数理解析研究所講究録
第 1729 巻 2011 年 1-8

2 階直観主義命題論理の Kripke モデルと束論的モデルの双対性[1]

藤田憲悦 (Ken-etsu Fujita) [2]　　倉田俊彦 (Toshihiko Kurata) [3]

概要

2 階直観主義命題論理の体系 NJ_2 との間で完全性定理が成り立つモデル概念として Sobolev による Kripke モデルが知られている．この結果に対して，位相空間を用いた一般的な視点から新たに Kripke モデルの定義を与える．更に，その中で特に sober な位相空間に基づくモデルには，Stone 双対性を経由して束論的モデルを対応させることが可能となり，両モデルにおける解釈が一致することを示すことが出来る．

1. Sobolev による Kripke モデルとその一般化

Sobolev による NJ_2 のモデル概念 [3, 4] は順序集合の上に定義される．実際に，順序集合 $\langle C, \leq \rangle$ に対して，$C^+ = \{U \in \mathcal{P}C \mid c \in U \,\&\, c \leq d \Longrightarrow d \in U\}$ と記述することにして，

(1) $$c \leq d \quad \text{ならば} \quad D_c \subseteq D_d$$

の条件を満たすように，各 $c \in C$ に対応する domain $D_c \subseteq C^+$ を与え，これらの組 $\langle C, \leq, \{D_c \mid c \in C\} \rangle$ として Kripke モデルの構造が導入される．そして，一般に，各命題変数に C^+ の要素を対応させる写像を環境として，Prop_2 を NJ_2 の命題の集合としたとき，$A \in \mathrm{Prop}_2$, $c \in C$, 環境 ξ に対して，関係 $c, \xi \Vdash A$ を以下の条件によって再帰的に定義する．

(1) $c, \xi \Vdash \bot$ が成り立つことはない．

(2) $c, \xi \Vdash p \iff c \in \xi(p)$.

(3) $c, \xi \Vdash A \wedge B \iff c, \xi \Vdash A$ かつ $c, \xi \Vdash B$.

(4) $c, \xi \Vdash A \vee B \iff c, \xi \Vdash A$ または $c, \xi \Vdash B$.

(5) $c, \xi \Vdash A \to B \iff \forall d \in {\uparrow} c \;\; (d, \xi \Vdash A$ ならば $d, \xi \Vdash B)$.

(6) $c, \xi \Vdash \forall p.A \iff \forall d \in {\uparrow} c \;\; \forall U \in D_d \;\; d, \xi(p{:}U) \Vdash A$.

(7) $c, \xi \Vdash \exists p.A \iff \exists U \in D_c \;\; c, \xi(p{:}U) \Vdash A$.

また，$\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}_2$ として，任意の $A \in \Gamma$ に対して $c, \xi \Vdash A$ が成り立つことを $c, \xi \Vdash \Gamma$ と略記する．$\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}_2$, $c \in C$, 環境 ξ に対して，$\xi(\mathrm{FV}(\Gamma)) \subseteq D_c$ が成り立つ時，ξ は Γ と c に関して admissible であると呼ぶ．そして，Kripke モデル $\mathscr{S} = \langle C, \leq, \{D_a \mid a \in X\} \rangle$ と $c \in C$, 環境 ξ に対して，ξ が Γ, A と c に関して admissible ならば

$$c, \xi \Vdash \Gamma \Longrightarrow c, \xi \Vdash A$$

---

[1]This research was supported in part by Grant-in-Aid for Young Scientists (B)(19700012).

[2]群馬大学大学院工学研究科　群馬県桐生市天神町 1-5-1　e-mail:fujita@cs.gunma-u.ac.jp

[3]法政大学経営学部　東京都千代田区富士見 2-17-1　e-mail:kurata@hosei.ac.jp

が成り立つとき $\Gamma \vdash A$ は $\mathscr{S}$ で valid であると呼ぶ.

このような Kripke モデルの中で，特別な構造に注目すると完全性が成り立つことが知られている．実際に，Kripke モデル $\mathscr{S} = \langle C, \leq, \{D_c \mid c \in C\}\rangle$ と $A \in \mathrm{Prop}_2$, $c \in C$, 環境 ξ に対して，ξ が A と c に関して admissible な時は

$$\exists U \in D_c \ \forall d \in \uparrow c \ (d \in U \iff d, \xi \Vdash A)$$

が成り立っている時に $\mathscr{S}$ は full であると呼び，この full Kripke モデルの構造に対して，以下の定理が成り立つ.

定理 1. 任意の $A \in \mathrm{Prop}_2$ に対して，A が NJ_2 で証明可能であることと，A が全ての full Kripke モデルで valid となることは同値である.

以下では，こうした既知の Kripke モデルの一般化を試み，一般化されたモデル概念に対しても NJ_2 の完全性が保証されていることを確認したい.

位相空間 $\langle X, \mathcal{O}X\rangle$ に対して $a \in X$ の開近傍の集合 $\{U \in \mathcal{O}X \mid a \in U\}$ を $\mathcal{F}_a$ と記述する．そして，

$$\exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \quad D_a \subseteq D_b \tag{2}$$

の条件を満たすように，各 $a \in X$ に対応する domain $D_a \subseteq \mathcal{O}X$ を与え，これらの組として一般化された Kripke モデル $\mathscr{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\}\rangle$ を定義する．なお，今後は，条件 (2) を満たす a の近傍 U を代表して，その一つを P_a と明示することとする．位相空間 $\langle C, C^+\rangle$ の下で条件 (1) と条件 (2) は同値となり，ここで導入した構造は Sobolev の Kripke モデルの一般化となっている．そして，Sobolev の Kripke モデルにおける解釈の定義から類推して，一般化された Kripke モデル $\mathscr{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\}\rangle$ と $A \in \mathrm{Prop}_2$, $a \in X$, 環境 ξ に対して関係 $a, \xi \Vdash A$ を以下の条件によって再帰的に定義する.

(1) $a, \xi \Vdash \bot$ が成り立つことはない.

(2) $a, \xi \Vdash p \iff a \in \xi(p)$.

(3) $a, \xi \Vdash A \wedge B \iff a, \xi \Vdash A$ かつ $a, \xi \Vdash B$.

(4) $a, \xi \Vdash A \vee B \iff a, \xi \Vdash A$ または $a, \xi \Vdash B$.

(5) $a, \xi \Vdash A \to B \iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ (b, \xi \Vdash A$ ならば $b, \xi \Vdash B)$.

(6) $a, \xi \Vdash \forall p.A \iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ \forall V \in D_b \quad b, \xi(p{:}V) \Vdash A$.

(7) $a, \xi \Vdash \exists p.A \iff \exists V \in D_a \quad a, \xi(p{:}V) \Vdash A$.

この関係に基づいて，任意の $A \in \mathrm{Prop}_2$ に対して $[\![A]\!]_\xi = \{a \in X \mid a, \xi \Vdash A\}$ とし，任意の $\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}_2$ に対して $[\![\Gamma]\!]_\xi = \bigcap_{A \in \Gamma} [\![A]\!]_\xi$ のように X の部分集合を定義する．また，$\Gamma \subseteq \mathrm{Prop}_2$ と $a \in X$ に対して admissible な環境の集合，つまり $\xi(\mathrm{FV}(\Gamma)) \subseteq D_a$ である環境の集合を $\mathrm{Env}(A; a)$ と表記することにする.

補題 2. (1) 任意の $A \in \mathrm{Prop}_2$ と環境 ξ に対して $\{a \in X \mid \xi \in \mathrm{Env}(A; a)\} \in \mathcal{O}X$ である．
(2) $a \in X$ に対して $a, \xi \Vdash A$ が成り立っているとする．このとき，任意の $b \in U$ に対して $b, \xi \Vdash A$ となる $U \in \mathcal{F}_a$ が存在する．
(3) 任意の $A \in \mathrm{Prop}_2$ と環境 ξ に対して $[\![A]\!]_\xi \in \mathcal{O}X$ である．

Proof. (1) $\xi \in \mathrm{Env}(A; a)$ のとき，任意の $b \in P_a$ に対して $\xi(\mathrm{FV}(A)) \subseteq D_a \subseteq D_b$ であるから $\xi \in \mathrm{Env}(A; b)$ が成り立っている．従って，

$$\{a \in X \mid \xi \in \mathrm{Env}(A; a)\} = \bigcup \{P_a \in \mathcal{O}X \mid \xi \in \mathrm{Env}(A; a)\}$$

が得られる．

(2) A の構成に関する帰納法による．

Case 1. $A \equiv \bot$ の場合．補題の主張は自明である．

Case 2. $A \equiv p$ の場合．$a, \xi \Vdash p$ とすると，$\xi(p) \in \mathcal{F}_a$ であり，任意の $b \in \xi(p)$ に対して，$b, \xi \Vdash p$ が成り立っている．

Case 3. $A \equiv B \wedge C$ の場合．$a, \xi \Vdash B \wedge C$ とする．このとき，$a, \xi \Vdash B$ かつ $a, \xi \Vdash C$ であり，$a, \xi \Vdash B$ に帰納法の仮定を適用すると，任意の $b \in U$ に対してかつ $b, \xi \Vdash B$ となる $U \in \mathcal{F}_a$ が得られる．また，同様に，任意の $c \in V$ に対して $c, \xi \Vdash C$ となる $V \in \mathcal{F}_a$ が得られる．このとき，$U \cap V \in \mathcal{F}_a$ は明らかに補題の条件を満たしている．

Case 4. $A \equiv B \vee C$ の場合．$a, \xi \Vdash B \vee C$ とする．このとき，$a, \xi \Vdash B$ または $a, \xi \Vdash C$ であり，$a, \xi \Vdash B$ が成り立つときは，帰納法の仮定から，任意の $b \in U$ に対して $b, \xi \Vdash B$ となる $U \in \mathcal{F}_a$ が得られ，この U が補題の条件を満たしている．また，$a, \xi \Vdash C$ が成り立つときは，帰納法の仮定から，任意の $c \in V$ に対して $c, \xi \Vdash C$ となる $V \in \mathcal{F}_a$ が得られ，この V が補題の条件を満たしている．

Case 5. $A \equiv B \to C$ の場合．$a, \xi \Vdash B \to C$ とする．すると，

$$\forall b \in U \;\; (b, \xi \Vdash B \text{ ならば } b, \xi \Vdash C)$$

となる $U \in \mathcal{F}_a$ が存在する．この U を考えると，任意の $b \in U$ に対して，$b, \xi \Vdash B \to C$ であることは明らかである．

Case 6. $A \equiv \forall p.B$ の場合．$a, \xi \Vdash \forall p.B$ とする．すると，

$$\forall b \in U \;\; \forall V \in D_b \quad b, \xi(p : V) \Vdash B$$

となる $U \in \mathcal{F}_a$ が存在する．この U を考えると，任意の $b \in U$ に対して，$b, \xi \Vdash \forall p.B$ であることは明らかである．

Case 7. $A \equiv \exists p.B$ の場合．$a, \xi \Vdash \exists p.B$ とする．すると，定義から $a, \xi(p : U) \Vdash B$ となる $U \in D_a$ が存在する．ここで，帰納法の仮定を適用すると，任意の $b \in V$ に対して $b, \xi(p : U) \Vdash B$ となる $V \in \mathcal{F}_a$ が存在することが分かる．そこで，$V \cap P_a \in \mathcal{F}_a$ を考えると，

任意の $b \in V \cap P_a$ に対して，$U \in D_a \subseteq D_b$ かつ $b, \xi(p:U) \Vdash B$ となるので，$b, \xi \Vdash \exists p.B$ であることが保証されている．

(3) 上の結果から，$[\![A]\!]_\xi = \bigcup\{U \in \mathcal{O}X \mid U \subseteq [\![A]\!]_\xi\}$ となることは明らかである． □

系 3. 一般化された Kripke モデルにおいて，$a, \xi \Vdash \exists p.A$ であることと

$$\exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ \exists V \in D_b \quad b, \xi(p:V) \Vdash A$$

であることは同値である．

Proof. $a, \xi \Vdash \exists p.A$ とする．すると，定義から $a, \xi(p:U) \Vdash B$ となる $U \in D_a$ が存在する．ここで，補題 2 (2) を適用すると，任意の $b \in V$ に対して $b, \xi(p:U) \Vdash B$ となる $V \in \mathcal{F}_a$ が存在することが分かる．そこで，$V \cap P_a \in \mathcal{F}_a$ を考えると，任意の $b \in V \cap P_a$ に対して，$U \in D_a \subseteq D_b$ かつ $b, \xi(p:U) \Vdash B$ となる． □

Sobolev の Kripke モデルにおける議論と同様に，一般化された Kripke モデル $\mathscr{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\}\rangle$ に対して，

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathrm{Prop}_2 \ \forall a \in X \ \forall \xi \in \mathrm{Env}(A; a) \\ &\qquad \exists U \in D_a \ \exists V \in \mathcal{F}_a \quad U \cap V = [\![A]\!]_\xi \cap V \end{aligned}$$

が成り立っている時に $\mathscr{K}$ は full であるという．上の条件において，a の近傍で $[\![A]\!]_\xi$ と一致する D_a の元 U を代表して，その一つを $[\![A]\!]^a_\xi$ と表記することにする．特に，$a \in [\![A]\!]^a_\xi$ と $a \in [\![A]\!]_\xi$ は同値となる．また，任意の $a \in X$ と $\xi \in \mathrm{Env}(\Gamma, A; a)$ に対して

$$a, \xi \Vdash \Gamma \Longrightarrow a, \xi \Vdash A$$

が成り立つとき $\Gamma \vdash A$ は $\mathscr{K}$ で valid であるという．

補題 4. 任意の $A, B \in \mathrm{Prop}_2, a \in X, \xi \in \mathrm{Env}(A[p := B]; a)$ に対して，$a, \xi(p : [\![B]\!]^a_\xi) \Vdash A$ であることと $a, \xi \Vdash A[p := B]$ であることは同値である．

Proof. A の構成に関する帰納法による．特に $A \equiv p$ の場合は，$a \in [\![B]\!]^a_\xi$ と $a \in [\![B]\!]_\xi$ の同値性から明らか． □

定理 5. 任意の $A \in \mathrm{Prop}_2$ に対して，A が NJ_2 で証明可能であることと，A が全ての一般化された full Kripke モデルで valid となることは同値である．

Proof. 健全性については導出の長さに関する帰納法による．

Case 1. $(\to \mathrm{I})$ により，$\Gamma, A \vdash B$ から $\Gamma \vdash A \to B$ が導出されている時．$a \in X$ と $\xi \in \mathrm{Env}(\Gamma, A \to B; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする．この時，$\Gamma, A \vdash B$ と同じ長さで $\Delta, A \vdash B$ が導出できるような $\Delta \subseteq_{\mathrm{fin}} \Gamma$ が存在していて，この Δ に対して

$$[\![\Delta]\!]_\xi \cap \{a \mid \xi \in \mathrm{Env}(\Delta, A \to B; a)\} \in \mathcal{F}_a$$

であり，任意の $b \in [\![\Delta]\!]_\xi \cap \{a \mid \xi \in \mathrm{Env}(\Delta, A \to B; a)\}$ に対して，$\xi \in \mathrm{Env}(\Delta, A, B; b)$ であることは明らかである．従って，$b, \xi \Vdash A$ とすると，$b, \xi \Vdash \Delta, A$ となり，帰納法の仮定より $b, \xi \Vdash B$ が得られる．以上から $a, \xi \Vdash A \to B$ であることが示された．

Case 2. $(\to\mathrm{E})$ により，$\Gamma \vdash A \to B$ と $\Gamma \vdash A$ から $\Gamma \vdash B$ が導出されている時．$a \in X$ と $\xi \in \mathrm{Env}(\Gamma, B; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする．この時，$p \in \mathrm{FV}(\Gamma, B)$ に対して $\xi'(p) = \xi(p)$ であり $p \in \mathrm{FV}(A) \setminus \mathrm{FV}(\Gamma, B)$ に対して $\xi'(p) \in D_a$ を満たす環境 ξ' を考えると，$\xi' \in \mathrm{Env}(\Gamma, A \to B; a)$ かつ $a, \xi' \Vdash \Gamma$ となる．従って，帰納法の仮定から $a, \xi' \Vdash A \to B$ と $a, \xi' \Vdash A$ が得られ，これらから $a, \xi' \Vdash B$，つまり $a, \xi \Vdash B$ であることが保証される．

Case 3. $(\forall\,\mathrm{I})$ により，$\Gamma \vdash A$ から $\Gamma \vdash \forall p.A$ が導出されている時．$a \in X$ と $\xi \in \mathrm{Env}(\Gamma, \forall p.A; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする．この時，$\Gamma \vdash A$ と同じ長さで $\Delta \vdash A$ が導出できるような $\Delta \subseteq_{\mathrm{fin}} \Gamma$ が存在していて，この Δ に対して

$$[\![\Delta]\!]_\xi \cap \{a \mid \xi \in \mathrm{Env}(\Delta, \forall p.A; a)\} \in \mathcal{F}_a$$

であり，任意の $b \in [\![\Delta]\!]_\xi \cap \{a \mid \xi \in \mathrm{Env}(\Delta, \forall p.A; a)\}$ と $V \in D_b$ に対して $\xi(p : V) \in \mathrm{Env}(\Delta, A; b)$ が成り立つ．また，Δ 中に p が自由に出現していないことから $b, \xi(p{:}V) \Vdash \Delta$ となり，帰納法の仮定から $b, \xi(p{:}V) \Vdash A$ が保証される．以上から，$a, \xi \Vdash \forall p.A$ であることが示された．

Case 4. $(\forall\,\mathrm{E})$ により，$\Gamma \vdash \forall p.A$ から $\Gamma \vdash A[p := B]$ が導出されている時．$a \in X$ と $\xi \in \mathrm{Env}(\Gamma, A[p := B]; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする．すると，帰納法の仮定から $a, \xi \Vdash \forall p.A$ が得られる．また，$\mathcal{K}$ の fullness から $[\![B]\!]^a_\xi \in D_a$ が保証されているので，$a, \xi(p : [\![B]\!]^a_\xi) \Vdash A$ が得られる．従って，補題 4 より $a, \xi \Vdash A[p := B]$ となることが分かる．

Case 5. $(\exists\,\mathrm{I})$ により，$\Gamma \vdash A[p := B]$ から $\Gamma \vdash \exists p.A$ が導出されている時．$a \in X$ と $\xi \in \mathrm{Env}(\Gamma, \exists p.A; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする．この時，$p \in \mathrm{FV}(\Gamma, \exists p.A)$ に対して $\xi'(p) = \xi(p)$ であり $p \in \mathrm{FV}(B) \setminus \mathrm{FV}(\Gamma, \exists p.A)$ に対して $\xi'(p) \in D_a$ を満たす環境 ξ' を考えると，$\xi' \in \mathrm{Env}(\Gamma, A[p := B]; a)$ かつ $a, \xi' \Vdash \Gamma$ となる．従って，帰納法の仮定から $a, \xi' \Vdash A[p := B]$ が得られ，$\mathcal{K}$ の fullness と補題 4 から $[\![B]\!]^a_{\xi'} \in D_a$ に対して $a, \xi'(p : [\![B]\!]^a_{\xi'}) \Vdash A$ が成り立つことが分かる．以上から，$a, \xi' \Vdash \exists p.A$，つまり $a, \xi \Vdash \exists p.A$ であることが保証される．

Case 6. $(\exists\,\mathrm{E})$ により，$\Gamma \vdash \exists p.A$ と $\Gamma, A \vdash B$ から $\Gamma \vdash B$ が導出されている時．$a \in X$ と $\xi \in \mathrm{Env}(\Gamma, B; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする．この時，$p \in \mathrm{FV}(\Gamma, B)$ に対して $\xi'(p) = \xi(p)$ であり $p \in \mathrm{FV}(\exists p.A) \setminus \mathrm{FV}(\Gamma, B)$ に対して $\xi'(p) \in D_a$ を満たす環境 ξ' を考えると，$\xi' \in \mathrm{Env}(\Gamma, \exists p.A; a)$ かつ $a, \xi' \Vdash \Gamma$ となる．従って，帰納法の仮定からある $U \in D_a$ に対して $a, \xi'(p : U) \Vdash A$ が得られる．更に，$\xi'(p : U) \in \mathrm{Env}(\Gamma, A, B; a)$ であり，$a, \xi'(p : U) \Vdash \Gamma, A$ でもあるから，帰納法の仮定により $a, \xi'(p : U) \Vdash B$ が得られ，$a, \xi \Vdash B$ であることが保証される．

その他のケースは何れも容易に確認できるので証明は省略する.

完全性について，$\Gamma \vdash A$ が一般化された full Kripke モデルにおいて valid であるならば，Sobolev による full Kripke モデルにおいても valid である．従って，Sobolev の完全性定理より $\Gamma \vdash A$ は NJ_2 で証明可能となる． □

2. SOBER KRIPKE モデルと SPATIAL LATTICE モデル

前節で導入された一般化された Kripke モデルの概念に対して，Stone 双対性 [1, 2] に基づいて自然に対応が付けられる順序構造 $\langle L, \sqsubseteq \rangle$ として新たに 2 階直観主義命題論理の束論的モデルの概念を導入したい．

完備 Heyting 代数 $\langle L, \sqsubseteq \rangle$ に対して，L 上の completely-prime filter の集合を $\mathrm{pt}\, L$ と記述する．また，任意の $u \in L$ に対して u を含む completely-prime filter の集合 $\{F \in \mathrm{pt} L | u \in F\}$ を $\mathcal{O}_u$ と記述することにする．そして，

$$\exists u \in F \ \forall G \in \mathcal{O}_u \ D_F \subseteq D_G \tag{3}$$

の条件を満たすように，各 $F \in \mathrm{pt}\, L$ に対応する domain $D_F \subseteq L$ を与え，これらの組として束論的モデル $\mathscr{L} = \langle L, \sqsubseteq, \{D_F \in \mathcal{P}L \mid F \in \mathrm{pt}\, L\} \rangle$ を定義する．このモデル $\mathscr{L}$ において，各命題変数に L の要素を対応させる写像を環境と呼び，環境 ξ の下での命題 A の解釈 $[\![A]\!]_\xi \in L$ を以下のように再帰的に定義する．

(1) $[\![\bot]\!]_\xi = \bigsqcup \emptyset$.
(2) $[\![p]\!]_\xi = \xi(p)$.
(3) $[\![A \wedge B]\!]_\xi = [\![A]\!]_\xi \sqcap [\![B]\!]_\xi$.
(4) $[\![A \vee B]\!]_\xi = [\![A]\!]_\xi \sqcup [\![B]\!]_\xi$.
(5) $[\![A \to B]\!]_\xi = \bigsqcup \{u \in L \mid [\![A]\!]_\xi \sqcap u \sqsubseteq [\![B]\!]_\xi\}$.
(6) $[\![\forall p.A]\!]_\xi = \bigsqcup \{u \in L \mid \forall F \in \mathcal{O}_u \ \ \forall v \in D_F \ \ [\![A]\!]_{\xi(p:v)} \in F\}$.
(7) $[\![\exists p.A]\!]_\xi = \bigsqcup \{u \in L \mid \forall F \in \mathcal{O}_u \ \ \exists v \in D_F \ \ [\![A]\!]_{\xi(p:v)} \in F\}$.

前節で導入された Kripke モデル $\mathscr{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\} \rangle$ の中で，特に $\langle X, \mathcal{O}X \rangle$ が sober な位相空間（つまり，T_0 分離公理を満たしていて，更に，任意の $\cup$-irreducible 閉集合[4] C に対して，常に $C = \{a\}^c$ を満たす $a \in X$ が存在しているような位相空間）となっている特別な構造に注目すると，その位相が作る順序集合は特に spatial lattice[5]（つまり，任意の元がそれ以上の $\sqcap$-prime 元[6] からなる集合の下限と一致する完備束）に基づく束論的モデルとの間で強い対応を持つこととなる．

---

[4]閉集合の有限集合 $\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ に対して $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m$ の時には，常に $C = C_i$ となる $i \in \{1, \ldots, m\}$ が存在する時に，閉集合 C を $\cup$-irreducible と呼ぶ．

[5]spatial lattice は完備 Heyting 代数であることが証明できる．

[6]L の有限集合 $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ に対して $u \sqsupseteq u_1 \sqcap u_2 \sqcap \ldots \sqcap u_m$ の時には，常に $u \sqsupseteq u_i$ となる $i \in \{1, \ldots, m\}$ が存在する時に，$u \in L$ を $\sqcap$-prime と呼ぶ．

実際に，sober 位相空間の下では $\mathrm{pt}\,\mathcal{O}X = \{\mathcal{F}_a \mid a \in X\}$ であることが保証されている．そこで，このような Kripke モデル $\mathscr{K}$ に基づいて，任意の $a \in X$ に対して $D_{\mathcal{F}_a} = D_a$ と定義することによって $\mathbf{\Omega}\mathscr{K} = \langle \mathcal{O}X, \subseteq, \{D_{\mathcal{F}_a} \mid a \in X\}\rangle$ のように spatial lattice に基づく束論的モデル $\mathbf{\Omega}\mathscr{K}$ を考えることが出来る．この時，$\mathbf{\Omega}\mathscr{K}$ における条件 (3) は

$$\exists U \in \mathcal{F}_a\ \forall \mathcal{F}_b \in \mathcal{O}_U \quad D_{\mathcal{F}_a} \subseteq D_{\mathcal{F}_b}$$

となり，これは条件 (2) の言い換えに他ならない．

定理 6. $\mathscr{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\}\rangle$ を sober な Kripke モデルとして $a \in X$，ξ を $\mathscr{K}$ に関する環境とする．このとき，$\mathscr{K}$ において $a, \xi \Vdash A$ であることと，spatial lattice $\mathbf{\Omega}\mathscr{K}$ において $a \in [\![A]\!]_\xi$ であることは同値である．(つまり【A】$_\xi = [\![A]\!]_\xi$ が成り立つ．)

Proof. A の構成に関する帰納法による．

Case 1. $A \equiv B \to C$ の場合．

$$\begin{aligned}
a, \xi \Vdash B \to C &\iff \exists U \in \mathcal{F}_a\ \forall b \in U\ \ (b, \xi \Vdash B \text{ ならば } b, \xi \Vdash C)\\
&\iff \exists U \in \mathcal{F}_a\ \forall b \in U\ \ (b \in [\![B]\!]_\xi \text{ ならば } b \in [\![C]\!]_\xi)\\
&\iff a \in \bigcup \{U \in \mathcal{O}X \mid [\![B]\!]_\xi \cap U \subseteq [\![C]\!]_\xi\}\\
&\iff a \in [\![B \to C]\!]_\xi
\end{aligned}$$

Case 2. $A \equiv \forall p.B$ の場合．

$$\begin{aligned}
a, \xi \Vdash \forall p.B &\iff \exists U \in \mathcal{F}_a\ \forall b \in U\ \forall V \in D_b \quad b, \xi(p{:}V) \Vdash B\\
&\iff \exists U \in \mathcal{F}_a\ \forall b \in U\ \forall V \in D_b \quad b \in [\![B]\!]_{\xi(p:V)}\\
&\iff \exists U \in \mathcal{F}_a\ \forall \mathcal{F}_b \in \mathcal{O}_U\ \forall V \in D_{\mathcal{F}_b}\ \ [\![B]\!]_{\xi(p:V)} \in \mathcal{F}_b\\
&\iff a \in \bigcup \{U \in \mathcal{O}X \mid \forall \mathcal{F}_b \in \mathcal{O}_U\ \forall V \in D_{\mathcal{F}_b}\ \ [\![B]\!]_{\xi(p:V)} \in \mathcal{F}_b\}\\
&\iff a \in [\![\forall p.B]\!]_\xi
\end{aligned}$$

Case 3. $A \equiv \exists p.B$ の場合．系 3 より

$$a, \xi \Vdash \exists p.B \iff \exists U \in \mathcal{F}_a\ \forall b \in U\ \exists V \in D_b \quad b, \xi(p{:}V) \Vdash B$$

であるから，Case 2 と同様に証明することが出来る．

その他のケースは何れも容易に確認できるので証明は省略する． □

上に示した Kripke モデルから束論的モデルへの変換と対照的に，spatial lattice に基づくモデルから sober な Kripke を構成することも出来る．実際に，$\langle L, \sqsubseteq\rangle$ を spatial lattice として束論的モデル $\mathscr{L} = \langle L, \sqsubseteq, \{D_F \mid F \in \mathrm{pt}\,L\}\rangle$ が与えられている時に，$\mathrm{pt}\,L$ 上の位相として $\mathcal{O}\,\mathrm{pt}\,L = \{\mathcal{O}_u \mid u \in L\}$ を与え，更に，各 $F \in \mathrm{pt}\,L$ に対応する domain を $\mathcal{O}D_F = \{\mathcal{O}_u \mid u \in D_F\}$ とする．この時，$\mathscr{L}$ に関する条件 (3) は，任意の $F \in \mathrm{pt}\,L$ に対して

$$\exists \mathcal{O}_u \in \mathcal{F}_F\ \forall G \in \mathcal{O}_u \quad D_F \subseteq D_G$$

が成り立つことを保証しているので，構造 $\mathrm{pt}\,\mathscr{L} = \langle\, \mathrm{pt}\,L, \mathcal{O}\,\mathrm{pt}\,L, \{\mathcal{O}D_F \mid F \in \mathrm{pt}\,L\}\,\rangle$ は Kripke モデルとなる．また，$\mathscr{L}$ に関する環境 ξ に対して，$\xi_{\mathrm{pt}}(p) = \mathcal{O}_{\xi(p)}$ として $\mathrm{pt}\,\mathscr{L}$ に関する環境 ξ_{pt} を定義する．

定理 7. $\mathscr{L} = \langle L, \sqsubseteq, \{D_F \mid F \in \mathrm{pt}\,L\}\rangle$ を spatial lattice モデルとして，$A \in \mathrm{Prop}_2, F \in \mathrm{pt}\,L$，更に ξ を $\mathscr{L}$ に関する環境とする．このとき，$\mathscr{L}$ において $[\![A]\!]_\xi \in F$ であることと sober Kripke モデル $\mathrm{pt}\,\mathscr{L}$ において $F, \xi_{\mathrm{pt}} \Vdash A$ であることは同値である．

Proof. A の構成に関する帰納法．

Case 1. $A \equiv B \to C$ の場合．

$$
\begin{aligned}
F \in \mathcal{O}_{[\![B\to C]\!]_\xi} &\iff \bigsqcup\{u \in L \mid [\![B]\!]_\xi \sqcap u \sqsubseteq [\![C]\!]_\xi\} \in F \\
&\iff \exists u \in F \quad [\![B]\!]_\xi \sqcap u \sqsubseteq [\![C]\!]_\xi \\
&\iff \exists u \in F \quad \mathcal{O}_{[\![B]\!]_\xi} \cap \mathcal{O}_u \subseteq \mathcal{O}_{[\![C]\!]_\xi} \qquad (L \text{ が spatial より}) \\
&\iff \exists \mathcal{O}_u \in \mathcal{F}_F \ \forall G \in \mathcal{O}_u \ (G \in \mathcal{O}_{[\![B]\!]_\xi} \text{ ならば } G \in \mathcal{O}_{[\![C]\!]_\xi}) \\
&\iff \exists \mathcal{O}_u \in \mathcal{F}_F \ \forall G \in \mathcal{O}_u \ (G, \xi_{\mathrm{pt}} \Vdash B \text{ ならば } G, \xi_{\mathrm{pt}} \Vdash C) \\
&\iff F, \xi_{\mathrm{pt}} \Vdash B \to C
\end{aligned}
$$

Case 2. $A \equiv \forall p.B$ の場合．

$$
\begin{aligned}
[\![\forall p.B]\!]_\xi \in F &\iff \bigsqcup\{u \in L \mid \forall G \in \mathcal{O}_u \ \forall v \in D_G \ [\![A]\!]_{\xi(p:v)} \in G\} \in F \\
&\iff \exists u \in F \ \forall G \in \mathcal{O}_u \ \forall v \in D_G \ [\![A]\!]_{\xi(p:v)} \in G \\
&\iff \exists \mathcal{O}_u \in \mathcal{F}_F \ \forall G \in \mathcal{O}_u \ \forall \mathcal{O}_v \in \mathcal{O}D_G \ G, \xi_{\mathrm{pt}}(p : \mathcal{O}_v) \Vdash A \\
&\iff F, \xi_{\mathrm{pt}} \Vdash \forall p.A
\end{aligned}
$$

Case 3. $A \equiv \exists p.B$ の場合．系 3 より Case 2 と同様に証明することが出来る．

その他のケースは何れも容易に確認できるので証明は省略する． □

参考文献

[1] S. Abramsky and A. Jung, Domain Theory, in *Handbook of logic in Computer Science volume 3 Semantic Structures*, Oxford Science Publications, 1994.

[2] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.

[3] S .K. Sobolev, The intuitionistic propositional calculus with quatifiers, *Matematicheskie Zametki* 22(1), pp. 69–76, 1977.

[4] M. H. Sørensen and P. Urzyczyn, *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics volume 149, Elsevier, 2006.