数理解析研究所講究録
第 1728 巻 2011 年 1-4

有限次元凸値関数に対する連続選択関数の存在

島根大学 総合理工学部 山内貴光 (Takamitsu Yamauchi)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University

以下, 空間は T_1-空間を表し, λ は無限基数を, 2^Y は空間 Y の空でない部分集合全体を表す. 集合値関数 $\varphi: X \to 2^Y$ に対して, 一価関数 $f: X \to Y$ が φ の選択関数であるとは, 各点 $x \in X$ に対して $f(x) \in \varphi(x)$ をみたすことである. Michael の選択定理 [7] を発端として, これまでにいくつかの位相的性質が連続選択関数の存在を用いて特徴付けられた. Barov [1] は, Dowker-Katětov の内挿定理 ([3, Theorem 4], [5, Theorem 2]) の拡張として, (閉とは限らない) 有限次元で凸な値をとる集合値関数に対する連続選択関数の存在によって, 可算パラコンパクト[1]な正規空間を特徴付けた. 以下, Banach 空間 Y に対して,

$$\mathscr{E}_c(Y) = \{E \in 2^Y : E \text{ は凸で } \dim E < \infty\},$$
$$\mathscr{E}\mathscr{F}_c(Y) = \{E \in 2^Y : E \text{ は閉かつ凸で } \dim E < \infty\}$$

と表す. また, 集合値関数 $\varphi: X \to 2^Y$ が下半連続であるとは, 任意の Y の開集合 V に対して,

$$\varphi^{-1}[V] = \{x \in X : \varphi(x) \cap V \neq \varnothing\}$$

が X の開集合であることをいう. Barov [1, Theorem 1] は次の定理を証明した.

定理 1 (S. Barov [1]). 空間 X が可算パラコンパクトかつ正規であることは, 次の必要十分条件である: 任意の可分 Banach 空間 Y に対して, 各 $x, x' \in X$ について $\dim \varphi(x) = \dim \varphi(x')$ をみたす任意の下半連続な集合値関数 $\varphi: X \to \mathscr{E}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

定理 1 は, Michael の選択定理 [7, Theorems 3.1$''$ and 3.1$'''$] から容易に導かれる次の定理とも関係している.

定理 2 (E. Michael [7]). 空間 X に対して, 次が成り立つ.

(1) 空間 X が可算パラコンパクトかつ正規であることは, 次の必要十分条件である: 任意の可分 Banach 空間 Y に対して, 任意の下半連続な集合値関数 $\varphi: X \to \mathscr{E}\mathscr{F}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

[1]空間 X が可算パラコンパクトであるとは, X 任意のの可算な開被覆が局所有限な X の開被覆によって細分されることである.

(2) 空間 X が完全正規[2]であることは, 次の必要十分条件である: 任意の可分 Banach 空間 Y に対して, 任意の下半連続な集合値関数 $\varphi : X \to \mathscr{E}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

定理 1, 2 において, Banach 空間 Y には可分性が仮定されている. 本稿では, 任意の Banach 空間への有限次元凸値関数に対して, 定理 1, 2 と同様な結果が得られるかを考える.

濃度 λ 以下の任意の点有限[3]な開被覆が局所有限な開被覆によって細分される正規空間 を **λ-PF-正規空間** ([9]) という. 族正規空間は, 任意の無限基数 λ に対して λ-PF-正規である. また, ω-PF-正規[4]であることは, 正規であることは同値である. 空間 Y の開基の濃度の最小数を $w(Y)$ で表す. 定理 1 の十分条件の拡張として, 次が成り立つ.

定理 3. 空間 X が可算パラコンパクトかつ λ-PF-正規ならば, 次が成り立つ: 任意の $w(Y) \leq \lambda$ なる Banach 空間 Y に対して, 各 $x, x' \in X$ に対して $\dim \varphi(x) = \dim \varphi(x')$ をみたす任意の下半連続な集合値関数 $\varphi : X \to \mathscr{E}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

しかし, 次は分かっていない.

問題 4. 定理 3 の逆は成り立つか.

問題 4 に関して, 空間 X における次の条件を考える.

(*) 任意の $w(Y) \leq \lambda$ なる Banach 空間 Y に対して, $\sup\{\dim \varphi(x) : x \in X\} < \infty$ をみたす任意の下半連続関数 $\varphi : X \to \mathscr{C}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

(**) 任意の $w(Y) \leq \lambda$ なる Banach 空間 Y に対して, 各 $x, x' \in X$ について $\dim \varphi(x) = \dim \varphi(x') < \infty$ をみたす任意の下半連続関数 $\varphi : X \to \mathscr{C}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

条件 (*) をみたす空間は (**) をみたす. また, 条件 (**) をみたす空間が λ-PF-正規ならば, 問題 4 は肯定的である. 空間 X の被覆 $\mathscr{U}$ が有限次数をもつとは, 任意の $\mathscr{U}$ の n 個の元の共通部分が空となるような自然数 n が存在することである. 正規空間 X において, 濃度 λ 以下の任意の有限次数をもつ開被覆が局所有限な開被覆によって細分されるとき, X を **λ-OF-正規空間** とよぶ. 空間 X に対して, 次が成り立つ.

$$X \text{ は } \lambda\text{-PF-正規} \Rightarrow X \text{ は (*) をみたす} \Rightarrow X \text{ は } \lambda\text{-OF-正規}$$

---

[2]空間 X が完全であるとは, X の任意の開集合が閉集合の可算和で表されることである. 完全な正規空間を完全正規空間という.

[3]空間 X の $\mathscr{U}$ が点有限であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, $\{U \in \mathscr{U} : x \in U\}$ が有限なことである.

[4]ω は最小の無限基数を表す.

最初の矢印は定理 7 より従う. 2 番目の矢印は, [7, $(b) \Rightarrow (a)$ of Theorem 3.2″] と同様に示すことができる. Michael [6, Example 2] によって構成された Bing の例の部分空間は, 任意の λ に対して λ-OF-正規であるが PF-正規ではない. このことから, 次の問題が考えられる.

問題 5. 上の 2 つの矢印のうち, いずれかの逆は成り立つか. 成り立つとしたら, どちらの矢印の逆が成り立つか.

一方, 定理 2 の拡張として, 次が成り立つ.

定理 6. 空間 X に対して, 次が成り立つ.

(1) 空間 X が可算パラコンパクトかつ λ-PF-正規であることは, 次の必要十分条件である: 任意の $w(Y) \leq \lambda$ なる Banach 空間 Y に対して, 任意の下半連続な集合値関数 $\varphi : X \to \mathscr{E}\mathscr{F}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

(2) 空間 X が完全かつ λ-PF-正規であることは, 次の必要十分条件である: 任意の $w(Y) \leq \lambda$ なる Banach 空間 Y に対して, 任意の下半連続な集合値関数 $\varphi : X \to \mathscr{E}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

Banach 空間 Y に対して, 空でないコンパクト凸集合全体を $\mathscr{C}_c(Y)$ で, 空でない可分な閉凸集合全体を $\mathscr{S}_c(Y)$ で表す. このとき,

$$\mathscr{E}_c(Y) \cap \mathscr{C}_c(Y) \subset \mathscr{E}\mathscr{F}_c(Y) \subset \mathscr{S}_c(Y).$$

濃度 λ 以下の任意の点可算[5]な開被覆が局所有限な開被覆によって細分される正規空間を **λ-PC-正規空間**とよぶ. 定理 6 (1) は, 次の Kandô [4, Theorem IV] と Nedev [8, Theorem 4.1] による 2 つの定理と関連する.

定理 7 (T. Kandô [4], S. Nedev [8])**.** 空間 X が λ-PF-正規であることは, 次の必要十分条件である: 任意の $w(Y) \leq \lambda$ なる Banach 空間 Y に対して, 任意の下半連続な集合値関数 $\varphi : X \to \mathscr{C}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

定理 7 において "$\varphi : X \to \mathscr{C}_c(Y)$" を "$\varphi : X \to \mathscr{E}_c(Y) \cap \mathscr{C}_c(Y)$" に変えても定理は成立する.

定理 8 (S. Nedev [8])**.** 空間 X が λ-PC-正規であることは, 次の必要十分条件である: 任意の $w(Y) \leq \lambda$ なる Banach 空間 Y に対して, 任意の下半連続な集合値関数 $\varphi : X \to \mathscr{S}_c(Y)$ は, 連続な選択関数をもつ.

任意の λ-PC-正規空間は可算パラコンパクトかつ λ-PF-正規であるが, その逆は成り立たない (Bing の例 [2, Example G] の部分空間として反例を構成できる). また, 族正規な Dowker 空間は λ-PF-正規であるが, 可算パラコンパクトではない. 従って, 定理 6 (1) は, 定理 7 と定理 8 の間に位置する.

[5]空間 X の $\mathscr{U}$ が点可算であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, $\{U \in \mathscr{U} : x \in U\}$ が高々可算なことである.

集合値関数 $\psi : X \to 2^Y$ が集合値関数 $\varphi : X \to 2^Y$ の集合値選択関数であるとは, 任意の $x \in X$ に対して $\psi(x) \subset \varphi(x)$ が成り立つことである. 定理 6 は, 定理 7 と次の 2 つの命題を組み合わせることで得られる.

命題 9. 空間 X に対して, 次は同値である.

(*a*) X は可算メタコンパクト[6]である

(*b*) 任意のノルム空間 Y と任意の下半連続な集合値関数 $\varphi : X \to \mathscr{E}_c(Y)$ に対して, 下半連続な φ の集合値選択関数 $\psi : X \to \mathscr{E}_c(Y)$ が存在して, 各 $x \in X$ に対して $\mathrm{Cl}(\psi(x)) \in \mathscr{C}_c(Y)$ かつ $\dim \psi(x) = \dim \varphi(x)$ をみたす.

(*c*) 任意の下半連続な集合値関数 $\varphi : X \to \mathscr{F}_c(\mathbb{R})$ は下半連続な集合選択関数 $\psi : X \to \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ をもつ.

命題 10 (cf. [10, Theorem 2.11]). X を完全な λ-PF-正規空間, Y を $w(Y) \leq \lambda$ なる Banach 空間, $\varphi : X \to \mathscr{E}_c(Y)$ を各 $x \in X$ に対して $\mathrm{Cl}(\varphi(x)) \in \mathscr{C}_c(Y)$ をみたす下半連続関数とする. このとき φ は連続な選択関数をもつ.

References

[1] S. Barov, *On a characterization of normal and countably paracompact spaces via set-avoiding selections*, Comment. Math. Univ. Carolin. **49** (2008), 45–52.

[2] R. H. Bing, *Metrization of topological spaces*, Canad. J. Math. **3** (1951), 175–186.

[3] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math. **3** (1951) 219–224.

[4] T. Kandô, *Characterization of topological spaces by some continuous functions*, J. Math. Soc. Japan **6** (1954), 45–54.

[5] M. Katětov, *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math. **38** (1951) 85–91.

[6] E. Michael, *Point-finite and locally finite coverings*, Canad. J. Math. **7** (1955), 275–279.

[7] E. Michael, *Continuous selections* I, Ann. of Math. **63** (1956), 361–382.

[8] S. Nedev, *Selection and factorization theorems for set-valued mappings*, Serdica **6** (1980), 291–317.

[9] J. C. Smith, *Properties of expandable spaces*, in: General topology and its relations to modern analysis and algebra, III (Proc. Third Prague Topological Sympos., 1971), J. Novák (ed.), Academia, Prague, 1972, 405–410.

[10] T. Yamauchi, *Characterizations of some classes of perfect spaces in terms of continuous selections avoiding supporting sets*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **56** (2008), 149–161.

[6]空間 X が可算メタコンパクトであるとは, X 任意のの可算な開被覆が点有限な X の開被覆によって細分されることである. 正規空間において, 可算メタコンパクトであることと可算パラコンパクトであることは同値である.