数理解析研究所講究録
第1734巻 2011年 41-45

探索ゲームにおける戦略の性質について

兵庫県立大学経営学部　菊田　健作 (Kensaku KIKUTA)
School of Business Administration, University of Hyogo

1. はじめに

二つの意思決定主体A,Bがいて、Aは何回かに分けてある物品を数カ所に分けて密かに保管していく。Bは、毎回数カ所を同時に調べるが、調べる場所の全体は各回で異なっていてもよい。各回において、調べた箇所で物品を発見すると、Bは発見したものをすべて没収する。発見されなかった物品はそのまま保管される。発見されずに保管されているものの総量がある水準に達するとAの目的は達成される、とする。一方、計画期間内にその水準に達しない場合はBの勝ちである。似たような例は自然界にも見られる。動物の中には冬を越すために食料をいくつかの場所に分散して蓄えるものがある。冬を越すためには、たとえ別の動物等に一部を取り去られたとしてもなお十分な量の残りが蓄えられていなければならない (関連する話題については例えば文献 [10] 参照)。本稿の目的はHiderとSeekerの間の2人ゼロ和ゲームとしてモデル化されたこのような探索問題においてHiderの最適戦略の特徴に関する予想 (文献 [12]) を扱った文献 [2] の内容の一部を紹介し、今後の課題等を述べることである。

2. Accumulation Game

Accumulation Gameは査察あるいは検証の数理モデルの一つである。最初にこの名前で論文として出たのは文献 [8] である。これと関連したゲームあるいは探索ゲーム一般については、例えば文献 [11] を参照されたい。また、Accumulation Gameはその設定をいろいろ変えることにより様々のバリエーションが得られる。文献 [8] にAccumulation Gameのバリエーションの表が与えられている。この節ではそのうち探索領域が離散的であるが目標物は連続的に分割可能な場合のモデルの1つを述べる。

2人のPlayer (HiderとSeeker) がいる。n個の箱があり、1回目はすべての箱が空である。毎回 (たかだか、ℓ回) HiderとSeekerは同時に次のように行動する。Hiderはhだけの量のobjectをn個の箱に分散して隠す。SeekerはHiderの選択を知らされずに、自分でr個の箱を選びそれらにobjectがあるかどうか調べる。Seekerはobjectが隠されている箱を調べたときは、確率1でそれを見つけてその箱にあるすべてを取り去る。各回の行動が終了後、発見されないで隠されているobjectの総量が1以上である、という状態であればHiderの勝ちであり、Hiderは利得1を受け取りゲームはその回で終了する。objectの総量が1に満たないならば、見つからなかったobjectはそのままにして次の回に進む。ℓ回までのすべての回において、各回の終了後に発見されないで隠されているobjectの総量が1以上である、という状態が生じないときはSeekerの勝ちでありHiderの利得は0である。

各回の終了後に、Seekerがどのr個の箱を調べたのかを、Hiderがどの程度知ることができるかによって、ゲームは次の3つのバリエーションに分けられる。(i) Noisy : 各回の終了後に、Hiderはその回にSeekerがどの箱を調べたのか知ることができる。(ii) Quiet : 各回の終了後に、その回にSeekerがobjectを見つけたときのみ、Hiderはその回にSeekerがどの箱を調べたのか知ることができる。(iii) Very Quiet : 各回の終了後に、Hiderはその回にSeekerがどの箱を調べたのか知ることができない。文献 [8] はNoisyの場合を扱っている。

3. 1-Stage Game

本稿で扱うモデルは第2節で述べたモデルにおいて$\ell = 1$とした場合である。Accumulation Gameのバリエーションの中では解析が容易な方であるかもしれないが、Hiderの最適戦略を厳密に見つけるのは容易ではない。ゲームは1回で終了するので、終了後に、Seekerの行動についてHiderがどの程度知ることができるか、ということは解析上は重要ではない。このタイプのgameの値や最適戦略が存在することは既に知られている（文献[3]参照)。

さて、探索の対象となる箱の集合を$\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$としHiderは総量$h$の全部または一部を隠したい、とする。Hiderの戦略は$w = (w_1, \ldots, w_n)$を決めることである。ここにw_iは箱iに隠す量であり、

$$w_1 + \ldots + w_n \leq h, w_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n$$

である。一般性を失うことなく、$w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n$を仮定する。Seekerの戦略は$r$個の箱を選んでそれらを調べることである。Seekerが選んだ箱の集合を$R \subset \mathcal{N}$とするとHiderが勝つのは

$$w(\mathcal{N} \setminus R) \geq 1$$

のときである。ここに、$w(\mathcal{N} \setminus R) = \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus R} w_i$である。また、$n, h$および$r$はあらかじめ固定されている、とする。 $s = n - r$とおく。このゲームの値を$V(n, s, h)$と表すことにすると、これは両者が最適戦略をとっていると想定したときのHiderの勝つ確率である。ゲームに含まれる対称性により、Seekerはr個の箱をランダムに選んで調べることが1つの最適戦略である(文献[1],[2])。そうするとHiderは

$$|\{S : w(S) \geq 1, |S| = n - r = s\}| \tag{1}$$

が最大になるように$w = (w_1, \ldots, w_n)$を決めるという最適化問題を考えることになる。ここで、$|\bullet|$は集合に含まれる要素の個数を表す。このような$w = (w_1, \ldots, w_n)$が決まったならば、$w_1, \ldots, w_n$をランダムに入れ替えて隠すことがHiderの1つの最適戦略である。

4. ゲームの値

まず、$\frac{sh}{n} \geq 1$であればHiderは$w = (\frac{h}{n}, \ldots, \frac{h}{n})$を選ぶことにより確実に勝つことができる。一方、$h < 1$であればHiderは勝つことはできない。以降は、この2つの場合を除いて、

$$\frac{sh}{n} < 1 \text{ かつ } h \geq 1 \tag{2}$$

の場合を考えることにする。

定理1. ゲームの値$V(n, s, h)$はhについて非減少、nについて減少、sについて増加である。

次の2つの定理はゲームの値に対する上下限を検討したものである。

定理2. ゲームの値の上限と下限を次のように与えることができる。

$$1 - e^{-\frac{s\lfloor h \rfloor}{n}} < V(n, s, h) \leq \frac{\lfloor sh \rfloor}{n}$$

定理3. もしも、$n = 0 \mod s$または$n = 1 \mod s$であれば、$V(n, s, h) \leq \frac{s\lfloor h \rfloor}{n}$である。

5. Ruckle による Conjecture

次の conjecture は文献 [12] で与えられており量 (1) を最大にするような $w = (w_1, \ldots, w_n)$ の性質を予想している。

Ruckle's conjecture : For any parameter values n, r and h, it is optimal for the Hider to use $w = (w_1, \ldots, w_n)$ which consists of k equal positive components and $n - k$ components of 0, for some $k \leq n$.

例1 : $n = 6, r = 4$, かつ $\frac{5}{2} < h < 3$ とする。Hider の 1 つの最適戦略は $w = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を選びランダムに入れ替えて隠すことである。この場合、Ruckle's conjecture が $k = 5$ として成立している。この最適戦略においては Hider は h のすべてを隠す必要はないことに注意する。つまり、$h - 5 \times \frac{1}{2} > 0$ である。

例2 : $n = 5, r = 2$, かつ $h = \frac{3}{2}$ とする。Hider の 1 つの最適戦略は $w = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を選びランダムに入れ替えて隠すことである。ゲームの値は $V(5, 3, \frac{3}{2}) = \frac{7}{10}$ である。ここに、$\frac{s\lfloor h \rfloor}{n} = \frac{3}{5}$ かつ $\frac{\lfloor sh \rfloor}{n} = \frac{4}{5}$ である。Hider は h のすべてを隠している。

例えば、$r = 1$ および $r = n - 1$ の場合は conjecture が成り立つことが知られている（文献 [12] 参照)。

定理4. 次の場合は conjecture が成り立つ。

(i) $r = 2$ の場合；
(ii) $r = n - 2$ の場合；
(iii) $n \leq 7$ の場合；
(iv) $n = 2s - 1$ かつ $h \geq 2 - \frac{1}{s-1}$ の場合；
(v) $n = 2s + 1$ の場合；
(vi) $h < 2$ かつ $n = 0$ or $1 \mod s$；
(vii) $h \geq \frac{n-1}{s}$ かつ $n = 0 \mod s$.

次に、$\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathcal{N}}$ を $\mathcal{N}$ の部分集合族とする。$\mathcal{F}$ の任意の 2 つの要素が交わりをもつとき、$\mathcal{F}$ を intersecting family という。

定理5（文献 [5]）. $\mathcal{F} = \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq 2^{\mathcal{N}}$ が intersecting family でありかつすべての $\lambda \in \Lambda$ に対し $|F_\lambda| = s$ を満たすとする。もしも、$2s \leq n$ であれば、$|\Lambda| \leq \binom{n-1}{s-1}$ である。

この定理を応用して次の結果を得る。これと条件 (2)、定理4 (v) および (vi) との関連に注意されたい。

定理6. 次の場合は conjecture が成り立つ。

$$h \leq 2 + \frac{1}{s} \text{ and } n \geq 2s.$$

Proof: *Case 1:*$h < 2$ とする。$w = (w_1, \ldots, w_n)$ が最適戦略を与えるものであったとする。$S, T \subseteq \mathcal{N}$ に対し $w(S) \geq 1$ かつ $w(T) \geq 1$ とする。$S \cap T = \emptyset$ ならば、

$$2 > h \geq w(\mathcal{N}) \geq w(S) + w(T) \geq 1 + 1 = 2$$

となり矛盾である。ゆえに、$S\cap T\neq\emptyset$ である。よって、$\mathcal{F}=\{S:w(S)\geq 1,|S|=s\}$ とおくと、$\mathcal{F}$ は intersecting family である。定理5により、$|\mathcal{F}|\leq\binom{n-1}{s-1}$ である。Hider は戦略 $w'=(0,\ldots,0,1)$ をとることにより、$\mathcal{F}'=\{S:w'(S)\geq 1,|S|=s\}$ とすると、$|\mathcal{F}'|=\binom{n-1}{s-1}$ である。ゆえに、w' は最適戦略を与え、$k=1$ として conjecture が成り立つ。
Case 2:$h\geq 2$ とする。$w=(w_1,\ldots,w_n)$ が最適戦略を与えるものであったとする。$w_1\leq\ldots\leq w_n$ であるので、$w(S)\geq 1$ であるような S が存在するためには、$w_n\geq\frac{1}{s}$ である必要がある。もしも、$w_n=\frac{1}{s}$ であれば、定理の仮定により $h<2+w_n$ である。この場合、$w=(0,\ldots,0,\frac{1}{s},\ldots,\frac{1}{s})$ の形でなければならない。なんとなれば、$w(S)\geq 1$ ならば、$w_i=\frac{1}{s},i\in S$ であるからである。したがって、conjecture が $k=\lfloor hs\rfloor$ として成立する。
Case 3: $h\geq 2$ かつ $w_n>\frac{1}{s}$ のとき、$h\leq 2+\frac{1}{s}<2+w_n$ である。

$$\mathcal{F}'=\{S:n\notin S,w(S)\geq 1,|S|=s\}$$

とおく。$S\cap T=\emptyset,S,T\in\mathcal{F}'$ であれば

$$h\geq w(\mathcal{N})\geq w(S)+w(T)+w_n\geq 2+w_n>h,$$

となり矛盾である。ゆえに、$S\cap T\neq\emptyset$ であり、$\mathcal{F}'$ は intersecting family である。よって定理5より $|\mathcal{F}'|\leq\binom{n-2}{s-1}$ である。一方、$|\{S:n\in S,|S|=s\}|=\binom{n-1}{s-1}$ である。よって、$w(S)\geq 1,|S|=s$ なる S の個数の上限は

$$\binom{n-2}{s-1}+\binom{n-1}{s-1}=\binom{n}{s}-\binom{n-2}{s}$$

である。これは、$w'=(0,\ldots,0,1,1)$ のときの $w'(S)\geq 1,|S|=s$ を満たす S の個数に等しい。よって、この w' は $k=2$ として conjecture を成立させる。□

6. おわりに

(i) ここで扱った 1-stage game に類似のゲームとして例えば文献 [4] を参照されたい。

(ii) Conjecture を証明することは open problem である。

(iii) 第2節で述べたモデルにおいて、$\ell\geq 2$ とした場合は今後の検討課題である。ただし、$\ell=1$ の場合でも Hider の最適戦略やゲームの値が得られていないので、$\ell\geq 2$ の場合は最適戦略やゲームの値を予想するためにシミュレーションを行うことも有効であるかもしれない。

(iv) 第2節で述べたモデルにおいて、$\ell=2$ とした場合、1回目の行動の後、Hider が相手の行動についてどの程度の情報を得るかによって、最適戦略やゲームの値が変わってくる可能性があるので、それらを調べることは今後の検討課題である。文献 [11] 参照。

(v) Hoeffding's problem（文献 [6]、[7]、[9] 参照）：α が与えられているとき、$\mathbb{E}[X_i]=\alpha$ を満たすような i.i.d. 確率変数で、確率 $\mathbb{P}(X_1+X_2+\ldots+X_s\geq 1)$（tail probability）を最大にするようなものを求めよ。この問題に関連して次の定理が知られている。

定理7（文献 [7]）. $s=2$ でかつ $2\alpha<1$ であれば、tail probability は $X_i\in\{0,\frac{1}{2}\}$ かまたは $X_i\in\{0,1\}$ によって最大化される。

これらと、本報告で扱った話題との関連（tail probability と Hider が勝つ確率）を調べることも今後の検討課題である。

参考文献

[1] S. Alpern and R.J. Fokkink (2008), *Accumulation games on graphs*, preprint.

[2] S. Alpern, R. Fokkink, K. Kikuta(2010), *On Ruckle's conjecture on accumulation games*, SIAM J. Control Optim. Volume 48, Issue 8, pp. 5073-5083.

[3] S. Alpern and S. Gal(2008), *A mixed-strategy minimax theorem without compactness*, SIAM J. Control Optim. Volume 26, pp. 1357-1361.

[4] V. J. Baston, F. A. Bostock and T. S. Ferguson (1989), *The number hides game*, Proc. Amer. Math. Soc. 107, No. 2 , pp. 437-447

[5] P. Erdös, C. Ko, R. Rado (1961),*Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 12, 313–320.

[6] W. Hoeffding (1955), *The extrema of the expected value of a function of independent random variables*, Ann. Math. Stat. 26, 268-275.

[7] W. Hoeffding, S.S. Shrikhande (1955), *Bounds for the distribution function of a sum of independent, identically distributed random variables*, Ann. Math. Stat. 26, 439–449.

[8] K. Kikuta, W. Ruckle (1997), *Accumulation games, Part 1: noisy search*, J. Optimiz. Th. Appl. 94, no. 2, 395-408.

[9] L.E. Meester (2008), *Extremal distributions for tail probabilities of sums of iid random variables on* [0,1], preprint, Arxive 0808.1669v1.

[10] D. Morris (1962), *The behaviour of the green acouchi (Myoprocta pratti) with special reference to scatter hoarding*, Proc Zool. Soc. Lond. 139, 701-732

[11] W. Ruckle (1983), *Geometric games and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics 82, Boston.

[12] W. Ruckle (2001), *Accumulation games*, Sci. Math. Jpn. 54, no. 1, 173–203.