数理解析研究所講究録
第 1728 巻 2011 年 67-71



# 数列空間 $c$ への有界関数族に対する単調拡張子の存在について

高崎経済大学・経済学部
(Faculty of Economics, Takasaki City University of Economics)
山﨑 薫里 (Kaori YAMAZAKI)

本稿では, 論文 [11] の背景の紹介と解説を行う.

## 1 歴史

以下, 線形位相空間はすべて, 実線形位相空間を表すものとする. $X$ を位相空間, $Y$ を線形位相空間とする. $C(X,Y)$ を $X$ から $Y$ への連続関数全体, $C_{\infty}(X,Y)$ を $X$ から $Y$ への有界連続関数全体とする. ここで, 関数 $f:X\to Y$ が有界であるとは, $f$ による $X$ の像 $f(X)$ が有界集合である (すなわち, $Y$ の原点の任意の近傍 $U$ に対し, 実数 $r$ を $f(X)\subset rU$ となるようにとれる) ことである. 特に, $C(X):=C(X,\mathbb{R})$, $C_{\infty}(X):=C_{\infty}(X,\mathbb{R})$ と決める.

$X$ を位相空間, $A$ をその部分空間, $Y$ を線形位相空間とする. 写像 $u:C(A,Y)\to C(X,Y)$ が拡張子 (= 拡張作用素, an extender) であるとは, 任意の $f\in C(A,Y)$ について $u(f)|A=f$ となることをいう. 拡張子 $u:C(A,Y)\to C(X,Y)$ は, 任意の $f\in C(A,Y)$ に対して $u(f)(X)\subset \mathrm{conv}f(A)$ となるとき, 凸拡張子 (= 凸包拡張作用素, a conv-extender) であると呼ばれる. ここで, $\mathrm{conv}f(A)$ は $f(A)$ の凸包を表す. また, 任意の $f\in C(A,Y)$ に対して $u(f)(X)\subset \overline{\mathrm{conv}}f(A)$ となるとき, $u$ は閉凸拡張子 (= 閉凸包拡張作用素, a $\overline{\mathrm{conv}}$-extender) であると呼ばれる. ここで, $\overline{\mathrm{conv}}f(A)$ は $f(A)$ の閉凸包を表す.

拡張子について, 次の 2 つの定理が基本となるものである.

**定理 1.1** (Borsuk の拡張定理, [3]). $X$ を距離空間, $A$ を $X$ の可分閉集合とする. このとき, $\|u\|=1$ となる線形拡張子 $u:C_{\infty}(A)\to C_{\infty}(X)$ が存在する.

**定理 1.2** (Dugundji の拡張定理, [5]). $X$ を距離空間, $A$ を $X$ の閉集合, $Y$ を局所凸線形位相空間とする. このとき, 線形凸拡張子 $u:C(A,Y)\to C(X,Y)$ が存在する.

凸拡張子は閉凸拡張子であり, 閉凸拡張子 $u:C_{\infty}(A)\to C_{\infty}(X)$ の作用素ノルム $\|u\|=1$ となる. Dugundji の定理は, Borsuk の拡張子を以下の 4 つの意味で進展させているといえる.

- 部分空間 $A$ の可分性の条件を必要としない.
- "凸包保存" に閉性の条件を要求しない.
- "有界連続関数族" から "連続関数族" へ対象を広げた.
- "実数値関数族" から "線形位相空間を値にとる関数族" に対象を広げた.

ここで, $X$ が GO-空間 (a generalized ordered space) であるとは, $X$ は全順序集合 $(X, \leq)$ と集合として一致し, $X$ の位相は $\leq$ による順序位相より細かく, 凸集合よりなる基をもつときをいう ([9]). 位相空間 $X$ とその部分空間 $A$ に対し, 集合として $X$ であり位相が $\{U \cup V : U$ は $X$ の開集合, $V \subset X \setminus A\}$ で与えられる位相空間を, $X_A$ で表す ([6]). $X = \mathbb{R}$ (実数直線), $A = \mathbb{Q}$ (有理数全体の集合) として構成された Michael 直線 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ はよく知られた GO-空間の例である.

**定理 1.3** (Heath-Lutzer, [8]). 任意の GO-空間 $X$ と, その閉集合 $A$ に対して, 線形閉凸拡張子 $u : C_\infty(A) \to C_\infty(X)$ が存在する.

定理 1.3 に関して, 次が知られている.

**注 1** 線形凸拡張子 $u : C_\infty(\mathbb{Q}) \to C_\infty(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})$ は存在しない (van Douwen, [4]). すなわち, 定理 1.3 において, 線形閉凸拡張子の "閉性" は本質的である.

**注 2** 線形閉凸拡張子 $u : C(\mathbb{Q}) \to C(\mathbb{R}_{\mathbb{Q}})$ は存在しない (Heath-Lutzer, [8]). すなわち, 定理 1.3 において, $C_\infty(A)$ の "有界性" は本質的である.

**注 3** ノルム空間 $Y$ について, 任意の GO-空間 $X$ とその任意の閉部分空間 $A$ が線形閉凸拡張子 $u : C_\infty(A, Y) \to C_\infty(X, Y)$ をもつための必要十分条件は, $Y$ は反射的であることである (Banakh-Banakh-Yamazaki [1]). すなわち, 定理 1.3 の "実数" 値関数族は, "反射的なバナッハ空間" ($l_p$, $1 < p < \infty$ など) を値にとる関数族に拡張できるが, "反射的でないバナッハ空間" ($c_0, c, l_1$ など) を値にとる関数族には拡張できない.

ここで, $c_0$ は 0 に収束する実数列からなる (スープノルムをもつ) 数列空間, $c$ は収束する実数列からなる (スープノルムをもつ) 数列空間を表わす. 注 1, 2, 3 は, 上述の Borsuk から Dugundji の定理への 4 つの進展の内の後 3 つに対応する. すなわち, 距離空間 $X$ よりも GO-空間 $X$ に対する拡張子は, その一般化の振る舞いが複雑であるといえる.

拡張子 $u : C(A) \to C(X)$ の単調性 (すなわち, "$f \leq g,\ f, g \in C(A) \Rightarrow u(f) \leq u(g)$" という性質) の研究が, これまでなされてきた ([4], [7], [10]). Borsuk から Dugundji の定理への一般化に見られるように, (順序の入った) 線形位相空間 $Y$ への単調拡張子 $u : C(A, Y) \to C(X, Y)$ に研究を進化させることは自然である. ここで, $Y$ を半順序 $\leq$ の入った位相空間, $A$ を $X$ の部分

空間とする. 拡張子 $u : C(A,Y) \to C(X,Y)$ が単調 (monotone) であるとは, $f \leq g$ となる任意の $f, g \in C(A,Y)$ について $u(f) \leq u(g)$ となることである.

半順序の入った線形位相空間 $(Y, \leq)$ が順序位相ベクトル空間 (an ordered topological vector space) であるとは, 以下の3条件を満たすときをいう.

(1) $x \leq y$, $x, y, z \in Y$ ならば, $x + z \leq y + z$
(2) $x \leq y$, $x, y \in Y$, $r \geqq 0$ ならば, $rx \leq ry$
(3) 正錐 $\{y \in Y : y \geq \mathbf{0}\}$ は閉集合

半順序の入った線形位相空間として, "順序位相ベクトル空間" を設定する利点は, "順序位相ベクトル空間 $Y$ について, 線形閉凸拡張子 $u : C(A,Y) \to C(X,Y)$ は単調拡張子である" という基本性質を導くことができることにある. 定理 1.3 の注 3 を考慮すると, 反射的でない順序位相ベクトル空間 $Y$ について, 次の問題を考えることは自然である.

**問 1.4.** $Y$ をノルム空間で反射的でない順序位相ベクトル空間とする. 任意の GO-空間 $X$ とその任意の閉集合 $A$ について, 単調拡張子 $u : C_\infty(A,Y) \to C_\infty(X,Y)$ が存在するか?

問 1.4 に関し, 典型的な反射的でないノルム空間 $Y = l_1$, $c_0$, $c$ について, 状況は以下のように異なるものであった. ここで, $Y = l_1$, $c_0$, $c$ には自然な半順序 "$x = (x_n)_{n\in\omega}$, $y = (y_n)_{n\in\omega} \in Y$ について, $x \leq y \Leftrightarrow x_n \leq y_n$ $(n \in \omega)$" が入っているものとする.

- $Y = l_1$ の場合, 問 1.4 は肯定的である ([1, Theorem 9.1]).
- $Y = c_0$ の場合, 問 1.4 は否定的である ([1, Corollary 6.3]).
- $Y = c$ の場合, 問 1.4 は未解決である. 実際, [1, Question 6.4] で "単調拡張子 $u : C_\infty(\mathbb{Q}, c) \to C(\mathbb{R}_\mathbb{Q}, c)$ が存在するか?" が問題として提出されていた.

本稿では, この最後の問題 ([1, Question 6.4]) が否定的であることを示す.

[1] の問題の背景等の日本語の文献としては, [2] がある.

## 2 結果

拡張定理を, GO-空間 $X$ のみでなく広い空間のクラスに応用するために, 以下のような形で主定理を与える. $A \subset X$ について, $C_A(X,Y)$ は, $A$ の任意の点において $X$ で連続であるような関数 $f : X \to Y$ 全体を表す.

**定理 2.1** (主定理). $X$を位相空間, $A$をその Tychonoff な部分空間, $Y$を半順序の入った位相空間, $Y_0 \subset Y$とする. もし, 単調拡張子$u: C(A, Y_0) \to C_A(X, Y)$が存在するならば, $A$が$X$において強 Choquet であるか, または, $Y_0$は$Y$において概$\omega$-減少交叉性をもつ.

$A$が$X$において強 Choquet であることの定義 ([1]) を与える. $X$を位相空間, $A$をその部分空間とする. 2人のプレーヤー I と II によって, 次のようなゲームが行われる.

0-1. プレーヤー I は, $a_0 \in A$となる$a_0$と, $a_0$の$X$における近傍$U_0$を選ぶ.
0-2. これに応じて, プレーヤー II は, $V_0 \subset U_0$となるような$a_0$の$X$における近傍$V_0$を選ぶ.
($n$回のイニングにおいて)

$n$-1. プレーヤー I は, $a_n \in V_{n-1} \cap A$となるような$a_n$と, $U_n \subset V_{n-1}$となるような$a_n$の$X$における近傍$U_n$を選ぶ.
$n$-2. プレーヤー II は, $V_n \subset U_n$となるような$a_n$の$X$における近傍$V_n$を選ぶ.
(このようにプレーを続ける.)

$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} U_n \subset X \setminus A$となるとき, プレーヤー I がゲーム$G_r(A, X)$の勝者 (a winner) であり, そうでないときにはプレーヤー II が勝者であると決める. $A$が$X$において強 Choquet (strong Choquet in $X$) であるとは, プレーヤー II がゲーム$G_r(A, X)$における必勝法をもつときをいう.

次に, $Y_0$は$Y$において概$\omega$-減少交叉性をもつことの定義 ([11]) を与える. $Y$を半順序の入った位相空間とする. 連続関数$\gamma: [0, \infty) \to Y$は, 任意の$n \in \omega$と任意の$t \geq n$, $t \in [0, \infty)$について$\gamma(n) \leq \gamma(t)$であるとき, $\omega$-増加半直線 (an *$\omega$-increasing ray*) といわれる ([1]). 同様に, 連続関数$\gamma: [0, \infty) \to Y$は, 任意の$n \in \omega$と任意の$t \geq n$, $t \in [0, \infty)$について$\gamma(n) \geq \gamma(t)$であるとき, $\omega$-減少半直線 (an *$\omega$-decreasing ray*) といわれる ([11]). $Y_0 \subset Y$について, 任意の$\omega$-増加半直線$\gamma_1 : [0, \infty) \to Y_0$, 任意の$\omega$-減少半直線$\gamma_2 : [0, \infty) \to Y_0$で$\gamma_1(r_1) \leq \gamma_2(r_2), r_1, r_2 \in [0, \infty)$となるものと, $Y$の任意の$G_\delta$-sets $\{G_n^i\}_{n\in\omega}^{i=1,2}$で$\gamma_i(n) \in G_n^i$, $n \in \omega, i = 1, 2$となるものに対し, $\bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{b_1 \in G_n^1, b_2 \in G_n^2} \{y \in Y : b_1 \leq y \leq b_2\} \neq \emptyset$が成り立つとき, $Y_0$は$Y$において概$\omega$-減少交叉性 (*almost $\omega$-decreasing intersection property*) をもつという ([11]).

$\mathbf{0} = (0, 0, 0, \cdots)$, $\mathbf{1} = (1, 1, 1, \cdots) \in c$とおく. $Y_0 := \{y \in c : \mathbf{0} \leq y \leq \mathbf{1}\}$は$c$において概$\omega$-減少交叉性をもたない ([11]). よって, $C(A, Y_0) \subset C_\infty(A, c)$に注意すると, 定理 2.1 より次が得られる.

**系 2.2.** $X$ を位相空間, $A$ を Tychonoff な部分空間とする. もし単調拡張子 $u : C_\infty(A, c) \to C_A(X, c)$ が存在するならば, $A$ は $X$ において強 Choquet である.

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において強 Choquet でない ([10], [1]). また, $\mathbb{R}_\mathbb{Q}$ の位相の入れ方より, $C_\mathbb{Q}(\mathbb{R}, c) = C(\mathbb{R}_\mathbb{Q}, c)$ である. よって, [1, Question 6.4] の否定解を与える以下の結果が得られる.

**系 2.3.** 単調拡張子 $u : C_\infty(\mathbb{Q}, c) \to C(\mathbb{R}_\mathbb{Q}, c)$ は存在しない.

# References

[1] I. Banakh, T. Banakh and K. Yamazaki, *Extenders for vector-valued functions*, Studia Math. 191 (2009), 123–150.

[2] I. Banakh, T. Banakh and K. Yamazaki, 線形拡張子を用いた反射的バナッハ空間の特徴づけ, 一般・幾何学的トポロジーの研究動向と諸問題, 京都大学数理解析研究所講究録, 1634 (2009), 35-40.

[3] K. Borsuk, *Über Isomorphie der Funktionalräume*, Bull. Internat. Acad. Polon. Ser. A (1933), 1-10.

[4] E. K. van Douwen, *Simultaneous extension of continuous functions*, Ph. D. Thesis, Free Univ. of Amsterdam, 1975.

[5] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), 353–367.

[6] R. Engelking, General Topology, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[7] G. Gruenhage, Y. Hattori and H. Ohta, *Dugundji extenders and retracts on generalized ordered spaces*, Fund. Math. 158 (1998), 147–164.

[8] R. W. Heath and D. J. Lutzer, *Dugundji extension theorems for linearly ordered spaces*, Pacific J. Math. 55 (1974), 419–425.

[9] D. J. Lutzer, *On generalized ordered spaces*, Dissertation Math. 89 (1977).

[10] I. S. Stares and J. E. Vaughan, *The Dugundji extension property can fail in $\omega_\mu$-metrizable spaces*, Fund. Math. 150 (1996), 11-16.

[11] K. Yamazaki, Monotone extenders for bounded $c$-valued functions, Studia Mathematica, 199 (2010), 17-22.