数理解析研究所講究録
第1729巻 2011年 36-47

到達可能関係の推移閉包を扱う様相論理のカノニカルモデルについて

鹿島 亮 (Ryo Kashima)
東京工業大学 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 序

本稿では命題様相論理の証明体系とクリプキモデルの基本知識を前提とする（たとえば文献 [1], [4] などを参照）．

よく知られているように**カノニカルモデル** (canonical model) は様相論理研究の重要な道具である．具体的には次の事実が成り立つ．

事実 1.1 (カノニカルモデルの基本定理) 命題様相論理$\mathcal{L}$が基本的な体系 K の公理と推論規則を含んでいて無矛盾ならば，$\mathcal{L}$に対するカノニカルモデル$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$が定義できて次の性質が成り立つ．任意の論理式$\varphi$と$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$の任意の可能世界$\Gamma$（これは論理式の集合である）に対して，

$$\varphi\in\Gamma \iff \mathcal{M}_{\mathcal{L}},\Gamma\models\varphi.$$

これを使うと様々な命題様相論理の公理系の完全性が簡単に証明できる．たとえば S5 が同値関係モデルに対して完全であることを示すには，単に「S5 のカノニカルモデル $\mathcal{M}_{\mathrm{S5}}$ が同値関係モデルになること」だけを示せばよいのである．

本稿の目的は，**到達可能関係の推移閉包を扱う様相論理**に対してもこのようなカノニカルモデルの基本定理を確立することである（ただし通常のカノニカルモデルと違って可能世界集合が有限になるので定理の文面が少し変わってくる）．

到達可能関係の推移閉包を扱う様相論理とは，「到達可能関係Rで解釈される様相記号□」と「Rの推移閉包で解釈される様相記号$\Box^+$」とを持っている論理のことであり，直感的には

$$\Box^+\varphi \leftrightarrow \Box\varphi\land\Box\Box\varphi\land\Box\Box\Box\varphi\land\cdots$$

となるような様相記号のペア $(\Box,\Box^+)$ を持つ論理のことである．このような論理の具体例としては，共通認識 (common knowledge) を扱う様相論理 — 本稿では CK と呼ぶ — がある．CK は「全員が知っている」を意図する様相記号 **E** と，「共通認識である」を意図する様相記号 **C** を持ち，これが

$$\mathbf{C}\varphi \leftrightarrow \mathbf{E}\varphi\land\mathbf{EE}\varphi\land\mathbf{EEE}\varphi\land\cdots$$

を満たす．

CK のカノニカルモデルを用いた完全性証明は文献 [2] で言及されている．そこでは，まず CK を S5 と見なした場合に K と見なせる体系 — これを仮に $\mathrm{CK_K}$ と呼ぶ — の完全性を有限カノニカルモデルによって示した後に，「K の完全性証明（無限カノニカルモデルを用いるもの）から S5 の完全性証明を得るのと同じ拡張をこの $\mathrm{CK_K}$ の完全性証明に施せば CK の完全性が得られる」とだけ述べて，CK に対する詳細な証明は書かれていない．しかし実際には，有限モデルを用いる CK と $\mathrm{CK_K}$ の完全性証明の間には無視できないギャップが存在する．

本稿では汎用的な有限カノニカルモデルの基本定理を証明して，その具体的な適用例として CK の完全性のギャップのない証明を与える．

2 有限のカノニカルモデル—通常の様相記号に対して

通常の単純なカノニカルモデルは無限モデル（可能世界集合が無限集合）であるが，本稿で考察する様相論理のカノニカルモデルは技術的な理由から有限モデルになる．そこでこの節では，通常の様相記号だけの場合に有限カノニカルモデルを与える一般的な方法をひとつ定める．次節でこれに推移閉包に対応する様相記号を加えることになる．

命題様相論理 $\mathcal{L}$ は様相記号は $\Box_1, \Box_2, \ldots, \Box_k$ を持つとする（k は 1 以上の定数）．$\Diamond_i$ は $\neg\Box_i\neg$ の略記とする．命題記号を $p, q, \ldots$ 等で表し，論理式を $\varphi, \psi, \ldots$ 等で表す．また様相記号を $\Box$ で表す（つまり例えば $\Box p \lor \neg\Box p$ と書いたら，適当な i についての $\Box_i p \lor \neg\Box_i p$ のことである）．$\top$ と $\bot$ はそれぞれ真，偽の命題定数とする．論理式の有限集合 Γ に対して，Γ の要素をすべて $\land$ および $\lor$ で結んだ論理式をそれぞれ $\bigwedge(\Gamma)$ および $\bigvee(\Gamma)$ と表記する．

$\mathcal{L}$ で論理式 φ が証明できることを $\mathcal{L} \vdash \varphi$ と書く．本稿全体で $\mathcal{L}$ は次のすべての条件を満たすとする．

> 古典論理のトートロジーの形をした論理式と，各様相記号 $\Box$ についての「K 公理」$\Box(\varphi\to\psi)\to(\Box\varphi\to\Box\psi)$ はすべて証明できる．推論規則 modus pones と各様相記号 $\Box$ についての necessitation に関して閉じている．つまり，$(\mathcal{L} \vdash \varphi\to\psi) \& (\mathcal{L} \vdash \varphi) \Longrightarrow (\mathcal{L} \vdash \psi)$，および $(\mathcal{L} \vdash \varphi) \Longrightarrow (\mathcal{L} \vdash \Box\varphi)$.

このような $\mathcal{L}$ は**正規** (normal) であると言う．さらに本稿全体で $\mathcal{L}$ は無矛盾である（つまり $\mathcal{L} \nvdash \bot$）とする．

Γ と Δ が論理式の有限集合のとき，$\Gamma \Rightarrow \Delta$ という表現を**シークエント** (sequent) と呼ぶ．論理式 $\bigwedge(\Gamma)\to\bigvee(\Delta)$ が証明できるとき「シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ が証明できる」という．

シークエントに関して次のよく知られた推論規則が$\mathcal{L}$で利用可能であることを後の議論の中で使用する．これらは$\mathcal{L}$が正規であることから言える．

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{cut}) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}\,(\Box) \quad (\Box = \Box_1, \ldots, \Box_k \text{ に対して})$$

ただし$\Box\Gamma = \{\Box\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$である．もちろんこれ以外の通常のLKの推論規則もすべて利用可能である．

ΓとΔに共通要素が無く$\Gamma \cup \Delta = \Omega$のときにはシークエント$\Gamma \Rightarrow \Delta$のことを「$\Omega$の**分割**」とも呼ぶ（集合$\Omega$を左辺$\Gamma$と右辺$\Delta$に分割した，という気持ち）．cut規則を考えると次の事実が簡単にわかる．

事実 2.1 (証明不可能シークエントの拡張) Ωが論理式の有限集合でΓとΔが共にΩの部分集合で，$\mathcal{L} \nvdash (\Gamma \Rightarrow \Delta)$であるならば

$$\Gamma \subseteq \Gamma', \quad \Delta \subseteq \Delta', \quad \mathcal{L} \nvdash (\Gamma' \Rightarrow \Delta')$$

となるΩの分割$\Gamma' \Rightarrow \Delta'$が存在する．

様相記号$\Box_1, \Box_2, \ldots, \Box_k$用のクリプキモデルを$M = \langle W, R_1, R_2, \ldots, R_k, V\rangle$と表記する．$W$は可能世界集合，$R_i$は$\Box_i$を解釈するための到達可能関係（$W$上の2項関係），$V$は割り当て：$W \times \{\text{命題変数}\} \to \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}$である．$M$の世界$x$で論理式$\varphi$が真（true）であることを$M, x \models \varphi$と書く．

ここから有限カノニカルモデルの定義が始まる．

一般に論理式の集合$\mathcal{X}$と様相記号$\Box$ごとに$\mathbb{R}^{\mathcal{X}}_{\Box}$という記法を導入しておく．これはシークエント間の2項関係であり，次のように定める．

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta)\ \mathbb{R}^{\mathcal{X}}_{\Box}\ (\Pi \Rightarrow \Sigma) \iff \forall\varphi\Big[(\Box\varphi \in (\Gamma \cap \mathcal{X})) \Longrightarrow (\varphi \in \Pi)\Big].$$

今$\mathcal{S}$と$\mathcal{T}$は次を満たす論理式集合とする。

- $\mathcal{S}$も$\mathcal{T}$も有限集合で$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.
- $\forall\varphi\forall\varphi'\Big[(\varphi \in \mathcal{S})\&(\varphi' \text{ は } \varphi \text{ の部分論理式}) \Longrightarrow (\varphi' \in \mathcal{S})\Big]$（つまり$\mathcal{S}$は部分式に関して閉じている）．
- $\Box = \Box_1, \Box_2, \ldots, \Box_k$に対して$\forall\varphi\Big[(\Box\varphi \in \mathcal{T}) \Longrightarrow (\varphi \in \mathcal{T})\Big]$（つまり$\mathcal{T}$は「$\Box$消去」に関して閉じている）．

このときクリプキモデル$\langle W, R_1, R_2, \ldots, R_k, V\rangle$が次の条件を満たすならば，これを「**論理$\mathcal{L}$の，集合$\mathcal{S}, \mathcal{T}$に関する有限カノニカルモデル**」と呼ぶ．

- $W = \{(\Gamma \Rightarrow \Delta) \mid (\Gamma \Rightarrow \Delta)$ は $\mathcal{T}$ の分割で，$\mathcal{L} \nvdash (\Gamma \Rightarrow \Delta)\}$（したがって W は有限集合である）．
- 各 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}_{\Box_i} \subseteq R_i \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\Box_i}$. つまり W の任意の要素 $(\Gamma \Rightarrow \Delta)$, $(\Pi \Rightarrow \Sigma)$ に対して次の 2 条件が成り立つ．

  (条件 A) $\forall\varphi\Big[(\Box_i\varphi \in (\Gamma \cap \mathcal{T})) \Longrightarrow (\varphi \in \Pi)\Big]$ ならば $(\Gamma \Rightarrow \Delta)R_i(\Pi \Rightarrow \Sigma)$.

  (条件 B) $(\Gamma \Rightarrow \Delta)R_i(\Pi \Rightarrow \Sigma)$ ならば $\forall\varphi\Big[(\Box_i\varphi \in (\Gamma \cap \mathcal{S})) \Longrightarrow (\varphi \in \Pi)\Big]$.
- $V((\Gamma \Rightarrow \Delta), p) = \mathsf{true} \iff p \in \Gamma$.

論理 $\mathcal{L}$ と集合 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ と到達可能関係 R_i を定めて，それが上記の条件を満たすことを示せば有限カノニカルモデルが得られたことになる．

定理 2.2 (有限カノニカルモデルの主定理（通常の様相記号）) 先述のように $\mathcal{L}$ は正規で無矛盾であるとする．上記の有限カノニカルモデル $M = \langle W, R_1, R_2, \ldots, R_k, V\rangle$ において，$\mathcal{S}$ に含まれるすべての論理式 φ と W のすべての要素 $(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ が次を満たす．

$$(\varphi \in \Gamma) \Longrightarrow (M, (\Gamma \Rightarrow \Delta) \models \varphi).$$
$$(\varphi \in \Delta) \Longrightarrow (M, (\Gamma \Rightarrow \Delta) \not\models \varphi).$$

（証明） φ に関する帰納法による．以下では $\varphi = \Box\alpha$ という形の場合だけ示す．R は $\Box$ を解釈する到達可能関係とする．

【$\Box\alpha \in \Gamma$ のとき】$(\Gamma \Rightarrow \Delta)R(\Pi \Rightarrow \Sigma)$ ならば条件 B より $\alpha \in \Pi$ となるので（$\Pi \Rightarrow \Sigma$ は任意），帰納法の仮定などから $M, (\Gamma \Rightarrow \Delta) \models \Box\alpha$ が得られる．

【$\Box\alpha \in \Delta$ のとき】$\Pi_0 = \{\beta \mid \Box\beta \in \Gamma\}$ とする．$\mathcal{L} \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ であることとシークエントの推論規則 $(\Box)$ から $\mathcal{L} \nvdash \Pi_0 \Rightarrow \alpha$ であり，事実 2.1 によってこれを拡張した $(\Pi \Rightarrow \Sigma) \in W$ が存在する．そして Π の定義と条件 A から $(\Gamma \Rightarrow \Delta)R(\Pi \Rightarrow \Sigma)$ になるので，帰納法の仮定などから $M, (\Gamma \Rightarrow \Delta) \not\models \Box\alpha$ が得られる．**（証明終）**

以下ではこの定理を S5 に適用してみる．S5 は様相記号が $\Box$ 一つ（つまり上記の記法では $k = 1$）で，証明体系は K の体系（公理：古典論理のトートロジーと「K 公理」，規則：necessitation と modus ponens）に次の公理を加えたものである．

$\Box\varphi \to \varphi$ （反射性に対応する公理）
$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ （推移性に対応する公理）
$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ （対称性に対応する公理）

定理 2.3 (S5 の有限モデルに対する完全性定理) $\mathrm{S5} \vdash \varphi_0 \iff \varphi_0$ は可能世界集合が有限で到達可能関係が同値関係であるような任意のモデルの任意の世界で真

(証明)「$\Longrightarrow$ (健全性)」は簡単.「$\Longleftarrow$ (完全性)」は S5 $\nvdash \varphi_0$ のとき, φ_0 を偽にする有限同値関係モデルの存在を示す. そのモデルは上記の有限カノニカルモデル $M = \langle W, R, V\rangle$ であるが, そこでの論理式集合 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ と到達可能関係 R は次のように定義する.

$\mathcal{S} =$「φ_0 の部分論理式全体 (φ_0 自身も含む)」.

$\mathcal{T} = \mathcal{S} \cup \{\Box\Box\alpha, \Box\neg\Box\alpha, \neg\Box\alpha \mid \Box\alpha \in \mathcal{S}\}$.

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta)\ R\ (\Pi \Rightarrow \Sigma) \iff \forall\varphi\Big[(\Box\varphi \in \mathcal{S}) \Longrightarrow \Big((\Box\varphi \in \Gamma) \Leftrightarrow (\Box\varphi \in \Pi)\Big)\Big].$$

(つまりシークエントの左辺同士で $\mathcal{S}$ 中の同じ $\Box$ 論理式を含む)

後ほど, この R が有限カノニカルモデルの条件を満たすことを示す. そうすればこれが求めるモデルになっていることは明らかである. なぜなら有限同値関係モデルであることは定義からすぐわかるし, S5 $\nvdash (\Rightarrow \varphi_0)$ であることから $\varphi_0 \in \Delta$ となる $\mathcal{T}$ の証明不可能な分割 $(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ が存在して (事実 2.1), その世界 $(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ で φ_0 が偽になることが主定理 2.2 から言える.

(条件 A) は W の要素 $(\Gamma \Rightarrow \Delta), (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ に対して, まず

$$\forall\varphi\Big[(\Box\varphi \in (\Gamma \cap \mathcal{T})) \Longrightarrow (\varphi \in \Pi)\Big], \tag{1}$$

$$\Box\varphi \in \mathcal{S}, \tag{2}$$

$$\Box\varphi \in \Gamma \tag{3}$$

を仮定して

$$\Box\varphi \in \Pi \tag{4}$$

を示す. これは (2) から $\Box\Box\varphi \in \mathcal{T}$ であり, (3) と S5 $\vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ から $\Box\Box\varphi \in \Gamma$ になり, (1) から (4) が得られる. (条件 A) の残りは, (1),(2) と

$$\Box\varphi \notin \Gamma \tag{5}$$

を仮定して $\Box\varphi \notin \Pi$ を示す. これは (2) から $\Box\neg\Box\varphi \in \mathcal{T}$, および (5) から $\Box\varphi \in \Delta$ であり, S5 $\vdash \Box\varphi \vee \Box\neg\Box\varphi$ から $\Box\neg\Box\varphi \in \Gamma$ になり (そうでないと $\Box\neg\Box\varphi \in \Delta$ で S5 $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ になってしまう), (1) から $\neg\Box\varphi \in \Pi$ で得られる.

(条件 B) は $(\Gamma \Rightarrow \Delta) R (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ と (2),(3) を仮定して $\varphi \in \Pi$ を示す. これはこれらの仮定から $\Box\varphi \in \Pi$ となり, S5 $\vdash \Box\varphi \rightarrow \varphi$ から得られる. **(証明終)**

3 推移閉包に対するカノニカルモデル

この節では到達可能関係の推移閉包で解釈される様相記号を持つ論理を考える．このような論理の完全性を示す際にはカノニカルモデルの有限性を本質的に使うことになる．

前節までの様相記号は $\Box_1, \Box_2, \ldots, \Box_k$ であったが，これに $k' \leq k$ なる定数 k' を使って新たな様相記号 $\Box_1^+, \Box_2^+, \ldots, \Box_{k'}^+$ を追加する．クリプキモデルにおいては $\Box_i^+$ は $\Box_i$ の到達可能関係の推移閉包で解釈する．つまり $M = \langle W, R_1, R_2, \ldots, R_k, V\rangle$, $x \in W$ において

$$M, x \models \Box_i^+\varphi \iff (\forall y \in W)(\forall n \geq 1)\Big[xR_i^n y \;\Rightarrow\; M, y \models \varphi\Big]$$

とする．ただし R_i^n は R_i の n 回の連鎖，つまり

$$xR_i^n y \iff \exists z_1, \exists z_2, \ldots, \exists z_{n-1}\Big[xR_i z_1 R_i z_2 R_i \cdots R_i z_{n-1} R_i y\Big]$$

である．

以下では $\Box^+, \Box$ と書いたときには，文脈で固定された $i \in \{1, 2, \ldots, k'\}$ に対する $\Box_i^+$ と $\Box_i$ のこととする．

定義から次が成り立つ．

$$M, x \models \Box^+\varphi \iff (\forall n \geq 1)\Big[M, x \models \overbrace{\Box\Box\cdots\Box}^{n}\varphi\Big].$$

つまり直感的には

$$\Box^+\varphi \iff \Box\varphi\wedge\Box\Box\varphi\wedge\Box\Box\Box\varphi\cdots$$

である．以下の論理式はすべてのモデルのすべての世界で真である．

(†) $\Box^+\varphi \to \Box\varphi\wedge\Box\Box^+\varphi$.

(‡) $\Box\varphi\wedge\Box^+(\varphi\to\Box\varphi) \to \Box^+\varphi$. （これは「帰納法公理」とも呼ばれる）

論理 $\mathcal{L}$ が，$\Box_i^+$ を含めたすべての様相記号に関して 2 節の意味で正規（つまり各 $\Box_i^+$ についての「K 公理」と「necesitation 規則」も持つ）であって，さらに上記の (†) と (‡) の形の論理式がすべて証明できるとき，「$\mathcal{L}$ は**推移閉包について正規**」と言う．

有限カノニカルモデルについては，前節の「論理 $\mathcal{L}$ の集合 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ に関する有限カノニカルモデル $\langle W, R_1, R_2, \ldots, R_k, V\rangle$」の定義をそのまま持ってくる．ただし $\mathcal{S}$ の条件「部分式に関して閉じている」については部分式の定義を次のように拡張する：

一般に「$\Box^+\varphi$ の部分式」に $\Box\Box^+\varphi$ と $\Box\varphi$ とを含める．

たとえば$\Box_1^+(p\land\Box_2^+q)$の部分式全部は

$$\Box_1^+(p\land\Box_2^+q),\ \Box_1\Box_1^+(p\land\Box_2^+q),\ \Box_1(p\land\Box_2^+q),\ p\land\Box_2^+q,\ p,\ \Box_2^+q,\ \Box_2\Box_2^+q,\ \Box_2q,\ q$$

である．

定理 3.1 (有限カノニカルモデルの主定理（推移閉包対応版）) $\mathcal{L}$が推移閉包について正規で無矛盾であるならば，前節の主定理*2.2*の主張がそのまま成り立つ．つまり有限カノニカルモデル$M = \langle W, R_1, R_2, \ldots, R_k, V\rangle$において，$\mathcal{S}$に含まれるすべての論理式$\varphi$と$W$のすべての要素$(\Gamma \Rightarrow \Delta)$が次を満たす．

$$(\varphi \in \Gamma) \quad\Longrightarrow\quad (M, (\Gamma \Rightarrow \Delta) \models \varphi).$$
$$(\varphi \in \Delta) \quad\Longrightarrow\quad (M, (\Gamma \Rightarrow \Delta) \not\models \varphi).$$

(証明) φに関する帰納法による．以下では$\varphi = \Box^+\omega$という形の場合だけ示す（他の場合は前節と同じ）．Rは$\Box$を解釈する到達可能関係とする．

【$(\Box^+\omega) \in \Gamma$のとき】まずはじめに，$W$の任意の要素$(\Pi \Rightarrow \Sigma), (\Pi' \Rightarrow \Sigma')$について次が成り立つことを示す．

$$\Big((\Box^+\omega) \in \Pi\Big)\ \&\ \Big((\Pi \Rightarrow \Sigma)R(\Pi' \Rightarrow \Sigma')\Big) \quad\Longrightarrow\quad \{(\Box^+\omega), \omega\} \subseteq \Pi'. \qquad (6)$$

これを用いれば，左辺に$\Box^+\omega$を含む$\Gamma \Rightarrow \Delta$から始めてこれを繰り返し適用すれば，任意の$n \geq 1$に対して

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta)R^n(\Pi' \Rightarrow \Sigma') \quad\Longrightarrow\quad \omega \in \Pi'$$

が言えるので，帰納法の仮定と合わせて題意が示される．(6) は次のことから示される．

> $(\Box^+\omega) \in \mathcal{S}$であること．$\mathcal{S}$が「拡張された部分式」に関して閉じていること．さきほどの論理式 (†) が証明できること．有限カノニカルモデルであるためのRの条件B.

【$(\Box^+\omega) \in \Delta$のとき】これはさらに準備をしてから示す．**(証明中断)**

以下では$\Box^+$, $\Box$は固定されたjについての$\Box_j^+, \Box_j$とする．Nは2以上の自然数とし，論理式ω, σ_i, τ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$を固定する．このとき，自然数mと関数fが次の三条件

- $1 \leq m \leq N.$
- fは$\{1, 2, \ldots, m\}$から$\{1, 2, \ldots, N\}$への単射.

- $f(1) = 1$.

を満たすならば，以下の形をした論理式のことを special formula と呼ぶ.

$$\sigma_{f(1)} \to \Box^+\Big(\tau_{f(1)} \to \sigma_{f(2)} \to \Box^+\Big(\tau_{f(2)} \to \cdots \to \sigma_{f(m)} \to \Box^+(\tau_{f(m)} \to \omega)\cdots\Big)\Big)$$

そして special formula 全体の集合を **SP** と書く．例えば $N = 3$ ならば

$$\begin{aligned}\mathbf{SP} = \{\ &\sigma_1 \to \Box^+(\tau_1 \to \omega),\\ &\sigma_1 \to \Box^+(\tau_1 \to \sigma_2 \to \Box^+(\tau_2 \to \omega)),\\ &\sigma_1 \to \Box^+(\tau_1 \to \sigma_3 \to \Box^+(\tau_3 \to \omega)),\\ &\sigma_1 \to \Box^+(\tau_1 \to \sigma_2 \to \Box^+(\tau_2 \to \sigma_3 \to \Box^+(\tau_3 \to \omega))),\\ &\sigma_1 \to \Box^+(\tau_1 \to \sigma_3 \to \Box^+(\tau_3 \to \sigma_2 \to \Box^+(\tau_2 \to \omega)))\ \}\end{aligned}$$

である．$N = 4$ ならば **SP** は 16 個の要素から成る.

補題 3.2 (Special formula に関する主補題) $\mathcal{L}$が推移閉包に関して正規であり，次の条件

(i) $\mathcal{L} \vdash \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \cdots \vee \sigma_N$,

(ii) $\mathcal{L} \vdash \sigma_i \to \Box\tau_i$, $\quad (i = 1, 2, \ldots, N)$

が成り立つならば，$\mathcal{L} \vdash (\mathbf{SP} \Rightarrow (\sigma_1 \to \Box^+\omega))$ （左辺が **SP** のシークエント）である.

この補題の証明は [3] に載っている.

さらにいくつかの準備をする.

論理式の有限集合 Γ に対して $\bigwedge \Gamma_{-\Box}$ とは論理式 $\bigwedge\{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma\}$ のこととする．たとえば

$$\bigwedge \{\Box\varphi_1, \Box^+\varphi_2, \neg\Box\varphi_3, \neg\neg\Box\varphi_4, \Box\Box\varphi_5\}_{-\Box} \quad = \quad \varphi_1 \wedge \Box\varphi_5$$

である．シークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ に対して $\neg[\Gamma \Rightarrow \Delta]$ とは論理式 $\neg(\bigwedge(\Gamma) \to \bigvee(\Delta))$ のこととする．これらの定義から，どんなシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ も次を満たすことが言える.

$$\mathcal{L} \vdash \ (\neg[\Gamma \Rightarrow \Delta]) \to \Box(\bigwedge \Gamma_{-\Box}). \tag{7}$$

(主定理 3.1 の証明再開) 【$\varphi = (\Box^+\omega) \in \Delta$ のとき】可能世界集合 W のすべての要素（つまり $\mathcal{T}$ の証明不可能分割すべて）を $(\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1), (\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2), \ldots, (\Gamma_N \Rightarrow \Delta_N)$ と

する（有限モデルであることがこの辺りに効いている）．ただし1番目の $(\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1)$ は今の証明で着目している $(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ であるとする．$i = 1, 2, \ldots, N$ に対して論理式 σ_i と τ_i を

$$\sigma_i = \neg[\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i], \quad \tau_i = \bigwedge (\Gamma_i)_{-\Box}$$

とすると補題3.2の条件 (i)(ii) が成り立つ．なぜなら (ii) は上記の (7) から言え，(i) は $\mathcal{T}$ のすべての分割を $(\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i)$ としたとき（ただし $i = 1, 2, \ldots, N, (N+1), (N+2), \ldots, N'$ であり，$N < j$ のときには $\mathcal{L} \vdash (\Gamma_j \Rightarrow \Delta_j)$ である），次の論理式

$$\neg[\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1] \vee \neg[\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2] \vee \cdots \vee \neg[\Gamma_N \Rightarrow \Delta_N] \vee \cdots \vee \neg[\Gamma_{N'} \Rightarrow \Delta_{N'}]$$

がトートロジーであることなどから言える．したがって補題3.2が適用できて $\mathcal{L} \vdash (\mathbf{SP} \Rightarrow (\sigma_1 \to \Box^+\omega))$ となる．ところで $\sigma_1 \to \Box^+\omega$ は $\Gamma \Rightarrow \Delta$ と同値であり（$\because \Box^+\omega \in \Delta$），このシークエント $\Gamma \Rightarrow \Delta$ は $\mathcal{L}$ で証明不可能であった．したがって $\mathcal{L}$ で証明不可能な special formula

$$\sigma_{f(1)} \to \Box^+\Big(\tau_{f(1)} \to \sigma_{f(2)} \to \Box^+\Big(\tau_{f(2)} \to \cdots \to \sigma_{f(m)} \to \Box^+(\tau_{f(m)} \to \omega) \cdots \Big)\Big)$$

が必ず存在する．この m と $f(1), \ldots, f(m)$ に対して

$$\mathcal{L} \not\vdash \tau_{f(1)} \to \sigma_{f(2)} \to \bot, \quad \mathcal{L} \not\vdash \tau_{f(2)} \to \sigma_{f(3)} \to \bot, \quad \ldots \quad \mathcal{L} \not\vdash \tau_{f(m-1)} \to \sigma_{f(m)} \to \bot, \tag{8}$$

$$\mathcal{L} \not\vdash \tau_{f(m)} \to \omega \tag{9}$$

であり（$\because$ これらどの論理式からも $\Box^+$ の necessitation 規則などで上の special formula が導かれる），さらに (8) と σ_i の定義から $i = 1, 2, \ldots, m-1$ に対して

$$\mathcal{L} \not\vdash \ (\tau_{f(i)}, \Gamma_{f(i+1)} \Rightarrow \Delta_{f(i+1)}) \tag{10}$$

となる．ここで次を示せば $\Box^+$ の解釈の定義と帰納法の仮定から求める $M, (\Gamma \Rightarrow \Delta) \not\models \Box^+\omega$ が示される．

（ア）$m \geq 2$ ならば，$i = 1, 2, \ldots, m-1$ に対して，$(\Gamma_{f(i)} \Rightarrow \Delta_{f(i)}) R (\Gamma_{f(i+1)} \Rightarrow \Delta_{f(i+1)})$.

（イ）W の要素 $(\Pi \Rightarrow \Sigma)$ が存在して，$(\Gamma_{f(m)} \Rightarrow \Delta_{f(m)}) R (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ かつ $\omega \in \Sigma$.

【アの証明】$\forall\varphi\Big[(\Box\varphi \in (\Gamma_{f(i)} \cap \mathcal{T})) \Longrightarrow (\varphi \in \Gamma_{f(i+1)})\Big]$ となるので（$\because$ もし，ある $\Box\varphi \in (\Gamma_{f(i)} \cap \mathcal{T})$ について $\varphi \notin \Gamma_{f(i+1)}$ だとすると $\mathcal{T}$ が $\Box$ 消しに関して閉じていることなどから $\varphi \in \Delta_{f(i+1)}$ になり $\tau_{f(i)}$ が $\bigwedge (\Gamma_{f(i)})_{-\Box}$ であることと合わせて (10) に反する），有限カノニカルモデルの R が満たすべき条件Aによって成り立つ．

【イの証明】$\Pi_0 = \{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma_{f(m)}\}$ とすると (9) から $\mathcal{L} \not\vdash \ \Pi_0 \Rightarrow \omega$. これを証明不可能生を保ったまま拡張（事実2.1）すれば，求める $\Pi \Rightarrow \Sigma$ が得られる．$(\Gamma_{f(m)} \Rightarrow \Delta_{f(m)}) R (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ は先程と同様に条件Aによって成り立つ． **（証明終）**

4 共通認識の論理への適用

前節の結果を共通認識の論理 CK に具体的に適用してみる.

登場人物がとりあえず2人（A さんと B さん）である場合は，CK は4つの様相記号 $\mathbf{K}_{\mathrm{A}}, \mathbf{K}_{\mathrm{B}}, \mathbf{E}, \mathbf{C}$ を持つ．それぞれの記号の意図は次の通り．

$\mathbf{K}_{\mathrm{A}}\varphi$：A が φ を知っている．
$\mathbf{K}_{\mathrm{B}}\varphi$：B が φ を知っている．
$\mathbf{E}\varphi$：全員（今の場合2人）が φ を知っている．
$\mathbf{C}\varphi$：φ は全員の共通認識である．

CK の公理，推論規則は次の通り．

公理：古典論理のトートロジー．$\mathbf{K}_{\mathrm{A}}, \mathbf{K}_{\mathrm{B}}$ 両方に対する S5 の公理．
$\mathbf{E}\varphi \leftrightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{A}}\varphi \wedge \mathbf{K}_{\mathrm{B}}\varphi$. $\mathbf{C}\varphi \to \mathbf{E}\varphi \wedge \mathbf{EC}\varphi$（前節の (†)），$\mathbf{E}\varphi \wedge \mathbf{C}(\varphi \to \mathbf{E}\varphi) \to \mathbf{C}\varphi$（前節の (‡)）．

規則：modus ponenns. 4つの様相記号に関する necessitation
（注：$\mathbf{E}$ について necessiaion 及び「K 公理」は，$\mathbf{K}_{\mathrm{A}}, \mathbf{K}_{\mathrm{B}}$ に対するそれらから導ける）

CK のモデルは $M = \langle W, R_{\mathbf{K}_{\mathrm{A}}}, R_{\mathbf{K}_{\mathrm{B}}}, V\rangle$ という形である．$R_{\mathbf{K}_{\mathrm{A}}}, R_{\mathbf{K}_{\mathrm{B}}}$ は共に W 上の同値関係であり，それぞれ $\mathbf{K}_{\mathrm{A}}$ と $\mathbf{K}_{\mathrm{B}}$ を解釈するための到達可能関係である．そして2項関係 $R_{\mathbf{E}}$ を「$R_{\mathbf{K}_{\mathrm{A}}}$ と $R_{\mathbf{K}_{\mathrm{B}}}$ の和」として定義して，つまり

$$xR_{\mathbf{E}}y \iff xR_{\mathbf{K}_{\mathrm{A}}}y \text{ or } xR_{\mathbf{K}_{\mathrm{B}}}y$$

として，様相記号 $\mathbf{E}$ はこの到達可能関係 $R_{\mathbf{E}}$ で解釈する．さらに $\mathbf{C}$ は $R_{\mathbf{E}}$ の推移閉包で解釈する，つまり，

$$M, x \models \mathbf{C}\varphi \iff (\forall y \in W)(\forall n \geq 1)\Big[x(R_{\mathbf{E}})^n y \;\Rightarrow\; M, y \models \varphi\Big].$$

定理 4.1 (CK の有限モデルに対する完全性定理) $\mathrm{CK} \vdash \varphi_0 \iff \varphi_0$ は任意の有限 CK モデルの任意の世界で真．

(証明)「$\Longrightarrow$（健全性）」は簡単.「$\Longleftarrow$（完全性）」は CK $\nvdash \varphi_0$ のとき，φ_0 を偽にする有限モデルの存在を示す．これには $\Box_1 = \mathbf{E}$, $\Box_2 = \mathbf{K}_{\mathrm{A}}$, $\Box_3 = \mathbf{K}_{\mathrm{B}}$, $\Box_1^+ = \mathbf{C}$ として前節の枠組みに当てはめて有限カノニカルモデルを作ればよい．その際，$\mathbf{K}_{\mathrm{A}}, \mathbf{K}_{\mathrm{B}}$ については S5 の完全性証明（定理 2.3）を流用する．

まず論理式集合 $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ を次のように定義する．$\mathcal{S}$ は φ_0 の部分論理式全体（φ_0 自身も含む）．ただしここでは「$\mathbf{E}\varphi$ の部分式」には「$\mathbf{K}_{\mathrm{A}}\varphi$, $\mathbf{K}_{\mathrm{B}}\varphi$」の2つも含め,「$\mathbf{C}\varphi$ の部分式」には「$\mathbf{EC}\varphi$, $\mathbf{E}\varphi$, $\mathbf{K}_{\mathrm{A}}\varphi$, $\mathbf{K}_{\mathrm{B}}\varphi$」の4つも含める．$\mathcal{T}$ は以下で段階的に定義する．

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{S} \ \cup \ \{\mathbf{K_A K_A}\alpha, \mathbf{K_A}\neg\mathbf{K_A}\alpha, \neg\mathbf{K_A}\alpha \mid \mathbf{K_A}\alpha \in \mathcal{S}\} \cup \{\mathbf{K_B K_B}\alpha, \mathbf{K_B}\neg\mathbf{K_B}\alpha, \neg\mathbf{K_B}\alpha \mid \mathbf{K_B}\alpha \in \mathcal{S}\}.$$

$\mathcal{B} = \{\alpha \mid \mathbf{K_A}\alpha \in \mathcal{T}_0 \text{ or } \mathbf{K_B}\alpha \in \mathcal{T}_0\}$.

$\mathcal{B}^{\vee} = \{\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ は $\mathcal{B}$ の相異なる要素 $\}$.

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \cup \{\alpha, \mathbf{K_A}\alpha, \mathbf{K_B}\alpha, \mathbf{E}\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B}^{\vee}\}$.

このように定義すると次が成り立つ.

$$\mathbf{E}\alpha \in \mathcal{S} \implies \{\mathbf{K_A}\alpha,\ \mathbf{K_B}\alpha\} \subseteq \mathcal{S}. \tag{11}$$

$$\mathbf{K_A}\alpha \in \mathcal{S} \implies \{\mathbf{K_A K_A}\alpha,\ \mathbf{K_A}\neg\mathbf{K_A}\alpha,\ \neg\mathbf{K_A}\alpha\} \subseteq \mathcal{T}. \tag{12}$$

$$\mathbf{K_B}\alpha \in \mathcal{S} \implies \{\mathbf{K_B K_B}\alpha,\ \mathbf{K_B}\neg\mathbf{K_B}\alpha,\ \neg\mathbf{K_B}\alpha\} \subseteq \mathcal{T}. \tag{13}$$

$$\{\mathbf{K_A}\alpha, \mathbf{K_B}\beta\} \subseteq \mathcal{T} \implies \exists\gamma\Big[(\gamma \equiv \alpha\vee\beta)\ \&\ \{\gamma,\ \mathbf{K_A}\gamma,\ \mathbf{K_B}\gamma,\ \mathbf{E}\gamma\} \subseteq \mathcal{T}\Big]. \tag{14}$$

ただし「$\gamma \equiv \alpha\vee\beta$」は γ と $\alpha\vee\beta$ が古典論理上で同値であることを表す. そしてこの $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ を使って有限カノニカルモデル $M = \langle W, R_{\mathbf{E}}, R_{\mathbf{K_A}}, R_{\mathbf{K_B}}, V\rangle$ の到達可能関係を次で定義する.

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta) R_{\mathbf{K_A}} (\Pi \Rightarrow \Sigma) \iff \forall\varphi\Big[(\mathbf{K_A}\varphi \in \mathcal{S}) \Longrightarrow \Big((\mathbf{K_A}\varphi \in \Gamma) \ \Leftrightarrow\ (\mathbf{K_A}\varphi \in \Pi)\Big)\Big].$$

$$(\Gamma \Rightarrow \Delta) R_{\mathbf{K_B}} (\Pi \Rightarrow \Sigma) \iff \forall\varphi\Big[(\mathbf{K_B}\varphi \in \mathcal{S}) \Longrightarrow \Big((\mathbf{K_B}\varphi \in \Gamma) \ \Leftrightarrow\ (\mathbf{K_B}\varphi \in \Pi)\Big)\Big].$$

R_E は $R_{\mathbf{K_A}}$ と $R_{\mathbf{K_B}}$ の和.

$R_{\mathbf{K_A}}, R_{\mathbf{K_B}}$ の定義は S5 の場合と同じであり, これが次の求める性質

$$\mathbb{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{K_A}} \subseteq R_{\mathbf{K_A}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\mathbf{K_A}}, \quad \mathbb{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{K_B}} \subseteq R_{\mathbf{K_B}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\mathbf{K_B}}, \tag{15}$$

を満たすことは (12)(13) などを使って定理 2.3 の場合とまったく同様に示される. そこで後は $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{E}} \subseteq R_{\mathbf{E}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\mathbf{E}}$ を示す.

【$\mathbb{R}^{\mathcal{T}}_{\mathbf{E}} \subseteq R_{\mathbf{E}}$】「対偶」を示す. すなわち W の要素 $(\Gamma \Rightarrow \Delta), (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ に対して,

$$\Big((\Gamma \Rightarrow \Delta) R_{\mathbf{K_A}} (\Pi \Rightarrow \Sigma) \text{ でない}\Big) \text{ かつ } \Big((\Gamma \Rightarrow \Delta) R_{\mathbf{K_B}} (\Pi \Rightarrow \Sigma) \text{ でない}\Big) \tag{16}$$

を仮定して

$$\exists\gamma\Big[(\mathbf{E}\gamma \in (\Gamma \cap \mathcal{T})) \text{ かつ } (\gamma \notin \Pi)\Big] \tag{17}$$

を示す. まず (16) と (15) から $\exists\alpha\Big[(\mathbf{K_A}\alpha \in (\Gamma\cap\mathcal{T}))$ かつ $(\alpha \notin \Pi)\Big]$, および $\exists\beta\Big[(\mathbf{K_B}\beta \in (\Gamma \cap \mathcal{T}))$ かつ $(\beta \notin \Pi)\Big]$ となる. これらの α, β と (14) から得られる γ については, 次の論理式が CK で証明できる：

$\mathbf{K_A}\alpha\to\mathbf{K_A}\gamma$, $\mathbf{K_B}\beta\to\mathbf{K_A}\gamma$, $\mathbf{K_A}\gamma\wedge\mathbf{K_B}\gamma\to\mathbf{E}\gamma$ (これは CK の公理である)

したがって $\mathbf{E}\gamma \in \Gamma$ となる．一方 $\alpha \notin \Pi$, $\beta \notin \Pi$ であることから $\alpha \in \Sigma$, $\beta \in \Sigma$ であり，$\gamma \notin \Pi$ となる（そうでないと $\vdash (\gamma \Rightarrow \alpha, \beta)$ であることから $\vdash (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ になってしまう）．したがって (17) が成り立つ．

【$R_{\mathbf{E}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\mathbf{E}}$】$(\Gamma \Rightarrow \Delta) R_{\mathbf{E}} (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ を仮定する，したがってたとえば $(\Gamma \Rightarrow \Delta) R_{\mathbf{K}_{\mathrm{A}}} (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ であるとする．このとき $(\Gamma \Rightarrow \Delta) \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{\mathbf{E}} (\Pi \Rightarrow \Sigma)$ であること，すなわち $\forall\varphi\Big[(\mathbf{E}\varphi \in (\Gamma \cap \mathcal{S})) \Longrightarrow (\varphi \in \Pi)\Big]$ を示す．$\mathbf{E}\varphi \in (\Gamma \cap \mathcal{S})$ とすると，$\mathrm{CK} \vdash \mathbf{E}\varphi \rightarrow \mathbf{K}_{\mathrm{A}}\varphi$ であることから $\mathbf{K}_{\mathrm{A}}\varphi \in \Gamma$ であり，(11) と (15) から $\varphi \in \Pi$ となる．以上で示された．**（証明終）**

参考文献

[1] B.F.Chellas, Modal Logic: An Introduction, (Cambridge University Press, 1980).

[2] R.Fagin, J.Y.Halpern, Y.Moses, and M.Y.Vardi, Reasoning About Knowledge, (MIT Press, 1995).

[3] R.Kashima, Completeness proof by semantic diagrams for transitive closure of accessibility relation, Advances in Modal Logic, Volume 8, pp. 200-217 (2010).

[4] J.van Benthem, Modal Logic for Open Minds, (CSLI Publications, 2010).