(z,\zeta) \in \mathscr{N}_{z^*}$.

(3) (β_0,β_1) と同じ条件を満たす (β_0',β_1') に取り替えると，$\widehat{\psi}_{\beta_0}^{\beta_1}(z,\zeta) - \widehat{\psi}_{\beta_0'}^{\beta_1'}(z,\zeta) \in \mathscr{N}_{z^*}$.

命題 2.1 によって次の定義をする:

2.2. 定義. $P = [\psi(z,\tilde{z})\,d\tilde{z}] \in \mathfrak{E}_{z^*}$ に対してその表象を

$$\sigma(P) := \colon\!\int_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\cdots\oint_{\gamma_n} \psi(z,w)\,e^{\langle w,\zeta\rangle}\,dw\colon \in \mathscr{S}_{z^*}/\mathscr{N}_{z^*}$$

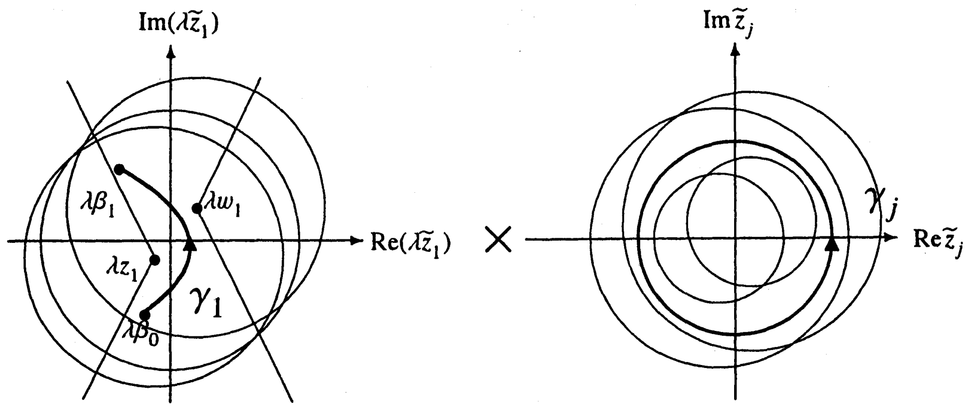

図 2. 積分路

で定義する．これは P のみに依存し定義函数 $\psi(z,\tilde{z})d\tilde{z}$ 及び積分路 γ の取り方に依存しない．これから表象写像

$$\sigma\colon \mathfrak{E}_{z^*} \ni P \mapsto \sigma(P) \in \mathscr{S}_{z^*}/\mathscr{N}_{z^*}$$

が定義される．これは明らかに線型である．場合によっては積分

$$P(z,\zeta) := \int_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\cdots\oint_{\gamma_n} \psi(z,z+w)\,e^{\langle w,\zeta\rangle}dw \in \mathscr{S}_{z^*}$$

を P の表象と呼ぶこともあり $P(z,\zeta)=\sigma(\psi)(z,\zeta)$ とも書く．

次の定理が表象理論の基本である:

2.3. 定理. 表象写像 σ は次の線型同型を与える:

$$\mathfrak{E}_{z^*} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_{z^*}/\mathscr{N}_{z^*}.$$

$\sigma\colon \mathfrak{E}_{z^*} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_{z^*}/\mathscr{N}_{z^*}$ の逆を $\varpi\colon \mathscr{S}_{z^*}/\mathscr{N}_{z^*} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_{z^*}/\mathscr{N}_{z^*}$ と書く．

さて，柏原・河合 [4], [5] に依る，定義函数を用いた $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}|_{T_M^*X}$ の $\mathscr{C}_M$ への作用の積分表示に従い，$\psi_1(z,\tilde{z})d\tilde{z}, \psi_2(z,\tilde{z})d\tilde{z} \in \mathcal{K}_{z^*}$ に対して

$$\psi_2 * \psi_1(z,w) := \int \psi_2(z,\tilde{z})\psi_1(\tilde{z},w)\,d\tilde{z} = \int_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\cdots\oint_{\gamma_n} \psi_2(z,\tilde{z})\psi_1(\tilde{z},w)\,d\tilde{z}$$

を考える．但し積分路は次の通りである: $\psi_2(z,\tilde{z})$ 及び $\psi_1(\tilde{z},w)$ は各々 $(z,\tilde{z}), (\tilde{z},w) \in V_{r,\varepsilon}$ で整型である．$B_r := \{c \in \mathbb{C}; |c| < r\}$ とする．充分小さい $0<\delta' \ll \delta \ll 1$ に対して $z_1 \in B_{\delta'}$ 及び $w_1 \in \mathbb{C}$ を $w_1 - z_1 \in B_{\delta'} \cap W_{\lambda,\varepsilon}$ と取り

$$D^1_{\lambda,\varepsilon,\delta}(z_1,w_1) := \{\tilde{z}_1 \in B_r; \tilde{z}_1 - z_1, w_1 - \tilde{z}_1 \in B_r \cap W_{\lambda,\varepsilon}\}$$

とすればこの集合は単連結である．$\beta_0, \beta_1 \in D^1_{\lambda,\varepsilon,\delta}(z_1,w_1)$ を

$$\begin{cases} 0 > \mathrm{Re}(\lambda(\beta_0 - z_1)) > \varepsilon\,\mathrm{Im}(\lambda(\beta_0 - z_1)), \\ 0 > \mathrm{Re}(\lambda(\beta_1 - z_1)) > -\varepsilon\,\mathrm{Im}(\lambda(\beta_1 - z_1)), \end{cases}$$

と取る．γ_1 を β_0 から β_1 に到る $D^1_{\lambda,\varepsilon,\delta}(z_1,w_1)$ 内の道とする．次に $2\leqslant j\leqslant n$ を任意に固定する．

$$\begin{cases}\{\widetilde{z}_j\in\mathbb{C};\ |\widetilde{z}_1-z_1|<\varepsilon|\widetilde{z}_j-z_j|,\ \widetilde{z}_j-z_j\in B_r\},\\ \{\widetilde{z}_j\in\mathbb{C};\ |w_1-\widetilde{z}_1|<\varepsilon|w_j-\widetilde{z}_j|,\ w_j-\widetilde{z}_j\in B_r\},\end{cases}$$

という二つの円環領域が共通部分を持つように $\widetilde{z}_1\in\gamma_1$, $D^1_{\lambda,\varepsilon,\delta}(z_1,w_1)$ 及び $z_j, w_j\in B_\delta$ を十分小さく取り，γ_j を $\{z_j\in\mathbb{C};\ |z_1-\widetilde{z}_1|\geqslant\varepsilon|\widetilde{z}_j-z_j|,\ |w_j-\widetilde{z}_1|\geqslant\varepsilon|w_j-\widetilde{z}_j|\}$ を反時計回りに一周する $\{\widetilde{z}_j\in\mathbb{C};\ \widetilde{z}_j-z_j\in B_r,\ w_j-\widetilde{z}_j\in B_r\}$ 内の単純閉曲線とする (図 2 を参照)．この積分路を取れば，$z^*=x^*\in \dot{T}^*_MX$ 且つ $\psi(z,\widetilde{z})d\widetilde{z}\in\mathcal{K}_{x^*}$ の時，任意の $u(x)\in\mathscr{C}_{M,x^*}$ に対し，$u(x)$ の定義函数 $f(z)$ をうまく取れば，$\psi(z,\widetilde{z})d\widetilde{z}$ が定める作用素を P とすると，

$$\psi*f(z)=\int\varphi(z,\widetilde{z})f(\widetilde{z})d\widetilde{z}$$

の境界値が $Pu(x)\in\mathscr{C}_{M,x^*}$ を表す．ところがこれでは $\psi_2*\psi_1(z,\widetilde{z})d\widetilde{z}\in\mathcal{K}_{z^*}$ とは限らない (神本・片岡 [3] 参照)．神本・片岡 [3] では，新たな定義函数族を導入し，この問題を解決した．此処では，[3] の結果を用いた別の方法を紹介する．

2.4. 注意. $\psi(z,w)\in\Gamma(V_{r,\varepsilon};\mathscr{O}_{X\times X})$ とすると，$\dfrac{w_1}{w'}=\left(\dfrac{w_1}{w_2},\dots,\dfrac{w_1}{w_n}\right)$ に関し

$$\psi(z,z+w)=\sum_{\alpha'\in\mathbb{Z}^{n-1}}\frac{\psi_{\alpha'}(z,w_1)}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\left(\frac{w_1}{w'}\right)^{\alpha'+1_{n-1}}$$

と Laurent 展開出来る．或る $2\leqslant j\leqslant n$ について $\alpha_j+1\leqslant 0$ となる項は $w_j=0$ まで整型なので $\mathfrak{E}_{z^*}$ で零．よって始めから展開は $\alpha_j+1\geqslant 1$，即ち

$$\sum_{\alpha'\in\mathbb{N}_0^{n-1}}\frac{\psi_{\alpha'}(z,w_1)}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\left(\frac{w_1}{w'}\right)^{\alpha'+1_{n-1}}$$

として構わない．そこで

$$\begin{aligned}U'_r&:=\{(z,\widetilde{z})\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;\ |z|,\ |z_1-\widetilde{z}_1|<r\},\\ V'^{(1)}_{r,\varepsilon}&:=\{(z,\widetilde{z})\in U'_r;\ \widetilde{z}_1-z_1\in W_{\lambda,\varepsilon}\},\\ V'^{(j)}_{r,\varepsilon}&:=\{(z,\widetilde{z})\in U'_r;\ |\widetilde{z}_1-z_1|<\varepsilon|\widetilde{z}_j-z_j|\}\quad(2\leqslant j\leqslant n),\\ V'_{r,\varepsilon}&:=\bigcap_{j=1}^n V'^{(j)}_{r,\varepsilon},\qquad \widehat{V}'^{(j)}_{r,\varepsilon}:=\bigcap_{k\neq j}V'^{(k)}_{r,\varepsilon}\qquad(1\leqslant j\leqslant n).\end{aligned}$$

と定め，

$$\mathcal{K}'_{z^*}:=\varinjlim_{r,\varepsilon}\Gamma(V'_{r,\varepsilon};\mathscr{O}^{(0,n)}_{X\times X})\supset\mathcal{N}'_{z^*}:=\varinjlim_{r,\varepsilon}\sum_{j=1}^n\Gamma(\widehat{V}'^{(j)}_{r,\varepsilon};\mathscr{O}^{(0,n)}_{X\times X})$$

と置けば

$$\mathfrak{E}_{z^*}=\mathcal{K}'_{z^*}/\mathcal{N}'_{z^*}$$

となる事に注意する．

さて

$$V''_{r,\varepsilon,B}:=\bigcap_{2\leqslant j\leqslant n}\{(z,\widetilde{z})\in\mathbb{C}^{2n};\ \|z\|,\ |z_1-\widetilde{z}_1|<r,\ B<|z_j-\widetilde{z}_j|\}$$

と置く．$\varphi(z,\tilde{z}) \in \Gamma(V''_{r,\varepsilon,B};\mathscr{O}_{X\times X})$ とすると

$$\varphi(z,z+w) = \sum_{\alpha'\in\mathbb{N}_0^{n-1}} \frac{\varphi_{\alpha'}(z,w_1)}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\left(\frac{1}{w'}\right)^{\alpha'+1_{n-1}}$$

と展開出来て，$\varphi_\alpha(z,w_1)$ は $|z|, |w_1| < r$ で整型，且つ Cauchy の不等式に依って，$B > B'$ を取った時，任意の $K \Subset U'_r$ に対して $C > 0$ が存在して $\sup_K |\varphi_{\alpha'}(z,w_1)| \leqslant CB^{|\alpha|+n-1}$ という評価を持つ．そこで

$$\sigma(\varphi)(z,\zeta) = \int_{\gamma'} \varphi(z,z+w)\,e^{\langle w,\zeta\rangle}\,dw$$

を考える．但し γ' は $\gamma'_n = \gamma_n$ 且つ $\gamma'_j := \{w_j \in \mathbb{C}; |w_j| = R\}$ $(2 \leqslant j \leqslant n,\ R > B)$．この時 $\varphi(z,w) \in \Gamma(U'_{r',\varepsilon'};\mathscr{O}_{X\times X})$ ならば Cauchy の積分定理から

$$\int_{\gamma'} \varphi(z,z+w)\,e^{\langle w,\zeta\rangle}\,dw = \int_{\gamma} \varphi(z,z+w)\,e^{\langle w,\zeta\rangle}\,dw$$

だから先の表象 σ と一致する．次に，

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \varphi(z,z+w)\,e^{\langle w,\zeta\rangle}\,dw &= \int_{\gamma_1} dw_1\,\varphi_\alpha(z,w_1)\,e^{w_1\zeta_1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{n-1}} \oint_{\gamma'_2\times\cdots\times\gamma'_n} \frac{e^{\langle w',\zeta'\rangle}}{(2\pi\sqrt{-1})^n (w')^{\alpha+1_{n-1}}}\,dw' \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{n-1}} \varphi_\alpha(z,w_1)\,e^{w_1\zeta_1}\frac{(\zeta')^\alpha}{\alpha!}\,dw_1\end{aligned}$$

に於いて，γ_n を変更する事で，或る $h > 0$ に対して積分路上で $|e^{w_1\zeta_1}| \leqslant e^{-2h|\zeta_1|}$ と出来る．そこで $|\zeta_j| < \dfrac{h|\zeta_1|}{(n-1)B}$ とすれば

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_1} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{n-1}} \varphi_\alpha(z,w_1)\,e^{w_1\zeta_1}\frac{(\zeta')^\alpha}{\alpha!}\,dw_1\right| &\leqslant |\gamma_1| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{n-1}} \frac{Ce^{-2h|\zeta_1|}}{\alpha!} \prod_{j=2}^n (B|\zeta_j|)^{\alpha_j} \\ &= |\gamma_1| Ce^{-2h|\zeta_1|} e^{B(|\zeta_2|+\cdots+|\zeta_n|)} < |\gamma_1| Ce^{-h|\zeta_1|} = |\gamma_1| Ce^{-h\|\zeta_1\|}\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\int_{\gamma'} \varphi(z,z+w)\,e^{\langle w,\zeta\rangle}\,dw \in \mathscr{N}_{z*}$．そこで

$$\mathcal{K}^\circ_{z*} := \varinjlim_{r,\varepsilon,B} \Gamma(V''_{r,\varepsilon,B};\mathscr{O}^{(0,n)}_{X\times X})$$

と定めれば，以下を示す事が出来る:

(1) $\sigma\colon \mathcal{K}^\circ_{z*} \to \mathscr{N}_{z*}$．

(2) $\varphi(z,\tilde{z})\,d\tilde{z} \in \mathcal{K}^\circ_{z*}$ に対して $\varpi\circ\sigma(\varphi) \in \mathcal{N}_{z*}$ 且つ $\varpi\circ\sigma(\varphi)(z,\tilde{z})\,d\tilde{z} - \varphi(z,\tilde{z})\,d\tilde{z} \in \mathcal{K}^\circ_{z*}$．

(3) $z^* = x^* \in \dot{T}^*_M X$ 且つ $\varphi(z,\tilde{z})\,d\tilde{z} \in \mathcal{K}^\circ_{x*}$ の時，任意の $u(x) \in \mathscr{C}_{M,x*}$ に対し，$u(x)$ の定義函数 $f(z)$ をうまく取れば

$$\varphi * f(z) = \int \varphi(z,\tilde{z})\,f(\tilde{z})\,d\tilde{z}$$

の境界値は $\mathscr{C}_{M,x*}$ に於いて 0 となる．

$P(z,\zeta), Q(z,\zeta) \in \mathscr{S}_{z^*}$ に対して核函数を $\varpi(P) = \psi_1, \varpi(Q) = \psi_2$ とする．神本・片岡 [3] に依れば，

$$\psi_2 * \psi_1(z,\widetilde{z}) = \psi^1(z,\widetilde{z}) + \psi^2(z,\widetilde{z}),$$

但し $\psi^1(z,\widetilde{z})d\widetilde{z} \in \mathcal{K}_{z^*}$ 且つ $\psi^2(z,\widetilde{z})d\widetilde{z} \in \mathcal{K}^{\circ}_{z^*}$ となる．従って $\sigma(\psi_2 * \psi_1) \in \mathscr{S}_{z^*}$ が定まる．

2.5. 定理. $Q \circ P(z,\zeta) = \sigma(\psi_2 * \psi_1)$ が成立つ．特に $\sigma(\psi_2 * \psi_1) = \sigma(\psi_2) \circ \sigma(\psi_1)$.

証明は [2] と同様である．

従って $\psi_2 \circ \psi_1(z,\widetilde{z})d\widetilde{z} := \varpi\sigma(\psi_2 * \psi_1)(z,\widetilde{z})d\widetilde{z}$ と定めれば，$\psi_2 \circ \psi_1(z,\widetilde{z})d\widetilde{z}$ が積を与える事が判る．此処で

$$\begin{aligned}\psi_3 \circ (\psi_2 \circ \psi_1)(z,\widetilde{z}) &= \varpi\sigma(\psi_2 * \varpi\sigma(\psi_2 * \psi_1)) = \varpi(\sigma(\psi_3) \circ \sigma\varpi\sigma(\psi_2 * \psi_1)) \\ &= \varpi(\sigma(\psi_3) \circ \sigma(\psi_2 * \psi_1)) = \varpi(\sigma(\psi_3) \circ \sigma(\psi_2) \circ \sigma(\psi_1)) = (\psi_3 * \psi_2) \circ \psi_1(z,\widetilde{z})\end{aligned}$$

に注意する．更に $z^* = x^* \in \dot{T}^*_M X$ 且つ $u(x) \in \mathscr{C}_{M,x^*}$ に対し，$u(x)$ の定義函数 $f(z)$ をうまく取れば $QPu(x)$ の定義函数は

$$\int \psi_2 * \psi_1(z,\widetilde{z})\, f(\widetilde{z})\, d\widetilde{z} = \int \psi^1(z,\widetilde{z})\, f(\widetilde{z})\, d\widetilde{z}$$

となる．これは $Q(Pu)(x) = (QP)u(x)$ とも両立する．

§3. 実整型超局所函数

本節では [2] で触れる事の出来なかった実整型超局所函数について，表象理論の立場から解説を行う (本節の構成に関しては Schapira [8] に負う所が多い)．余次元 d の閉部分複素多様体 $Y \subset X$ は，局所的には

$$X = \{z = (z', z'')\} \supset Y = \{(z', 0)\} \tag{3.1}$$

と書ける．但し $z' := (z'_1, \ldots, z'_{n-d}), z'' := (z''_1, \ldots, z''_d)$. 座標 (3.1) を固定して

$$T^*_Y X \simeq Y \times \mathbb{C}^d = \{(z'; \zeta'')\}$$

と同一視する．さて，この座標下で $\mathfrak{I}^{\mathbb{R}}_{Y,z} := \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X z'' + \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X \partial_{z'}$ と置く．但し $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X z'' := \sum_{j=1}^{d} \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X z''_j$ 等を表す．$U \in \mathfrak{O}(\mathbb{C}^{n-d})$ に対して z と w とを $\mathrm{Cl}\, U$ の $\mathbb{C}^n$ に於ける近傍の二つの複素座標系で，Y が $\{z'' = 0\}$ 及び $\{w'' = 0\}$ で表されていると仮定する．対応する $T^*_Y \mathbb{C}^n$ の近傍の座標系を各々 $(z'; \zeta''), (w'; \eta'')$ と置く．複素座標変換は $z = \Phi(w) = (\Phi_1(w), \Phi_2(w))$ と書け $\Phi_2(w', 0) = 0$, 且つ $w'' = 0$ と $z'' = 0$ とは同値．以下，この様な座標変換を ***Y* を保つ**と呼ぶ．簡単の為

$$\Phi^{-1}(z) = (w'(z), w''(z))$$

と書く．この時

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial w'}{\partial z'}(z) & \dfrac{\partial w'}{\partial z''}(z) \\ \dfrac{\partial w''}{\partial z'}(z) & \dfrac{\partial w''}{\partial z''}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z'}{\partial w'}(w) & \dfrac{\partial z'}{\partial w''}(w) \\ \dfrac{\partial z''}{\partial w'}(w) & \dfrac{\partial z''}{\partial w''}(w) \end{bmatrix} = \mathbb{1}_n \quad (n \text{ 次単位行列})$$

に於いて $\dfrac{\partial w''}{\partial z'}(z',0)=\dfrac{\partial z''}{\partial w'}(w',0)=0$ だから，特に

$$\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\,\frac{\partial z''}{\partial w''}(w',0)=\mathbb{1}_d$$

に注意する．

3.1. 定理. 以上の記号下で

$$\Phi^\star(\mathfrak{I}^\infty_{Y,z}\circ\det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right])=\mathfrak{I}^\infty_{Y,w}.$$

証明. $\det\left[\dfrac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right]\neq 0$ だから，逆行列を考えて

$$\Phi^\star(\mathfrak{I}^\infty_{Y,z}\circ\det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right])\subset\mathfrak{I}^\infty_{Y,w}$$

を示せば充分．$(z',0)$ の近傍で可逆な d 次正方行列 $A(z)$ が存在して $w''=A(z)z''$ と書ける．よって $z''=A(z)^{-1}w''$ 且つ $\det\left[\dfrac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right]=\det A(z',0)$. 従って

$$\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X z''\circ\det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right]=\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X(\det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right]A(z)^{-1}w'')=\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X w''.$$

次に

$$\begin{bmatrix}\partial_{z'}\\ \partial_{z''}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}{}^{\mathrm{t}}\left[\dfrac{\partial w'}{\partial z'}\right] & {}^{\mathrm{t}}\left[\dfrac{\partial w''}{\partial z'}\right]\\ {}^{\mathrm{t}}\left[\dfrac{\partial w'}{\partial z''}\right] & {}^{\mathrm{t}}\left[\dfrac{\partial w''}{\partial z''}\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_{w'}\\ \partial_{w''}\end{bmatrix}$$

だから

$$\partial_{z'}={}^{\mathrm{t}}\left[\frac{\partial w'}{\partial z'}\right]\partial_{w'}+{}^{\mathrm{t}}\left[\frac{\partial w''}{\partial z'}\right]\partial_{w''}={}^{\mathrm{t}}\left[\frac{\partial w'}{\partial z'}\right]\partial_{w'}+{}^{\mathrm{t}}z''\,{}^{\mathrm{t}}\left[\frac{\partial A}{\partial z'}\right]\partial_{w''}$$

即ち

$$\partial_{z'_j}=\sum_{k=1}^{n-d}\frac{\partial w'_k}{\partial z'_j}\partial_{w'_k}+\sum_{\mu,\nu=1}^{d}z''_\nu\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial z'_j}\partial_{w''_\mu}=\sum_{k=1}^{n-d}\frac{\partial w'_k}{\partial z'_j}\partial_{w'_k}+\sum_{\mu,\nu=1}^{d}(A^{-1}w'')_\nu\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial z'_j}\partial_{w''_\mu}.$$

$A^{-1}=B=(B_{ij})$ と置く．$z''=0$ と $w''=0$ とが同値に注意して，補題 1.11 から

$$\begin{aligned}
\partial_{z'_j}\circ\det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right]&\equiv\partial_{z'_j}\circ\det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z)\right]\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X w''\\
&=\partial_{z'_j}\circ\det A=(\det A)\partial_{z'_j}+\frac{\partial\det A}{\partial z'_j}\\
&=\det A\sum_{k=1}^{n-d}\frac{\partial w'_k}{\partial z'_j}\partial_{w'_k}+\det A\sum_{\mu,\nu,k=1}^{d}B_{\nu k}w''_k\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial z'_j}\partial_{w''_\mu}+\frac{\partial\det A}{\partial z'_j}\\
&\equiv\det A\sum_{\mu,\nu,k=1}^{d}{}^{\mathrm{t}}B_{k\nu}\frac{\partial\,{}^{\mathrm{t}}A_{\nu\mu}}{\partial z'_j}(\partial_{w''_\mu}\circ w''_k-\delta_{\mu k})+\frac{\partial\det A}{\partial z'_j}\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X\partial_{w'}\\
&\equiv-\det A\sum_{\mu,\nu=1}^{d}{}^{\mathrm{t}}B_{\mu\nu}\frac{\partial\,{}^{\mathrm{t}}A_{\nu\mu}}{\partial z'_j}+\frac{\partial\det A}{\partial z'_j}\quad\mathrm{mod}\ \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X w''\\
&=-(\det{}^{\mathrm{t}}A)\,\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}A^{-1}\frac{\partial\,{}^{\mathrm{t}}A}{\partial z'_j})+\frac{\partial\det{}^{\mathrm{t}}A}{\partial z'_j}=0.
\end{aligned}$$

以上で示された. □

定理 3.1 から次が判る:

3.2. 定理. $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ 加群同型

$$\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{J}_{Y,z}^{\mathbb{R}} \ni [{:}P(t;z,\zeta){:}] \mapsto [{:}\Phi^* P(t;w,\eta)\circ\det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right]{:}] \in \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{J}_{Y,w}^{\mathbb{R}}$$

が存在する. 特に $\delta(z'') := [1] \in \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{J}_{Y,z}^{\infty}$ と置くと,

$$\delta(z'') = \delta(w'')\det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right].$$

3.3. 定義. Y に沿った**実整型超局所函数** (real holomorphc microfunction) の層 $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ を

$$\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} := \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}\delta(z'') = \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{J}_{Y,z}^{\mathbb{R}}$$

及び定理 3.1 の変換で定義する. $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ の切断を**実整型超局所函数**と呼び $f(z)$, ${:}f(t;z',\zeta''){:}$ 等で表す. この時, 複素多様体 X 及び閉部分複素多様体 $Y \subset X$ に対して, 座標不変性から層 $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ が定義出来る.

3.4. 注意. (1) $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ が錐状層故, $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ も錐状層. $T^*X \setminus T_Y^*X$ では, 或る z_j'' 又は ζ_i' が零でないので可逆. 即ち $\mathfrak{J}_{Y,z}^{\mathbb{R}} = \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ だから, 任意の $f(z) \in \mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ に対して, $\operatorname{supp} f \subset T_Y^*X$. よって $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ は T_Y^*X 上の錐状層と看做される.

(2) $\mathscr{B}_{Y|X}^{\infty} := \mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}|_{\mathbb{C}^n} = \mathscr{D}_X^{\infty}\delta(z'')$ と定め, Y に台を持つ**整型超函数** (holomorphic hyperfunction) の層と呼ぶ.

$\mathfrak{J}_{Y,z}^{\mathbb{R}}$ に於ける同値類の計算規則を述べておく. $\operatorname{mod}\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}z''$ で

$$z''^{\gamma}\zeta''^{\nu} = (z''^{\gamma}\zeta''^{\nu})^{**} = (-1)^{|\nu|}\sum_{\alpha}\alpha!\binom{\nu}{\alpha}\binom{\gamma}{\alpha}(-\zeta'')^{\nu-\alpha}\circ z''^{\gamma-\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}\alpha!\binom{\nu}{\alpha}\binom{\gamma}{\alpha}\zeta''^{\nu-\alpha}\circ z''^{\gamma-\alpha} \equiv \begin{cases} \dfrac{(-1)^{|\gamma|}\nu!}{(\nu-\gamma)!}\zeta''^{\nu-\gamma} & (\nu \geqslant \gamma), \\ 0 & (\nu \not\geqslant \gamma). \end{cases}$$

に注意する. この時

$$e^{-\langle\partial_{\zeta''},\partial_{z''}\rangle}(z''^{\gamma}\zeta''^{\nu})|_{z''=0} = \sum_{\alpha}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_{z''}^{\alpha}z''^{\gamma}\partial_{\zeta''}^{\alpha}\zeta''^{\nu}|_{z''=0} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{|\gamma|}\nu!}{(\nu-\gamma)!}\zeta''^{\nu-\gamma} & (\nu \geqslant \gamma), \\ 0 & (\nu \not\geqslant \gamma). \end{cases}$$

だから, 次が判る:

3.5. 補題. ${:}P(t;z,\zeta){:} \in \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ に対して,

$$[{:}P(t;z,\zeta){:}] = {:}e^{-t\langle\partial_{\zeta''},\partial_{z''}\rangle}P(t;z,\zeta)\big|_{\substack{z''=0\\ \zeta'=0}}{:} \in \mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}.$$

この補題と $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ の座標変換とを組み合わせれば, $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ の座標変換が以下の通りに求められる. Y を保つ複素座標変換 $\Phi(w) = z$ に対して

$$\Phi^{-1}(\tilde{z}) - \Phi^{-1}(z) = J_w(\tilde{z},z)(\tilde{z}-z) = \begin{bmatrix} J_{w'}'(\tilde{z},z) & J_{w'}''(\tilde{z},z) \\ J_{w''}'(\tilde{z},z) & J_{w''}''(\tilde{z},z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{z}'-z' \\ \tilde{z}''-z'' \end{bmatrix}$$

と書いておく．特に

$$\Phi^{-1}(z+(0,z_1''))-\Phi^{-1}(z)=\begin{bmatrix}J'_{w'}(z+(0,z_1''),z) & J''_{w'}(z+(0,z_1''),z)\\ J'_{w''}(z+(0,z_1''),z) & J''_{w''}(z+(0,z_1''),z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ z_1''\end{bmatrix}$$

となる．$J''_{w''}(z,z)=\dfrac{\partial w''}{\partial z''}(z)$ だから，T_Y^*X の点 $(z';\zeta'')$ 及び $(w';\eta'')$ の変換則 ${}^{\mathrm{t}}\Big[\dfrac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\Big]\eta''=\zeta''$ と比較すれば

$${}^{\mathrm{t}}J''_{w''}(z,z)\eta''|_{z''=0}={}^{\mathrm{t}}\Big[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\Big]\eta''=\zeta''.$$

この時，

$$\begin{aligned}\Phi^\star f(t;w,\eta)&=e^{t\langle\partial_{\zeta_1},\partial_{z_1}\rangle}f(t;z',\zeta_1''+{}^{\mathrm{t}}J_{w''}(z_1,z)\eta)\Big|_{\substack{z=z_1=\Phi(w)\\ \zeta_1=0}}\\ &=e^{t\langle\partial_{\zeta_1''},\partial_{z_1''}\rangle}f(t;z',\zeta_1''+{}^{\mathrm{t}}J''_{w'}(z+(0,z_1''),z)\eta'+{}^{\mathrm{t}}J''_{w''}(z+(0,z_1''),z)\eta'')\Big|_{\substack{z_1''=0\\ \zeta_1''=0}}\end{aligned}$$

となる．

3.6. 定理. 以上の記号下で

$$\Phi_Y^\star f(t;w',\eta''):=e^{-t\langle\partial_{\eta''},\partial_{w''}\rangle}\,\Phi^\star f(t;w,\eta)\big|_{\substack{w''=0\\ \eta'=0}}\det\Big[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\Big]$$

に対して

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}\ni{:}P(t;z,\zeta){:} & \xmapsto{\ \Phi^\star\ } & {:}\Phi^\star P(t;w,\eta)\circ\det\Big[\dfrac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\Big]{:}\in\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{I}_{Y,z}^{\mathbb{R}}\ni[{:}P(t;z,\zeta){:}] & \xmapsto{\ \Phi^\star\ } & [{:}\Phi^\star P(t;w,\eta)\circ\det\Big[\dfrac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\Big]{:}]\in\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{I}_{Y,w}^{\mathbb{R}}\\ \| & & \|\\ \mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}\ni{:}f(t;z',\zeta''){:} & \xmapsto{\ \Phi_Y^\star\ } & {:}\Phi_Y^\star f(t;w',\eta''){:}\in\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}\end{array}$$

は可換．特に $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ 上の座標変換は $\Phi_Y^\star$ で与えられる．

Ω_X の双対層を $\Omega_X^{\otimes-1}$ (即ち $\Omega_X\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X^{\otimes-1}=\mathscr{O}_X$) とし，整型写像 $f\colon Y\to X$ に対して

$$\Omega_{Y/X}:=\Omega_Y\underset{f^{-1}\mathscr{O}_X}{\otimes}f^{-1}\Omega_X^{\otimes-1},\quad \Omega_{Y/X}^{\otimes-1}:=f^{-1}\Omega_X\underset{f^{-1}\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_Y^{\otimes-1},$$

と置く．この時 $\delta_Y:=\delta(z'')\,dz''\in\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}\underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes}\Omega_{Y/X}^{\otimes-1}$ が座標不変に定まる．実際

$$\delta(z'')\,dz''=\delta(w'')\det\Big[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\Big]dz''=\delta(w'')\,dw''.$$

3.7. 定理. (1) (3.1) の座標下で，

$$[P(t;z,\zeta)]\in\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}\big/\mathfrak{I}_{Y,z}^{\infty}\ni[{:}P(t;z,\zeta){:}]\mapsto{:}P(t;z,\zeta){:}\,\delta_Y\in\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}\underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes}\Omega_{Y/X}^{\otimes-1}$$

が矛盾無く定まり $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ 加群同型を与える．

(2) $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ 加群同型

$$\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{J}_{Y,z}^{\mathbb{R}} \ni [P(t;z,\zeta)] \mapsto [\det\left[\frac{\partial z''}{\partial w''}(w)\right] \circ \Phi^\star(P)(t;w,\eta) \circ \det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z)\right]] \in \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{J}_{Y,w}^{\mathbb{R}}$$

が存在する.

(3) 座標変換 $z = \Phi(w)$ に対し $w'' = J_{w''}(z)z''$ と書ける. そこで $:f(t;z',\zeta''): = [:P(t;z,\zeta):] \in \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{J}_{Y,z}^{\mathbb{R}}$ に対して

$$\widetilde{\Phi}_Y^\star f(t;w',\eta'') := e^{t\langle \partial_{\zeta''}, \partial_{z''}\rangle} f(t;z',\zeta'' + {}^{\mathrm{t}}J_{w''}(z)\eta'')\Big|_{\substack{z''=0\\ \zeta''=0}}$$

と置く. この時,

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{J}_{Y,z}^{\mathbb{R}} \ni [:P(t;z,\zeta):] & \longmapsto & [\det\left[\frac{\partial z''}{\partial w''}(w)\right] \circ \Phi^\star(P)(t;w,\eta) \circ \det\left[\frac{\partial w''}{\partial z''}(z)\right]] \in \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/\mathfrak{J}_{Y,w}^{\mathbb{R}} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1} \ni :P(t;z,\zeta): \delta_Y = :f(t;z',\zeta''): dz'' & \longmapsto & :\widetilde{\Phi}_Y^\star f(t;w',\eta''): dw'' \in \mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1}
\end{array}$$

は可換, 且つ $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1}$ 上の座標変換は

$$:f(t;z',\zeta''): dz'' \mapsto :\widetilde{\Phi}_Y^\star f(t;w',\eta''): dw''$$

で与えられる. 特に

$$:\widetilde{\Phi}_Y^\star f(t;w',\eta''): = :\Phi^\star f(t;w,\eta)\Big|_{\substack{w''=0\\ \eta'=0}}: = :\Phi^\star f(t;w,\eta): \quad \operatorname{mod} w''\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}} + \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}\partial_{w'}.$$

之より

$$\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes} \Omega_{Y/X}^{\otimes -1} = \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}/(z''\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}} + \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}\partial_{z'}).$$

整型写像 $f\colon Y \to X$ に対して

$$f_d(w,f(w),\zeta) := (w;{}^{\mathrm{t}}df(w)\zeta), \quad f_\pi(w,f(w),\zeta) := (f(w);\zeta)$$

で, 規準的写像 $T^*Y \xleftarrow{f_d} Y \underset{X}{\times} T^*X \xrightarrow{f_\pi} T^*X$ が定義出来る. f を

$$Y \ni w \xmapsto{\ i\ } (w,f(w)) \in Y \times X \ni (w,z) \xmapsto{\ p\ } z \in X$$

と分解し, $Y \simeq i(Y) \subset Y \times X$ (閉部分多様体) と看做す. この時,

$$\begin{aligned}
T_Y^*(Y \times X) &\simeq \{(w,f(w);-{}^{\mathrm{t}}df(w)\zeta,\zeta) \in T^*(Y \times X)\} \\
&\simeq \{(w,f(w);\zeta) \in Y \times T^*X\} = Y \underset{Y}{\times} T^*X
\end{aligned} \tag{3.2}$$

という同一視をする. 又, $T_Y^*(Y \times X) \subset T^*(Y \times X)$ とも看做す. この時, 同型 (3.2) は, 同型

$$\Omega_{Y\times X/Y} \simeq \mathscr{O}_{Y\times X} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega_X$$

を与える. $f(w) = (f_1(w),\dots,f_n(w))$ と表した時, $T_Y^*(Y \times X)$ 上の切断 $d(z_j - f_j(w))$ は $Y \underset{Y}{\times} T^*X$ 上の切断 dz_j に写るから, 同型 (3.2) の下で

$$\delta(z - f(w))\,d(z_1 - f_1(w)) \wedge \cdots \wedge d(z_n - f_n(w)) = \delta(z - f(w))\,dz.$$

ここで $X \ni z \mapsto (z,z) \in X \times X$ に依って $X \simeq \Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$ を $X \times X$ の閉部分多様体と考えると

$$\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega^{\otimes -1}_{X/X\times X} = \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega^{\otimes -1}_X \underset{\mathscr{O}_{X\times X}}{\otimes} \Omega_{X\times X} = \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega^{\otimes -1}_X \underset{\mathscr{O}_{X\times X}}{\otimes} (\mathscr{O}_{X\times X} \underset{\mathscr{O}_X \boxtimes \mathscr{O}_X}{\otimes} (\Omega_X \boxtimes \Omega_X))$$

$$= \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \underset{\mathscr{O}_X \boxtimes \mathscr{O}_X}{\otimes} ((\Omega^{\otimes -1}_X \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega_X) \boxtimes \Omega_X) = \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \underset{\mathscr{O}_X \boxtimes \mathscr{O}_X}{\otimes} (\mathscr{O}_X \boxtimes \Omega_X) = \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega_X$$

に注意しておく．この時，定理 3.7 (3) より:

3.8. 命題. $X \times X$ の座標を $(z,\tilde{z})$ と置く．この時 $1 \leftrightarrow \delta(\tilde{z}-z)d\tilde{z}$ の対応で

$$\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X = \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \underset{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}}{\otimes} \Omega_X. \tag{3.3}$$

3.9. 定義. $f\colon Y \to X$ を整型写像とする時

$$\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X} := \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Y|Y\times X} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega_X, \quad \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X\leftarrow Y} := \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Y|Y\times X} \underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes} \Omega_Y,$$

で定義し，$T^*_Y(Y\times X) \simeq Y \underset{X}{\times} T^*X$ 上の層と看做す．$\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X\leftarrow Y} = \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X} \underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes} \Omega_{Y/X}$ に注意する．

$$\mathbb{1}_{Y\to X} := \delta(z'-f(w))\,dz' \in \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X}$$

と書く．任意の $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X}$ の切断は，$P \in \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\times X}$ が存在して

$$P\mathbb{1}_{Y\to X} = P\delta(z'-f(w))\,dz'$$

と書け，$(Q,R) \in (f_d^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y, f_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X)$ に対して

$$\begin{aligned} Q(P\mathbb{1}_{Y\to X})R &:= Q(w,\partial_w)R^*(z',\partial_{z'})P\delta(z'-f(w))\,dz' \\ &= R^*(z',\partial_{z'})Q(w,\partial_w)P\delta(z'-f(w))\,dz' \end{aligned}$$

が座標不変に定まる．従って $\mathscr{E}^{\mathbb{R}*}_{Y\to X}$ は $(f_d^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y, f_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X)$ 加群となる．同様に任意の $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X\leftarrow Y}$ の切断は

$$P\delta(z'-f(w))\,dw$$

($P \in \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\times X}$) と書け，$(R,Q) \in (f_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X, f_d^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y)$ に対して

$$\begin{aligned} R(P\delta(z'-f(w))\,dw)Q &:= Q^*(w,\partial_w)R(z',\partial_{z'})P\delta(z'-f(w))\,dw \\ &= R(z',\partial_{z'})Q^*(w,\partial_w)P\delta(z'-f(w))\,dw \end{aligned}$$

が矛盾無く定まる．従って $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X\leftarrow Y}$ は $(f_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X, f_d^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y)$ 加群となる．

3.10. 例. 特別な f について $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X}, \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X\leftarrow Y}$ を考える．

(1) f が射影 $Y\times X = \mathbb{C}^{m+n} \ni (w,z) \mapsto z \in \mathbb{C}^n = X$ の時，

$$\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\times X\to X} \simeq \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\times X}/\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\times X}\partial_w, \quad \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X\leftarrow Y\times X} \simeq \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\times X}/\partial_w\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\times X}.$$

(2) f が埋込み $Y = \mathbb{C}^n \ni z \mapsto (z,0) \in X = \mathbb{C}^{n+m} = \{(z,w)\}$ の時，

$$\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X} \simeq \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X/w\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X, \quad \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X\leftarrow Y} \simeq \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X/\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X w.$$

一般に，$\mathscr{F}$ が $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ 加群の層，$\mathscr{G}$ が $\mathscr{E}_Y^{\mathbb{R}}$ 加群の層の時，

$$\mathscr{F} \underset{\mathscr{E}^{\mathbb{R}}}{\boxtimes} \mathscr{G} := \mathscr{E}_{X\times Y}^{\mathbb{R}} \underset{\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathscr{E}_Y^{\mathbb{R}}}{\otimes} (\mathscr{F} \boxtimes \mathscr{G})$$

と定める．

3.11. 定理（テンサー積）. $Y_j \subset X_j$ $(j=1,2)$ を閉部分複素多様体とし，更に $T_{Y_1\times Y_2}^*(X_1\times X_2)$ を $T_{Y_1}^*X_1 \times T_{Y_2}^*X_2$ と同一視する．

(1) 自然な双線型層型射

$$\mathscr{C}_{Y_1|X_1}^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathscr{C}_{Y_2|X_2}^{\mathbb{R}} \to \mathscr{C}_{Y_1\times Y_2|X_1\times X_2}^{\mathbb{R}}$$

が存在する．

(2) (1) の型射は

$$\mathscr{C}_{Y_1|X_1}^{\mathbb{R}} \underset{\mathscr{E}^{\mathbb{R}}}{\boxtimes} \mathscr{C}_{Y_2|X_2}^{\mathbb{R}} = \mathscr{C}_{Y_1\times Y_2|X_1\times X_2}^{\mathbb{R}}$$

を誘導する．

3.12. 注意. 定理 3.11 (1) に於いて $X_j = \{(z_j', z_j'')\} \supset Y_j = \{(z_j', 0)\}$ という局所座標系を取ると，型射は

$$\mathscr{C}_{Y_1|X_1}^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathscr{C}_{Y_2|X_2}^{\mathbb{R}} \ni P\delta(z_1'') \boxtimes Q\delta(z_2'') \mapsto (P\boxtimes Q)\delta(z_1'', z_2'') \in \mathscr{C}_{Y_1\times Y_2|X_1\times X_2}^{\mathbb{R}}$$

で与えられる．$d_j := \operatorname{codim}_{X_j} Y_j$ と置く．この時 $X_1\times X_2 \ni (z_1, z_2) \mapsto (w_1, w_2) := (z_2, z_1) \in X_2 \times X_1$ とすると

$$\det\left[\frac{\partial(w_1'', w_2'')}{\partial(z_1'', z_2'')}(z_1', 0, z_2', 0)\right] = (-1)^{d_1\cdot d_2}$$

が判るので

$$u_2(z_2)\otimes u_1(z_1) = (-1)^{d_1\cdot d_2} u_1(z_1)\otimes u_2(z_2).$$

整型写像 $f_j\colon Y_j \to X_j$ $(j=1,2)$ に対して，定理 3.11 から

$$\mathscr{E}_{Y_1\to X_1}^{\mathbb{R}} \boxtimes \mathscr{E}_{Y_2\to X_2}^{\mathbb{R}} \to \mathscr{E}_{Y_1\times Y_2\to X_1\times X_2}^{\mathbb{R}}$$

が得られる．これから，整型写像 $g\colon Z\to Y$ 及び $f\colon Y\to X$ に対して，

$$\varphi\colon Z\times X \ni (\tau, z) \mapsto (g(\tau), z) \in Y\times X$$

と置けば，次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
Z \underset{Y}{\times} T^*Y \underset{X}{\times} T^*X \arrow[r, "\varphi_d"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_\pi"] & Z \underset{X}{\times} T^*X \arrow[r, "g_\pi"] \arrow[d, "f_d"] & Y \underset{X}{\times} T^*X \arrow[d, "f_d"] \\
 & Z \underset{Y}{\times} T^*Y \arrow[r, "g_\pi"] & T^*Y
\end{tikzcd}$$

この時

$$f_d^{-1}\mathscr{E}_{Z\to Y}^{\mathbb{R}} \underset{f_d^{-1}g_\pi^{-1}\mathscr{E}_Y^{\mathbb{R}}}{\otimes} g_\pi^{-1}\mathscr{C}_{Y|Y\times X}^{\mathbb{R}} \to \varphi_{d*}(\mathscr{E}_{Z\times X\to Y\times X}^{\mathbb{R}} \underset{\varphi_\pi^{-1}\mathscr{E}_{Y\times X}^{\mathbb{R}}}{\otimes} \varphi_\pi^{-1}\mathscr{C}_{Y|Y\times X}^{\mathbb{R}}) \tag{3.4}$$

が得られる.

3.13. 定理 (逆像). 整型写像 $f\colon Y\to X$ 及び複素閉部分多様体 $Z\subset X$ 及び $S\subset Y$ が

$$Y\underset{X}{\times}\dot{T}^*_ZX\cap\dot{T}^*_YX=\emptyset,\quad S\simeq Z\underset{X}{\times}Y,$$

を満たすと仮定する時, $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y$ 加群として

$$f_{d*}(\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X}\underset{f_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X}{\otimes}f_\pi^{-1}\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X})\simeq\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{S|Y}.$$

3.14. 注意. 特に $\mathbb{1}_{Y\to X}\in\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X}$ を用いれば, 座標変換の一般化として**代入** (substitution)

$$f_{d*}f_\pi^{-1}\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\to\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{S|Y}$$

が定義出来る.

(1) f が閉埋込みの時, X の局所座標 (z,w,τ) を

$$\begin{array}{ccc}S=\{(z,0)\} & \hookrightarrow & Y=\{(z,w,0)\}\\ \downarrow & & \downarrow\\ Z=\{(z,0,\tau)\} & \hookrightarrow & X=\{(z,w,\tau)\}\end{array}$$

及び $T^*X=\{(z,w,\tau;z^*,w^*,\tau^*)\}$ と取ると, 同型は

$$:P(t;z,w,z^*,w^*,\tau^*):\otimes:f(t;z,\tau,w^*):\in f_{d*}(\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X}\underset{f_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X}{\otimes}f_\pi^{-1}\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X})$$

$$\updownarrow$$

$$[:e^{-t\langle\partial_{w^*},\partial_w\rangle}(P(t;z,w,z^*,w^*,\tau^*)\circ f(t;z,\tau,w^*))\big|_{\substack{w=0,\tau=0\\ z^*=0}}:]\in\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{S|Y}$$

で与えられ, 代入は

$$f_{d*}f_\pi^{-1}\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\ni:f(t;z,\tau,w^*):\mapsto:f(t;z,0,w^*):\in\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{S|Y}$$

となる.

(2) f が射影の時, Y の局所座標 (z,w,τ) を

$$\begin{array}{ccc}S=\{(z,0,\tau)\} & \hookrightarrow & Y=\{(z,w,\tau)\}\\ \downarrow & & \downarrow\\ Z=\{(z,0)\} & \hookrightarrow & X=\{(z,w)\}\end{array}$$

及び $T^*Y=\{(z,w,\tau;z^*,w^*,\tau^*)\}$ と取ると, 同型は

$$:P(t;z,w,\tau,z^*,w^*):\otimes:f(t;z,w^*):\in f_{d*}(\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X}\underset{f_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X}{\otimes}f_\pi^{-1}\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X})$$

$$\updownarrow$$

$$:e^{-t\langle\partial_{w^*},\partial_w\rangle}(P(t;z,w,\tau,z^*,w^*)\circ f(t;z,w^*))\big|_{\substack{w=0\\ z^*=0}}:\in\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{S|Y}$$

で与えられ, 代入は

$$f_{d*}f_\pi^{-1}\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\ni:f(t;z,\eta):\mapsto:f(t;z,\eta):\in\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{S|Y},$$

となる.

$Y_1, Y_2 \subset X$ を複素部分多様体, $\delta\colon X \to X \times X$ を対角埋込みとする. この時,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\delta"] & X \times X \\ Y_1 \cap Y_2 \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\delta"] & Y_1 \times Y_2 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

から

$$T^*_{Y_1\cap Y_2}X \xleftarrow{\delta_d} X \underset{X\times X}{\times} T^*_{Y_1\times Y_2}(X\times X) \xrightarrow{\delta_\pi} T^*_{Y_1\times Y_2}(X\times X) \simeq T^*_{Y_1}X \times T^*_{Y_2}X$$

が得られる. この時, テンサー積と代入とを用いて, 次が得られる:

3.15. 定理 (積). $Y_1, Y_2 \subset X$ が横断的複素部分多様体ならば, 次の型射が存在する:

$$\delta_{d*}\delta_\pi^{-1}(\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Y_1|X} \boxtimes \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Y_2|X}) \to \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Y_1\cap Y_2|X}.$$

3.16. 注意. 局所座標系を

$$Y_1 = \{(z, w_1, w_2) \in X;\, w_2 = 0\}, \quad Y_2 = \{(z, w_1, w_2) \in X;\, w_1 = 0\},$$

と取る. この時 $T^*X = \{(z, w_1, w_2; z^*, w_1^*, w_2^*)\}$ と置けば,

$$\begin{array}{c} \vdots f(t; z, w_1, w_2^*)\vdots \otimes \vdots g(t; z, w_2, w_1^*)\vdots \in \delta_{d*}\delta_\pi^{-1}(\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Y_1|X} \boxtimes \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Y_2|X}) \\ \big\downarrow \\ \vdots e^{-t\langle\partial_{w_1^*}, \partial_{w_1}\rangle - t\langle\partial_{w_2^*}, \partial_{w_2}\rangle} f(t; z, w_1, w_2^*)\, g(t; z, w_2, w_1^*)\big|_{\substack{w_1=0\\ w_2=0}}\vdots \in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Y_1\cap Y_2|X} \end{array}$$

で与えられる.

さて, (3.4) 及び定理 3.13 から

$$f_d^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Z\to Y} \underset{f_d^{-1}g_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y}{\otimes} g_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X} \to \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Z\to X} \tag{3.5}$$

が定義される. 同様に

$$g_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X\leftarrow Y} \underset{f_d^{-1}g_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y}{\otimes} f_d^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\leftarrow Z} \to \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X\leftarrow Z} \tag{3.6}$$

が得られる.

3.17. 命題. $g\colon Z \to Y$ 及び $f\colon Y \to X$ を整型写像とする. この時

(1) $f\colon Y \to X$ が整型沈め込み,

(2) $g\colon Z \to Y$ が閉埋込,

の何れかが成り立てば (3.5) 及び (3.6) は同型.

3.18. 注意. 一般に $\mathscr{F}$ が $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X$ 加群の時, $\mathscr{F} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega_X$ は右 $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X$ 加群の構造を持つ. 作用は

$$\mathscr{F} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega_X \times \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X \ni (v \otimes dz, P) \mapsto P^* v \otimes dz \in \mathscr{F} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega_X.$$

之が矛盾無く定義されるのは命題 1.10 に依る. 特に

$$P\delta(z'') \otimes dz = \delta(z'') \otimes dz \cdot P^* \in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X} \underset{\mathscr{O}_X}{\otimes} \Omega_X$$

と書けている．之より $\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X \simeq (z''\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X+\partial_{z'}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X)\backslash\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X$．又，$:\!f(t;z',\zeta'')\!:dz\in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X$ 及び $:\!P(t;z,\zeta)\!:\,\in\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X$ に対して $:\!f(t;z',\zeta'')\!:dz\cdot :\!P(t;z,\zeta)\!:$ は

(i) $P^*(t;z,\zeta)\circ f(t;z',\zeta'') \bmod \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X z''+\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X\partial_{z'}$，即ち $e^{-t\langle\partial_{z''},\partial_{\zeta''}\rangle}(P^*(t;z,\zeta)\circ f(t;z',\zeta''))|_{\substack{z''=0\\ \zeta'=0}}$ を求める；

(ii) $f^*(t;z',\zeta'')\circ P(t;z,\zeta) \bmod z''\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X+\partial_{z'}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_X$，即ち $e^{-t\langle\partial_{z'},\partial_{\zeta'}\rangle}(f^*(t;z',\zeta'')\circ P(t;z,\zeta))|_{\substack{z''=0\\ \zeta'=0}}$ を求める；

の何れかで計算出来る．この時

$$
\begin{aligned}
:\!f(t;z',\zeta'')\!:dz\cdot :\!P(t;z,\zeta)\!: &= :\!e^{-t\langle\partial_{z''},\partial_{\zeta''}\rangle}(P^*(t;z,\zeta)\circ f(t;z',\zeta''))|_{\substack{z''=0\\ \zeta'=0}}\!:dz\\
&= :\!\left(e^{-t\langle\partial_{z'},\partial_{\zeta'}\rangle}(f^*(t;z',\zeta'')\circ P(t;z,\zeta))|_{\substack{z''=0\\ \zeta'=0}}\right)^*\!:dz.
\end{aligned}
$$

3.19. 定理 (順像)．$f\colon Y\to X$ を整型写像，閉部分複素多様体 $Z\subset Y$ が，$f'=f\circ i\colon Z\to X$ によって X の閉部分多様体と看做されると仮定する ($i\colon Z\to Y$ は規準的埋込み)．可換図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & T^*X \\
 & Z\underset{X}{\times}T^*X \arrow[r, "i_\pi"] \arrow[ur, "f_\pi"] \arrow[dl, "f_d"'] \arrow[d, "f_d"] & Y\times T^*X \arrow[u, "f_\pi"'] \arrow[d, "f_d"] \\
T^*Z & Z\underset{Y}{\times}T^*Y \arrow[l, "i_d"] \arrow[r, "i_\pi"'] & T^*Y
\end{tikzcd}
$$

を考える．この時，

$$
f_{\pi *}(f_d^{-1}(\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y}\underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes}\Omega_Y)\underset{f_d^{-1}i_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y}{\otimes} i_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X})\simeq \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X .
$$

3.20. 注意． $v\,dw\in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y}\underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes}\Omega_Y$ に対して $v\,dw\otimes \mathbb{1}_{Y\to X}=v\,dw\otimes\delta(z-f(w))\,dz$ の像を

$$
\left(\int v\otimes\delta(z-f(w))\,dw\right)dz\in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X
$$

と表し，**積分**と呼ぶ．

(1) f が閉埋込みの時，X の局所座標 (z,w,τ) を

$$
\begin{tikzcd}
Z=\{(z,0,0)\} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & Y=\{(z,w,0)\} \arrow[d, hook] \\
Z=\{(z,0,0)\} \arrow[r, hook] & X=\{(z,w,\tau)\}
\end{tikzcd}
$$

及び $T^*X=\{(z,w,\tau;z^*,w^*,\tau^*)\}$ と取ると，同型は

$$
:\!f(t;z,w^*)\!:dz\,dw\otimes :\!P(t;z,w,z^*,w^*,\tau^*)\!:\,\in f_{\pi *}(f_d^{-1}(\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y}\underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes}\Omega_Y)\underset{f_d^{-1}i_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y}{\otimes} i_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X})
$$

$$
\updownarrow
$$

$$
[\left(e^{-t\langle\partial_w,\partial_{w^*}\rangle}(f^*(t;z,w^*)\circ P(t;z,w,z^*,w^*,\tau^*))|_{\substack{z^*=0\\ w=0}}\right)^* dz\,dw\,d\tau]\in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X
$$

で与えられ，積分は

$$\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y}\underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes}\Omega_Y \ni {:}f(t;z,w^*){:}dz\,dw \mapsto {:}f(t;z,w^*){:}\,dz\,dw\,d\tau \in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X$$

となる．

(2) f が射影の時，Y の局所座標 (z,w,τ) を

$$\begin{array}{ccc} Z=\{(z,0,0)\} & \hookrightarrow & Y=\{(z,w,\tau)\} \\ \| & & \downarrow \\ Z=\{(z,0)\} & \hookrightarrow & X=\{(z,w)\} \end{array}$$

及び $T^*Y=\{(z,w,\tau;z^*,w^*,\tau^*)\}$ と取ると，同型は

$${:}f(t;z,w^*,\tau^*){:}dz\,dw\,d\tau\otimes{:}P(t;z,w,\tau,z^*,w^*){:}\in f_{\pi*}(f_d^{-1}(\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y}\underset{\mathscr{O}_Y}{\otimes}\Omega_Y)\underset{f_d^{-1}i_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_Y}{\otimes}i_\pi^{-1}\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{Y\to X})$$

$$\updownarrow$$

$${:}e^{-t\langle\partial_w,\partial_{w^*}\rangle-t\langle\partial_\tau,\partial_{\tau^*}\rangle}(P^*(t;z,w,\tau,z^*,w^*)\circ f(t;z,w^*,\tau^*))\Big|_{\substack{\tau=\tau^*=0\\ z^*=0,w=0}}{:}dz\,dw\in\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X$$

で与えられ，積分は

$$f_{d*}f_\pi^{-1}\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|Y}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_Y\ni{:}f(t;z,w^*,\tau^*){:}dz\,dw\,d\tau\mapsto{:}f(t;z,w^*,0){:}\,dz\,dw\in\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Z|X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X$$

となる．

M を実解析的多様体，X をその複素化とする．更に，$N\subset M$ を実解析的部分多様体，$Y\subset X$ を N の複素化とする．

3.21. 定理 (実化)．以上の記号下で，層単型射

$$\mathrm{b}_{\mathbb{R}}:\mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X}\otimes or_{N/M}\big|_{\sqrt{-1}T^*_NM}\rightarrowtail\Gamma_{\sqrt{-1}T^*_NM}(\mathscr{C}_M)$$

が存在する．

3.22. 注意. 局所座標を (3.1) 及び $N=\{(x',x'')\in M;\,x''=0\}\subset M$ とする．この時，大雑把に言えば，$\mathrm{b}_{\mathbb{R}}$ は複素領域での $\delta(z'')$ を，実領域の δ 函数 $\delta(x'')$ に写す型射である．相対向き付け層 $or_{N/M}$ が出てくるのは，以下の通り，複素領域での $\delta(z'')$ は微分形式に対応するのに対し，実領域の $\delta(x'')$ が体積要素に対応する事に依る: N を保つ実座標変換 $M\ni u\mapsto\Phi(u)=x\in M$ に対し，その複素化も同じ記号で $\Phi(w)=z$ と書く ($\mathrm{Re}\,z=x,\mathrm{Re}\,w=u$)．この時，実領域に於いては [2, 命題 2.6.2] と同様の証明で

$$\delta(x'')=\left|\det\left[\frac{\partial u''}{\partial x''}(x',0)\right]\right|\delta(u'').$$

$\det\left[\dfrac{\partial u''}{\partial x''}(x',0)\right] > 0$ ならば $\mathscr{or}_{N/M}$ の生成元 $\mathbb{1}_{N/M}$ の符号は変わらないから

$$\begin{array}{ccc}
\delta(z'') & \xmapsto{\quad\Phi_Y^*\otimes\mathbb{1}_{N/M}\quad} & \det\left[\dfrac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right]\delta(w'') \\
{\scriptstyle b_{\mathbb{R}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_{\mathbb{R}}} \\
\delta(x'') & \xmapsto{\Phi^*} \left|\det\left[\dfrac{\partial u''}{\partial x''}(x',0)\right]\right|\delta(u'') = & \det\left[\dfrac{\partial u''}{\partial x''}(x',0)\right]\delta(u'').
\end{array}$$

$\det\left[\dfrac{\partial u''}{\partial x''}(x',0)\right] < 0$ ならば $\mathscr{or}_{N/M}$ の生成元 $\mathbb{1}_{N/M}$ の符号が変わるので

$$\begin{array}{ccc}
\delta(z'') & \xmapsto{\quad -\Phi_Y^*\otimes\mathbb{1}_{N/M}\quad} & -\det\left[\dfrac{\partial w''}{\partial z''}(z',0)\right]\delta(w'') \\
{\scriptstyle b_{\mathbb{R}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_{\mathbb{R}}} \\
\delta(x'') & \xmapsto{\Phi^*} \left|\det\left[\dfrac{\partial u''}{\partial x''}(x',0)\right]\right|\delta(u'') = & -\det\left[\dfrac{\partial u''}{\partial x''}(x',0)\right]\delta(u'').
\end{array}$$

3.23. 注意. 本稿では [8] の構成に示唆され，最初に $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ を定め，それから $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ を定義したが，最初に $\mathscr{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ を (形式) 表象を用いて定義し，(3.3) で $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ を定めるという，本来の佐藤，河合，柏原 [7] の順番で理論を組み立てる事も可能である．その場合，例えば $\mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ の積は次の様に解釈出来る．$:P(t;z,\zeta):, :Q(t;z,\zeta): \in \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$ に対して，定理 3.11 からテンサー積 $:Q(t;z_1,\zeta_1):\otimes :P(t;z_2,\zeta_2): \in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X\times X|X\times X\times X\times X}\underset{\mathscr{O}_{X\times X}}{\otimes}\Omega_{X\times X}$ が定まる．次に

$$\begin{array}{ccc}
X\times X\times X \simeq \{(z_1,z_2,z_2,z_4)\} & \hookrightarrow & X\times X\times X\times X = \{(z_1,z_2,z_3,z_4)\} \\
\uparrow & & \uparrow \\
X \simeq \{(z_1,z_1,z_1,z_1)\} & \hookrightarrow & X\times X \simeq \{(z_1,z_1,z_2,z_2)\}
\end{array}$$

を考えると，制限

$$:e^{-t\langle\partial_w,\partial_\eta\rangle}(Q(t;z,\zeta+\eta)P(t;z-w,\zeta))|_{w=0}: = :e^{t\langle\partial_w,\partial_\eta\rangle}(P(t;z,\zeta+\eta)Q(t;w,\zeta))|_{w=z}: \in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X\times X}\underset{\mathscr{O}_{X\times X}}{\otimes}\Omega_{X\times X}$$

が定まる．最後に

$$\begin{array}{ccc}
X\times X\times X = \{(z_1,z_2,z_3)\} & \to & X\times X \simeq \{(z_1,0,z_3)\} \\
\uparrow & & \uparrow \\
X \simeq \{(z_1,z_1,z_1)\} & = & X \simeq \{(z_1,0,z_1)\}
\end{array}$$

を考えると，積分に依って

$$:e^{t\langle\partial_w,\partial_\eta\rangle}(P(t;z,\zeta+\eta)Q(t;w,\zeta))|_{\substack{w=z\\ \eta=0}}: = :Q(t;z,\zeta)\circ P(t;z,\zeta): \in \mathscr{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X}\underset{\mathscr{O}_X}{\otimes}\Omega_X = \mathscr{E}_X^{\mathbb{R}}$$

が定まる．

参考文献

[1] Aoki, T., Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators, Group Representation and Systems of Differential Equations, Proceedings Tokyo 1982 (Okamoto, K., ed.), *Adv. Stud. Pure Math.* **4**, Kinokuniya, Tokyo; North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1984, pp. 181–208.

[2] 青木貴史,片岡清臣,山崎晋, 超函数・FBI 変換・無限階擬微分作用素,共立出版,2004.

[3] Kamimoto, S. and Kataoka, K., On the composition of kernel functions of pseudo-differential operators $\mathscr{E}^{\mathbf{R}}$ and the compatibility with Leibniz rule, in preparation.

[4] Kashiwara, M. and Kawai, T., Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 359–404.

[5] ———, On holonomic systems of microdifferential equations. III. Systems with regular singularities, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **17** (1981), 813–979.

[6] Kashiwara, M. and Schapira, P., Sheaves on Manifolds, *Grundlehren Math. Wiss.* **292**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1990.

[7] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Proceedings Katata 1971 (Komatsu, H., ed.), *Lecture Notes in Math.* **287**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1973, pp. 265–529.

[8] Schapira. P., Microdifferential Systems in the Complex Domain, *Grundlehren Math. Wiss.* **269**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1985.