

連続体の計算可能性理論

東北大学・大学院理学研究科 数学専攻 木原貴行 (Takayuki Kihara)*

Mathematical Institute, Tohoku University

sa7m10@math.tohoku.ac.jp

1 導入と歴史

Borel 集合族 (開集合全体を含む最小の σ -加法族) の部分階層の細字 (lightface) 化, それが 1940 年代から 1950 年代にかけての Kleene の一連の論文によって成し遂げられた仕事であった. Kleene は, Borel 階層の細字化によって, 離散空間 \mathbb{N} および積空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の算術的階層, そして超算術的階層を築き上げた. Kleene の階層は計算可能な手続きで積み上げられゆくものにも関わらず, 我々はそこに計算不可能性現象の片鱗を垣間見る. 算術的階層の Π_1^0 は, ちょうど計算可能性と不可能性の狭間に佇む. Turing の停止問題 (halting problem) は離散空間 \mathbb{N} の計算不可能 Π_1^0 集合の存在を暴き出し, [Kleene 1950] の再帰的分離不能対 (recursively inseparable pair) は積空間 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ における計算可能な点を含まない Π_1^0 集合 $\prod_{n \in \mathbb{N}} P_n$ を誘発する. この細字 Borel 階層の Π_1^0 は, 時折, Gödel の不完全性定理と共にその姿を覗かせる. [Shoenfield 1960] が観測したものは, 与えられた形式公理系を含む無矛盾かつ完全な理論全体がコントロール空間 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ の Π_1^0 集合を形成することであった. 逆に, [Ehrenfeucht 1961] は, コントロール空間 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ の任意の Π_1^0 集合は, ある形式公理系を含む無矛盾かつ完全な理論全体の空間に次数同型であることを見出した. したがってコントロール空間の Π_1^0 集合の計算不可能性現象は, Gödel の定理によって馬脚を現した不完全性現象のある一面と等価なものである. この事実が白日の下に晒されたとき, Gödel の不完全性定理を越えた新たな一歩が踏み出された. [Scott 1962] は普遍 Π_1^0 集合の存在を示唆する基底定理を証明し, Solovay は未出版論文でその Turing 次数の閉包性を示した. そして, [Jockusch-Soare 1972] は極めて技巧的な位相的手法 (JS-強制法) を導入し, 後に続く数多の研究における技術的基盤を与えた.

* 本研究は JSPS 特別研究員 (22-3737) 科研費の助成を受けたものである.

Shoenfield と Ehrenfeucht の定理は、リンデンバウム代数の超フィルター空間による Π_1^0 集合の表現定理に相当する。 Π_1^0 集合は極めて豊潤な表現定理を持ち、それらに関しては [Cenzer-Remmel 1998] が詳しい。実数空間において、 Π_1^0 集合の引き起こす奇怪な現象を観測した 1 人は [Specker 1959] だった。 \mathbb{R}^n の Π_1^0 集合は、計算可能実連続関数の零点集合として表現され得る。したがって、 $f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ が計算可能連続関数であり、 $f(0) = -1$ かつ $f(1) = 1$ を満たすにも関わらず、 $f(x) = 0$ なる計算可能な点 $x \in [0, 1]$ が存在しないという状況が起こり得る。1974 年、バンクーバー（カナダ）で開催された国際数学会議において、Friedman [Friedman 1975] が述べたことの一つは、幾多の表現定理を介して、カントール空間の Π_1^0 集合の選択原理を形式化した体系 WKL に対する逆数学 (Reverse Mathematics) 現象が見出されるということであった。現在、逆数学は確立した巨大な研究分野へと昇華し、Simpson を初めとする数多くの数理論理学者に引き継がれた。 Π_1^0 集合の理論の逆数学における応用は [Simpson 1999] の WKL₀ の章およびその ω -モデルの章に詳しい。

[Kreisel-Lacombe 1957] は、計算可能な点を含まない \mathbb{R} の正測度 Π_1^0 集合の存在を明かす。それから長い休眠期間を経て、カントール空間の Π_1^0 集合の測度論的分析は、アルゴリズム情報理論 (Algorithmic Information Theory) において鮮やかに花開いた。その嚆矢として放たれた一本が [Kučera 1985] である。アルゴリズム情報理論におけるカントール空間の Π_1^0 集合の広範な応用については、最近刊行された 2 冊の教科書 [Nies 2009, Downey-Hirschfeldt 2010] に詳しい。

計算可能性理論の対象領域は、離散空間、全不連結空間に始まり、完備可分距離空間を経て、いまや第二可算 T_0 空間まで広がっている。ところが、大多数の研究は一般化以前の対象にも共有する性質の分析のみに留まっており、理論の適用範囲を広げた恩恵をあまり感じない。概念の一般化の本領が発揮されるのは、たとえば従来は研究不可能だった領域に特有の問題を考察するときがある。カントール空間やベール空間などの全不連結空間の研究が先立って行われていた計算可能性理論においては、空間の連結性に極度に依存した問い掛けがそれに該当するであろう。この要請は、たとえば不動点定理、特に均衡理論における計算可能性構造の研究において自然に浮上するようである。本総説は、連続体論 ([Nadler 1992, Illanes-Nadler 1999]) と称されるコンパクト連結距離空間の一般論の見地から、 Π_1^0 集合の計算不可能性現象を分析する。

第 2 節は、局所的な計算可能性の研究として、基底/反基底定理を話題の中心に置き、最終的に連結 Π_1^0 集合、単連結 Π_1^0 集合に関する基底/反基底定理を述べる。第 3 節は、大域的な計算可能性の研究として、連続体の計算可能性に関する幾つかの話題を紹介する。第 5 節には、付録として基本的定義を纏めて載せた。

2 閉集合の局所的計算可能性

2.1 基底定理と反基底定理

ある位相空間の閉集合は、どのような複雑性の点を含み得るだろうか。それは、Kleene による細字化以前は意味を為さない問いであった。いま、『閉集合』をその細字化である『 Π_1^0 集合』に置き換えることにより、この問い掛けは極めて価値深いものと化す。Kleene の階層によって芽吹いた新たな可能性は、幾多の重要な基底/反基底定理を生み出した。

- 定理 2.1.**
1. (*The Kleene Non-Basis Theorem* [Kleene 1955]) ベール空間の非空 Π_1^0 集合で、超算術的点 (Δ_1^1 点) を含まないものが存在する。
 2. (*The Kleene Basis Theorem* [Kleene 1943]) ベール空間の非空 Π_1^0 集合は、 \mathcal{O} -計算可能点 ($\Delta_1^0[\Sigma_1^1]$ 点) を含む。
 3. (*The Kreisel Non-Basis Theorem* [Kreisel 1953]) カントール空間の非空 Π_1^0 集合で、計算可能点 (Δ_1^0 点) を含まないものが存在する。
 4. (*The Kreisel Basis Theorem* [Kreisel 1953]) カントール空間の非空 Π_1^0 集合は、極限計算可能点 (Δ_2^0 点) を含む。
 5. (*The Scott Basis Theorem* [Scott 1962]) カントール空間の非空 Π_1^0 集合は、ペアノ算術の無矛盾完全拡大から相対的に計算可能な点を含む。
 6. (*The Low Basis Theorem* [Jockusch-Soare 1972]) カントール空間の非空 Π_1^0 集合は、low 点を含む。
 7. (*The Hyperimmune-Free Basis Theorem* [Jockusch-Soare 1972]) カントール空間の非空 Π_1^0 集合は、hyperimmune-free 点を含む。

カントール空間における上述の基底/反基底定理は、任意の σ -コンパクト空間に対するものに置き換えることが出来る。たとえば、カントール空間をユークリッド空間 \mathbb{R}^n に置き換えてもよい。基底/反基底定理は、集合の大小の影響を受け易いため、しばしば位相/測度的大きさと組み合わせて述べられる。

- 定理 2.2.**
1. ([Shoenfield 1958b]) ベール空間の非瘦 Π_1^0 集合は、計算可能点を含む。
 2. ([Kreisel-Lacombe 1957, 田中 1970]) カントール空間の正測度 Π_1^0 集合で、計算可能点を含まないものが存在する。
 3. (*The Lebesgue Basis Theorem* [Lebesgue 1917, 藤田 2000]) カントール空間の正測度 Π_1^0 集合は、その測度が計算可能であるとき、計算可能点を含む。

4. カントールの零 Π_1^0 集合は, Martin-Löf ランダム実数を含まない.
5. ([Kučera 1985]) カントール空間の正測度 Π_1^0 集合は, あらゆる Martin-Löf ランダム実数のある有限シフトを含む.
6. ([Kučera 1985]) カントール空間の正測度 Π_1^0 集合は, Medvedev 不完全である.

Kučera の定理は, コルモゴロフの 0-1 法則およびバーコフのエルゴード定理の実効化の一種であると見なせる ([Bienvenu-Day-Mezhurov-Shen 2010]). より高位の細字 Borel 階層に関する基底/反基底定理に関しては, [田中 1971] の日本語による概説がある.

2.2 連結空間における基底/反基底定理

さて, 数直線の Π_1^0 集合の位相構造について, 我々は次の興味深い現象を観測できる.

観測. $[0, 1]^1$ の非空 Π_1^0 集合が計算可能点を含まないなら, カントール集合と同相である.

したがって, \mathbb{R}^1 の連結 Π_1^0 集合については, もはや Non-Basis Theorem は成立しない. 長らく全不連結空間の構造分析が研究の主軸にあった計算可能性理論では, 空間の連結性に言及することは殆ど無かった. しかし, ひとたび連結空間の計算可能性構造を覗いてみると, そこには鮮やかで豊穡な世界が広がっている. では, より高次元のユークリッド空間における連結 Π_1^0 集合の計算可能性構造はどのような振る舞いを見せてくれるだろう. [le Roux-Ziegler 2008] が指摘するように, 次元を少し上げることによって Non-Basis Theorem は修復される.

観測 ([le Roux-Ziegler 2008]).

1. \mathbb{R}^2 の非空連結 Π_1^0 集合で, 計算可能な点を含まないものが存在する.
2. \mathbb{R}^3 の非空単連結 Π_1^0 集合で, 計算可能な点を含まないものが存在する.

しかし, [le Roux-Ziegler 2008] の利用した方法で 2 次元単連結 Π_1^0 集合の Non-Basis Theorem を導くのは望み薄である. 事実, 彼らの方法で得られる \mathbb{R}^2 の Π_1^0 集合は, 非可算個の穴の開いた連結空間となり, 単連結には程遠い. そこで, 彼らは問う.

問題 1 ([le Roux-Ziegler 2008]). \mathbb{R}^2 の非空単連結 Π_1^0 集合は, 必ず計算可能な点を含むか?

ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 と複素平面 \mathbb{C} の計算可能性構造は等しいため, 以後は同一視する. さて, 平面の連結集合の計算可能性構造は, フラクタル幾何学の研究を交えた形で興

味を示す研究者が居たようである。その1人、数学者であり宇宙物理学者である Penrose は、著書 “*The Emperor’s New Mind* [Penrose 1989]” (邦訳『皇帝の新しい心』) の第4章において、次を述べる。

例 2.1 ([Penrose 1989]). マンデルブロ集合は \mathbb{R}^2 の非空単連結 Π_1^0 集合であり、計算可能な点を含む。

筆者が得た新たな Non-Basis Theorem は、このような平面の単連結 Π_1^0 集合に対するものであり、すなわち [le Roux-Ziegler 2008] の問題を解決するものである。

定理 2.3 ([木原 201?]). \mathbb{R}^2 の非空単連結 Π_1^0 集合で、計算可能な点を含まないものが存在する。

Non-Basis Theorem は、Medvedev 次数の文脈では、Medvedev 非自明集合の存在定理として表現できる。一方、Medvedev 非自明性より強い性質として、Medvedev 完全性がある。たとえば、次の問いは依然として未解決である。

- 問題 2.**
1. \mathbb{R}^2 の非空単連結 Π_1^0 集合で Medvedev 完全なものは存在するか？
 2. \mathbb{R}^4 の非空単連結 Π_1^0 集合で Medvedev 完全なものは存在するか？

[Orevkov 1963] に始まり [le Roux-Ziegler 2008] に至るまで継承された、複雑性を崩さぬように Π_1^0 集合の連結化を行う従来の方法（より一般に、 n 次元ホモトピー群を消滅させる方法）は、複数の Π_1^0 集合を高次元に引き伸ばして、それらをクロスさせることによってなされる。しかし、この手法はツリー免疫 (*tree-immunity*) を消滅させる典型的な方法と酷似しており、[Cenzer-木原-Weber-呉 2009] によれば、Medvedev 完全ならば必ずツリー免疫を持たねばならない。さらに [樋口-木原 201?] では、ツリー免疫排除はむしろ Medvedev 次数を確実に減衰させるための汎用的な手法であることを示している。Le Roux ら幾人かの計算可能解析学者は Orevkov の方法を発展させる方向で研究を進めているが、その連結化法で上述の問題をも解決しようとするのは、いささか望蜀の感があるように思える。他の連結化として、筆者が le Roux-Ziegler 問題 1 の解決を与えたときに用いた手法があるが、これは Orevkov の手法とは異なり、非可算本の紐状に引き伸ばした Π_1^0 集合を複雑性を保ったまま（無限の蛇行を経由して）計算不可能な一点の上で束ねるというものである。この手法は典型的なツリー免疫排除法とは程遠いものであるが、しかし、この連結化によっても、やはり Medvedev 完全な Π_1^0 集合に備わっているべき免疫 (*immunity*) が排除されている可能性が高い。したがって、上述の未解決問題は、免疫を排除しない新しい連結化の方法が存在するかを問うものと換言できるかもしれない。

3 閉集合の大域的計算可能性

3.1 皇帝の新しい計算可能性

ブラジルにおける蝶の羽ばたきが、テキサスにトルネードを発生させる。時に、単純な概念が、それを遥かに超越する不可解な現象を生み出す。計算概念に基づいて定義される停止問題が計算不可能性現象を引き起こすことを示した Turing の定理は、その代表格かもしれない。あるいは、2次多項式 $f(z) = z^2 + c$ がマンデルブロ集合 (Mandelbrot set) という複雑怪奇なフラクタル構造を生み出すという事実には、その現象を見出せるのかもしれない。宇宙物理学者 Penrose は、“*The Emperor’s New Mind* [Penrose 1989]”において、この2種の現象を結びつけて考察した。曰く、境界の振る舞いが極めて複雑なマンデルブロ集合とは、停止問題のような計算不可能な決定問題を幾何学の世界へ具現化したものではないか、と。

予想 1 (ペンローズ予想 [Penrose 1989]). マンデルブロ集合は計算不可能である。

Penrose の予想に興味を示した一人は、高次元ポアンカレ予想を解決したことなどで知られるトポロジスト Smale だった。Smale は計算機科学者 Blum と共に、[Blum-Smale 1993]において、**BSS 機械** (*Blum-Shub-Smale machine*) と呼ばれる順序環 (体) 上の計算モデルではマンデルブロ集合を計算できないことを示した。しかし、Brattka はこの Blum-Smale の結論に異議を唱える。Brattka は、論文 “*The Emperor’s New Recursiveness* [Brattka 2003]”において、BSS 機械が指数関数の上半グラフ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^x\}$ さえ計算しないことを指摘し、閉集合の計算可能性理論の整備の必要性を説いた。 Π_1^0 集合は、言うなれば計算可能生成閉集合であり、計算可能閉集合ではない。閉集合に関する計算可能性は、 Π_1^0 集合の理論に覆い隠され、長きに渡り計算可能性理論の死角に潜んでいた。20世紀も終わりを迎えようとしたとき、ドイツ南西部の州ザールラントに聳え立つ Dagstuhl 城における “*Dagstuhl Seminar*” で成し遂げられた一連の研究 [Brattka-Weihrauch 1999, Brattka-Presser 2003] によって、閉集合の大域的計算可能性の理論がついに生を享けた。そして、[Hertling 2005] によって、その新たな計算可能性理論の下でのペンローズ予想の肯定的解決が、複素力学におけるマンデルブロ集合の構造的問題をも解決すると示された。

定理 3.1 ([Hertling 2005]). もしペンローズ予想が真ならば、次の2予想は反駁される。

1. (双曲予想) マンデルブロ集合の内核はその双曲成分の和に等しい.
2. (MLC 予想) マンデルブロ集合は局所連結である.

マンデルブロ集合周辺の計算可能性理論については [Braverman-Yampolsky 2008] が詳しい. さて, 第 2 節で取り扱った基底/反基底定理は, 与えられた閉集合における局所的に計算可能な箇所の存在を問うものであるのに対し, ペンローズ予想などは閉集合の大域的な形状を計算可能かどうか問うものである. このとき, Π_1^0 集合 P の計算可能性に関する幾つかの程度があることを見る.

- (i) P は計算可能である.
- (ii) P は計算可能な点たちからなる稠密部分集合を持つ.
- (iii) P は計算可能な点を含む.

(i) は大域的計算可能性を表し, (iii) は局所的計算可能性を表す. (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) であるが, 逆は一般には成立しない. Non-Basis Theorem によれば, Π_1^0 集合は一般には (iii) さえ満たさない. 一方, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の非瘦 Π_1^0 集合や \mathbb{R}^1 の連結 Π_1^0 集合は必ず (iii) を満たし, 後者の場合, さらに (ii) まで成立する. このように, 考察する Π_1^0 集合の位相構造に制限を加えたとき, (iii) のみならず (ii) や (i) が必ず成立することさえある. そこで, 連結性, 単連結性, 局所連結性に関する考察を交え, 連続体論の概念である tree-like 連続体の大域的計算可能性について問いたい.

3.2 連続体の大域的計算可能性

ユークリッド空間の連結 Π_1^0 集合の大域的計算可能性について, 最初の非自明な仕事は [Miller 2002] によってなされた.

- 定理 3.2** ([Miller 2002]).
1. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が m 次元 Π_1^0 球面ならば, S は計算可能である.
 2. 特に, \mathbb{R}^n の Π_1^0 ジョルダン曲線は計算可能である.
 3. $D \subseteq \mathbb{R}^n$ が m 次元 Π_1^0 球であり, その境界球面 ∂D も Π_1^0 ならば, D は計算可能である.

さらに, [Iljazović 2009] は, ジョルダン曲線のようにループする鎖状の位相構造は, 必ず計算可能であることを示した.

例 3.1 ([Iljazović 2009]). \mathbb{R}^n の Π_1^0 Warsaw circle および Π_1^0 dyadic solenoid は計算可能である.

このとき、 Π_1^0 球、あるいは Π_1^0 弧 ($[0, 1]$ の単射連続像) に対してどの程度の計算可能性が成立するかという疑問が浮上する。Miller も指摘するように、計算不可能な Π_1^0 直線の構成は容易である。しかし、Miller は、弱い意味での計算可能性であれば成立することを示した。

定理 3.3 ([Miller 2002]). $D \subseteq \mathbb{R}^n$ が m 次元 Π_1^0 球ならば、計算可能な点たちからなる稠密部分集合を持つ。

特に、1次元球である弧について、Miller の定理は成立する。弧の計算可能性に関する更なる考察を進めるために、[Iljazović 2009] は、(i) と (ii) の真に中間に位置する計算可能性概念を考案する。距離空間 (X, d) の非空閉部分集合 A_0, A_1 の間のハウスドルフ距離 (Hausdorff distance) は、 $d_H(A_0, A_1) = \max_{i < 2} \sup_{x \in A_i} \inf_{y \in A_{1-i}} d(x, y)$ により定義される。 A が閉集合のクラス C を殆ど含まないとは、 $\inf_{A \supseteq B \in C} d_H(A, B) > 0$ を満たすことである。閉集合のクラス C が概計算可能 (almost computable) とは、計算可能 C を殆ど含まないような $A \in C$ が存在しない場合を指す。

定理 3.4 ([Iljazović 2009]). \mathbb{R}^n の Π_1^0 弧は概計算可能である。

ジョルダン曲線 (単純閉曲線) と弧 (単純曲線) の狭間に、計算可能性と計算不可能性を隔てる壁があった。ならば、概計算可能性と概計算不可能性を隔てる位相的性質とは何であろうか。たとえば、有限個の弧を閉曲線を作らないように繋げた、有限分岐木状の位相空間が考えられるが、 Π_1^0 有限分岐木は概計算可能であると分かる。それでは、無限分岐木状の位相空間で概計算可能性は成立するであろうか。このような tree-like な連続体として、デンドライト (dendrite) およびデンドロイド (dendroid) が知られている (定義は付録を見よ)。このとき、次の定理を得る。

定理 3.5 ([木原 201?]).

1. \mathbb{R}^2 の Π_1^0 デンドライトは概計算可能でない。
2. Π_1^0 デンドライトを殆ど含まない \mathbb{R}^2 の計算可能デンドロイドが存在する。
3. 計算可能な点を含まない \mathbb{R}^2 の Π_1^0 デンドロイドが存在する。

系 3.1 ([木原 201?]).

1. 単連結かつ局所単連結な Π_1^0 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ で、連結な計算可能閉部分集合を殆ど含まないものが存在する。
2. 単連結な計算可能閉集合 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ で、連結かつ局所連結な Π_1^0 部分集合を殆ど含まないものが存在する。

表 1 位相構造が決定する計算可能性構造. (i') は概計算可能性を表す.

位相構造	(i)	(i')	(ii)	(iii)
球面	Y	Y	Y	Y
球	N	?	Y	Y
単純閉曲線	Y	Y	Y	Y
単純曲線	N	Y	Y	Y
有限分岐木	N	Y	Y	Y
デンドライト	N	N	?	?
デンドロイド	N	N	N	N

4 巡回セールスマンが巡回できない秘境

4.1 曲線の上にある点

幾何学的測度論における解析学者の巡回セールスマン定理 (*the analyst's traveling salesman theorem*) は, ユークリッド空間において, 有限長の曲線に含まれ得る部分集合を特徴付けるものである. いま, 基底/反基底定理におけるように, 計算可能性理論は, 曲線の上の点の複雑性について語る事ができる. ならば, “セールスマン” は如何なる点の上を通過することが出来るだろうか. [Gu-Lutz-Mayordomo 2006] は, 計算可能なセールスマンの巡回できる地点について関心を抱いた. 彼らは計算可能なセールスマンを, 無限小のナノロボットとして導入する. ロボットの動作はアルゴリズム的なので, その足跡は計算可能な曲線を描く. また, ロボットの足跡が描く軌跡は有限長の曲線であるという制限を課す. その他のロボットの動作は制限されない. 描かれる足跡が交差してもよいし, 後戻りすることもできる. [Gu-Lutz-Mayordomo 2006] は, まず, ロボットの巡回可能範囲が極めて小さいことを述べた後, ロボットの巡回可能範囲を特徴付ける**計算可能解析学者の巡回セールスマン定理** (*the computable analyst's traveling salesman theorem*) を証明した. 続いて, [Rettinger-Zheng 2009a, Rettinger-Zheng 2009b] は, 曲線が通過可能な点について, 興味深い分析を与える. 彼らが考察した単純曲線の一部は, 次に挙げるものである.

定義 4.1 ([Rettinger-Zheng 2009a]). 平面の単純曲線 C の次の条件を考える.

K: C は閉集合として計算可能である.

R: C はある計算可能関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ の像である.

M: C はある計算可能単射 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ の像である.

[Rettinger-Zheng 2009a] は, 優先法 (*priority argument*) を用いて, M を満たす単純曲線が通過可能な点よりも R を満たす単純曲線が通過可能な点の方が真に多く, K を満たす単純曲線が通過可能な点はそれより更に多いことを示した.

4.2 通過不能点の研究の概観

計算可能解析学から離れよう. カントール空間の Π_1^0 集合の理論においては, 計算可能生成閉集合, すなわち Π_1^0 集合の通過不可能な点に関して極めて多くの研究がなされてきた.

- 定義 4.2.**
1. *Unranked point* とは, どんな可算 Π_1^0 集合にも含まれない点である.
 2. **Kurtz ランダム点** (*Kurtz random point*) とは, どんな零 Π_1^0 集合にも含まれない点である.
 3. **弱 1-ジェネリック点** (*weakly 1-generic point*) とは, どんな疎 Π_1^0 集合にも含まれない点である.
 4. **1-ジェネリック点** (*1-generic point*) とは, どんな Π_1^0 集合 P についても, $P \setminus \text{Int}(P)$ には含まれないような点である.
 5. **半ジェネリック点** (*semigeneric point*) とは, 計算可能な点を含まないようなどんな Π_1^0 集合にも含まれない計算不可能点である.
 6. **不可視点** (*invisible point*) とは, 次数閉包がカントール空間を覆わないようなどんな Π_1^0 集合の次数閉包にも含まれない点である.

カントール空間およびベール空間の *unranked point* に関しては, Π_1^0 集合の *Cantor-Bendixson derivative* に関する Kreisel の研究 [Kreisel 1959] まで遡る. Kreisel 以降の研究を含め, [Cenzer 1999] に幾つかの話題が載っている. 1-ジェネリック性については, 1963 年に Cohen が ZFC 集合論における **連続体仮説** の独立性を証明した直後, [Feferman 1964] がその証明技法の断片を算術化したものの一部である. Feferman のオリジナルの定義はより Cohen 強制法に近い. 厳密には, 1-ジェネリック性は, [Hinman 1969] によって, 算術的階層の基底/反基底性への応用を目的として Feferman の算術的強制法を階層分けした際に生じたものである. Kurtz ランダ

ム性と弱 1-ジェネリック性は [Kurtz 1981] によって定義された。この 2 概念に関する基本的で重要な研究は Kurtz によってなされたが、更なる発展的研究については、[Nies 2009, Downey-Hirschfeldt 2010] が詳しい。半ジェネリック性の概念は [Demuth, 1987, Demuth-Kučera, 1987] が、当時、NAP(測度的近似不能) と呼ばれていた、現在 **Martin-Löf ランダム** と呼ばれる概念に関連して導入したものである。特に後者の論文においては、**免疫 Π_1^0 集合** の概念を導入され、Martin-Löf ランダム性とジェネリック性の相違に関する重要な定理が証明されている。最後に、不可視性は、[Kent-Lewis 201?] による Π_1^0 集合の**次数スペクトル (degree spectrum)** の研究において導入されたものである。

4.3 そこはセールスロボが巡回できない

再び巡回セールスロボ問題に戻ろう。ここまでの解説では、セールスロボが如何なる複雑性の点を巡回可能か明確でない。どんな計算可能曲線もそこを通過できないというのだから、そこは尋常でなく超越的な地点だろうと想像するかもしれない。しかし、有限文字列全体の集合 $\Sigma^{<\mathbb{N}}$ の集合が可算である以上、プログラムは可算種類しか存在せず、したがって、有限長の計算可能曲線が通過可能な点全体の集合は瘦集合である。したがって、**典型的 (typical)** な点、すなわち十分にジェネリックな点は、計算可能曲線に通過されるのを避けるに違いない。このとき、弱 1-ジェネリック性に関する [Kurtz 1981] の手法が活躍する。実は、有限長のどんな計算可能曲線も通過できない点は大して超越的ではなく、そのような通過不可能点を極限的に計算できてしまうのである。ここで、点 p が**極限計算可能 (limit computable)** とは、一様に計算可能な点列 $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して、 $p = \lim_n q_n$ となるときである。次の定理の証明は非常に簡単であるので、ここで紹介したいと思う。

定理 4.1. $d \geq 2$ とする。ある極限計算可能な点 $p \in \mathbb{R}^d$ が存在して、有限長のどんな Π_1^0 曲線も点 p を通過することができない。実際、任意の極限計算可能な計算不可能点 $q \in \mathbb{R}^d$ に対して、 q から計算可能な点 p が存在して、有限長のどんな Π_1^0 曲線も点 p を通過することができない。

関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ が関数 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を**支配する**とは、任意の $x \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) \geq g(x)$ を満たすときを言う。点 p が**超免疫 (hyperimmune)** とは、どんな計算可能関数にも支配されない関数が p から計算可能であるときを指す。

補題 4.1 ([Dekker, 1954, Miller-Martin 1968]). 任意の極限計算可能な計算不可能点 p

は超免疫である。

証明. p は極限計算可能なので, p に収束する一様計算可能な点列 $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在する. このとき, 関数 $h_p(n) = |p - q_n|$ は p から計算可能である. もし h_p がある計算可能関数 f に支配されるなら, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の p への収束速度は f を使って上から押さえることができる. このとき, p を計算可能な方法によって任意の精度で近似できる. しかし, これは p の計算不可能性に矛盾する. \square

定義 4.3. $X \in Y$ を X の閉包 $\text{Cl}(X)$ が Y に含まれることを意味するものとする. $\{\beta_e\}_{e \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^d の空でない有理開球の計算可能枚挙とする. 点 $p \in \mathbb{R}^d$ が与えられたとき, \mathbb{R}^d の開集合族 $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が q -稠密とは, ある q から計算可能な関数 $\delta: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, もし D_n が稠密ならば, 無限個の t が存在して, 任意の $e \leq t$ に対して $\beta_e \ni \beta_{\delta(e,n,t)} \subseteq D_n$ を満たすときを指す.

補題 4.2 (実効的ベールのカテゴリー一定理). $\mathcal{D} = (D_e : e \in \mathbb{N})$ を q -稠密な開集合族とし, \mathcal{D}^* を \mathcal{D} に属す稠密開集合全体の族とする. このとき, q はある点 $p \in \bigcap \mathcal{D}^*$ を計算する.

証明. δ を \mathcal{D} の q -稠密性を証言する q から計算可能な関数とする. 帰納的に, 有理開球の列 $\{\gamma_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ と補助用の有限集合の列 $\{M_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ を構成する. $\gamma_0 = \mathbb{R}^n$ とし, $\beta_{e(s)} = \gamma_s$ および $M_s \subseteq \mathbb{N}$ が与えられていると仮定する. このとき, 各 $t \notin M$ で $t \leq s$ なるものについて, $\beta_{e(s)} \ni \beta_{\delta(e(s),t,s)} \subseteq D_n$ を満たすかどうかを計算する. もしそのような t が存在しないならば, $M_{s+1} = M_s$ かつ $\gamma_{s+1} = \gamma_s$ とする. さもなくば, そのような最小の t は **要注意** (*requires attention*) である. 要注意な t について, もし $\beta_{\delta(e(s),t,s)} \leq s+1$ ならば, $M_{s+1} = M_s \cup \{t\}$ かつ $\gamma_{s+1} = \beta_{\delta(e(s),t,s)}$ とする. $\beta_{\delta(e(s),t,s)} > s+1$ ならば $M_{s+1} = M_s$ かつ $\gamma_{s+1} = \gamma_s$ とする. 構成は q から計算可能なので, $\{\gamma_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ は q から一様計算可能な列である. *Cantor's Intersection Theorem* より $\bigcap_s \text{Cl}(\gamma_s)$ は非空であり, 構成より, ある一点 p のみを含み, p は q から計算可能である. $M = \bigcup_s M_s$ とする. M^* を D_n が稠密であるような $n \in \mathbb{N}$ 全体の集合とする. 帰納法によって, $M^* \subseteq M$ を示す. $n \in M^* \setminus M_s$ かつ任意の $m \in M \cup M^*$ で $m < n$ なるものは, $m \in M_s$ であると仮定する. q -稠密性より, ある $s_0 \geq s$ が存在して, $e \leq s_0$ ならば $\beta_{\delta(e,n,s_0)} \subseteq D_n$ を満たす. さて, 構成より, 任意の $s \in \mathbb{N}$ について, ある $e(s) \leq s$ が存在して $\gamma_s = \beta_{e(s)}$ を満たす. したがって, このとき n は要注意である. $\delta(e, n, s_0) \leq s_1$ なる s_1 が訪れたとき, n は M_{s_1} に並べられるであろう. これより, もし D_s が稠密ならば, $p \in \text{Cl}(\gamma_{s_1}) \subseteq D_n$ を得る. 以上より, $p \in \bigcap \mathcal{D}^*$ が示された. \square

補題 4.3 ([Kurtz 1981]). 超免疫な点 q はある弱 1-ジェネリック点 p を計算する.

証明. $\{P_e\}_{e \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^d の Π_1^0 集合の計算可能枚挙とする. もし P_e が疎 Π_1^0 集合ならば, $\mathbb{R}^d \setminus P_e$ は稠密開集合であるので, $\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^d \setminus P_e\}_{e \in \mathbb{N}}$ が q -稠密であることを示せば十分である. e 番目の計算可能関数 $p_e : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ について, $W_e[t] = \{p_e(u) : u \leq t\}$ により定義する. $W_e = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} W_e[t]$ とする. Π_1^0 集合の定義 (付録参照) より, $\mathbb{R}^n \setminus P_e = \bigcup_{k \in W_e} \beta_k$ と表される. q は超免疫なので, h_q をどんな計算可能関数にも支配されない q から計算可能な関数とする. h_q は単調増大であると仮定しても一般性を失わない. $\delta(e, n, t)$ を定義するために, 与えられた β_e に対して, $\beta_e \ni \beta_u \subseteq \bigcup_{k \in W_n[h_q(t)]} \beta_k$ なる $u \leq h_q(t)$ が存在するかどうかを q から計算する. 存在するならば, $\delta(e, n, t)$ をそのような最小の u について β_u とする. 存在しないならば, $\delta(e, n, t) = \beta_e$ によって与える. さて, $g_n(t)$ を, どんな $e \leq t$ に対しても $\beta_e \ni \beta_u \subseteq \bigcup_{k \in W_n[v]} \beta_k$ なる $u \leq v$ が存在するような最小の v とする. もし $\bigcup_{k \in W_n} \beta_k$ が稠密ならば, g_n は計算可能な全域関数である. よって, h_q は g_n に支配されない. したがって, 与えられた $e \in \mathbb{N}$ について, ある $t_0 \geq e$ で $g_n(t_0) \leq h_q(t_0)$ なるものが存在する. これより \mathcal{D} の q -稠密性が示された. \square

定理 4.1 の証明. $d \geq 2$ のとき, \mathbb{R}^d の有限長 Π_1^0 曲線は疎 Π_1^0 集合を与えるので, どんな弱 1-ジェネリック点もそこには属さない. \square

総括

本総説では, 連結 Π_1^0 集合の計算可能性構造に関する先行研究を紹介し, 単連結 Π_1^0 集合における局所的/大域的計算可能性に関する筆者の最近の仕事 [木原 201?] を解説した. 第 3 章の内容は, 単連結 Π_1^0 集合に関する [le Roux-Ziegler 2008] の問題 1 を解決する過程で偶々得た副産物である. 連続体論にしろデンドロイドにしろ, 問題 1 を解決するために掻き集めた道具であったため, 実際には単連結な連続体の大域的計算可能性しか考察しなかった. しかし, 単連結でない空間の大域的な計算可能性構造の研究が必要になる局面もそのうち自然に現れると想像できる. したがって, 今後の研究の方向としては, 単連結でない連結 Π_1^0 集合の計算可能性構造を探っていくのも興味深いと思われる. 第 4 章の内容に関しては, 先行研究において, 曲線の通過不可能な点の計算的複雑性に関する具体的言及が見られなかったため, 一応, 述べておくことにした. 最後に, 現在のところ未解決な問題を挙げておく.

問題 3. 任意の局所連結 Π_1^0 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ は計算可能な点を含むか?

5 付録

5.1 位相空間の計算可能性理論

離散空間 \mathbb{N} , カントール空間 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, およびベール空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ における計算可能性理論については [Soare 1987, Odifreddi 1989, Odifreddi 1999] を参照して欲しい. 位相空間の計算可能性理論については [Weihrauch 2000], 閉集合の計算可能性理論については [Brattka-Weihrauch 1999, Brattka-Presser 2003] が基本文献である. T_0 -位相空間 X が可算開基 $\beta = \{\beta_n\}_{n \in \omega}$ を持つとき, 点 x の β -名は $\{n \in \mathbb{N} : x \in \beta_n\}$ によって与えられる. x の β -名を枚挙する再帰関数が存在するとき, x は β -計算可能と呼ばれる. ここで扱う位相空間はいずれも標準的な可算開基を持つと仮定し, 以後 β を省略する. 空間 X, Y の間の写像 $f : X \rightarrow Y$ が計算可能とは, 与えられた $x \in \text{dom}(f)$ の名から $f(x) \in Y$ の名を返す再帰関数が存在するときを言う. 空間 X の閉集合 $F \subseteq X$ が Π_1^0 とは, $F = X \setminus \bigcup_{n \in \omega} \beta_n$ なる W を枚挙する再帰関数が存在するときであり, 閉集合 $F \subseteq X$ が計算可能とは, F が Π_1^0 かつ $\{n \in \mathbb{N} : F \cap \beta_n \neq \emptyset\}$ を枚挙する再帰関数が存在するときを言う. 閉集合の計算可能性理論のより整備された形としては, それを閉集合たちの形成する超空間 (Vietoris 位相ないし Fell 位相を用いる) における計算可能性として導入し, 位相空間の計算可能性理論の一般論の中に吸収するという形式で展開することが可能である.

位相空間 S の集合 $X, Y \subseteq S$ について, X から Y への計算可能写像が存在するとき, $Y \leq_M X$ によって順序を入れる. \mathfrak{P} をある固定した空間の非空 Π_1^0 集合全体の族とするとき, $\mathcal{P}_M = (\mathfrak{P} / \equiv_M, \leq_M)$ は束構造をなす. この構造は **Medvedev 束** (*Medvedev lattice*) と呼ばれる. 自然数の集合をカントール空間 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ の点と同一視することによって, Medvedev 次数は Turing 次数の一般化であるとみなせる. この観点の下では, $A, B \subseteq \mathbb{N}$ について, $A \leq_T B$ を $\{A\} \leq_M \{B\}$ とすることによって, **Turing 次数** (*Turing degree*) が定義される. 非空 Π_1^0 集合 P が Medvedev 非自明とは, P が計算可能な点を含まないことであり, Medvedev 完全とは, P の Medvedev 次数が \mathcal{P}_M の最大元であるときを言う.

5.2 トポロジーと連続体論

連続体論に関しては, [Nadler 1992, Illanes-Nadler 1999] が基本文献である. **連続体** (*continuum*) とは, コンパクト連結距離空間である. 位相空間 X が**単連接** (*unicoherent*)

とは, $A \cup B = X$ なる任意の連結閉集合 $A, B \subset X$ について $A \cap B$ が連結になるときを指す. デンドロイド (*dendroid*) とは, 任意の部分連続体が単連接であるような弧連結連続体であり, デンドライト (*dendrite*) とは, 局所連結デンドロイドである. ペアノ連続体 (*Peano continuum*) とは, 局所連結連続体である. ハウスドルフ空間がペアノ連続体であることと $[0, 1]$ の連続像であることは同値であり, デンドライトであることとジョルダン曲線を含まないペアノ連続体であることは同値である.

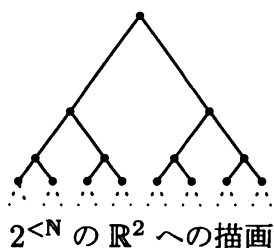


図1 デンドライト

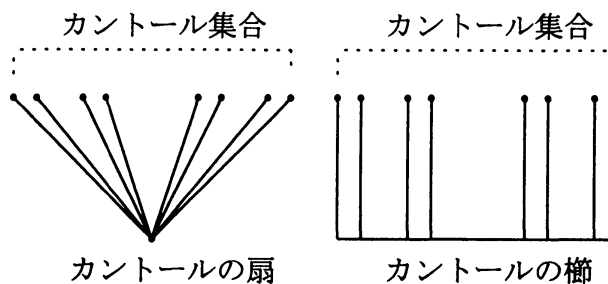


図2 デンドロイド

参考文献

- [Bienvenu-Day-Mezhurov-Shen 2010] Laurent Bienvenu, Adam Day, Ilya Mezhiro, and Alexander Shen. Ergodic-type characterizations of algorithmic randomness. To appear in the Proceedings of Computability in Europe 2010.
- [Blum-Smale 1993] L. Blum, and S. Smale, The Gödel incompleteness theorem and decidability over a ring, In M. W. Hirsch, J. E. Marsden, and M. Shub, editors, *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*, pp. 321–339, New York, 1993. Springer.
- [Brattka 2003] V. Brattka, The emperor's new recursiveness: The epigraph of the exponential function in two models of computability. In Masami Ito and Teruo Imaoka, editors, *Words, Languages and Combinatorics III*, pages 63–72, Singapore, 2003. World Scientific Publishing. ICWLC 2000, Kyoto, Japan, March 14–18, 2000.
- [Brattka-Presser 2003] V. Brattka, and G. Presser, Computability on subsets of metric spaces, *Theoretical Computer Science*, **305** (2003), pp. 43–76.
- [Brattka-Weihrauch 1999] V. Brattka, K. Weihrauch, Computability on subsets of Euclidean space. I. Closed and compact subsets. *Computability and complexity in analysis*, *Theoret. Comput. Sci.* 219 (1999), 65–93.

- [Braverman-Yampolsky 2008] M. Braverman and M. Yampolsky, *Computability of Julia sets*, Springer, 2008.
- [Cenzer 1999] D. Cenzer, Π_1^0 Classes in Computability Theory, *Handbook of Computability Theory* (ed. E. Griffor), North-Holland Studies in Logic **140** (1999), pp. 37-85.
- [Cenzer-木原-Weber-吳 2009] D. Cenzer, T. Kihara, R. Weber, and G. Wu, Immunity and non-cupping for closed sets, *Tbilisi Math. J.* **2** (2009), 77–94.
- [Cenzer-Remmel 1998] D. Cenzer and J. B. Remmel, Π_1^0 classes in mathematics, *Handbook of Recursive Mathematics, vol 2*, Stud. Logic Found. Math. **139**: pp. 623-821. Elsevier, 1998.
- [Dekker, 1954] J. C. E. Dekker, A theorem on hypersimple sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), pp. 791–796.
- [Demuth, 1987] O. Demuth, A notion of semigenericity, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **28** (1987), pp. 71–84.
- [Demuth-Kučera, 1987] O. Demuth, and A. Kučera, Remarks on 1-genericity, semigenericity and related concepts, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **28** (1987), pp. 85–94.
- [Downey-Hirschfeldt 2010] R. G. Downey, and D. Hirschfeldt, *Algorithmic Randomness and Complexity*, Springer, Berlin, 2010.
- [Ehrenfeucht 1961] A. Ehrenfeucht, Separable theories, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **9** (1961), pp. 17–19.
- [Feferman 1964] S. Feferman, Some applications of the notions of forcing and generic sets, *Fundamenta Mathematicae*, **56** (1964), pp. 325–345.
- [Friedman 1975] H. Friedman, Some systems of second order arithmetic and their use, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pp. 235–242 (1975).
- [藤田 2000] H. Fujita, Lebesgue’s basis theorem, unpublished.
- [Gu-Lutz-Mayordomo 2006] X. Gu, J. H. Lutz, E. Mayordomo, Points on computable curves, In *Proceedings of 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 469–474. IEEE Computer Society Press, 2006.
- [Hertling 2005] P. Hertling, Is the Mandelbrot set computable? *Math. Log. Q.*, **51** (2005), pp. 5–18.
- [樋口-木原 201?] K. Higuchi, and T. Kihara, Mass problems and limit computable mathematics, in preparation.

- [Hinman 1969] P. G. Hinman, Some applications of forcing to hierarchy problems in arithmetic, *Mathematical Logic Quarterly* **15** (1969), pages 341–352.
- [Jockusch-Soare 1972] C. G. Jockusch, and R. I. Soare, Π_1^0 classes and degrees of theories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **173** (1972), pp. 33–56.
- [Iljazović 2009] Z. Iljazović, Chainable and circularly chainable co-r.e. sets in computable metric space, *J. Universal Comp. Sci.*, **15** (2009), pp. 1206–1235.
- [Illanes-Nadler 1999] A. Illanes, and S. Nadler, *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.
- [Kent-Lewis 201?] T. Kent, and A. E. M. Lewis, On the degree spectrum of a Π_1^0 class, to appear in *Transactions of the American Mathematical Society*.
- [木原 201?] T. Kihara, Effective dendrites and dendroids, in preparation.
- [Kleene 1943] S. C. Kleene, Recursive predicates and quantifiers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53** (1943), pp. 41–73.
- [Kleene 1950] S. C. Kleene, A symmetric form of Gödel’s theorem, *Nederl. Akad. Wentensch. Proc.*, **53** (1950), pp. 800–802.
- [Kleene 1955] S. C. Kleene, Hierarchies of number-theoretic predicates, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955), pp. 193–213.
- [Kreisel 1953] G. Kreisel, A variant to Hilbert’s theory of the foundations of arithmetic, *British J. Philos. Sci.*, **4** (1953), pp. 107–129.
- [Kreisel 1959] G. Kreisel, Analysis of the Cantor-Bendixson theorem by means of the analytic hierarchy, *Bull. Acad. Polon. des Sciences Ser. Math. Astronom. et Phys.*, **7** (1959), pp. 621–626.
- [Kreisel-Lacombe 1957] G. Kreisel, and D. Lacombe, Ensembles récursivement mesurables et ensembles récursivement ouverts ou fermé, *Compt. Rend. Acad. des Sci. Paris* **245** (1957), pp.1106–1109.
- [Kučera 1985] A. Kučera, Measure, Π_1^0 classes and complete extensions of PA, in *Recursion Theory Week* (Proceedings Oberwolfach 1984), H.-D. Ebbinghaus, G. Muller, and G. Sacks, eds., Lecture Notes in Mathematics 1141, Springer-Verlag, 1985, pp. 245–259.
- [Kurtz 1981] S. A. Kurtz, *Randomness and Genericity in the Degrees of Unsolvability*, Ph.D. Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1981.
- [Lebesgue 1917] H. Lebesgue, Sur certaines démonstrations d’existence. *Bull. Soc. Math. France*, **45** (1917), pp.132–144.

- [Miller 2002] J. S. Miller, Effectiveness for embedded spheres and balls, *Electronic Notes in Theoret. Comp. Sci.*, **66** (2002), pp. 127–138.
- [Miller-Martin 1968] W. Miller, and D. A. Martin, The degree of hyperimmune sets, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, **14** (1968), pp. 159–166.
- [Nadler 1992] S. B. Nadler, *Continuum Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [Nies 2009] A. Nies, *Computability and Randomness*, Oxford Logic Guides **51**, Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [Odifreddi 1989] P. Odifreddi, *Classical Recursion Theory: the theory of functions and sets of natural numbers*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **125**, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [Odifreddi 1999] P. Odifreddi, *Classical Recursion Theory, Vol. II*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **143**, North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [Orevkov 1963] V. P. Orevkov, A constructive mapping of a square onto itself displacing every constructive point, Soviet Mathematics IV. Translation of *Doklady Akademii Nauk SSSR. Publ.*, 1963.
- [Penrose 1989] R. Penrose, *Emperor's New Mind. Concerning Computers, Minds and The Laws of Physics*. Oxford University Press, New York, 1989.
- [Rettinger-Zheng 2009a] R. Rettinger, and X. Zheng, On the computability of rectifiable simple curve, 6th Int'l Conf. on Computability and Complexity in Analysis, 2009, pp. 221–232.
- [Rettinger-Zheng 2009b] R. Rettinger, and X. Zheng, Points on computable curves of computable lengths, LNCS 5734, pp. 736–747 (2009).
- [le Roux-Ziegler 2008] S. Le Roux, and M. Ziegler, Singular coverings and non-uniform notions of closed set computability, *Math. Log. Q.*, **54** (2008), pp. 545–560.
- [Scott 1962] D. Scott, Algebras of sets binumerable in complete extensions of arithmetic, in *Recursive Function Theory*, J. Dekker, ed., *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **5**, American Mathematical Society, 1962, pp. 117–121.
- [Shoenfield 1958a] J. Shoenfield, Degrees of formal systems, *Journal of Symbolic Logic*, **23** (1958), pp. 389–392.
- [Shoenfield 1958b] J.R. Shoenfield, The class of recursive functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 690–692.
- [Shoenfield 1960] J. Shoenfield, Degrees of models, *Journal of Symbolic Logic*, **25** (1960), pp. 233–237.

- [Simpson 1999] S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Springer-Verlag, 1999.
- [Soare 1987] R. I. Soare, *Recursively Enumerable Sets and Degrees*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer, Berlin, 1987.
- [Specker 1959] E. Specker, Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis, In: *Constructivity in Mathematics* (A. Heyting, ed.), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, pp. 254–265 (North-Holland, 1959).
- [田中 1970] Y. Tanaka, On a Π_1^0 set of positive measure, *Nagoya Math. J.*, **38** (1970), pp. 139–144.
- [Weihrauch 2000] K. Weihrauch, *Computable Analysis: an introduction*, Springer, Berlin, 2000.
- [田中 1971] 田中 尚夫, 解析的整列順序と Basis theorem, *数学* **23**, (1971), pp.177-192.