数理解析研究所講究録
第 1732 巻 2011 年 10-18

The Area of Polygonal Region

岡山大学大学院・自然科学研究科　平松 恵 (Megumi Hiramatsu)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

1　はじめに

$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体を表すものとする．さらに

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathbb{Z}^2 = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \middle| x, y \in \mathbb{Z} \right\}$$

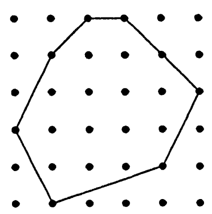
と定める． $\mathbb{Z}^2$ の元を $\mathbb{R}^2$ の**格子点** (lattice point) といい，格子点を頂点とする多角形を**格子多角形** (lattice polygon) とよぶ．格子多角形 P の内部にある格子点の数を $I(P)$ ， P の 周上の格子点の数を $B(P)$ とおくと，$I(P)$ と $B(P)$ を用いて P の面積を求めることができる．

定理 1. (ピックの公式) 任意の格子多角形 P に対して

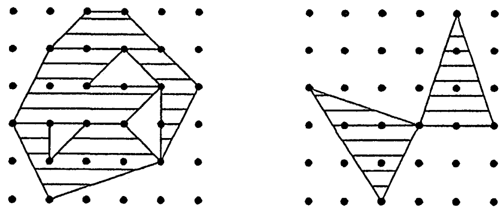
$$P \text{ の面積} = I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$$

である．

しかしこのピックの公式で求められるのは，下図のような単純な格子多角形の場合である．



下の図のように穴が空いていたり，1辺から3つ以上の辺が出ているような格子領域の面積は，ピックの公式で求めることはできない．



$\mathbb{R}^2$ の3つの点 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を頂点とする三角形を $T(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ とする．すなわち

$$T(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \left\{x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2 \mid x,y,z \geq 0, x+y+z=1\right\}$$

である．面積 $Area(T(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}))$ が正である $T(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ に含まれる格子点が $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ のみであるとき，三角形 $T(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ を**基本三角形**と呼ぶ．

格子多角形は基本三角形に分割することができる．$\mathbb{R}^2$ において，有限個の基本三角形の和集合として得られる領域を**格子領域**と呼ぼう．ただし2つの基本三角形の共通部分は、格子点を結ぶ線分かあるいは格子点であるものに限る．

格子領域の面積を求める公式（ピックの公式の一般化）がいくつか知られている．

定理 2. ($P.R.Scott$[4]) 格子領域 P に対し

$$Area(P) = \frac{1}{2}B(P) + I(P) - \chi(P) + \frac{1}{2}(\partial P)$$

が成り立つ．

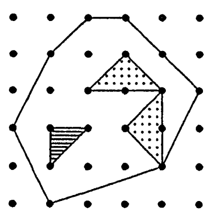
格子領域 P に対して $V(P)$ を P が含む格子点の総数，∂P において格子点から格子点までを1つと数え，その総数を $B_1(P)$，また $\chi(P)$ を P のオイラー数とする．

定理 3. ($D.E.Varberg$[3]) 格子領域 P に対して

$$Area(P) = V(P) - \frac{1}{2}B_1(P) - \chi(P)$$

が成り立つ．

私達はこの論文において新しい公式を1つ与える．格子領域 P に対し，P° で P の内部を表す．P° のオイラー数を $\chi(P^\circ)$，P° の連結成分の個数を $\pi_0(P^\circ)$，$\mathbb{R}^2 \setminus P^\circ$ の連結成分の個数を n_p+1 とする．このとき n_p は直観的には P° の穴の数である．



上の図 P では P° の穴は横線で塗られた部分の 1 つのみである．右のドット部の 2 つは外部とつながっているため P° の穴ではない．

命題 1. 次の 2 つの等式が成り立つ．

(1) $\chi(P^\circ) = \pi_0(P^\circ) - n_p$.

(2) $\chi(P^\circ) = \chi(P) - \chi(\partial P)$.

P の内部にある格子点の数を $I_0(P)$ とする．私達の主結果は次の定理である．

定理 4 (面積公式)**.** 任意の格子領域 P に対し

$$Area(P) = I_0(P) + \frac{1}{2}B_1(P) - \chi(P^\circ)$$

である．

この定理の証明はオイラー数の知識があれば，原理的には定理 1 の証明より単純である．したがってこの定理をまず証明し，その系として定理 1 を導くほうが自然であると言えよう．

2　基本三角形

このセクションでは基本三角形の性質を基本変形を用いて考察する．三角形 $T(\mathbf{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ と書くと三角形の変形が行列の変形と対応し便利である．また $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ であるとき，実数 $\delta((\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})) = a_1b_2 - a_2b_1$ を $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ の $\boldsymbol{\delta}$**-値**と呼ぶ (もちろん読者には「行列式」に見えるはず)．

次の三角形 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ の変形 $(E1+), (E1-), (E2+), (E2-)$ を初等変形と呼ぶ.

$$
\begin{aligned}
&(E1+)\ (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})\\
&(E1-)\ (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\\
&(E2+)\ (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b})\\
&(E2-)\ (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

m を整数とすると，初等変形を繰り返せば

$$
\begin{aligned}
&(D1)\ (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{a})\\
&(D2)\ (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

という変形を得る．初等変形を何度か繰り返して得られる変形

$$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow (\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}')$$

を $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ の**基本変形**と呼ぶ.

命題 2. 格子点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し，三角形 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ の基本変形について次が成り立つ.

(1) 基本変形の逆も基本変形である.

(2) 基本変形は面積を保つ.

(3) 基本変形は δ-値を保つ.

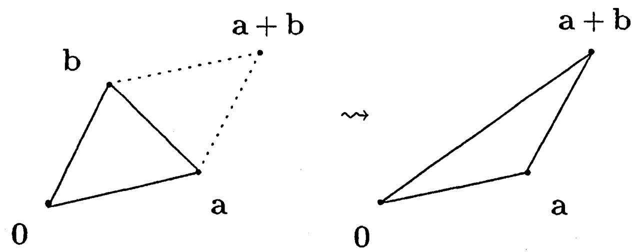
(4) $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ は基本変形により $(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}') = \begin{pmatrix} a'_1 & 0 \\ a'_2 & b'_2 \end{pmatrix}$ の形にできる．このとき $b'_2 = \pm 1$ ならば $a'_2 = 0$ の形にできる.

(5) 基本変形は「基本三角形であるか否か」の性質を保つ.

注意. 我々は $|\delta((\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}))| = 2Area((\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}))$ であるという事実を知らないものとして証明を行う.

証明. (1) $(E1+)$ の逆 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ は $(E1-)$ であり，基本変形である.
$(E1-)$ の逆 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ は $(E1+)$ であり，基本変形である.
$(E2+)$, $(E2-)$ も同様.

(2) $(E1+)$ において下の図から



$$\begin{aligned} Area((\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})) &= \frac{1}{2}(Q(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})) \\ &= Area((\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})). \end{aligned}$$

よって基本変形は面積を保っている．$(E1-)$，$(E2+)$，$(E2-)$ も同様に証明できる．

(3) $(E1+)$ について，

$$\begin{aligned} \delta(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}) &= a_1(b_2+a_2) - a_2(b_1+a_1) \\ &= a_1b_2 + a_1a_2 - a_2b_1 - a_1a_2 \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 \\ &= \delta((\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})). \end{aligned}$$

よって δ-値を保っている．
$(E1-)$，$(E2+)$，$(E2-)$ についても同様．

(4) $a_1 = b_1$ のとき，初等変形 $(E1-)$ を用いると，

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

とできる．

$0 < a_1 < b_1$ のとき $b_1 = ma_1 + r_1$ $(m, r_1 \in \mathbb{Z})$ とすると $0 \leq r_1 < a_1$．

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & ma_1 + r_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 - ma_2 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 - nr_1 & r_1 \\ a_2 - n(b_2 - ma_2) & b_2 - ma_2 \end{pmatrix} (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

このように $(D1)$ と $(D2)$ を繰り返していくと，$\begin{pmatrix} 0 & b_1'' \\ a_2'' & b_2'' \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} a_1'' & 0 \\ a_2'' & b_2'' \end{pmatrix}$ の形が得られる．

$\begin{pmatrix} 0 & b_1'' \\ a_2'' & b_2'' \end{pmatrix}$ の場合，基本変形を繰り返して，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & b_1'' \\ a_2'' & b_2'' \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} b_1'' & b_1'' \\ a_2'' + b_2'' & b_2'' \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} b_1'' & 0 \\ a_2'' + b_2'' & b_2'' - a_2'' + b_2'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と変形できる．

$0 < b_1 < a_1$ のときも $a_1 = mb_1 + r$ $(m, r \in \mathbb{Z})$ とおけば同様に変形できる.

$a_1 < b_1 < 0$， $b_1 < a_1 < 0$， $a_1 < 0 < b_1$， $b_1 < 0 < a_1$ のときも同様に変形できる.

よって $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ は基本変形により $(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}') = \begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix}$ の形にできる.

また $b_2' = \pm 1$ のとき $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{a} \mp a_2'\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b})$ と変形すると

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a} \mp a_2'\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}) &= \begin{pmatrix} a_1' \mp 0 & 0 \\ a_2' \mp a_2' & \pm 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり， $a_2' = 0$ の形にできる.

(5) 三角形 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ が基本三角形とするとき次が成り立つ.

- $Q(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ の含む格子点は 4 個であるから，$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b})$ の含む格子点は 3 個. よって初等変形 $(E1+)$，$(E2+)$ により基本三角形は基本三角形になる.
- $Q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ の含む格子点は 4 個であるから，$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ の含む格子点は 3 個. よって初等変形 $(E1-)$ より基本三角形は基本三角形に変形される.
- $Q(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ の含む格子点は 4 個であるから，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b})$ の含む格子点は 3 個. よって初等変形 $(E2-)$ により基本三角形は基本三角形に変形される.

そこで基本三角形でない $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ が基本変形により基本三角形 $(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}')$ がになったとしてみよう. 逆変形を行うと基本変形により，基本三角形 $(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}')$ が基本三角形でない $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ になるが，基本変形により基本三角形は基本三角形に変形されることに矛盾する. よって基本変形は「基本三角形であるか否か」の性質を保つ. □

命題 3.

$$Area(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

証明. $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ とする. $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ は基本変形により $(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}') = \begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix}$ の形にできる. 基本変形は面積と δ-値を保つので，

$$\begin{aligned}
Area(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) &= Area(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}') \\
&= \frac{1}{2}|a_1'b_2'| \\
&= \frac{1}{2}|\delta((\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'))| \\
&= \frac{1}{2}|\delta((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))| \\
&= \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|.
\end{aligned}$$ □

この命題により $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で張られる平行四辺形の面積は $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ の行列式の絶対値であることが示される.

命題 4. 格子点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し, $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ が基本三角形であるならば, 基本変形により $(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}') = \begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ 0 & b_2' \end{pmatrix}$ の形にできる. またこのとき, a_1', b_2' は 1 か -1 である.

証明. 命題 1 より $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ は基本変形により $(\boldsymbol{a}''|\boldsymbol{b}'') = \begin{pmatrix} a_1'' & 0 \\ a_2'' & b_2'' \end{pmatrix}$ の形にできる. 基本変形は「基本三角形であるか否か」の性質を保つので, $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ は基本三角形だから $(\boldsymbol{a}''|\boldsymbol{b}'')$ も基本三角形である. よって b_2'' は 1 か -1 でなければならない. すると $b_2'' = \pm 1$ ならば $a_2'' = 0$ の形にできる. よって基本変形により $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ は $(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}') = \begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ 0 & b_2' \end{pmatrix}$ の形にできた. $(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}')$ も基本三角形であるから含まれる格子点は頂点のみである. よって a_1' , b_2' は 1 か -1 でなけらばならない. □

補題 1. 格子点 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し, $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ が基本三角形であるならば次が成り立つ.

$$Area((\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})) = \frac{1}{2}$$

証明. $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ は基本変形により $(\boldsymbol{a}'|\boldsymbol{b}') = \begin{pmatrix} a_1' & 0 \\ 0 & b_2' \end{pmatrix}$ の形にできる. またこのとき a_1' , b_2' は 1 か -1 なので $|a_1'b_2'| = 1$. よって

$$\begin{aligned}
Area((\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})) &= \frac{1}{2}|a_1'b_2'| \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

3 面積公式の証明

基本三角形の面積は $\frac{1}{2}$ なので格子領域 P の面積は格子領域を作る基本三角形の個数 $\Delta(P)$ の $\frac{1}{2}$ 倍である.

面積公式の証明. P を構成する基本三角形の個数 $n = \Delta(P)$ に関する帰納法を用いて証明する.

始めに $n = 1$ の場合を考える. この場合, P は基本三角形であるから $Area(P) = \frac{1}{2}$, $I_0(P) = 0$, $B_1(P) = 3$, $\chi(P^\circ) = 1$ である. したがって P に対して面積公式が成り立つ.

次に $\Delta(P) \geq 2$ とし, $\Delta(P') < \Delta(P)$ を満たす格子領域 P' に対しては面積公式が成り立つと仮定する. この場合には, 格子領域 P は次の条件を満たす 2 つの格子領域 P_1, P_2 の和集合として表すことができる.

(1) $P = P_1 \cup P_2$.

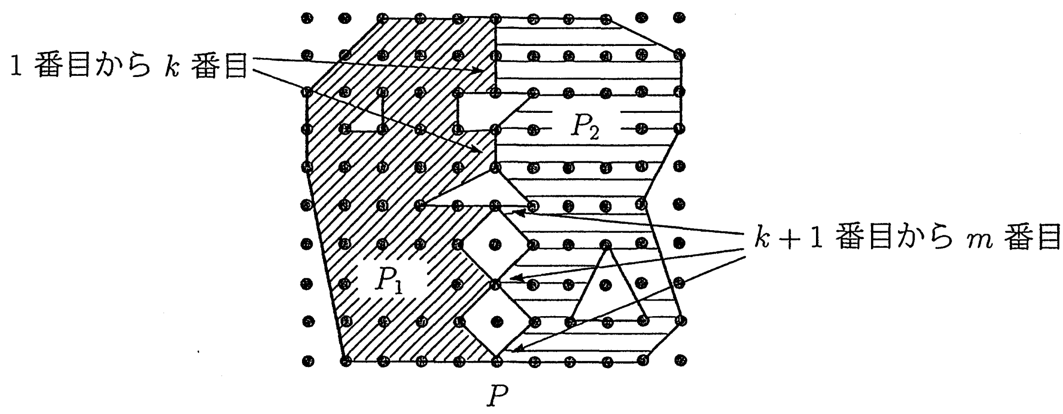
(2) $\Delta(P_1) \geq 1$, $\Delta(P_2) \geq 1$.

(3) $P_1 \cap P_2$ はいくつかの可縮な格子曲線 $L_1, \ldots, L_m$ の和集合である. (L_j が点である場合や $m = 0$ の場合も許す.)

$$P_1 \cap P_2 = \coprod_{i=1}^{m} L_i$$

(4) $L_i \cap L_j = \phi$ $(1 \leq i \neq j \leq m)$.

この分割において, L_j が点でない (つまり $B_1(L_j) \geq 1$ である) j は $j = 1, \ldots, k$ であるとする. したがって, L_j $(j \geq k+1)$ は点であるとする.



(帰納法の仮定により) P_1, P_2 に対しては面積公式が成り立つ. つまり,

$$Area(P_1) = I_0(P_1) + \frac{1}{2}B_1(P_1) - \chi(P_1^\circ),$$
$$Area(P_2) = I_0(P_2) + \frac{1}{2}B_1(P_2) - \chi(P_2^\circ)$$

である．

$m=0$ の場合，すなわち $P_1 \cap P_2 = \phi$ の場合には P の $Area(-)$，$I_0(-)$，$B_1(-)$，$\chi(-)$ はそれぞれ P_1 と P_2 のそれらの単純な和であるから，P に対して面積公式が成り立つことがわかる．よって $m \geq 1$ の場合を考える．このとき次の等式が成り立つことがわかる．

(i) $Area(P) = Area(P_1) + Area(P_2)$.

(ii) $I_0(P) = I_0(P_1) + I_0(P_2) + \sum_{j=1}^{k} B_1(L_j) - 1$.

(iii) $B_1(P) = B_1(P_1) + B_1(P_2) - 2\sum_{j=1}^{k} B_1(L_j)$.

(iv) $\chi(P^\circ) = \chi(P_1^\circ) + \chi(P_2^\circ) - k$.

したがって，

$$
\begin{aligned}
Area(P) =& Area(P_1) + Area(P_2) \\
=& I_0(P_1) + \frac{1}{2}B_1(P_1) - \chi(P_1^\circ) + I_0(P_1) + \frac{1}{2}B_1(P_1) - \chi(P_1^\circ) \\
=& (I_0(P_1) + I_0(P_2) + \sum_{j=1}^{k}(B_1(L_j) - 1)) \\
& + \frac{1}{2}(B_1(P_1) + B_1(P_2) - 2\sum_{j=1}^{k} B_1(L_j)) - (\chi(P_1^\circ) + \chi(P_2^\circ) - k) \\
& - \sum_{j=1}^{k}(B_1(L_j) - 1) + \sum_{j=1}^{k} B_1(L_j) - k \\
=& I_0(P) + \frac{1}{2}B_1(P) - \chi(P^\circ).
\end{aligned}
$$

以上より任意の自然数 n に対して面積公式が成り立つ．　□

参考文献

[1] 枡田 幹也, 代数的トポロジー, 朝倉書店 (2002).

[2] J. E. Reeve, On the volume of lattice polyhedra, Proceedings of the London Mathematical Society, (1957), (3)7, pp. 378-395.

[3] D. E. Varberg, Pick's theorem revisited, The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 8. (Oct., 1985), pp. 584-587.

[4] P. R. Scott, The fascination of the elementary, Closely based on the 'Hannah Neumann Memorial Lecture' presented at ICME 5 in Adelaide, South Australia, (Aug., 1984), pp. 759-768.

[5] R. W. Gaskell, M. S. Klamkin and P. Watson, Triangulations and Pick's thorem, Mathematics Magazine, Vol. 49, No. 1. (Jan., 1976), pp. 35-37.