数理解析研究所講究録
第 1728 巻 2011 年 32-39

曲面上の組み紐群が作用する複体の自己同型について

山形 紗恵子 (Saeko Yamagata)*
明石工業高等専門学校
Akashi National College of Technology

1 序

与えられた群に対して, その自己同型群を求めることは基本的な問題であるが, 一般的には容易ではない. 曲面の写像類群に対しては, Ivanov [9], Korkmaz [15], Luo [16] が, カーブ複体と呼ばれる単体複体への写像類群の作用を用いることにより, 写像類群の有限指数部分群の間の同型写像が写像類群の元による共役で表せるという結果を導いている. 本稿では, まず Ivanov [9], Korkmaz [15], Luo [16] の結果について述べる. 次に京都大学の木田良才氏との共同研究で得られた, 写像類群の正規部分群である閉曲面上の組み紐群の有限指数部分群の間の同型写像が, 写像類群の元による共役で表せるという結果 [13] と, 閉曲面上の組み紐群の有限指数部分群は co-Hopfian であるという結果 [14] を紹介する.

2 カーブ複体と写像類群の自己同型

この節では, [13] の背景である, Ivanov [9], Korkmaz [15], Luo [16] によるカーブ複体の自己同型群と, 曲面の写像類群の有限指数部分群の間の同型写像についての結果について述べる. 曲面の写像類群についてより詳しくは, [3], [4], [10] を参照されたい.

*E-mail address: yamagata@akashi.ac.jp

特に断らない限り, $S = S_{g,p}$ をコンパクトで向き付け可能である, 連結な曲面とし, g を種数, p を境界成分の個数とする. 曲面 S の**写像類群** $\mathrm{Mod}^*(S)$ とは S からそれ自身への同相写像のイソトピー類からなる群とする. ただし, この同相写像は向きを保たなくてもよく, また, このイソトピーは S の境界の点を動かしてもよいとする. 曲面 S に対し, 写像類群 $\mathrm{Mod}^*(S)$ の部分群であり, S からそれ自身への向きを保つ同相写像のイソトピー類からなる群を $\mathrm{Mod}(S)$ と書くことにする. これは $\mathrm{Mod}^*(S)$ の指数 2 の部分群である. 境界をその連結成分ごとに固定する, S からそれ自身への向きを保つ同相写像のイソトピー類からなる $\mathrm{Mod}(S)$ の部分群を $\mathrm{PMod}(S)$ と書く.

曲面 S 上の単純閉曲線が**本質的である**とは, S の 1 点にホモトピックではなく, かつ, S の境界成分にイソトピックではないときをいう. 以下では簡単のため, 本質的な単純閉曲線を単に曲線と呼ぶことにする.

さて, Harvey [5] が定義した単体複体であるカーブ複体の定義を述べる. まず, $V(S)$ を S 上の曲線のイソトピー類全体からなる集合とする. さらに, $\Sigma(S)$ を, $V(S)$ の空でない部分集合の族であって, 任意の $\sigma \in \Sigma(S)$ は σ に含まれるイソトピー類を全部とったとき, それらの代表元として, 同時に交叉しない曲線がとれるものとする. 頂点集合を $V(S)$, 単体集合を $\Sigma(S)$ とした単体複体を**カーブ複体**と呼び, $\mathcal{C}(S)$ と書く. 曲面 $S = S_{g,p}$ のカーブ複体 $\mathcal{C}(S)$ の次元は $3g+p-4$ である. カーブ複体 $\mathcal{C}(S)$ の次元 $3g+p-4$ が正のとき, $\mathcal{C}(S)$ はグロモフの意味で双曲的であることが証明されている ([17]).

曲面 S の同相写像は S 上の曲線をまた S 上の曲線にうつすので, 写像類群 $\mathrm{Mod}^*(S)$ は $V(S)$ に自然に作用する. さらに曲面 S の同相写像は交叉しない S 上の 2 つの曲線を, また交叉しない S 上の 2 つの曲線にうつすので, $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元 γ によって交叉しない代表元を持つ任意の $a, b \in V(S)$ をうつすと, 再び交叉しない代表元を持つ $\gamma(a), \gamma(b) \in V(S)$ にうつる. このことにより $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元は $\mathcal{C}(S)$ の単体をまた $\mathcal{C}(S)$ の単体にうつすことが分かるので, $\mathrm{Mod}^*(S)$ は $\mathcal{C}(S)$ に自然に作用する. 従って, $\mathrm{Mod}^*(S)$ から $\mathcal{C}(S)$ の自己同型群への自然な準同型 $\pi\colon \mathrm{Mod}^*(S) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}(S))$ が存在する. この準同型 π について次のことが示されている.

定理 2.1 ([9], [15], [16]). 曲面 $S = S_{g,p}$ において, $3g+p-4>0$ とする. このとき, 自然な準同型 $\pi\colon \mathrm{Mod}^*(S) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}(S))$ について次のことが成り立つ.

(i) $(g,p) \neq (1,2), (2,0)$ のとき, π は同型写像である.

(ii) $(g,p)=(1,2)$ のとき, π の核は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の中心であり, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型である. また, π の像は $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}(S))$ の指数 5 の部分群である.

(iii) $(g,p)=(2,0)$ のとき, π の核は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の中心であり, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型である. また, π は全射である.

さらに, 定理 2.1 と, Nielsen と Thurston の $\mathrm{Mod}(S)$ の元の分類理論などを用いて, 次が成り立つことが示されている.

定理 2.2 ([9], [15]). 曲面 $S=S_{g,p}$ は $3g+p-4>0$ と $(g,p)\neq(1,2),(2,0)$ を満たすとする. また, G_1 と G_2 を $\mathrm{Mod}^*(S)$ の有限指数部分群, $f\colon G_1\to G_2$ を同型写像とする. このとき, $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元 γ であって, 任意の $x\in G_1$ に対し, $f(x)=\gamma x\gamma^{-1}$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

3 閉曲面上の組み紐群の自己同型

この節では閉曲面上の組み紐群に付随する単体複体の構成法と, 閉曲面上の組み紐群の有限指数部分群の間の同型写像についての結果 [13] について述べる.

曲面 S の各境界にそって円板を貼り付けて得られる閉曲面を $\bar{S}$ と書くことにする. このとき, 自然な全射準同型 $\iota\colon \mathrm{PMod}(S)\to\mathrm{Mod}(\bar{S})$ が存在する. この全射準同型 ι の核を $B(S)$ と書き, $B(S)$ を**閉曲面 $\bar{S}$ 上の組み紐群**と呼ぶ. 閉曲面 $\bar{S}$ 上の組み紐群 $B(S)$ は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の自然な正規部分群である. さらに, $g\geq 2$ のとき, 閉曲面 $S_{g,0}$ 上の順序づけられた p 個の異なる点の配置空間を X とおくとき, $B(S)$ は X の基本群と同型であることが知られている. (これが $B(S)$ を閉曲面 $\bar{S}$ 上の組み紐群と呼ぶ理由である.)

次に, 閉曲面 $\bar{S}$ 上の組み紐群 $B(S)$ の生成元集合について述べる. 曲面 S 上の曲線 α が**分離的である**とは, $S\setminus\alpha$ が非連結であるときをいう. 曲面 S 上の曲線 α が**非分離的である**とは, $S\setminus\alpha$ が連結であるときをいう. 曲面 S 上の曲線 α が分離的曲線であって, $S\setminus\alpha$ の連結成分の 1 つが, 穴が 2 つ以上あいている円板であるとき, α は **HBC** (hole-bounding curve) であるという. 曲面 S 上の HBC ではない曲線の組 $\{\alpha,\beta\}$ が **HBP** (hole-bounding pair) であるとは,

- α と β は互いに交叉せず, かつイソトピックではない,

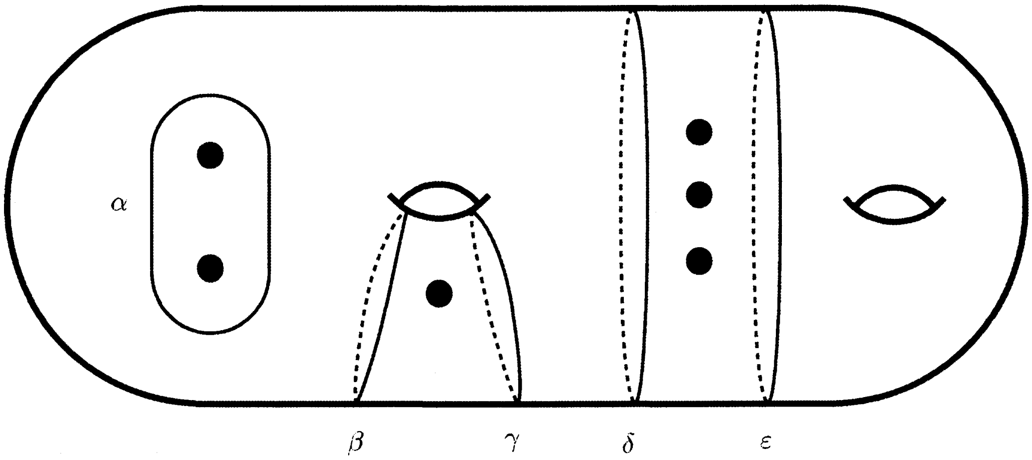

図 1: α は HBC, $\{\beta, \gamma\}$ と $\{\delta, \varepsilon\}$ は HBP.

- α と β は両方とも分離的であるか, または両方とも非分離的であるかのどちらかである,
- $S \setminus (\alpha \cup \beta)$ は非連結で, 種数 0 の連結成分を持つ,

という 3 つの条件を満たすときをいう (図 1).

曲面 S 上の曲線 α に対し, α についての (左) Dehn ひねりを t_α と書くことにする. 曲線 α についての Dehn ひねり t_α は S からそれ自身への同相写像である. また, 曲線のイソトピー類 a に対し, a の任意の代表元 α についての Dehn ひねりを a についての Dehn ひねりと呼び, t_a と書くことにする. Dehn ひねり t_a を写像類群の元とみたとき, t_a は, a の代表元 α の選び方によらず一意に決まる. すなわち, α とは異なる a の代表元 β を取ったとき, t_α と t_β はイソトピックであるから写像類群の元としては同じものである.

曲面 S 上の HBC のイソトピー類全体を $V_c(S)$, HBP のイソトピー類全体を $V_p(S)$ と表すことにする. Birman の完全列より, 閉曲面 $\bar{S}$ 上の組み紐群 $B(S)$ は $a \in V_c(S)$ についての Dehn ひねり t_a 全体と $\{b, c\} \in V_p(S)$ に対する $t_b t_c^{-1}$ という形の元全体で生成される $\mathrm{Mod}^*(S)$ の正規部分群であることが知られている ([3, Section 4.1]).

最後に, $B(S)$ に付随する単体複体 $\mathcal{B}(S)$ を定義する. 頂点集合を $V_c(S) \sqcup V_p(S)$ とする. 任意の単体 σ は $V_c(S) \sqcup V_p(S)$ の空でない部分集合であって, σ に含まれるイソトピー類を全部とると, それらの代表元として同時に交叉しない曲線がとれるものとする. このようにして定義した単体複

体を $\mathcal{B}(S)$ と書く. 写像類群 $\mathrm{Mod}^*(S)$ の作用によって $V_c(S)$ は $V_c(S)$ にうつり, $V_p(S)$ は $V_p(S)$ にうつる. さらに, $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元 γ によって, 交叉しない代表元を持つ $a, b \in V_c(S) \sqcup V_p(S)$ はまた, 交叉しない代表元を持つ $\gamma(a), \gamma(b) \in V_c(S) \sqcup V_p(S)$ にうつるので, $\mathrm{Mod}^*(S)$ は $\mathcal{B}(S)$ に自然に作用する. 従って, $\mathrm{Mod}^*(S)$ から $\mathcal{B}(S)$ の自己同型群への自然な準同型 π が存在する. この準同型 π について次のことが成り立つことを示した.

定理 3.1 ([13]). 曲面 S は g, p ともに 2 以上とする. このとき自然な準同型 $\pi\colon \mathrm{Mod}^*(S) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{B}(S))$ は同型写像である.

また, 定理 3.1 と, Nielsen と Thurston の $\mathrm{Mod}(S)$ の元の分類理論などを用い, 次の結果を得ている.

定理 3.2 ([13]). 曲面 S は g, p ともに 2 以上とする. G_1 と G_2 を $B(S)$ の有限指数部分群とし, $f\colon G_1 \to G_2$ を同型写像とする. このとき, 任意の $x \in G_1$ に対し, $f(x) = \gamma x \gamma^{-1}$ を満たす $\gamma \in \mathrm{Mod}^*(S)$ がただ 1 つ存在する.

注意 3.3. 種数 g が 2 より小さい, または境界成分の個数 p が 2 より小さいときの $B(S)$ について述べる.

- $p = 0$ のとき, $B(S)$ は自明な群である.
- $g \geq 2$ かつ $p = 1$ のとき, $B(S)$ は $\pi_1(\bar{S})$ に同型である.
- $g = 0$ のとき, $B(S) = \mathrm{PMod}(S)$ である.
- $g = 1$ のとき, $B(S)$ は S の Torelli 群に等しい.

注意 3.4. 種数 g が 2 以上, かつ境界成分の個数 p が 1 のとき, $B(S)$ の有限指数部分群の間の同型写像で $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元による共役で表せないものがある. 種数 g が 0 または 1 のときの $B(S)$ の有限指数部分群の間の同型写像については, それぞれ [15] と [11] を参照されたい.

4 単体複体 $\mathcal{B}(S)$ 上の超単射写像

この節では, 閉曲面上の組み紐群の任意の有限指数部分群が co-Hopfian であるという結果 [14] について述べる. 群 G からそれ自身への任意の単射準同型が全射であるとき, G は **co-Hopfian である**という.

まず, [14] の背景となった, 写像類群 $\mathrm{Mod}^*(S)$ の任意の有限指数部分群が co-Hopfian であるという結果を紹介する. カーブ複体 $\mathcal{C}(S)$ または, 単体複体 $\mathcal{B}(S)$ をまとめて X と書くことにする. また, $V(X)$ を X の頂点集合とする. 単体複体 X からそれ自身への単体写像を ϕ とする. 単体写像の定義より, 互いに交叉しない代表元を持つ任意の 2 つの頂点 $a, b \in V(X)$ を取ると, $\phi(a), \phi(b) \in V(X)$ も互いに交叉しない代表元を持つ. 任意の代表元は交叉するという, 任意の 2 つの頂点 $a, b \in V(X)$ に対し, $\phi(a), \phi(b) \in V(X)$ も任意の代表元が交叉するとき, 単体写像 ϕ を**超単射写像**と呼ぶ. 超単射写像が単射であることは容易に分かる.

カーブ複体 $\mathcal{C}(S)$ からそれ自身への任意の超単射写像が全射であることは, [1], [2], [6], [7], [8] で証明されている. このことと定理 2.1 より, $3g+p-4>0$ かつ $(g,p) \neq (1,2),(2,0)$ のとき, $\mathcal{C}(S)$ からそれ自身への任意の超単射写像は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元から導かれるものであることが分かる. 以上のことを使うと, さらに次のことも分かる.

定理 4.1 ([1], [2], [6], [7], [8]). 曲面 $S = S_{g,p}$ は $3g+p-4>0$ かつ $(g,p) \neq (1,2),(2,0)$ を満たすとする. さらに, G は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の有限指数部分群で, $f\colon G \to \mathrm{Mod}^*(S)$ を単射準同型とする. このとき, 任意の $x \in G$ に対し, $f(x) = \gamma x \gamma^{-1}$ を満たすただ 1 つの $\gamma \in \mathrm{Mod}^*(S)$ が存在する. 特に, G は co-Hopfian である.

注意 4.2. 曲面 S が $S = S_{1,2}$ または $S = S_{2,0}$ のときも $\mathrm{Mod}^*(S)$ の任意の有限指数部分群は co-Hopfian である ([1, Theorem 5]).

単体複体 $\mathcal{B}(S)$ からそれ自身への超単射写像に関してもカーブ複体の場合と同様の結果を得ている.

定理 4.3 ([14]). 曲面 S は種数, 境界成分の個数ともに 2 以上とする. このとき, $\mathcal{B}(S)$ からそれ自身への任意の超単射写像は全射である. すなわち, $\mathcal{B}(S)$ からそれ自身への同型写像である.

定理 3.1 と定理 4.3 より, 定理 4.3 の主張における超単射写像は, $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元から導かれるものであることが分かる.

また, 定理 4.3 と [13, Theorem 7.11 (i)] を組み合わせることにより, $B(S)$ の任意の有限指数部分群が co-Hopfian であることが分かる.

定理 4.4 ([14]). 曲面 S は種数, 境界成分の個数ともに 2 以上とする. また, G を $B(S)$ の有限指数部分群とし, $f\colon G \to B(S)$ を単射準同型とする. このとき 任意の $x \in G$ に対して, $f(x) = \gamma x \gamma^{-1}$ を満たすただ 1 つの $\gamma \in \mathrm{Mod}^*(S)$ が存在する. 特に, G は co-Hopfian である.

注意 4.5. 曲面 $S = S_{g,p}$ が $g = 0$ かつ $p \geq 5$, または $g = 1$ かつ $p \geq 3$ を満たすときも, $B(S)$ の任意の有限指数部分群は co-Hopfian である ([2], [12]).

参考文献

[1] J. Behrstock and D. Margalit, Curve complexes and finite index subgroups of mapping class groups, *Geom. Dedicata* **118** (2006), 71–85.

[2] R. W. Bell and D. Margalit, Injections of Artin groups, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007), 725–751.

[3] J. S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Ann. of Math. Stud., 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1974.

[4] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru et al., *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Séminaire Orsay, Astérisque, 66–67. Soc. Math. France, Paris, 1979.

[5] W. J. Harvey, Boundary structure of the modular group, in *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, 245–251, Ann. of Math. Stud., 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.

[6] E. Irmak, Superinjective simplicial maps of complexes of curves and injective homomorphisms of subgroups of mapping class groups, *Topology* **43** (2004), 513–541.

[7] E. Irmak, Superinjective simplicial maps of complexes of curves and injective homomorphisms of subgroups of mapping class groups II, *Topology Appl.* **153** (2006), 1309–1340.

[8] E. Irmak, Complexes of nonseparating curves and mapping class groups, *Michigan Math. J.* **54** (2006), 81–110.

[9] N. V. Ivanov, Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces, *Int. Math. Res. Not.* **1997**, no. 14, 651–666.

[10] N. V. Ivanov, Mapping class groups, in *Handbook of geometric topology*, 523–633, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[11] Y. Kida, Automorphisms of the Torelli complex and the complex of separating curves, to appear in *J. Math. Soc. Japan.*

[12] Y. Kida, The co-Hopfian property of the Johnson kernel and the Torelli group, preprint, arXiv:0911.3923.

[13] Y. Kida and S. Yamagata, Commensurators of surface braid groups, preprint, arXiv:1004.2946.

[14] Y. Kida and S. Yamagata, The co-Hopfian property of surface braid groups, preprint, arXiv:1006.2599.

[15] M. Korkmaz, Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori, *Topology Appl.* **95** (1999), 85–111.

[16] F. Luo, Automorphisms of the complex of curves, *Topology* **39** (2000), 283–298.

[17] H. A. Masur and Y. N. Minsky, Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity, *Invent. Math.* **138** (1999), 103–149.