数理解析研究所講究録
第 1728 巻 2011 年 27-31

On equivariant homeomorphisms of boundaries of CAT(0) groups

宇都宮大学教育学部

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

本稿では, CAT(0) 群 G が幾何学的に (proper [8, p.131], ココンパクト, 等長的に) 作用する 2 つの CAT(0) 空間 X, Y の境界 ∂X, ∂Y が G-equivariant 同相となるための十分条件を紹介する.

CAT(0) 空間の定義と詳細は [8] [20] に見られる. CAT(0) 群とは, ある CAT(0) 空間に幾何学的に作用する群のことである.

歴史的には, まず Gromov hyperbolic group G が幾何学的に作用する測地線空間 X, Y の境界 ∂X, ∂Y は, quasi-isometry である自然な写像 $Gx_0 \to Gy_0$ ($gx_0 \mapsto gy_0$) の連続的な拡張として境界上の G-equivariant 同相 $\partial X \to \partial Y$ を導くことがよく知られている. 実際, Gromov hyperbolic group G の境界は quasi-isometric invariant である (cf. [8], [11], [20], [21], [22]).

ここで, Gromov [22] により, 「CAT(0) 群 G が幾何学的に作用する 2 つの CAT(0) 空間 X, Y の境界 ∂X, ∂Y は G-equivariant 同相となるか?」という質問が提起された.

まず, P. L. Bowers - K. Ruane [7] によって, ある単純な CAT(0) 群 G と CAT(0) 空間 X, Y の例を用いて, 自然な quasi-isometry $Gx_0 \to Gy_0$ ($gx_0 \mapsto gy_0$) の連続的な拡張として, それらの境界の連続写像 $\partial X \to \partial Y$ を導くことができない例が構成されている. (この Bowers-Ruane と類似の例は, S. Yamagata [39] によって, right-angled Coxeter 群と Davis complex を用いても構成されている.)

また, C. Croke - B. Kleiner [12] によって, ある CAT(0) 群で, それが幾何学的に作用する CAT(0) 空間の境界の位相が決定されない例が構成され, 更に J. Wilson [38] により, その Croke-Kleiner の与えた CAT(0) 群は非可算無限の種類の位相の境界を持つことを示した. 最近, C. Mooney [33] によっても非可算無限の境界を持つ CAT(0) 群の例が knot 群によって構成されている.

また, 一方で M. Bestvina [5] により, 与えられた CAT(0) 群のすべての境界が shape 同値となることが考察されており, 与えられた CAT(0) 群のすべての境界が cell-like 同値となるかは Bestvina により未解決問題として提出されている. この問題の部分的な解決が [2], [34] にみられる.

CAT(0) 群 G が幾何学的に作用する 2 つの CAT(0) 空間 X, Y の境界 ∂X, ∂Y が G-equivariant 同相となるための十分条件の紹介の前に, 上述の Bowers-Ruane の例を紹介する.

Bowers-Ruane Example. $G = F_2 \times \mathbb{Z}$, $X = Y = T \times \mathbb{R}$ とおく. ただし, F_2 は $\{a, b\}$ によって生成される rank 2 の free group とし, T を生成集合 $\{a, b\}$ に関する F_2 の Cayley graph とする.

まず, 群 G の CAT(0) 空間 X への作用 "$\cdot$" を以下で定義する:

$$(a, 0) \cdot (t, r) = (a \cdot t, r),$$
$$(b, 0) \cdot (t, r) = (b \cdot t, r),$$
$$(1, 1) \cdot (t, r) = (t, r + 1),$$

ここで $(t, r) \in T \times \mathbb{R} = X$. 群 G は $\{(a, 0), (b, 0), (1, 1)\}$ によって生成されていることに注意する.

また, 群 G の CAT(0) 空間 Y への作用 "$*$" を以下で定義する:

$$(a, 0) * (t, r) = (a \cdot t, r),$$
$$(b, 0) * (t, r) = (b \cdot t, r + 2),$$
$$(1, 1) * (t, r) = (t, r + 1),$$

ここで $(t, r) \in T \times \mathbb{R} = Y$.

いま, 群 G は 2 つの CAT(0) 空間 X, Y に幾何学的に作用する. 一方で, quasi-isometry $g \cdot x_0 \mapsto g * y_0$ (ここで $x_0 = (1, 0) \in X$, $y_0 = (1, 0) \in Y$) は ∂X から ∂Y へ連続的に写像が拡張できないことを示す.

まず, $g_i = a^i b^i \in F_2$ について, ∂T において $\{g_i^\infty \mid i \in \mathbb{N}\} \to a^\infty$ $(i \to \infty)$ が成り立つ.

また, $X \cup \partial X$ において

$$\lim_{n \to \infty} (g_i^n, 0) \cdot x_0 = [g_i^\infty, 0]$$
$$\lim_{n \to \infty} (a^n, 0) \cdot x_0 = [a^\infty, 0]$$

が成り立つ.

一方で, $Y \cup \partial Y$ において

$$\lim_{n\to\infty}(g_i^n,0)*y_0=[g_i^\infty,\frac{\pi}{4}]$$
$$\lim_{n\to\infty}(a^n,0)*y_0=[a^\infty,0]$$

が成り立つ.

従って, もし quasi-isometry $\phi : G\cdot x_0 \to G*y_0$ $(g\cdot x_0 \to g*y_0)$ が境界上に連続的に写像 $\bar{\phi} : \partial X \to \partial Y$ に拡張したと仮定すると,

$$\bar{\phi}([g_i^\infty,0])=[g_i^\infty,\frac{\pi}{4}]$$
$$\bar{\phi}([a^\infty,0])=[a^\infty,0]$$

が成り立つはずである.

しかし, これは,

$$[g_i^\infty,0]\to[a^\infty,0]\quad(i\to\infty)$$

より, 点 $[a^\infty,0]$ において写像 $\bar{\phi}$ を連続的に定義することができない ([7, p.187]).

ここで, 上の例において, 次のことに着目する.

(a) $d_X(a^i\cdot x_0,[x_0,g^i\cdot x_0])=0$ for any $i\in\mathbb{N}$ in X and

(b) there does *not* exist a constant $M>0$ such that $d_Y(a^i*y_0,[y_0,g^i*y_0])\le M$ for any $i\in\mathbb{N}$ in Y.

この考察により, 群 G が 2 つの CAT(0) 空間 X, Y に幾何学的に作用するときの条件 $(*)$ を以下で定義する (ただし $x_0\in X$, $y_0\in Y$).

$(*)$ ある 2 つの constant $N>0$, $M>0$ が存在して, $GB(x_0,N)=X$, $GB(y_0,M)=Y$ が成立し, 任意の $g,a\in G$ に対して $[x_0,gx_0]\cap B(ax_0,N)\neq\emptyset$ in X ならば $[y_0,gy_0]\cap B(ay_0,M)\neq\emptyset$ in Y が成立する.

ここで, 次の定理を得た.

Main Theorem. 群 G が *2*つの *CAT(0)*空間 X, Y に幾何学的に作用し, $x_0\in X$, $y_0\in Y$ とする. このとき, 条件 $(*)$ が成立するならば, *quasi-isometry* $\phi : Gx_0\to Gy_0$ $(\phi(gx_0)=gy_0)$ は境界上の *G-equivariant* 同相写像 $\bar{\phi} : \partial X\to\partial Y$ に連続的に拡張する.

この定理の証明の議論および上述の条件 $(*)$ は, 以下の問題に応用できる可能性がある.

(1) CAT(0) 群の境界の (equivariant) rigidity に関する問題;

(2) Coxeter 群の境界の (equivariant) rigidity に関する問題;

(3) Coxeter 群の Davis 複体の境界の (equivariant) rigidity に関する問題;

(4) Coxeter 群が鏡映群として作用する CAT(0) 空間の境界の (equivariant) rigidity に関する問題;

(5) right-angled Coxeter 群が鏡映群として作用する CAT(0) 空間の境界の (equivariant) rigidity に関する問題;

(6) CAT(0) 群が幾何学的に作用する CAT(0) cube 複体の境界の (equivariant) rigidity に関する問題;

etc.

References

[1] A. D. Alexandrov, V. N. Berestovskii and I. G. Nikolaev, *Generalized Riemannian spaces*, Russ. Math. Surveys 41 (1986), 1–54.

[2] F. D. Ancel, C. Guilbault, and J. Wilson, *The Croke-Kleiner boundaries are cell-like equivalent*, preprint.

[3] W. Ballmann and M. Brin, *Orbihedra of nonpositive curvature*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 82 (1995), 169–209.

[4] W. Ballmann, M. Gromov and V. Schroeder, *Manifolds of Nonpositive Curvature*, Progr. Math. vol. 61, Birkhäuser, Boston MA, 1985.

[5] M. Bestvina, *Local homology properties of boundaries of groups*, Michigan Math. J. 43 (1996), 123–139.

[6] N. Bourbaki, *Groupes et Algebrès de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.

[7] P. Bowers and K. Ruane, *Boundaries of nonpositively curved groups of the form $G \times \mathbb{Z}^n$*, Glasgow Math. J. 38 (1996), 177–189.

[8] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1980.

[10] P. Caprace and K. Fujiwara, *Rank-one isometries of buildings and quasi-morphisms of Kac-Moody groups*, arXiv:0809.0470v3, preprint.

[11] M. Coornaert and A. Papadopoulos, *Symbolic dynamics and hyperbolic groups*, Lecture Notes in Math1539, Springer-Verlag, 1993.

[12] C. B. Croke and B. Kleiner, *Spaces with nonpositive curvature and their ideal boundaries*, Topology 39 (2000), 549–556.

[13] C. B. Croke and B. Kleiner, *The geodesic flow of a nonpositively curved graph manifold*, Geom. Funct. Anal. 12 (2002), 479–545.

[14] M. W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. 117 (1983), 293–324.

[15] M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of geometric topology (Edited by R. J. Daverman and R. B. Sher), pp. 373–422, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[16] A. N. Dranishnikov, *On boundaries of hyperbolic Coxeter groups*, Topology Appl. 110 (2001), 29–38.

[17] A. N. Dranishnikov, *Boundaries of Coxeter groups and simplicial complexes with given links*, J. Pure Appl. Algebra 137 (1999), 139–151.

[18] H. Fischer, *Boundaries of right-angled Coxeter groups with manifold nerves*, Topology 42 (2003), 423–446.
[19] R. Geoghegan and P. Ontaneda, *Boundaries of cocompact proper CAT(0) spaces*, Topology 46 (2007), 129–137.
[20] E. Ghys and P. de la Harpe (ed), *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progr. Math. vol. 83, Birkhäuser, Boston MA, 1990.
[21] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (Edited by S. M. Gersten), pp. 75–263, M.S.R.I. Publ. 8, 1987.
[22] M. Gromov, *Asymptotic invariants for infinite groups*, Geometric Group Theory (G.A. Niblo and M.A. Roller, eds.), LMS Lecture Notes, vol. 182, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295.
[23] U. Hamenstädt, *Rank-one isometries of proper CAT(0)-spaces*, arXiv:0810.3794v1, preprint.
[24] T. Hosaka, *The interior of the limit set of groups*, Houston J. Math. 30 (2004), 705–721.
[25] T. Hosaka, *Reflection groups of geodesic spaces and Coxeter groups*, Topology Appl. 153 (2006), 1860–1866.
[26] T. Hosaka, *On splitting theorems for CAT(0) spaces and compact geodesic spaces of non-positive curvature*, arXiv:math.GR/0405551v1, preprint.
[27] T. Hosaka, *Parabolic subgroups of Coxeter groups acting by reflections on CAT(0) spaces*, arXiv:math/0409472v1, preprint.
[28] T. Hosaka, *On boundaries of Coxeter groups and topological fractal structures*, arXiv:0912.0061v2, preprint.
[29] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.
[30] M. Mihalik and K. Ruane, *CAT(0) groups with non-locally connected boundary*, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), 757–770.
[31] M. Mihalik, K. Ruane and S. Tschantz, *Local connectivity of right-angled Coxeter group boundaries*, J. Group Theory 10 (2007), 531–560.
[32] N. Monod, *Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting*, J. Amer. Math. Soc. 19 (2006), 781–814.
[33] C. Mooney, *Examples of non-rigid CAT(0) groups from the category of knot groups*, arXiv:0706.1581v2, preprint.
[34] C. Mooney, *All CAT(0) boundaries of a group of the form $H \times K$ are CE equivalent*, arXiv:0707.4316, preprint.
[35] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, Ohio State University, 1988.
[36] P. Papasoglu and E. L. Swenson, *Boundaries and JSJ decompositions of CAT(0)-groups*, Geom. Funct. Analy. 19 (2009), 558–590.
[37] E. L. Swenson, *A cut point theorem for CAT(0) groups*, J. Differential Geom. 53 (1999), 327–358.
[38] J. M. Wilson, *A CAT(0) group with uncountably many distinct boundaries*, J. Group Theory 8 (2005), 229–238.
[39] S. Yamagata, *On ideal boundaries of some Coxeter groups*, Advanced Studies Pure Math. 55 (2009), 345–352.