数理解析研究所講究録
第 1736 巻 2011 年 147-160

相互相関を考慮した最適なポートフォリオ選択に関する一考察*

中央大学大学院国際会計研究科・石島 博 (Hiroshi Ishijima)
Graduate School of International Accounting
Chuo University
JP モルガン・アセット・マネジメント株式会社・内田 正樹 (Masaki Uchida)
JPMorgan Asset Management (Japan) Ltd.

概 要

本論文では, ラグ付きの自己・相互相関リスクを考慮した, 資産価格に関する時系列モデルを用いて行う, 最適な対数平均分散ポートフォリオによる資産運用方法について提案を行い, その有効性を実証する. また, $V@R$ (Value-at-Risk) を資産運用ポートフォリオのリスク管理指標に採用する場合, ラグ付きの相互相関リスクを考慮すると, 事後的にも上手く機能することを示す.

1 はじめに

わが国においても, 国際財務報告基準 (IFRS) の導入が本格化しようとしている. IFRS においては, 企業年金の運用損益 (より正確には, 年金資産と負債 (退職給付債務) の差額がマイナスである場合に, その積立不足額) を即時オンバランスすることが要求される. したがって, 年金運用の巧拙は言うまでもなく, そのリスク管理の方法も, これまで以上に母体企業の価値にクリティカルに影響を及ぼすこととなる.

そうなると, 運用ポートフォリオを構築したり, リスク管理を行うタイミングは, 年次ベースとなろう. 一方で, これらを行うに際して, 年次よりも短い, 月次・週次・日次といった離散時点で観測されるデータを用いることが多い. 加えて, 実務上は, 独立で同一の分布に従うことが仮定された資産価格モデルを用いることが多い. このような前提で運用ポートフォリオの構築やそのリスク管理を行って, 年次のリスク量を過小に見誤ることが, しばしば起こりうる. その要因の 1 つとして考えられるのは, 資産価格のラグ付きの自己相関リスク, および, 資産価格間のラグ付きの相互相関リスクである.

このような背景と問題意識の下, 本研究では, ラグ付きの自己・相互相関リスクを考慮した資産価格のモデル化を行う. その上で, 企業年金をはじめとして, 中長期的な資産運用という目的に適合した, 動的な対数平均分散ポートフォリオによる資産選択方法を提案する. また, 提案方法の有効性を実証する分析を行う.

本論文は, 以下のように構成される. 第 2 節において, 本研究の問題意識をより明瞭にすべく, 資産価格におけるラグ付きの自己相関リスクの存在を明らかにする. 第 3 節において, 資産価格間の

*平成 22 年度 数理解析研究所／科学研究費補助金 研究集会 ファイナンスの数理解析とその応用 (Financial Modeling and Analysis 2010) を主催された北海道大学の木村俊一先生をはじめとする先生方, またコメントを頂戴した出席者の方々に感謝いたします.

ラグ付き相互相関リスクを考慮したモデルを提案する. その上で, 中長期的な資産運用の目的に適合した, 対数平均分散ポートフォリオ選択の定式化を行うとともに, その解法について述べる. 第4節において, その有効性を, わが国の資産運用に関する実証分析を通じて明らかにする. 第5節において, 結論と今後の研究について述べる.

2 資産価格における自己相関リスク

資産価格における自己相関リスクを考慮しうる, 単純なリターンのモデルを取り上げる. ある1つの危険資産が離散時点 $t = 0, 1, \ldots, T$ で取引されているとする. 時点 $t-1$ と時点 t ではさまれた時間間隔を期間 t と呼ぶ. 期間 t におけるリターンが次のような, ラグ付きの自己相関リスクを考慮した資産価格モデルで表現されるとする.

$$R_t = \mu + \sum_{k=0}^{p} \lambda(k)\, \tilde{\varepsilon}_{t-k} \tag{2.1}$$

ただし, リターンを駆動する $\tilde{\varepsilon}_{t-k}$ について, $\tilde{\varepsilon}_{t-k} \sim_{I.I.D.} \mathcal{N}_1(0,1)$ であるとする. このとき, リターンの期待値, 分散, および相互相関は次のように与えられる.

$$\text{期待値} \;:\; E[R_t] = \mu, \tag{2.2}$$

$$\text{分散} \;:\; V[R_t] = \sum_{k=0}^{p} (\lambda(k))^2 =: \sigma(0), \tag{2.3}$$

$$\text{相互相関}: \; Cov(R_t, R_{t-l}) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{p-l} \lambda(l+k)\, \lambda(k) =: \sigma(l) & (l = 1, \ldots, p) \\ 0 & (l = p+1, \ldots) \end{cases} \tag{2.4}$$

したがって, (2.1) 式は, ラグ付きの自己相関構造をもたらすリターンの表現になっていることが分かる. また, (2.4) 式より, 共分散は時点 t に依存せず, ラグ l の関数になっているため, (2.1) 式は定常であり, ARMA モデルに属する (Hamilton, 1994). さらに, 次のように, (2.1) 式と等価な表現をすることができる.

$$R_t = \mu + \varepsilon_t \tag{2.5}$$

ただし, リターンを駆動する ε_t について, $\varepsilon_t \sim_{I.I.D.} \mathcal{N}_1(0, \sigma(0))$ であるとする. このとき, リターンの期待値, 分散, および相互相関は次のように与えられる.

$$\text{期待値} \;:\; E[R_t] = \mu, \tag{2.6}$$

$$\text{分散} \;:\; V[R_t] = \sigma(0), \tag{2.7}$$

$$\text{相互相関}: \; Cov(R_t, R_u) = \sigma(t-u) \;\; (t > u) \tag{2.8}$$

上記のモデルに従う資産価格について, その年次のリスクを捉えることを考える. その期首を $t = 0$, 期末を $t = T = 12$ ヶ月後とする. このとき, 向こう $T = 12$ ヶ月, つまり, 年次のリターンを

$r_T := \sum_{t=1}^{T} R_t$ と書く．このとき，年次のリターンは，1 次元正規分布に従い，その期待値と分散は次のように与えられる．

$$m_T = E[r_T] = \mu \cdot T . \tag{2.9}$$

$$v_T = V[r_T] = \sum_{t=1}^{T}\sum_{u=1}^{T} \sigma(t-u) . \tag{2.10}$$

(2.10) 式において，「自己相関がない」と仮定する．つまり，$t \neq u$ のとき，$\sigma(t-u) = 0$; $t = u$ のとき，$\sigma(0) =: \sigma^2$ を仮定すれば，年次の分散は次式で与えられる．

$$v_T(0) := \sigma^2 \cdot T = 12\sigma^2 . \tag{2.11}$$

(2.11) 式は，いわゆる $\sqrt{T}$ 則を表している．つまり，自己相関を「考慮しない」とき，月次のリターンで計算する分散 σ^2 の $T = 12$ 倍が，年次の分散となる; 換言すれば，月次のボラティリィティ σ の $\sqrt{12}$ 倍が，年次のボラティリィティとなることを表している．

一方，自己相関を「考慮する」場合の最も単純なルールとして，ラグ $t-u$ に依らず一定の自己相関，つまり，$t \neq u$ のとき，$\sigma(t-u) = \rho \cdot \sigma^2$; $t = u$ のとき，$\sigma(0) = \sigma^2$ とおけば，年次の分散は，(2.10) 式より，

$$v_T(\rho) := \sigma^2 \cdot T \cdot (1 + (T-1)\rho) = \sigma^2 (12 + 132\rho) . \tag{2.12}$$

と与えられる．つまり，一定の自己相関を仮定すれば，月次の分散を 12 倍するのではなく，$12+132\rho$ 倍する; あるいは，月次のボラティリティを $\sqrt{12}$ 倍するのではなく，$\sqrt{12+132\rho}$ 倍すればそれぞれ，年次の分散とボラティリティへと変換できるのである．

この，$\sqrt{12+132\rho}$ 則を適用して，月次のリターン・データから計算したボラティリティを，年次ベースのボラティリティへ変換した結果を，表 1 に示す．比較のために，$\sqrt{12}$ 則を用いた結果も示す．

$\sqrt{12}$ 則に比べて，$\sqrt{12+132\rho}$ 則によって月次リスクを年次リスクに変換した方が，年次データより直接に求めた年次リスクを近似していることが分かる．したがって，資産価格にはラグ付きの自己相関リスクが存在する可能性があると言えよう．

3 相互相関リスクを考慮した最適なポートフォリオ選択

通常，ポートフォリオ選択は，「ラグをゼロ」とした資産間の相互相関リスクを考慮して，ポートフォリオのリスクとリターンのトレード・オフを，最適に制御することを目的とする．本研究では，前節での結果を踏まえ，この「ラグをゼロ」とした資産間の相互相関リスクに加えて，「ラグ付き」の相互相関リスクに着目する．このようなリスクの存在下で，ポートフォリオ選択方法が備えるべき要件は 2 つある．

第1に, 運用ポートフォリオについて, 1運用年度のリスクをコントロールできなければならない. IFRSが本格導入されることと相まって, 企業年金等のリスク管理は年次ベースで行われるからである. したがって, これと整合的なポートフォリオ選択が必要とされよう.

第2に, 企業年金等の運用は中長期にわたって行われるため, その中長期的な目的に合ったリスク・リターン指標を最初に定義した上で, それらのトレード・オフを最適に制御するようなポートフォリオ選択でなければならない.

つまり, 相反するように思える2つの要件, つまり, 短期的ともいえる年次のリスク制御・管理が可能であって, かつ, 中長期的なリスク・リターンのトレード・オフの制御ができるポートフォリオ選択モデルが必要なのである. 以下に, その両方を備えた選択モデルを提案する.

3.1 ラグ付きの相互相関リスクを考慮した資産価格モデル

n 個の危険資産が離散時点 $t = 0, 1, \ldots, T$ で取引されているとする. 時点 $t-1$ と時点 t ではさまれた時間間隔を期間 t と呼ぶ. その期間のリターンが, ラグ付きの自己相関リスクを考慮した資産価格モデルで表現されるとする.

$$\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{k=0}^{p} \boldsymbol{\Lambda}(k)\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-k} \tag{3.1}$$

ただし, リターンを駆動する $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-k}$ について, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-k} \sim_{I.I.D.} \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ であるとする. このとき, リターンの期待値, 分散, および相互相関は次のように与えられる.

$$\text{期待値} \quad : \ E[\boldsymbol{R}_t] = \boldsymbol{\mu}, \tag{3.2}$$

$$\text{分散} \quad : \ V[\boldsymbol{R}_t] = \sum_{k=0}^{p} \boldsymbol{\Lambda}(k)\, \boldsymbol{\Lambda}'(k) =: \boldsymbol{\Sigma}(0), \tag{3.3}$$

$$\text{相互相関} : \ Cov(\boldsymbol{R}_t, \boldsymbol{R}_{t-l}) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{p-l} \boldsymbol{\Lambda}(l+k)\, \boldsymbol{\Lambda}'(k) =: \boldsymbol{\Sigma}(l) & (l = 1, \ldots, p) \\ \mathbf{O} & (l = p+1, \ldots) \end{cases} \tag{3.4}$$

したがって, (3.1) 式は, 資産間のラグ付きの相互相関構造をもたらすリターンの表現になっていることが分かる. また, (3.4) 式より, 共分散は時点 t に依存せず, ラグ l の関数になっているため, (3.1) 式は定常であり, いわゆるARMAモデルに属する (Hamilton, 1994). さらに, (3.1) 式と等価な表現を, 次式のようにすることができる.

$$\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{3.5}$$

ただし, リターンを駆動する $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ について, $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim_{I.I.D.} \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}(0))$ であるとする. このとき, リターンの期待値, 分散, および相互相関は次のように与えられる.

$$\text{期待値} \quad : \ E[\boldsymbol{R}_t] = \boldsymbol{\mu}, \tag{3.6}$$

$$\text{分散} \quad : \ V[\boldsymbol{R}_t] = \boldsymbol{\Sigma}(0), \tag{3.7}$$

$$\text{相互相関} : \ Cov(\boldsymbol{R}_t, \boldsymbol{R}_u) = \boldsymbol{\Sigma}(t-u) \ \ (t > u) \tag{3.8}$$

ここで, (3.7) 式で表される分散は対称行列であるが, (3.8) 式で表される相互相関は非対称行列であることに注意する. ただし,

$$\mathbf{\Sigma}(t-u) = \mathbf{\Sigma}'(u-t) = \mathbf{\Sigma}'(-(t-u)) \tag{3.9}$$

が成立することに注意する.

3.2 対数平均分散ポートフォリオ

さて, 期間 $t = 1, \ldots, T$ の期首において, ポートフォリオを構築するとする. これを特徴づける各資産への投資金額比率, つまりウェイトを $\boldsymbol{w}_t$ と書き, その実行可能領域 $\mathbf{D}$ を次のように定める.

$$\mathbf{D} := \left\{ \boldsymbol{w}_t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \boldsymbol{w}_t'\mathbf{1} = 1,\ \boldsymbol{w}_t \geq \mathbf{0} \right\} \tag{3.10}$$

このとき, 期間 t におけるポートフォリオの収益率 R_t^P は,

$$R_t^P = \boldsymbol{w}_t'\boldsymbol{R}_t = \boldsymbol{w}_t'\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{w}_t'\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{w}_t'\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{w}_t'\sum_{k=0}^{p}\mathbf{\Lambda}(k)\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-k} \tag{3.11}$$

その対数収益率は, 対数線形近似 (Campbell and Viceira, 2002) より,

$$r_t^P = \left(R_t^P\right) - \frac{1}{2}\left(R_t^P\right)^2 = \boldsymbol{w}_t'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_t'\mathbf{\Sigma}(0)\,\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{w}_t'\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{3.12}$$

ここで, 「運用年度 τ」を, $\tau := \lceil \frac{t}{L} \rceil$ $(\tau = 1, \ldots, \lceil \frac{T}{L} \rceil)$ と定義する. 離散時点が, 月次であれば $L = 12$, 週次であれば $L = 52$, 日次であれば $L = 365$ とする. このとき, 運用年度 τ におけるポートフォリオの対数リターンは,

$$r_\tau^P = \sum_{t=L\cdot(\tau-1)+1}^{L\cdot\tau} r_t^P\ , \tag{3.13}$$

と書ける. そして, 運用年度 τ を通じたポートフォリオの対数リターンの期待値と分散はそれぞれ, 次のように与えられる.

$$E\left[r_\tau^P\right] = \sum_{t=1}^{L}\boldsymbol{w}_t'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_t'\mathbf{\Sigma}(0)\,\boldsymbol{w}_t\ , \tag{3.14}$$

$$V\left[r_\tau^P\right] = \sum_{t=1}^{L}\sum_{u=1}^{L}\boldsymbol{w}_t'\mathbf{\Sigma}(t-u)\,\boldsymbol{w}_u\ . \tag{3.15}$$

(3.14) と (3.15) 式をそれぞれ, 運用年度 τ の「対数平均」と「対数分散」と呼ぶこととする.

さて, 運用年度 τ のポートフォリオ戦略は, その運用年度中のウェイトを固定とする戦略, つまり「固定ウェイト戦略」が最適である. その理由は次の通りである. 運用年度 τ の期待成長率, つまり対数平均を最大化するためには, これを表す (3.14) 式の和の中を最大化すれば良い. つまり, 運用年度 τ を通じて同じ戦略, つまり固定ウェイト戦略をとることが最適となる.

また, 中長期的な運用を行う年金基金などの経済主体にとって, 対数平均と対数分散に着目して, そのトレードオフを最適に制御する「対数平均分散モデル (log-mean variance model)」は, 経済学的にも妥当であることが, Luenberger (1993, 1997) によって示されている. 本モデルは, Kelly (1956) により, 情報理論に基づいて提案されたものであり, その後も, この分野における研究は盛んである (Breiman, 1961; Cover and Thomas, 2006). 一方, ファイナンス分野においても, その有効性について, 理論と実証の両側面より, Hakansson (1971) や Roll (1973) らによって議論され始めた. そして, 資産運用実務への応用の成功例も喧伝されている (Thorp, 1971; Patterson 2010). さらに, 本モデルは, 動的ポートフォリオ選択問題に用いることができるだけでなく, numéraire (価値尺度財) として機能し, オリジナルの確率測度の下で, 資産価格評価に用いることができる (Long, 1990; Platen and Heath, 2006).

(3.14) と (3.15) 式において,

$$\boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{w}_\tau = \text{固定ウェイト戦略} \ \ (t = L\cdot(\tau-1)+1,\ldots,L\cdot\tau)$$

とおいた対数平均と対数分散をそれぞれ, ポートフォリオのリターン指標 m_τ^{S-LMV} とリスク指標 v_τ^{S-LMV} とする:

$$m_\tau^{S-LMV} = \left(\boldsymbol{w}_\tau'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_\tau'\boldsymbol{\Sigma}(0)\boldsymbol{w}_\tau\right)L\,, \tag{3.16}$$

$$v_\tau^{S-LMV} = \boldsymbol{w}_\tau'\left(\sum_{t=1}^{L}\sum_{u=1}^{L}\boldsymbol{\Sigma}(t-u)\right)\boldsymbol{w}_\tau\,. \tag{3.17}$$

したがって, 相互相関リスクを考慮した, 最適な対数平均分散ポートフォリオ (S-LMV) を得るための定式化は, 以下の問題 $\mathbf{P}^{S-LMV}$ として表すことができる.

$$\left[\mathbf{P}^{S-LMV}\right]\left|\begin{array}{ll}\underset{\boldsymbol{w}_\tau}{\text{maximize}} & m_\tau^{S-LMV}\\ \text{subject to} & v_\tau^{S-LMV} = \text{ターゲット対数分散}\\ & \boldsymbol{w}_\tau \in \mathbf{D}\end{array}\right. \tag{3.18}$$

3.3 相互相関リスクの分解と対数平均分散ポートフォリオの解法

(3.17) 式の v_τ^{S-LMV} は, 運用年度 τ における, ラグ付き相互相関を考慮したポートフォリオのリスクを表し, 次のように, 2 つの要因に分解できる.

$$v_\tau^{S-LMV} = \boldsymbol{w}_\tau'\boldsymbol{\Sigma}(0)\boldsymbol{w}_\tau\cdot L + \boldsymbol{w}_\tau'\left(\sum_{t=1}^{L}\sum_{\substack{u=1\\u\neq t}}^{L}\boldsymbol{\Sigma}(t-u)\right)\boldsymbol{w}_\tau = \boldsymbol{w}_\tau'\boldsymbol{\Sigma}(0)\boldsymbol{w}_\tau\cdot L + \boldsymbol{w}_\tau'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{w}_\tau \tag{3.19}$$

第 1 項の要因は, 「ラグをゼロ」とした資産間の相互相関リスクである. 第 2 項の要因は, 「ラグ付き」の相互相関リスクである. その対応する「ラグ付きの相互相関行列」を次のように表す.

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} := \left(\sum_{t=1}^{L}\sum_{\substack{u=1\\u\neq t}}^{L}\boldsymbol{\Sigma}(t-u)\right)\,. \tag{3.20}$$

さて, 上述のように分解される相互相関リスクの表現を踏まえて, 問題 $\mathbf{P}^{S-LMV}$ の効率的な解法を述べる. まず, 次のような問題 $\mathbf{P}^{MV}$ を考える.

$$
[\mathbf{P}^{MV}] \left| \begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{w}_\tau}{\text{minimize}} & v_\tau^{MV} := \boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\Sigma}(0) \boldsymbol{w}_\tau \cdot L \\ \text{subject to} & m_\tau^{MV} := \boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\mu} \cdot L = \text{ターゲット平均} \\ & \boldsymbol{w}_\tau \in \mathbf{D} \end{array} \right. \tag{3.21}
$$

ここで, 問題 $\mathbf{P}^{MV}$ における, ポートフォリオのリターン指標 m_τ^{MV} とリスク指標 v_τ^{MV} をそれぞれ, 以下のように表す.

$$
m_\tau^{MV} = \boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\mu} \cdot L \,, \tag{3.22}
$$

$$
v_\tau^{MV} = \boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\Sigma}(0) \boldsymbol{w}_\tau \cdot L \,. \tag{3.23}
$$

問題 $\mathbf{P}^{MV}$ は, 運用年度 τ のある 1 期間 t $(t = L \cdot (\tau - 1) + 1, \ldots, L \cdot \tau)$ におけるポートフォリオの平均と分散のトレードオフを制御する, いわゆる Markowitz の最適な平均分散ポートフォリオを求めるための問題である. この分散においては, 「ラグをゼロ」とした資産間の相互相関リスクのみが考慮されている. さらに, 次のような問題 $\mathbf{P}^{LMV}$ を考える.

$$
[\mathbf{P}^{LMV}] \left| \begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{w}_\tau}{\text{maximize}} & m_\tau^{LMV} := \left(\boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\Sigma}(0) \boldsymbol{w}_\tau\right) \cdot L = m_\tau^{MV} - \frac{1}{2} v_\tau^{MV} \\ \text{subject to} & v_\tau^{LMV} := \boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\Sigma}(0) \boldsymbol{w}_\tau \cdot L = v_\tau^{MV} \\ & \qquad = \text{ターゲット対数分散} \\ & \boldsymbol{w}_\tau \in \mathbf{D} \end{array} \right. \tag{3.24}
$$

ここで, 問題 $\mathbf{P}^{LMV}$ における, ポートフォリオのリターン指標 m_τ^{LMV} とリスク指標 v_τ^{LMV} をそれぞれ, (3.22) と (3.23) 式を用いて, 以下のように表す.

$$
m_\tau^{LMV} := \left(\boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\Sigma}(0) \boldsymbol{w}_\tau\right) \cdot L = m_\tau^{MV} - \frac{1}{2} v_\tau^{MV} \,, \tag{3.25}
$$

$$
v_\tau^{LMV} := \boldsymbol{w}_\tau' \boldsymbol{\Sigma}(0) \boldsymbol{w}_\tau \cdot L = v_\tau^{MV} \,. \tag{3.26}
$$

問題 $\mathbf{P}^{LMV}$ は, 運用年度 τ の全体を通じた, 対数平均と対数分散のトレードオフを制御する, 最適な平均分散ポートフォリオを求めるための問題である.

上記の 3 つの問題を解くことによって得られる 3 つの有効フロンティアをそれぞれ, ε^{MV}, ε^{LMV}, および ε^{MV} とする. これらの関係を視覚化したものを図 1 に示す.

(ステップ 1) 問題 $\mathbf{P}^{MV}$ を解くことにより, まず, 平均分散の有効フロンティア ε^{MV} が得られる.

(ステップ 2) この平均分散の有効フロンティア ε^{MV} をたて軸方向に, いわゆる Luenberger のボラティリティ・ポンピング項 (volatility pumping) $\frac{1}{2} v_\tau^{MV}$ だけ調整したものが, 対数平均分散の有効フロンティア ε^{LMV} である. 有効フロンティア ε^{MV} と ε^{LMV} では, ラグ付きの相互相関リスクは考慮されていない.

(ステップ 3) 最後に, 対数平均分散の有効フロンティア ε^{LMV} を横軸方向に, 「ラグ付き」の相互相関リスク $\boldsymbol{w}_\tau' \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{w}_\tau$ だけ調整したものが, これを考慮した対数平均分散の有効フロンティア ε^{S-LMV} である.

上記の3つのステップを経て, ラグ付きの相互相関リスクを考慮した, 対数平均分散の有効フロンティア ε^{S-LMV} を効率的に描くことができる. この3つのステップは, (ステップ 2) までを提案した Konno et al. (1993) の先行研究を, ラグ付きの相互相関リスクを導入することによって拡張するものである.

(3.18) 式で表される問題 $\mathbf{P}^{S-LMV}$ における対数リターン m_τ^{S-LMV} の範囲は, $\underline{m}^{LMV} \leq m_\tau^{S-LMV} \leq \bar{m}^{LMV}$ で与えられる. ここに,

$$
\begin{aligned}
\underline{m}^{LMV} &= \left(\boldsymbol{w}_\tau^{*\prime}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_\tau^{*\prime}\boldsymbol{\Sigma}(0)\,\boldsymbol{w}_\tau^{*}\right)\cdot L, \\
& \quad s.t.\ \boldsymbol{w}_\tau^{*} = \arg\min_{\boldsymbol{w}_\tau}\left\{v_\tau^{MV} = \boldsymbol{w}_\tau'\boldsymbol{\Sigma}(0)\,\boldsymbol{w}_\tau\cdot L\,|\boldsymbol{w}_\tau\in\mathbf{D}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{m}^{LMV} &= \left(\boldsymbol{w}_\tau^{\sharp\prime}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_\tau^{\sharp\prime}\boldsymbol{\Sigma}(0)\,\boldsymbol{w}_\tau^{\sharp}\right)\cdot L, \\
& \quad s.t.\ \boldsymbol{w}_\tau^{\sharp} = \arg\max_{\boldsymbol{w}_\tau}\left\{m_\tau^{LMV} = \left(\boldsymbol{w}_\tau'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_\tau'\boldsymbol{\Sigma}(0)\,\boldsymbol{w}_\tau\right)\cdot L\,|\boldsymbol{w}_\tau\in\mathbf{D}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

(3.27) 式における $\boldsymbol{w}_\tau^{*}$ は, リスク最小ポートフォリオ (MVP: minimum variance portfolio), (3.28) 式における $\boldsymbol{w}_\tau^{\sharp}$ は, 最適成長ポートフォリオ (GOP: growth optimal portfolio) である.

4 実証分析

本節では, ラグ付きの相互相関リスクを考慮してポートフォリオ選択を行うメリットを, わが国の資産運用に関する実証分析を通じて明らかにする.

ポートフォリオへの組み入れ資産は, 国内株式 (MSCI Japan Net 指数, 円建て), 国内債券 (野村 BPI の総合指数, 円建て), 外国株式 (MSCI Kokusai Net Index, ドル建てを円換算), 外国債券 (WGBI Non JPY, 円建て) の4資産とする.

この4つの資産について, 1971年2月から2010年3月までの470の月次のリターンに関するデータを用いることとした.

採用したポートフォリオ戦略は, 対数平均分散の有効フロンティアの両端を構成する, 最適成長ポートフォリオ (GOP) とリスク最小ポートフォリオ (MVP) という2つのポートフォリオである.

4.1 運用パフォーマンス計測

GOP と MVP というこの2つのポートフォリオの運用パフォーマンスを追跡する期間として, 以下の2つの分析期間を用意した.

分析期間 A: 1971年2月から2010年3月まで.

分析期間 B: 2008 年 9 月から 2010 年 3 月まで.

とした. 分析期間 A には, 利用可能なすべてのデータを, 分析期間 B には, 2008 年の金融危機「以降」のデータのみ含んでいる. 2 つのサンプル期間を設けたのは, 金融危機前後で分析結果に違いがあるかを検討するためである.

分析期間 A と B のそれぞれにおいて, 4 つの資産の月次リターンより, 期待リターン $\boldsymbol{\mu}$, ラグをゼロとした相互相関リスク $\boldsymbol{\Sigma}(0)$, および, ラグ付きの相互相関リスク $\boldsymbol{\Sigma}(t-u)$ $(t > u)$ を推定する. その推定の際に用いるデータについて, 次の 2 つのウィンドウを用いる.

moving window: その時点での直近 60ヶ月のリターンを用いる.

expanding window: その時点で利用可能なリターンをすべて用いる.

このとき, GOP と MVP の 2 つのポートフォリオの運用パフォーマンスについて, 次のように調べることにする. 問題 $\mathbf{P}^{S-LMV}$ (3.18) を解いて得られる, ラグ付き相互相関リスクを「考慮する」GOP と MVP と, 問題 $\mathbf{P}^{LMV}$ (3.24) を解いて得られる, ラグ付き相互相関リスクを「考慮しない」GOP と MVP のそれぞれを, 1 年間運用して 12 個の月次対数リターンを得る. これを分析期間にわたって繰り返す. その上で, それらの運用対数リターンの平均, 標準偏差, およびそのリターン・リスク比率を比較する. 分析期間 A と B における結果をそれぞれ, 表 2 と 3 に示す.

GOP と MVP のいずれも, 事後パフォーマンスは, ラグ付きの相互相関リスクを考慮する方が, 断然, 良くなる. 特に, 分析期間 A の GOP に効果が認められる. また, expanding window を, つまり, 利用可能なすべてのデータを用いて, パラメータを推定した方が, パフォーマンスが良いことが多い.

事後的には, GOP に比べて, MVP の方がパフォーマンスが良くなる. GOP は最適成長を保証するものであり, 少なくても事前の意味では, その最適化がなされているので, 意外な結果とも言える. ただし, これは, インデック・ベースでの資産運用のパフォーマンス分析においての, 債券投資の優位性を示唆するものである. 個別銘柄ベースでの資産クラスの優位性に関する議論には, より詳細な実証分析が必要になるため, これは今後の研究において行いたい.

4.2 相互相関リスク存在下における運用ポートフォリオのリスク管理

運用ポートフォリオのリスク管理を $V@R$ (Value-at-Risk) によって行う際に, ラグ付きの相互相関リスクを考慮する意義を示すこととする. バリュー・アット・リスク $V@R_{1-\alpha}$ を, ある 1 運用年度 τ の期末に, 運用ポートフォリオの年次対数リターン r_τ^P が, $100 \times (1-\alpha)\%$ の確率で被り得る最大損失額と定義する. すなわち,

$$\Pr\left(r_\tau^P \leq V@R_{1-\alpha}\right) = \alpha \ ,$$

として定義する. このとき, ラグ付きの相互相関リスクを考慮した対数平均分散ポートフォリオの $V@R_{1-\alpha}$ は, (3.16) と (3.17) 式を用いて, 次のように計算することができる.

$$V@R_{1-\alpha}^{S-LMV} = m_\tau^{S-LMV} + v_\tau^{S-LMV}\Phi^{-1}(\alpha) \ . \tag{4.1}$$

一方, ラグ付きの相互相関リスクを考慮しない対数平均分散ポートフォリオの $V@R_{1-\alpha}$ は, (3.25) と (3.26) 式を用いて, 次のように計算できる.

$$V@R_{1-\alpha}^{LMV} = m_\tau^{LMV} + v_\tau^{LMV}\Phi^{-1}(\alpha) \ . \tag{4.2}$$

ただし, $\Phi()$ は標準正規分布の分布関数 (累積密度関数) を表す.

以下では, ラグ付きの相互相関を「考慮する」ときと「考慮しない」ときの, 95%バリュー・アット・リスク $V@R_{95\%}$ を事前に設定した上で, これが運用ポートフォリオのリスク管理指標としてうまく機能するかという観点より分析を行う.

分析期間 A において, 4 つの資産の月次のリターンを, 重なり合わない 12 個ずつ, つまり, 1 年ごとに区切る. この区切られた 1 年間は, 全部で 35 個 (年) 分だけあることになる. 各運用年度の期首において, 期待リターン $\boldsymbol{\mu}$, ラグをゼロとした相互相関リスク $\boldsymbol{\Sigma}(0)$, および, ラグ付きの相互相関リスク $\boldsymbol{\Sigma}(t-u)$ $(t > u)$ を推定する. そして, ラグ付きの相互相関リスクを「考慮する」ときと「考慮しない」ときの $V@R_{95\%}$ をそれぞれ, (4.1) と (4.2) 式を用いて, $\alpha = 0.05$, $\Phi^{-1}(0.05) = 1.645$, および推定されたパラメータを代入して, 事前に設定しておく.

その上で, 各運用年度の期首において構築するポートフォリオが生み出す, 12 個の月次対数リターンを, その運用年度の年次対数リターンへ変換する. 具体的には, $\tilde{r}_\tau^P = \sum_{t=12(\tau-1)+1}^{12\tau} r_t^P$ $(\tau = 1, \ldots, 35)$ とする. その 35 個の年次対数リターン $\{\tilde{r}_\tau^P\}$ が, 予め設定した $V@R_{95\%}^{S-LMV}$ や $V@R_{95\%}^{LMV}$ を下回った個数 $\#(S-LMV)$ や $\#(LMV)$ をカウントする. 例えば, 前者については, 定義関数:

$$\mathbf{1}_{\tilde{r}_\tau^P < V@R_{95\%}^{S-LMV}} = \begin{cases} 1 & (\tilde{r}_\tau^P < V@R_{95\%}^{S-LMV} \text{のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

により, 次のようにカウントする.

$$\#(S-LMV) = \sum_{\tau=1}^{35} \mathbf{1}_{\tilde{r}_\tau^P < V@R_{95\%}^{S-LMV}} \ .$$

そして, $100 \times \#(S-LMV) \div 35$ %という数値が, 予め設定した $\alpha = 5\%$ と大きな乖離がないかどうか調べることとする. 特に, ラグ付きの相互相関を「考慮しない」場合と「考慮する」場合とで, どのような結果の違いをもたらすかを分析した. 表 4 に結果を示す.

採用した 2 つのポートフォリオ戦略である GOP と MV のいずれについても, ラグ付きの相互相関リスクを考慮した場合, (4.1) 式によって事前設定した $V@R_{95\%}^{S-LMV}$ を下回る確率はほぼゼロとなった. 一方で, ラグ付きの相互相関リスクを考慮しない場合には, (4.2) 式によって事前設定した $V@R_{95\%}^{S-LMV}$ を下回る確率は, GOP と MV のいずれについても, 想定したよりも断然に大きくなり, 40 - 60 % にものぼるという, 驚愕の結果が得られた.

以上の結果より, $V@R$ によって運用ポートフォリオのリスク管理をする場合には, 単純に, ラグをゼロとした相互相関リスクのみを推定して用いるだけでは不十分であり, 事前に想定したレベルを下回る損失が約 50%の確率で起こりうることを示唆していると言えよう. このような $V@R$ に

よるリスク管理の実用上の欠点を補うための1つのハンディなアプローチとして, ラグ付きの相互相関リスクの推定値を用いることは有効であると考えられる.

5 結論と今後の研究

ラグ付きの自己・相互相関リスクを考慮した, 最も単純な資産価格に関する時系列モデルを用いて行う, 最適な対数平均分散ポートフォリオによる資産運用方法について提案を行い, その有効性を実証した. 特に, 最適成長ポートフォリオのパフォーマンスを大きく改善する可能性を示した. また, $V@R$ を資産運用ポートフォリオのリスク管理指標に採用した場合, ラグ付きの相互相関リスクを考慮した方が, 考慮しない場合に比べて断然に優れている, という結果を得た.

今後は, 相互相関リスクを考慮した対数平均分散ポートフォリオを用いて, 資産運用を行うメリットを, より広範な資産・銘柄に適用して, その有効性を調べたい.

また, 分析期間によって, ラグ付きの相互相関の強さが異なっている印象を持った. したがって, 市況・景気に応じて, ラグ付きの相互相関リスクの大きさがスイッチングすることを考慮できるレジーム・スイッチング・モデルを導入するなどして, 資産価格の時系列モデルと, それを踏まえたポーフォリオ戦略の精緻化を図りたい.

参考文献

[1] Breiman, L. (1961), "Optimal Gambling Systems for Favorable Games," *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, I, 65-78.

[2] Campbell, J.Y., and Viceira, L.M. (2002), *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Oxford University Press. See also its appendix which can be found at URL: http://kuznets.fas.harvard.edu/~campbell/papers.html.

[3] Cover, T.M. and Thomas, J.A. (2006), *Elements of Information Theory*, John Wiley & Sons.

[4] Hakansson, N.H. (1971), "Capital Growth and the Mean-Variance Approach to Portfolio Selection," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6(1), 517-557.

[5] Hamilton, J.D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.

[6] Kelly, J.L. (1956), "A New Interpretation of Information Rate," *Bell System Technical Journal*, 35, 917-926.

[7] Konno, H., Pliska, S. and Suzuki, K. (1993), "Optimal portfolio with asymptotic criteria," *Annals of Operations Research*, 45, 187-204.

[8] Long, J.B. (1990), "The Numeraire Portfolio," *Journal of Financial Economics*, 26, 29-69.

[9] Luenberger, D.G. (1993), "A Preference Foundation for Log Mean-variance Criteria in Portfolio Choice Problems," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, 887-906.

[10] Luenberger, D.G. (1997), *Investment Science*, Oxford University Press. (今野浩・枇々木規雄・鈴木賢一訳 (2002), 『金融工学入門』 日本経済新聞社.)

[11] Patterson, S. (2010), *The Quants: How a New Breed of Math Whizzes Conquered Wall Street and Nearly Destroyed It*, Crown Business. (永峯涼訳 (2010), 『ザ・クオンツ 世界経済を破壊した天才たち』 角川書店.)

[12] Platen, E. and Heath, D. (2006), *A Benchmark Approach to Quantitative Finance*, Springer.

[13] Roll, R. (1973), "Evidence on the "Growth-Optimum" Model," *Journal of Finance*, 28(3), 551-566.

[14] Thorp, E.O. (1971), "Portfolio Choice and the Kelly Criterion," *Proceedings of the 1971 Business and Economics Section of the American Statistical Association*, 215-224.

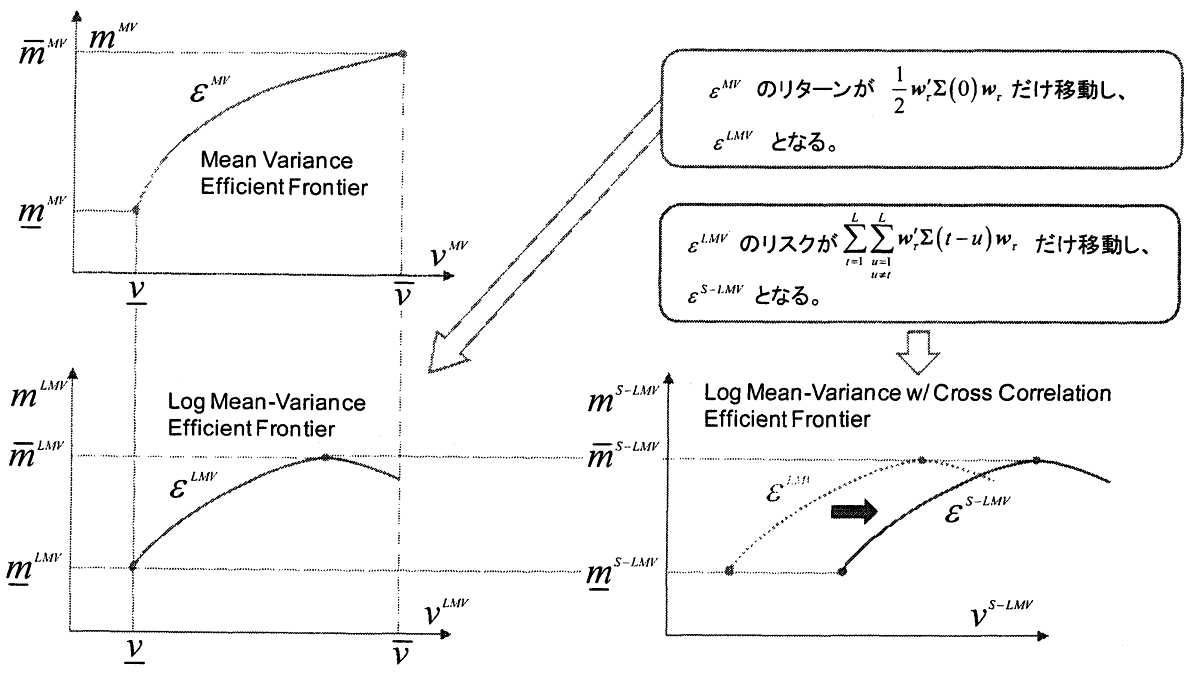

図 1: 3つの有効フロンティア. 問題 $\mathbf{P}^{MV}$ (3.21) の解として与えられる平均分散ポートフォリオ, 問題 $\mathbf{P}^{LMV}$ (3.24) の解として与えられる, ラグ付き相互相関リスクを「考慮しない」対数平均分散ポートフォリオ, および, 問題 $\mathbf{P}^{S-LMV}$ (3.18) の解として与えられる, ラグ付き相互相関リスクを「考慮する」対数平均分散ポートフォリオについての, 3つの有効フロンティアの比較したもの.

表 1: 月次リスクから変換する方法に応じてばらつく年次リスク.

1. 月次リターン・データの標準偏差 (%)	5.24%
2. 月次リターン・データから $\sqrt{12}$ 則によって換算した年次リスク (%)	18.17%
3. 月次リターン・データから $\sqrt{12+132\rho}$ 則によって換算した年次リスク (%)	26.47%
4. 年次リターン・データから求めた年次リスク (%)	31.06%

表 2: 分析期間 A における GOP と MVP のパフォーマンス比較. 4 つの資産の期待リターン $\boldsymbol{\mu}$, ラグをゼロとした相互相関リスク $\boldsymbol{\Sigma}(0)$, および, ラグ付きの相互相関リスク $\boldsymbol{\Sigma}(t-u)$ $(t>u)$ を推定する際に用いたサンプル・ウィンドウについて, 直近 60ヶ月の moving window を用いた場合には *W-60*, expanding window を用いた場合には *ALL* と表記する. この表記は, 表 3 と 4 でも用いる.

ポートフォリオ戦略	GOP				Minimum Variance			
サンプル・ウィンドウ	W-60		ALL		W-60		ALL	
ラグ付き相互相関	あり	なし	あり	なし	あり	なし	あり	なし
平均値 (年率%)	4.78%	4.68%	5.64%	4.91%	6.07%	5.48%	5.91%	5.61%
標準偏差 (年率%)	4.28%	16.58%	3.58%	17.62%	3.96%	3.52%	3.92%	3.44%
リターン・リスク比率	1.12	0.28	1.58	0.28	1.53	1.56	1.51	1.63

表 3: 分析期間 B における GOP と MVP のパフォーマンス比較.

ポートフォリオ戦略	GOP				Minimum Variance			
サンプル・ウィンドウ	W-60		ALL		W-60		ALL	
ラグ付き相互相関	あり	なし	あり	なし	あり	なし	あり	なし
平均値 (年率%)	-8.72%	-37.44%	-0.41%	-21.76%	1.56%	0.65%	1.30%	1.46%
標準偏差 (年率%)	6.78%	23.16%	3.33%	22.79%	2.15%	2.56%	2.48%	2.25%
リターン・リスク比率	-1.29	-1.62	-0.12	-0.95	0.72	0.25	0.52	0.65

表 4: $V@R$ によるリスク管理の分析結果. 運用ポートフォリオのリターンが, 予め設定した $V@R_{95\%}$ を下回る頻度が 5% 以下となるかを, ラグ付きの相互相関リスクの考慮が「あり」「なし」で, 結果に違いがでるかを分析したもの.

ポートフォリオ戦略	GOP				Minimum Variance			
サンプル・ウィンドウ	W-60		ALL		W-60		ALL	
ラグ付き相互相関	あり	なし	あり	なし	あり	なし	あり	なし
設定$V@R_{95\%}$を下回った回数 (#)	1	17	0	16	0	15	0	21
設定$V@R_{95\%}$を下回った割合 (%)	2.86%	48.57%	0.00%	45.71%	0.00%	42.86%	0.00%	60.00%